航空研究所彙報

第百二十八號

昭和十年四月

風洞境界の影響に就て

(圓形斷面の場合)

所員 谷 一郎

風洞の氣流が限られた大きさしか持たぬことは模型翼の周りの流にある影響を與へる．この影響の理論的計算はプラントルが“翼理論”[1]の中で取扱つたのを始めとして多くの文獻に見出されるが，その要領は境界條件を滿足する樣に自由渦の映像を考へ，これによつて模型の位置に生ずる氣流に直角の速度を求めるものである．開放型ヂェット風洞ではこの速度は下向き（揚力と逆の向き）になり，模型の有效迎角は

$$\varDelta\alpha=\delta\frac{S}{C}c_z$$

（S 翼面積，C 風洞斷面積，c_z 揚力係數，δ 干涉係數）だけ減少することになるのである．

併しこの計算には束縛渦の影響は全然考へられて居らぬ．從つてヂェットの表面が等ポテンシャル面になるべき境界條件は自由渦とその映像とに對しては滿足されるが，束縛渦とその映像とに對しては必ずしもさうとは限らぬ．例へば矩形斷面の場合は差支ないけれども，圓形斷面の場合には束縛渦とその映像とは境界條件を滿足しないのである[2]．尤も後に示す樣に，そのための誤差は模型の位置に生ずる誘起速度には全然效かないから，上の計算の結果はその儘生かすことが出來る．併し模型が大きく，殊に翼弦が大きい場合には，境界の影響として誘起速度の他に流が彎曲することも考へなくてはならぬ．そしてそのためには束縛渦の影響も計算に入れなければならぬのである[3]．

(1) L. Prandtl, Tragflügeltheorie II.

(2) 佐々木達治郎，彙報 101 號．

(3) 束縛渦の影響を考へずに彎曲の計算をやつてゐる人があるが，それでは不完全である．例へば N.K. Bose, Phil. Mag. (6) 49 卷 293 號 (1925).

それにしてもこの様な影響が誘起速度のそれに比べて小さいものであらうことは想像に難くない.[4] 然るにも拘らず，多くの文獻には彎曲の重要さが說かれ，干涉係數に於ける計算と實驗との背馳の原因をこゝに求めてゐるものも多いのである．この小論の目的は，圓形斷面を有するヂエット風洞に就て彎曲の影響が極めて小さいことを示さうとするものである.

嚴密に境界條件を滿足する解は既にブルヘルスがその著書[5]に發表してゐる．ブルヘルスは之を水平尾翼に於ける誘起速度の計算に應用してゐるが，多少の變形を加へれば我々の目的にも借用することが出來る.

ヂエットは限りなく長い一樣な圓筒（半徑 a）と見做し，その軸に關して對稱的に模型（翼幅 $2l$）を置く．模型は一本の束縛渦で置換へ，それから循環 Γ の變化に相應する自由渦を風下に曳くものとする．圓筒の軸上風下に向つて x 軸，束縛渦に沿うて y 軸，揚力と逆の方向に z 軸を採る．座標の原點は束縛渦の中點である．然らば圓筒の表面で $\varphi=0$ なる境界條件を滿足するポテンシヤルは $x<0$ に對し

$$\varphi=-\frac{1}{\pi a^2}\int_{-l}^{l}\Gamma(y_1)dy_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin m\theta e^{\lambda_s x}\frac{mJ_m(\lambda_s r)J_m(\lambda_s y_1)}{\lambda_s^2 y_1 J_m'^2(\lambda_s a)}$$

によつて與へられる．但し $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$, $\lambda_s a$ は $J_m(j)=0$ の正根である.

z 方向の速度 w は $\partial\varphi/\partial z$ に等しいが，こゝで $z=0$, 從つて $\theta=0$, $r=y$ と置けば

$$w=-\frac{1}{C}\int_{-l}^{l}\Gamma(y_1)dy_1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}e^{\lambda_s x}\frac{m^2J_m(\lambda_s y)J_m(\lambda_s y_1)}{\lambda_s^2 y y_1 J_{m-1}^2(\lambda_s a)}$$

となる．更に $y=0$ なる時は，$m>1$ なる項が消えて計算は大いに簡單になる．從つて以後境界の影響は圓筒の軸上に於てのみ考へることにしよう．即ち

$$w=-\frac{1}{2C}\int_{-l}^{l}\Gamma(y_1)dy_1\sum_{s=1}^{\infty}e^{\lambda_s x}\frac{J_1(\lambda_s y_1)}{\lambda_s y_1 J_0^2(\lambda_s a)}$$

である．こゝで $x=-a\xi$, $y_1=a\eta$, $j_s=\lambda_s a$ と置けば

$$-\sum_{s=1}^{\infty}e^{\lambda_s x}\frac{J_1(\lambda_s y_1)}{\lambda_s y_1 J_0^2(\lambda_s a)}=-\frac{1}{\eta}\sum_{s=1}^{\infty}e^{-j_s\xi}\frac{J_1(j_s\eta)}{j_s J_0^2(j_s)}=\frac{1}{\eta}W$$

となる．$\xi>0$ であるから，ξ が相當に大きい處で W を計算するのは容易である，ブルヘルスが尾翼に於ける誘起速度を計算したのはこの場合に相當する．併し ξ が非常に小さい

(4) 小野正三，彙報 100 號にも同樣の意見あり.

