飛行機の安定

カルマン教授（講演）

飛行機の安定は、是を前後の安定と横の安定とに分けて考へる事が出來る。玆には、前後の安定に就てのみ述べる事とする。

安定には、靜的安定と動的安定があるが、飛行機に於ては、動的安定を得る爲めには靜的安定は絕對に必要のものである。尾翼無しの飛行機は靜的安定は得られるが、動的安定を得る事は困難である。

(1) 靜的安定

靜的に安定であるとは、飛行機の迎角が變化した場合に、操縱しないでも是を元に戾そうとする「モーメント」のある事である。

最初に、單葉機に就て論ずる事とする。使用する記號を豫め次の様に定めて置く。

F	翼の面積
t	翼弦の長さ
v	飛行速度
x_s, y_s	重心の座標
y_p	翼弦から「プロペラ」軸迄の高さ
C_a, C_w, C_m	揚力、抗力及「モーメント」の係數
q	岐點壓
f	尾翼の面積
l	尾翼の風壓中心から座標の原點迄の距離
C_l	尾翼の揚力係數
i	主翼の迎角
S	「プロペラ」の推力

座標の原點を、主翼の前縁かな翼弦に下した垂線と、翼弦の交點に置き、x 軸を飛行機の運動の方向に取る。

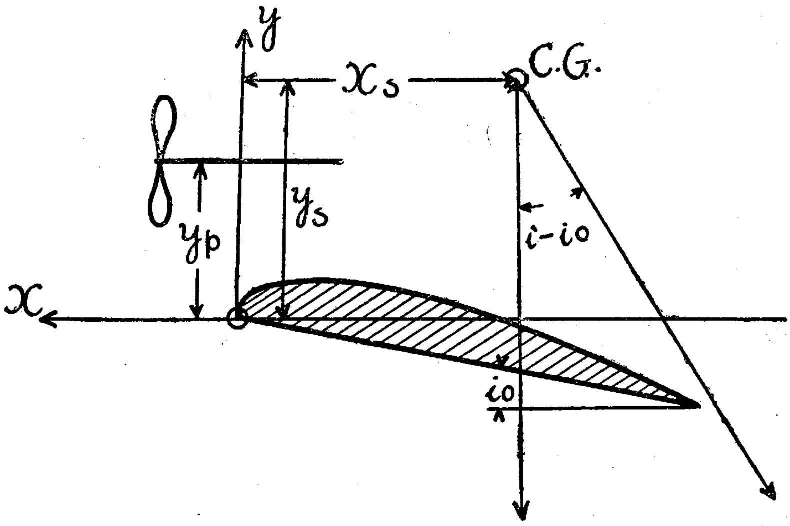
飛行機が或狀態に於て、舵を取らずに靜的釣合に在る時の迎角を i_0 とする。

先づ、水平飛行の場合に飛行機に働く力の原點の回りの「モーメント」を考へる。以下總て、頭が重い「モーメント」を正記號とする。

今飛行機の迎角が釣合の角 i_0 から i に變つたとすると

a) 風壓に依る「モーメント」M_L は

$$M_L = Fqt\,C_m \quad \cdots\cdots (1)$$



第 一 圖

b) 重力に依る「モーメント」M_G は

$$M_G = -G\{x_s \cos(i-i_0) + y_s \sin(i-i_0)\} \qquad \text{……………(2)}$$

c) 「プロペラ」の推力に依る「モーメント」M_p は

$$M_p = S\, y_p \qquad \text{……………(3)}$$

であつて、飛行機に働く力の水平及垂直の方向の釣合の式は

$$G = C_a q\, F + S \sin(i-i_0) \qquad \text{……………(4)}$$

$$S = \frac{FqC_w}{\cos(i-i_0)} \qquad \text{……………(5)}$$

である。

此値を (2) 及 (3) 式に入れゝば

$$M_G = -FqC_a t\left[\frac{x_s}{t}\cos(i-i_0) + \frac{y_s}{t}\sin(i-i_0)\right]$$

$$-FqC_w t\left[\frac{x_s}{t}\sin(i-i_0) + \frac{y_s}{t}\frac{\sin^2(i-i_0)}{\cos(i-i_0)}\right] \qquad \text{……………(6)}$$

$$M_p = FqC_w t.\frac{y_p}{t}\frac{1}{\cos(i-i_0)} \qquad \text{……………(7)}$$

となるから、結局飛行機に働く力の「モーメント」即ち (1) (2) 及 (3) 式の和は次の樣に書く事が出來る。

$$M=Fqt\Big[C_m-C_a\{\xi_s\cos(i-i_0)+\eta_s\sin(i-i_0)\}$$
$$-C_w\Big\{\xi_s\sin(i-i_0)+\eta_s\frac{\sin^2(i-i_0)}{\cos(i-i_0)}-\frac{\eta_p}{\cos(i-i_0)}\Big\}\Big]\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

