

航空研究所彙報

第七十三號

昭和五年九月

風速及風向の分布一樣ならざる場合の 最短時間飛行徑路

所員 栖原豊太郎

Abstract

Flight Path for Minimum Time in Uneven Distribution of Wind.

By Toyotarô Suhara.

Let w_x and w_y represent the components of the wind velocity, which are assumed to vary with x only; V the velocity of an aircraft relative to the air, assumed to be constant in magnitude. Let O be the starting point of the aircraft and X its destination, the distance OX being l . Then the condition that the time of flight is minimum should be

$$\delta \int \frac{(1+y'^2) dx}{w_x + y'w_y + \sqrt{(1+y'^2)V^2 - (w_y - y'w_x)^2}} = 0.$$

In the Euler's differential equation derived from the above, if the terms involving the squares or products of w_x/V , w_y/V and y' , which are supposed to be small compared with unity, be omitted we get

$$Vy' = w_y + C(V + 2w_x).$$

The solution under the condition that $y=0$ at $x=0$ and l , is

$$Vy = \int w_y dx - \frac{\int_0^l w_y dx}{Vl + 2 \int_0^l w_x dx} (Vx + 2 \int_0^x w_x dx),$$

which is an approximate extremal for the required flight path. An approximate expression for the course is

$$Vy' = w_y - \frac{\int_0^l w_y dx}{Vl + 2 \int_0^l w_x dx} (V + 2w_x)$$

Simple practical methods of tracing graphically these curves are given.

1. 趣 旨

飛行機が二つの地点間を飛行する場合に、風が純粹の追風か或は向風であるこ最短時間の飛行経路は其二點を結ぶ直線であるこ明らかである。又横風を受る場合でも、全経路を通じ風速及風向が均等ならば最短時間経路は直線となる。然し一般に場所により速さ及方向を異にする風を受けながら飛行する場合には上の様に簡單にはならない。此の問題は空中航法の上に於て興味ある問題なるにも關らず未だ解決されて居ないので著者は新たに實用を主眼とする一解法を試みて見た。

現今通常の飛行機の速さは毎秒 50 乃至 100 米程度である。従つて強風中にて充分飛行するこが出来が、風を眞横に或は斜に受けて飛行する場合に先づ最も有利なる針路を決定しないこ思はざる廻り路を飛ぶこになり、其上に幾許の損失を爲したか云ふ事すらも分らないこになる。

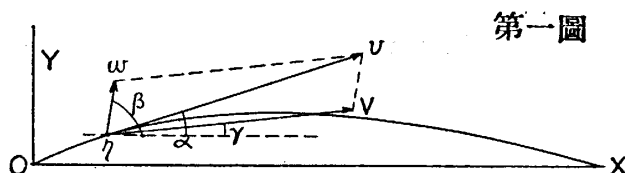
風の速さ及方向は場所によりて異なり時刻によりて異なるこ勿論であるが、通常の氣象状態では飛行機の出發前特に豫定経路附近各地の風速及風向等の通報を受るか、或は此等を天氣圖より求め、これから最短時間にて飛行し得る経路を決定するこが實用上必要な事である。即ち本論は豫定経路附近に於ける風速及風向の分布が飛行中變らないこ假定して計算するのであるから、風の變りやすい場合には適用出来ない事勿論である。

本論文の趣旨は二つの地点を結ぶ直線附近の風速及風向の分布を與へ、此の間を最短時間で飛行する経路及針路等を決定するこであるが、本問題の基礎となるべき風力分布圖の精度を考へ、経路等の計算は迅速にして實用的なるこを目標としたものである。

2. 最短時間飛行経路

計算に當り次の記號を用ふる。 V を飛行機の空氣に對する速度、 v を飛行機の地に對する速度、 w を風の速度、 w_x 及 w_y を w の x 方向及 y 方向の成分、 l を二地点間の距離 OX 、 t を飛行時間とする。

第一圖に於て飛行機は O を出發し $O\eta X$ を通り X に到着するものとする。飛行機の速度 V の大きさは一定であるとし、又 OX 間の風速 w_x 及 w_y は何れも x のみの函數であるとする。