(5) W. F. Durand, Aerodynamic Theory 第 II 卷，Th. v. Kármán & J. M. Burgers 執筆のもの.

處では，上の形の儘で W を計算することが出來ない．この場合にはワトソン(6)に倣つて，$\eta^2+\xi^2<4$ の範圍で收斂する級數

$$W=-\frac{1-\eta^2}{2\eta}+\frac{\xi}{2\eta\sqrt{\eta^2+\xi^2}}-\frac{\mu_2\eta\xi}{2}$$

$$-\mu_4\eta\xi\left(\frac{\eta^2}{16}-\frac{\xi^2}{12}\right)-\mu_6\eta\xi\left(\frac{\eta^4}{384}-\frac{\eta^2\xi^2}{96}+\frac{\xi^4}{240}\right)-\cdots$$

を採らねばならぬ．玆に

$$\mu_{2n}=\frac{1}{(2n+1)\pi}\int_0^\infty\frac{t^{2n}dt}{I_1^2(t)}$$

であつて，$\mu_2=0.7968$, $\mu_4=1.2005$, ... である．從つて $\xi=0$ に於ては

$$w=\frac{1}{4C}\int_{-l}^{l}\Gamma(y_1)dy_1\left(1-\frac{1}{\eta^2}\right)$$

となるが，この中で $1/\eta^2$ の項は明かに翼自身の自由渦に因るものを表はす．即ち境界の影響は

$$w=\frac{1}{4C}\int_{-l}^{l}\Gamma(y_1)dy_1$$

となり，普通に自由渦の映像のみ考へて求めたものと全く一致する．換言すれば，束縛渦によつて境界條件の滿足されぬための誤差は模型の位置に生ずる誘起速度には全然效かぬものである．

次に流の曲率は風速を V として

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1}{2aCV}\int_{-l}^{l}\Gamma(y_1)dy_1\frac{1}{\eta}\frac{\partial W}{\partial\xi}$$

となるが，$\xi=0$ に於ては

$$-\frac{1}{\eta}\frac{\partial W}{\partial\xi}=-\frac{1}{2\eta^3}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\mu_4\eta^2}{16}+\frac{\mu_6\eta^4}{384}+\cdots$$

である．右邊の第一項は翼自身に因るものであるから，第二項以下を境界の影響と考へることが出來る．假に循環の分布が

$$\Gamma=\Gamma_0\sqrt{1-y_1^2/l^2}$$

(6) G. N. Watson, Proc. Roy. Soc. London (A) 130 卷 812 號, 1930.

で表はされるものとすれば，$k=l/a$ と置いて

$$\frac{1}{R}=\frac{\pi l\Gamma_0}{8aCV}\left[\mu_2+\frac{\mu_4 k^2}{32}+\frac{\mu_6 k^4}{1536}+\cdots\right]$$

となる．曲率は有效迎角を $t/4R$ だけ減らす様に働くものであるから（t は翼弦），之を誘起速度の場合と同様の形式

$$\Delta_1\alpha=\frac{t}{4R}=\delta_1\frac{S}{C}c_z$$

に書けば，$\pi l\Gamma_0=SVc_z$ なる關係を用ひて

$$\delta_1=\frac{t}{2a}\left[\frac{\mu_2}{16}+\frac{\mu_4 k^2}{512}+\frac{\mu_6 k^4}{24576}+\cdots\right]$$

が得られる．然るに括弧の中は $k=0,\ 0.4,\ 0.8$ に應じて夫々 0.050, 0.050, 0.051 となるから，大略

$$\delta_1=0.050\frac{t}{2a}$$

と採つてよい．この結果は楕圓分布以外の循環にも適用出來る．普通に δ は 1/8 程度のものであり，$t/2a$ は高々 1/4 を越えぬから，δ_1 は δ に比べて可也小さいものである．例へば直徑 2 m の風洞で 1.5 m×0.5 m の矩形翼を測るものとすると，$\delta=0.135$, $\delta_1=0.013$[(7)] であつて，$c_z=1$ に於ける迎角の修正量は彎曲の影響を考へると否とでは 2.02° と 1.85° との差異あるのみ．しかもこれは相當誇張した例である．實際問題としては彎曲の影響は省略して差支なく，干渉係數に於ける計算と實驗との背馳は之を他の原因に討ぬべきであらう．

尙序に，境界が固定壁の場合に就て附記して置く．この場合に模型の位置に生ずる誘起速度がヂエットの場合と同じ大きさで逆の向きを持つことはよく知られてゐる．卽ち境界の影響による誘起速度は模型の有效迎角を增加させる様に働く．彎曲の影響も亦この傾向を示し，ヂエットの場合とは反對に，有效迎角を增加させるものである．併しその量はヂエットの場合と同じではなく，粗い計算によれば約 30 % 大きいことが知られる．

終りに臨み，この問題に就て有益な御助言を與へられた佐々木河田兩所員に厚く御禮申上げる．

（10. 2. 7）

---

(7)　循環分布に和田教授の表示（日本航空學會誌第１卷第１號）を使つて計算した値．