茲に　$\xi=\frac{x}{t}$, $\eta=\frac{y}{t}$　である。

然るに、假定に依つて、飛行機は $i=i_0$ の場合に釣合つて居る、即ち $M=0$, でああるから、(8) 式に $i=i_0$ と置くと

$$M=Fqt(C_{m0}-C_{a0}\xi_s+\eta_p C_{w0})=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

となつて、是れから重心の前後の位置 ξ_s を決る事が出來る。即ち

$$\xi_s=\frac{x_s}{t}=\frac{C_{mo}+C_{w0}\eta_p}{C_{a0}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

茲に　C_{m0}, C_{a0}, C_{w0} は $i=i_0$ の時の夫々の値である。

次に (8) 式から、飛行機が釣合つて居ない場合に、是に働く力の「モーメント」を圖に表はして見る。其際次の略算式を用ふる。

$$\cos(i-i_0)=1,\quad \sin(i-i_0)=i-i_0.$$

然る時は、(8) 式は

$$\frac{M}{Fqt}=C_m-C_a\{\xi_s+\eta_s(i-i_0)\}$$
$$-C_w\{\xi_s(i-i_0)+\eta_s(i-i_0)^2-\eta_p\}\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

となる。

(11) 式の右側の各々の項の値を横軸に、揚力係數を縱軸に取つて、圖を書くと

(a)　C_m は、極圖表で與へられて居て、略 C_a に比例し、縱軸に約 1/4 の傾きを持つた直線となる。

(b)　$C_a\xi_s$ も亦、縱軸に $tan^{-1}\xi_s$ の傾きを持つた直線となる。

(c)　$C_a\eta_s(i-i_0)$ は C_a が $(i-i_0)$ に比例するから是は二次の抛物線となる。

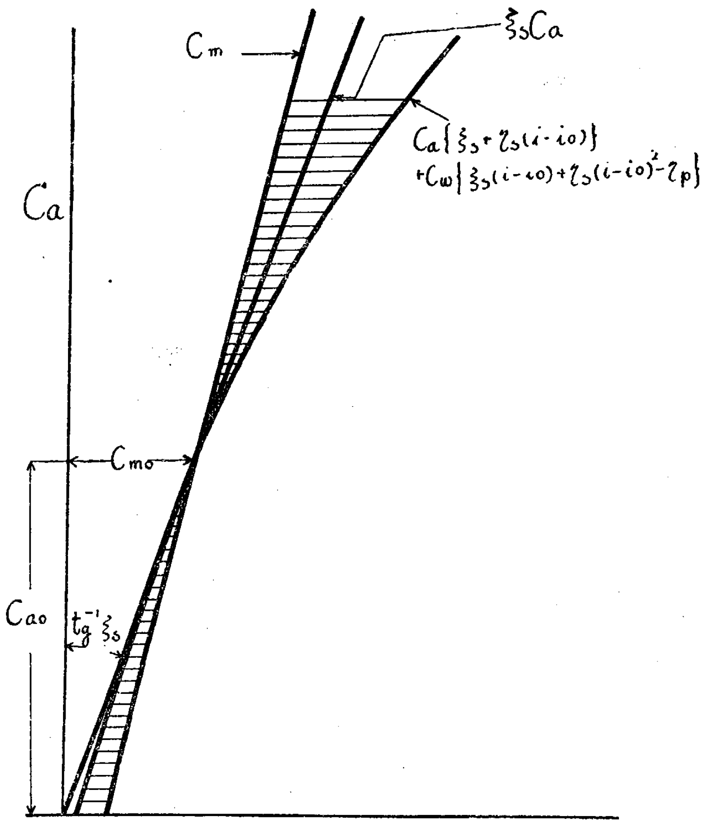
(d)　$C_w\{\xi_s(i-i_0)+\eta_s(i-i_0)^2-\eta_p\}$　は C_w 自身を次の様に

$$C_w=C'_w+\frac{\lambda}{\pi}C_a^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