O から X まで飛行するに要する時間 t が最小なるためには

$$\delta t = \delta \int_0^l \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v} dx = 0, \quad (1)$$

但し

$$v = w \cos(\beta - \alpha) + \sqrt{V^2 - w^2 \sin^2(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \left\{ w_x + y' w_y + \sqrt{(1+y'^2)V^2 - (w_y - y'w_x)^2} \right\} \quad \text{及} \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

これより Euler の微分方程式を求め次の形に書く。

$$\frac{\left\{ 2y' \frac{w_x}{V} - (1-y'^2) \frac{w_y}{V} \right\} \sqrt{1+y'^2 - \left(\frac{w_y - y'w_x}{V} \right)^2} + y'(1+y'^2) - \left(\frac{w_y - y'w_x}{V} \right) \left\{ 2y' \frac{w_y}{V} + (1-y'^2) \frac{w_x}{V} \right\}}{V \left\{ \frac{w_x}{V} + y' \frac{w_y}{V} + \sqrt{1+y'^2 - \left(\frac{w_y - y'w_x}{V} \right)^2} \right\}^2 \sqrt{1+y'^2 - \left(\frac{w_y - y'w_x}{V} \right)^2}} = C.$$

上の式に於て w_x 及 w_y は x の任意の函数で與へられるべきものである。従つて到底之れを解くことが出来ないから、比較的値の小なる (w_x/V) , (w_y/V) 及 y' の自乗及相乗積以上を含む項を全部棄るゝ次の如き近似式が得られる。即ち

$$Vy' = w_y + C(V + 2w_x), \quad (2)$$

但し C は常數である。此の微分方程式を解き $x=0$ 及 $x=l$ にて $y=0$ なる条件を用ふるこ

$$Vy = \int w_y dx - \frac{\int_0^l w_y dx}{Vl + 2 \int_0^l w_x dx} \left(Vx + 2 \int w_x dx \right) \quad (3)$$

これが最短時間の飛行徑路を表はす近似式である。

本式中風速の成分 w_x 及 w_y は其變化複雑であつて、之れを簡單なる解析函数で表はすことは一般に困難であるが、實際上此等を圖に表はすことは容易であるから、(3) 式を計算するには圖式方法に依るのが最も簡單で且つ實用的である。以下總て計算を圖式に行ふ方法を考案して見た。

3. (3)式により最短時間の飛行徑路を求むる作圖法

i. 此の作圖に於ては距離 x , y 及 l を km にて表はし、飛行機の世界 V , 風の世界 w , 其成分 w_x 及 w_y を m/s にて表はすこゝに定める。

ii. 方眼紙上に第三圖の如く OX の距離を横軸に取り横軸 1 cm で距離 λ km を表はすものとする。例。 OX を 500 km とするこ横軸 1 cm で距離 50 km を表はすこゝになり、 $\lambda=50$ 。(實際の場合は圖をもつこ大きく畫いた方が都合が宜しい。 $\lambda=10$, $\mu=1$ 及 $\nu=15$ とするこ丁度此の圖の五倍大の寸法で畫く事になり、かなり正確に作圖するこが出来ぬ。)

iii. OX 間の各點 O, A, B, \dots に於ける風速及風向を第三圖の w の如くそれぞれ矢を以て示す。其尺度は矢の長さ 1 cm にて風速 μ m/s を示すものとする。例。矢の長さ 1 cm で風速 5 m/s 即ち $\mu=5$ 。

iv. 第三圖の風速 w の垂直成分 w_y を兩脚器にて圖上で求め w と同じ尺度にて第四圖の様に O, A, B, \dots の各點に書き其頭を順次に直線にて連ねる。之れを $O' A' B' C' \dots$ とする。

v. 同様に第三圖の風速 w の水平成分 w_x を求め第四圖の様に畫く、之れを $O'' A'' B'' C'' \dots$ とする。但し此の場合は追風を正、向風を負とする。

