爆弾抛射の數學的研究

カルマン教授（講演）

爆彈が水平位置で飛行機をはなれそして爆彈が彈道に切線の方向に保たるゝように十分安定であると假定しよう。空氣の抵抗を省くとすれば、彈體は飛行速度と同じ水平速度をもつであらう。即ち爆彈は飛行機に關しては垂直に落ちることになる。

空氣の抵抗で爆彈は Δ だけ後の方におちる、そこで問題は Δ を高さ H の函數として、飛行速度 V を計算しようとするのである。

x,y	爆彈の重心の座標（Origin を落す點にとり y を 下向きに正にとる）
v	飛行速度
g	重力の加速度
ϑ	水平線と彈道となす傾角
k	空氣抵抗の係數（空氣密度と斷面積を含む）
m	爆彈の質量

彈道の方向に於ける加速度は

$$\frac{dv}{dt}=g\sin\vartheta-\frac{k}{m}v^2$$

に等しい。しかるに彈道の方向に垂直には（R=彈道の Radius of curvature）

$$\frac{v^2}{R}=g\cos\vartheta$$

であるから

$$\frac{1}{R}=\frac{d\vartheta}{dS}=\frac{d\vartheta}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{1}{v}\frac{d\vartheta}{dt}$$

そこでこの式は次の如くなる:—

$$v\frac{d\vartheta}{dt}=g\cos\vartheta$$

兩式を割れば

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}\frac{dt}{d\vartheta}=tg\,\vartheta-\frac{k}{mg}\frac{v^2}{\cos\vartheta}$$

又は
$$\frac{1}{v^3}\frac{dv}{d\vartheta}-\frac{tg\vartheta}{v^2}=-\frac{k}{mg}\frac{1}{\cos\vartheta}$$

そこで $tg\,\vartheta=u$ とおけば、$\vartheta=arc\,tg\,u$, $d\vartheta=\dfrac{du}{1+u^2}$, $\dfrac{1}{\cos\vartheta}=\sqrt{1+tg^2\vartheta}$ といふ關係を考へに入れば上式は

$$\frac{1+u^2}{2}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{v^2}\right)+\frac{u}{v^2}=\frac{k}{mg}\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{d}{du}\left\{\frac{1+u^2}{2v^2}\right\}=\frac{k}{mg}\sqrt{1+u^2}$$

となる。しかるに

$$\frac{v}{\sqrt{1+u^2}}=v\cos\vartheta=v_x$$

從つて

$$\left(\frac{1}{v_x}\right)^2-\left(\frac{1}{v_0}\right)^2=\frac{2k}{mg}\int_0^u\sqrt{1+u^2}du$$

又は
$$\left(\frac{v_0}{v_x}\right)^2=1+\frac{2k}{m}\frac{v_0^2}{g}\int_0^u\sqrt{1+u^2}\,du$$

之れを積分すれば

$$\left(\frac{v_0}{v_x}\right)^2=1+\frac{kv_0}{mg}\{u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})\}$$

水平の速度は

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{v_0}{\sqrt{1+\dfrac{kv_0^2}{mg}\left\{u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})\right\}}}$$

となる、夫から彈道の二つの co-ordinate は

$$x=\int^t dtv_x=\int_0^u\frac{dt}{du}v_x du=\frac{v_0^2}{g}\int_0^u\frac{du}{1+\dfrac{kv_0^2}{mg}\{u\sqrt{1+v^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})\}}$$

$$y=\int_0^t v_x dx=\int_0^u \frac{dt}{du}uv_x du=\frac{v_0^2}{g}\int_0^u \frac{udu}{1+\frac{kv_0^2}{mg}\{u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})\}}$$

落下時間は

$$t=\int_0^t dt=\int_0^t \frac{dt}{du}du=\frac{v_0}{g}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+\frac{kv_0^2}{mg}\{u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})\}}}$$

となる

上の三つの式を積分すれば凡ての肝要な量たとへば高さ、飛行時間、水平の變位 (Verscbiebung) $\varDelta$ が計算される。

此の積分は Single Parameter $\frac{kv_0^2}{mg}$ を含む、この量は空氣抵抗の初の値 kv_0^2 と爆彈の重量 mg との比に均しい。又は比 $\left(\frac{v_0}{v_e}\right)^2$ に同じである但し v_e は所謂最大落速又は終速 (Endgeschiwindigkeit) である。$\left(\frac{v_0}{v_e}\right)^2$ といふ量は一にくらべて大てい小さいから之れを展開すれば

$$x=\frac{v_0^2}{g}\left\{u-\left(\frac{v_0}{v_e}\right)^2\int_0^u[u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})]du\right\}$$

$$y=\frac{v_0^2}{g}\left\{\frac{u^2}{2}-\left(\frac{v_0}{v_e}\right)^2\int_0^u[u^2\sqrt{1+u^2}+u\log(u+\sqrt{1+u^2})]du\right\}$$

$$t=\frac{v_0}{g}\left\{u-\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{v_e}\right)^2\int_0^u[u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})]du\right\}$$

この場合積分は容易に出來る。そして Parameter で表はす落下徑路及落下時間の曲線が得られる。偏差 (Deviation) の量は

$$\varDelta=x-v_0t=-\left(\frac{v_0}{v_e}\right)^2\frac{v_0^2}{2g}\int_0^u[u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})]du$$

又は積分して $u+\sqrt{1+u^2}=Z$ とおけば

$$\varDelta=-\left(\frac{v_0}{v_e}\right)^2\frac{v_0^2}{2g}\left\{\frac{1}{3}(1+u^2)^{3/2}+u\log Z\right\}$$

ほゞ $u=\sqrt{\frac{2gH}{v_0^2}}$ だから此式から偏差は直接落高及飛行速度の函數で得られる。

例

$V_0=50^{m/s}$ $H=500^m$ 1000^m 2000^m

$V_e=250^{m/s}$ $\varDelta=34^m$ 69^m 159_m