有害抗力と誘導抗力の和として書く事が出來得るから　C_w は C_a の二乘に比例し、此項は高次の拋

物線となる。

故に (b) (c) (d) の和は結局高次の抛物線として表はす事が出來る。



第　二　圖

一般に、(c) と (d) の影響は小い、即ち第二圖に於て、横線を引た所が、飛行機に働く力の「モーメント」を表はすので、是を尾翼の「モーメント」で釣合せなければならないのである。

尾翼の「モーメント」M_l は次の様に書く事が出來る。

$$M_l=C_lFql \qquad \text{(13)}$$

C_l は $i-i_0$ の函數であるが、尚ほ、翼洗流を考慮しなければならぬ。

翼洗流の下向の速度は一般に次の様に書き表はす事が出來る。玆に β は實驗値である。

$$w=\beta vC_a \qquad \text{(14)}$$

尾翼は其有効迎角が零の時に揚力係數が零であるから、C_l を次の様に書く事が出來る。

$$C_l=C_l'(i-i_0-\beta\, C_a) \qquad \text{(15)}$$

玆に、 $C'_l=\dfrac{dC_l}{di}$, で $(i-i_0-\beta C_a)$ は翼洗流を考へに入れた尾翼の有効迎角である。

故に $\dfrac{M_l}{Fqt}=C_l\dfrac{l}{t}$ は、C_a の函數として圖に表はすと直線になる。

安定に必要な條件は明かに

$$M_l-(M_L+M_G+M_p)>0 \quad\cdots\cdots(16)$$

である。

(11) 式に於て、抗力係數を含む項の値は小さいから除外すると、安定の必要條件を次の様に書く事が出來る。

即ち一般に、揚力係數、「モーメント」係數を次の様に書き表はす

$$\left.\begin{aligned} C_a&=C_{a0}+C'_{a0}\Delta i,\\ C_m&=C_{mo}+\left(\frac{dC_m}{dC_a}\right)_0 C'_{a0}\Delta i,\\ C_l&=C'_l(1-\beta C'_{a0})\Delta i, \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(17)$$

玆に

$$\left.\begin{aligned} &C'_{a0}=\left(\frac{dC_a}{di}\right)_{i=0}, \quad C'_{m0}=\left(\frac{dC_m}{dC_a}\right)_{i=0},\\ &C'=\left(\frac{dC_l}{d(i-i_0-\beta C_a)}\right)_{i=i0+\beta Ca} \quad \Delta i=i-i_0 \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(18$$

である。

然る時は、(11) 式及 (13) 式から、

$$\frac{fl}{Ft}C'_l(1-\beta C'_{a0})\Delta i-C_{m0}-C'_{m0}C'_{a0}\Delta i+(C_{a0}+C'_{a0}\Delta i)(\xi_s+\eta_s\Delta_i)>0\ldots(19)$$

(9) 式の條件を入れ、且、Δi の二乘を含む項を除外するとすれば安定の條件は

$$\frac{fl}{Ft}C'_l(1-\beta C'_{a0})>(-C'_{m0}+\xi_s)C'_{a0}+C_{a0}\,\eta_s\quad\cdots\cdots(20)$$

となる。

$C'_l(1-\beta C'_{a0})$ は、一般にせまい範圍でしか變らないから、 $\dfrac{fl}{Ft}$ と云ふ、「ダイメンション」のない量が實際に安定を支配す事となる。

注意すべきは、重心の上下の位置は、安定には餘り影響が無い事である。

$\dfrac{fl}{Ft}$ の値は凡そ次に示す樣なものである。

Fokker	交通機	0.26
Rumpler	偵察機	0.35
Fokker	戰鬪機	0.55

厚い翼の場合に $C'_{a0}=1{\cdot}2C'_{l0}$ $\xi_s=\frac{1}{3}$, $C'_m=\frac{1}{4}$ と置くと η_s は約 $\frac{1}{2}$. $\dfrac{C_{a0}}{C'_l}$ は略々 $\frac{1}{4}$ から $\frac{1}{2}$ の間にあるから、安定の條件は

$$\frac{fl}{Ft}>0.2$$

となる。

此理論は、一般に少し小さ過ぎる値を與へるもので、尙「ダンピング」の影響に對して修正を施さなければならないのである。

次に複葉の場合であるが、此場合には、誘導速度 (induzierte Geschwindigkeit) に依る迎角の變化を考へねばならぬので、計算が複雜になるが略算には Dr. Bienen の方法を用ふれば、簡單に、複葉を共に相當する單葉で表はす事が出來る