vi. インテグラフを使用して第四圖の w_y の曲線 $O' A' B' C' \dots$ を積分した曲線 OqQ を引く。又 w_x 即ち $O'' A'' B'' C'' \dots$ を積分した曲線 OpP を引く。之れを第五圖に示した。此のインテグラフが畫いた曲線の縦軸 1 cm が方眼紙の面積 $\nu\text{ cm}^2$ を表はすものとする。例。縦軸 1 cm で面積 3 cm^2 即ち $\nu=3$ 。但し ν の大きさはインテグラフの腕の目盛りの上で適當に定める。

$$\text{vii.} \quad \text{tg}\theta = 2\mu\nu/V \quad (4)$$

なる關係により方眼紙上で P 點を通過し斜線 PR を畫く。例 $V=100\text{ m/s}$ とし $\text{tg}\theta = 2 \times 5 \times 3/100 = 3/10$ 即ち $PX:XR=10:3$ に取り斜線を引く。 OX との交點を R とする。若し P 點が P' にある場合でも斜線 $P'R'$ の方向は第五圖に示す通り同様とする。

viii. R 點を過る垂直線 RS と Q 點を過る水平線 QS との交點を S とする。

ix. S と O とを直線にて結ぶ。

x. OX 上の任意の點 ξ に縦法 $p\xi q$ を畫く。(或は全行程 OX 間を n 等分し順次 ξ_1, ξ_2, \dots に縦線を畫く)

xi. pr を PR に平行に畫き OX との交點を r とする。

xii. 垂線 rs を畫き OS との交點を s とする。

xiii. q 點から $q\eta = rs$ と取り η 點を定める。

xiv. η 點は求むる所の最短時間飛行徑路 $y=f(x)$ の上の一點であつて $\xi\eta$ は $x=0$ に對する y の値となる。但し此の y の尺度は方眼紙上の 1 cm を以て實際の距離 $\frac{\lambda\mu\nu}{V}\text{ km}$ を表はす。例。 1 cm で $50 \times 5 \times 3/100 = 7.5\text{ km}$ 。又第五圖の $y=f(x)$ の縦軸は第四圖の縦軸と反對に下向きを正としてある。即ち飛行機の徑路は此の場合横風を受けて左に偏したことを示して居る。

xv. (x) より (xiv) までの手續を (x) の括弧内に記した通り ξ_1, ξ_2, \dots 等數點で繰り返すこと求むる所の曲線 $y=f(x)$ が得られる。

4. 最短時間飛行徑路の作圖法の證明

第五圖に於て距離 x を表はす横軸尺度係数は前節 (ii) により $\frac{1}{\lambda}$ で、風速 w_x, w_y の縦軸尺度係数は $\frac{1}{\mu}$ である。而して積分曲線の縦軸が方眼紙上の面積に對する尺度係数は $\frac{1}{\nu}$ であるから

$$\int w_y dx \quad \text{及} \quad \int w_x dx \quad \text{を表はす積分曲線の縦軸尺度係数は} \quad \frac{1}{\lambda\mu\nu} \quad \text{である。}$$

同圖に於て (xiii) より $rs = \xi q - \xi \eta = \frac{1}{\lambda \mu \nu} \int w_y dx - \xi \eta$

又 $Or = O\xi - \xi r = O\xi - p\xi \cdot \text{tg } \theta = \frac{x}{\lambda} + \frac{\text{tg } \theta}{\lambda \mu \nu} \int w_x dx$

及 $RS = XQ = \frac{1}{\lambda \mu \nu} \int_0^l w_y dx$

$OR = OX + XR = \frac{l}{\lambda} + XP \cdot \text{tg } \theta = \frac{l}{\lambda} + \frac{\text{tg } \theta}{\lambda \mu \nu} \int_0^l w_x dx$

而して $\frac{rs}{Or} = \frac{RS}{OR}$ なる關係から

$$\lambda \mu \nu \cdot \xi \eta = \int w_y dx - \frac{\int_0^l w_y dx}{l + \frac{\text{tg } \theta}{\mu \nu} \int_0^l w_x dx} \cdot \left(x + \frac{\text{tg } \theta}{\mu \nu} \int w_x dx \right) \quad (5)$$