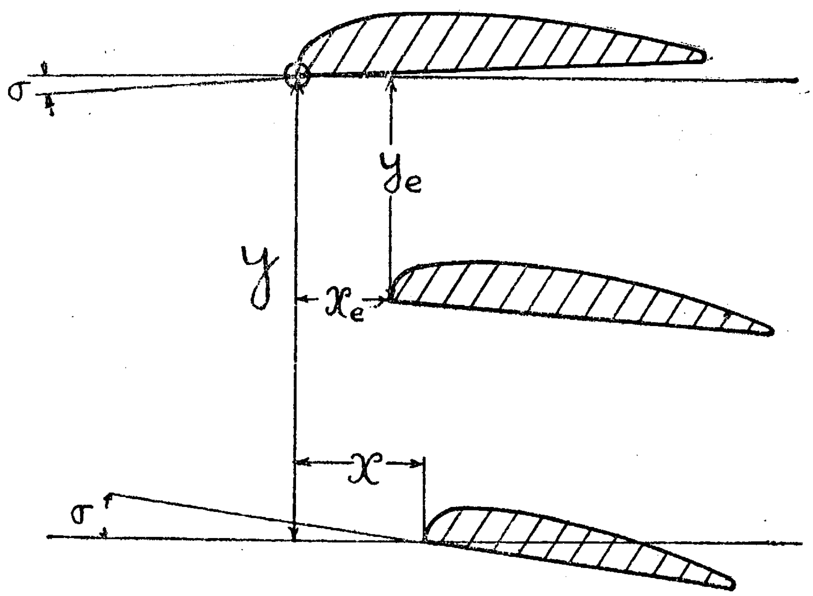
F_0, F_u	上翼及下翼の面積
t_0, t_u	上翼及下翼の翼弦の長さ
2σ	Schränkung (Decalage)
χ	Staffelung.

とすると、此複葉に相當する單葉の翼面積 F_e 翼弦の長さ t_e 及翼の前緣の座標 x_e, y_e は次の樣になる。

$$\left.\begin{aligned} &F_e=F_0+F_u \\ &t_e=\frac{F_0t_0+F_ut_u}{F_0+F_u} \\ &x_e=\frac{F_u}{F_0+F_u}x,\quad y_e=\frac{F_u}{F_0+F_u}y \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(21)$$

Decalage は迎角にのみ影響を與へ、單葉の迎角は次の樣になる。

$$i_e=i-\sigma\frac{F_0-F_n}{F_0+F_u}\quad\cdots\cdots(22)$$



第　三　圖

相當する單葉の「モーメント」は

$$M=F_e\frac{\rho v^2}{2}t_e\left(C_m+2\frac{dC_a}{di}\sigma\frac{x}{t_e}\ \frac{F_\circ F_u}{F_e^2}\cos i\right)\ \text{..................}(22)$$

となる。

(2) 動　的　安　定

普通の飛行機の計算には、靜的安定のみを調べれば充分である、即ち、此安定があれば迎角が變つた場合に此れを元に戻そうとする「モーメント」が起る。普通の飛行機は此場合に動的にも安定であつて、元に戻す「モーメント」に依つて起る振動は、段々衰へて行く、而して此「ダンピング」は、主に尾翼の働きに依るものである。

動的の不安定は次の二つの場合に多く起る。

a）尾翼の大さが不充分であるか、又は尾翼無しの飛行機の場合。

b）彈性的の振動の爲めに尾翼の働きが惡くなつた場合。

尾翼の振動に就ては、別に述べるから此處では a）の場合のみを論ずる事とする。

飛行機が水平飛行の平衡の狀態から動いた場合を考へる。重心を通つて、飛行機の運動の方向に併行及是に直角に座標軸を取る。

今 Δv を飛行速度の變り、Δi を迎角の變り、$\Delta\theta$ を飛行方向の變り、$\Delta\varphi$ を上記の軸に對し飛行機

の對稱面内に於ての廻轉角度、K を飛行機の重心を通り對稱面に直角な軸の廻りの慣性半徑とすると、次の聯立微分方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{G}{g}\frac{d\varDelta v}{dt}=-F\rho C_w v\varDelta v-F\rho\frac{v^2}{2}C'_w\varDelta i-G\varDelta\theta\\
&\frac{G}{g}v\frac{d\varDelta\theta}{dt}=F\rho C_a v\varDelta v+F\rho\frac{v^2}{2}C'_a\varDelta i+S\varDelta i\\
&\frac{G}{g}k^2\frac{d^2\varDelta\varphi}{dt^2}=-F\rho\frac{v^2}{t}tC'_m\varDelta i-f\rho\frac{v^2}{2}C'_l\frac{d\varDelta\varphi}{dt}\frac{l^2}{v}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