上の式に於て $\text{tg } \theta = \frac{2\mu\nu}{V}$, $\xi\eta = \frac{V}{\lambda\mu\nu} y$ (6)

と定めると (5) 式は (3) 式と同じものになる。即ち第五圖に示す作圖に依り $\angle \theta$ を (4) の關係より定め、徑路の偏り y を表はす尺度係数を (6) により $\frac{V}{\lambda\mu\nu}$ [即ち 1 cm を以て $\frac{\lambda\mu\nu}{V}$ km を表はす] と定めると本問題に對する解が得られることとなるのである。

5. 最短時間飛行の針路

第一圖に於て假に OX が北を指すものとすると η 點に於ける針路は角 α で示される。即ち此の點の y を求むれば宜しい。これは既に (2) 式にて表はされて居るが (3) 式と同様に C の値を入れると

$$Vy' = w_y - \frac{\int_0^l w_y dx}{Vl + 2 \int_0^l w_x dx} (V + 2w_x), \quad \text{但し} \quad C = - \frac{\int_0^l w_y dx}{Vl + 2 \int_0^l w_x dx} \quad (7)$$

これが最短時間飛行針路の近似式である。

6. 最短時間飛行の針路を求むる作圖法

i. 徑路の作圖法と同様に距離 x , y 及 l を km にて表はし、飛行機の世界 V , 風の速度 w 及其成分 w_x, w_y を m/s にて表はすことと定める。尺度は 3 節の (ii) 乃至 (v) に於けると同様にとる。3 節の例では C の値は $C = -0.0186$ となる。

ii. 第六圖 w_x, w_y の圖の横軸上に第五圖の R 點を移す。

iii. R を過る垂直線上 R の上下にそれぞれ

$$UR = -UR = \frac{2\mu\nu}{V}SR \quad (8)$$

として U 及 U' 點を定める。例。 $UR = (2 \times 5 \times 3/100)SR$

iv. O と U とを結ぶ。又 O と U' とを結ぶ。

v. 縦軸の読みが $C \cdot V$ の所に、 EF を OX に平行に畫く。例。 $C \cdot V = -0.0186 \times 100$,

vi. 任意の距離 ξ に縦線 pq を畫く。 pm を OX に平行に引く。

vii. OX 軸上に $Or = Om$ と取り r 點を定める。

viii. r 點を過り OX に垂直に $ru'f$ を畫く。 OU' との交點を u' , EF との交點を f とする。

此の場合 w_x 即ち ξp が負であるから u' 點を OU' 線上に求める。 $(w_x$ が正の場合は u 點を OU 線上にさる。)

ix. $q\eta_1 = u'f$ と取り η_1 を定める。 $(w_x$ が正ならば $uf = q\eta_1$ とする)

x. $\xi\eta_1$ は ξ に於ける y' 即ち $tg \alpha$ を示す。其尺度は w_x, w_y と異なり縦軸 1 cm で $\frac{\mu}{V}$ を表はす。例。1 cm は $5/100$ 。これは縦軸に書くべき w_x, w_y の尺度數字を V で除すればよろしい。今 $V=100$ とするに w_x, w_y の尺度 1, 2, 3, 等はそれぞれ其位置で 0.01, 0.02, 0.03, となつて y' の尺度を與へる。又同時に $\frac{w_x}{V}, \frac{w_y}{V}$ の尺度ともなるのである。

xi. 最後に三角函數表から α を求むればよろしい。

7. 最短時間飛行針路の作圖法の證明

$$\text{第六圖に於て } u'f = \xi q - \xi\eta_1 = \frac{w_y}{\mu} - \xi\eta_1, \quad (9)$$

$$\text{又 } u'f = OE - u'r = OE - \frac{Or \cdot UR}{OR},$$

$$OE = -C \frac{V}{\mu}, \quad Or = Om = \xi p = \frac{w_x}{\mu},$$

$$UR = -\frac{2\mu\nu}{V}SR = -\frac{2}{\lambda V} \int_0^l w_y dx, \quad OR = \frac{l}{\lambda} + \frac{2}{\lambda V} \int_0^l w_x dx.$$

$$\text{即ち } u'f = -C \frac{V}{\mu} + \frac{w_x}{\mu} \cdot \frac{\frac{2}{\lambda V} \int_0^l w_y dx}{\frac{l}{\lambda} + \frac{2}{\lambda V} \int_0^l w_x dx} = -\frac{C}{\mu} (V + 2w_x). \quad (10)$$