玆に、G は飛行機の全重量である。

此等の式は次の様に省略して簡單にする事が出來る。

$C_w\frac{\rho}{2}v^2F$ を G に對し、

S を $C_a\frac{\rho}{2}v^2F$ に對し省略し。變數として、「ダイメンション」の無い量 $\tau=\frac{gt}{v}$ を取り、尙ほ $\frac{C'_m t v^2}{C_a k^2 g}=q$, $\frac{fl^2}{Fk^2}\frac{C'_l}{C_a}=p$, と置けば、(23) 式を次の様に簡單に書く事が出事る。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{v}\frac{d\varDelta v}{d\tau}=-2\frac{C_w}{C_a}\frac{\varDelta v}{v}-\frac{C'_w}{C_a}\varDelta i-\varDelta\theta\\
&\frac{d\varDelta\theta}{d\tau}=2\frac{\varDelta v}{v}+\frac{C'_a}{C_a}\varDelta i\\
&\frac{d^2\varDelta\varphi}{d\tau^2}=-q\varDelta i-p\frac{d\varDelta\varphi}{d\tau}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

簡單の爲めに

$$\frac{C_w}{C_a}=\varepsilon,\quad \frac{C'_w}{C_a}=\eta,\quad \frac{C'_a}{C_a}=a\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

と置き

$$\varDelta v=Ae^{\lambda\tau},\quad \varDelta i=Be^{\lambda\tau},\quad \varDelta\theta=Ce^{\lambda\tau},\quad \varDelta\varphi=\varDelta\theta+\varDelta i$$

とすれば、λ に對する、次の代數方程式を得る。

$$\{\lambda^2+a\lambda+2(1-\eta+\varepsilon a)\}\{\lambda^2+p\lambda\}+q(\lambda^2+2\varepsilon\lambda+2)=0\cdots\cdots(26)$$

ε も η も小さい量であるから (26) 式を又簡單に次の様に書く

$$(\lambda^2+a\lambda+2)(\lambda+p)\lambda+q(\lambda^2+2\varepsilon\lambda+2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

此四次方程式の根から振動數及「ダンピング」の係數を求める事が出來る。

q は靜的安定で定められ、p は「ダンピング」を司るものである。假令ば、飛行機が、靜的には「ニユートラル」であるが、尾翼が働て振動を衰へさせる樣な場合は q が零であつて p が正の數である。

p が充分大きくて、q が負でなければ、即ち、飛行機が靜的に不安定で無ければ、振動は常に衰へるが、靜的に安定であつても「ダンピング」が無い時、即ち、p が零の場合には、振動は衰へないのである。此場合には、短い周期と長い周期の振動が起り、短い周期の振動は衰へるが、他のものは衰へない。略算で上記の方程式を解くと長い周期の運動の衰減率は次の樣になる。

$$\delta=\frac{1}{2}\left\{\frac{p+\varepsilon q}{1+\dfrac{q}{2}+p\dfrac{C'_a}{C_a}}-\frac{2\dfrac{C'_a}{C_a}+p}{\left(1+\dfrac{q}{2}+p\dfrac{C'_a}{C_a}\right)^2}\frac{q}{2}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

故に、尾翼の無い飛行機の場合に起る樣に、p が零になると、靜的安定があつても q が $2\left(\dfrac{C'_a}{\varepsilon C_a}-1\right)$ より大きい時でなくては振動が衰へないのである。

此動的安定の條件は次の樣に書く事が出來る。

$$C'_m>2\frac{k^2q}{v^2t}\left(\frac{C'_a}{C_w}-1\right) \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

尾翼の無い飛行機では靜的安定は翼の中心線を曲げ、翼の端を上に折つて得られるのであるが、此研究の結果が示す通り尾翼が無い時には、安定が有り餘つて居なければならない。併し斯樣な固有安定を有つ翼は、形の抵抗が大きくなると思ふ。之が多分是迄尾翼無しの飛行機の成功しない所以である。

尙ほ、Brinbaum 其他の新しい研究に依ると、周期的に迎角が變ると、離れて行く渦の爲めに逆の「ダンピング、モーメント」が出來て安定に逆ふ樣に働くものである。