故に (9) と (10) とより

$$\mu \cdot \xi\eta_1 = w_y + C(V + 2w_x). \quad (11)$$

上式に於て $\xi\eta_1 = \frac{V}{\mu}y'$ (12)

と取れば (11) は原の (7) 式となるこが分る。

8. 最短時間飛行の偏流角 (Drift angle) $\alpha - \gamma$.

第一圖に於て直に次の關係式が得られる。

$$\sin(\alpha - \gamma) = \frac{w}{V} \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \left(\frac{w_y}{V} - \frac{w_x}{V} y' \right),$$

y'^2 を省くこ $\sin(\alpha - \gamma) = \frac{w_y}{V} - \frac{w_x}{V} y'$ (13)

これが偏流角 $\alpha - \gamma$ を與へる近似式である。この式は簡單であるから第六圖から僅かな計算で偏流角が求められるが作圖は次の様に行へばよろしい。

9. 最短時間飛行の偏流角の作圖

i. 第六圖の曲線 w_x , w_y 及 y' を其まゝ使用し縦軸の尺度は $\frac{w_x}{V}$, $\frac{w_y}{V}$ 及 y' に對するものを用ふる。之れを再び第七圖に示す。

ii. 一つの縦線 pq に於て $\xi a = \sigma$ mm にこる。 σ は 10 mm 或は 20 mm 或は乗法の容易な數がよろしい。

iii. pa を結ぶ。

iv. $\xi b = y' \times \sigma$ と取り bc を ap に平行引く。

v. q 點から $q\eta_2 = \xi c$ と取り η_2 點を定める。此の際 (13) 式に基き w_x , w_y , y' の正負を誤まらない様注意を要する。

vi. $\eta_2 \xi$ の長さが y' 等と同一尺度で横座標 $O\xi$ に於ける $\sin(\alpha - \gamma)$ を與へる。

vii. 以上の手續を OX 間數個所の點で繰り返し $\sin(\alpha - \gamma)$ の曲線を求める。

viii. 最後に三角函數表を用ひ $\alpha - \gamma$ を得る。

10. 最短時間飛行の機軸方向 (Heading) γ .

第一圖に於て飛行機の軸は V と同じ方向を有つて居るから OX の方向と γ 角をなす。即ち

$$w \sin(\beta - \alpha) = V \sin(\alpha - \gamma)$$

なる關係から角 γ を $tg \gamma$ の項として表はすこ

$$w_y - w_x y' = \frac{V}{\sqrt{1+tg^2 \gamma}} (y' - tg \gamma).$$

此の式で 1 に對し $tg^2 \gamma$ を省略するこ

$$\operatorname{tg} \gamma = y' - \frac{w_y}{V} + \frac{w_x}{V} y' \quad (14)$$

之れが機軸方向 γ を與へる近似式である。

11. 最短時間飛行の機軸方向の作圖

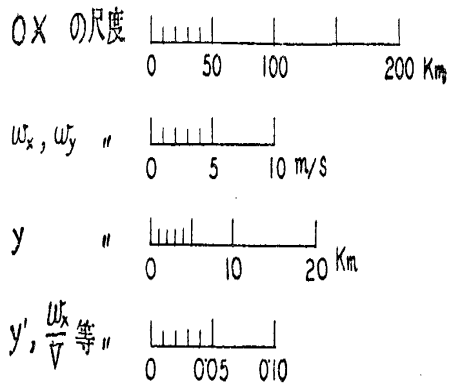
- i. 第七圖 $\eta_1 \eta_2$ の長さが直ちに ξ に於ける $\operatorname{tg} \gamma$ を與へて居る。
- ii. $\eta_3 \xi = \eta_1 \eta_2$ と取り η_3 の曲線を引けばよろしい。
- iii. γ の値は三角函數表から得られる。

12. 結 論

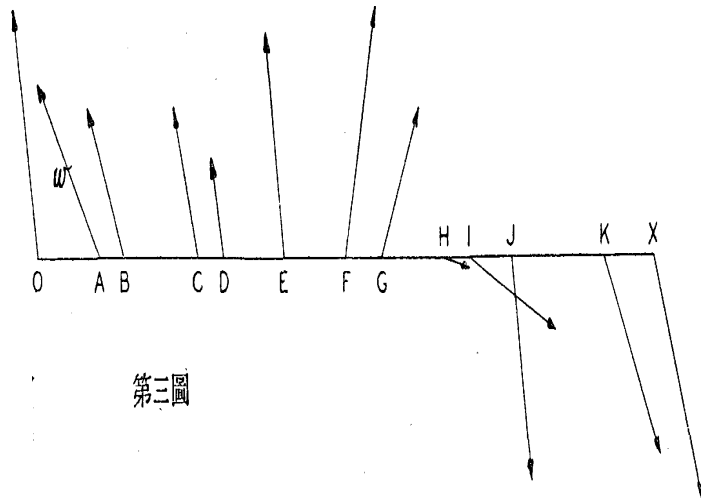
本論に於て實用上主要なる點は第3節の飛行徑路の作圖と第6節の飛行針路の作圖とである。初めて此の作圖を試みるに多少複雑なる感があるが、調整の出來たインテグラフを使用して數回の練習をするに、これだけの作圖を五分乃至十分間で容易に終ることが出来るのである。

本論の最初に記した二つの地點を云ふのは發及着の二點には限らない。航空路中飛行通過すべき豫定地點が數ヶ所あるとするに其相隣れる二地點を以て飛行徑路の兩端を見做すべきである。遠距離の定期航空をなす場合などでは、季節による風力分布を考慮し豫め最も有利なる飛行徑路を決定して置くことは極めて必要である。たゞ現時航空氣象觀測の設備不充分であつて完全なる風力分布圖を得ることが出來ないのは憾遺なる次第である。精しい風力分布圖があれば本論はかなり實用になるを考へる。本論は更に進んで高度の變化による風力の變化をも考へべきであるが、問題が複雑になるのでこゝには平面問題のみを論じた次第である。

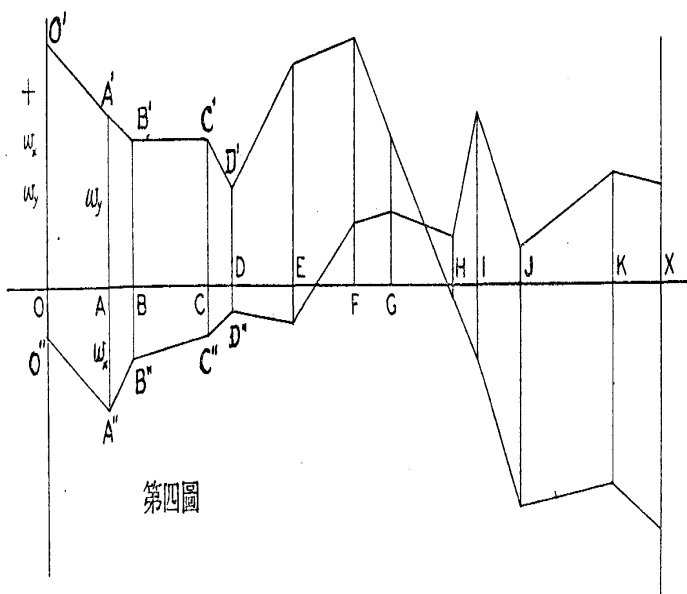
著者は嘗て海軍機關大佐花島孝一氏より本問題の必要な事を聞き實用を主として解決を試みたのである。同氏より種々有益なる意見や資料を與へられた事に對し茲に厚く謝意を表する次第である。



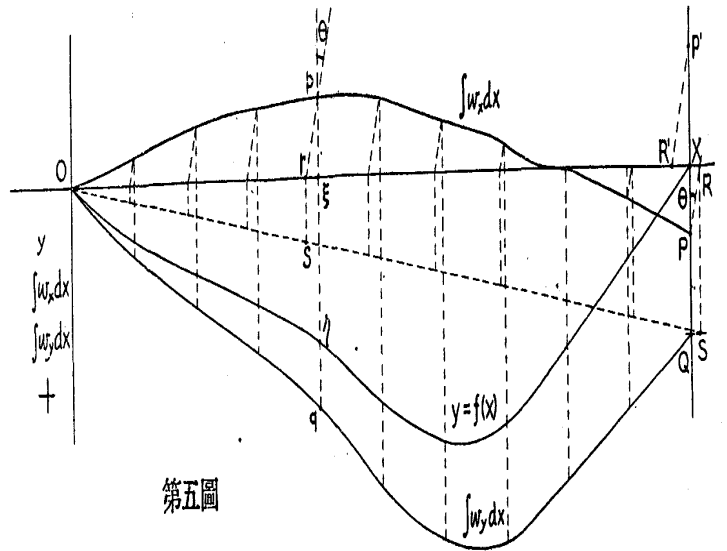
第二圖



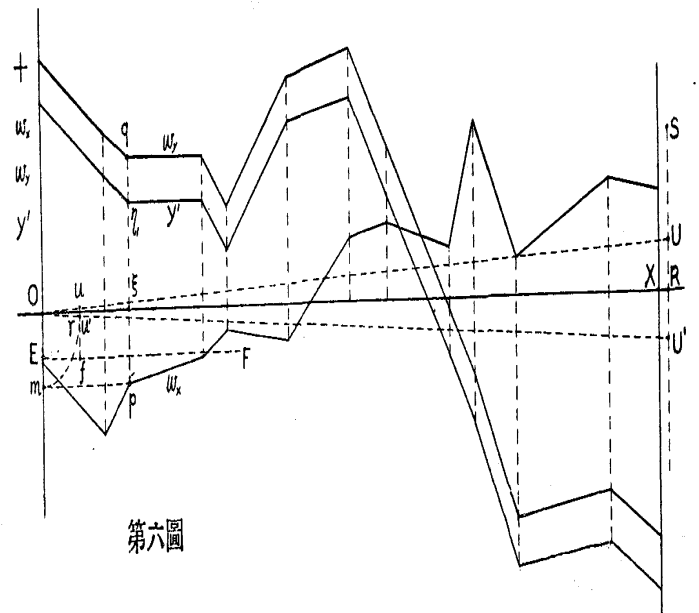
第三圖



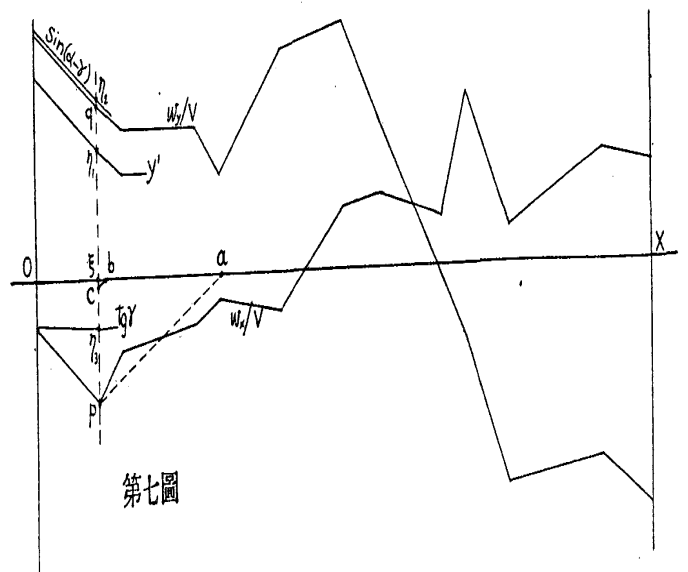
第四圖



第五圖



第六圖



第七圖