ロビンソン風盃速度計の理論 (續報)

囑託　武田晋一郎

目次

1. 緒　　言

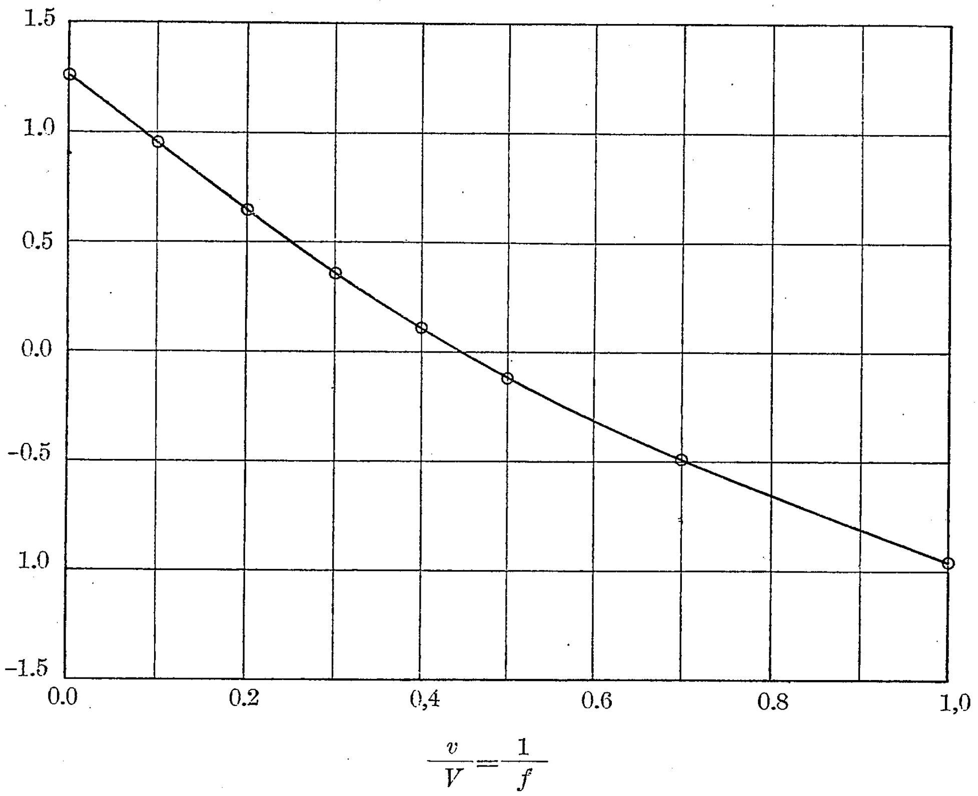
曩に，著者がロビンソン風盃速度計の運動を理論的に論究せる際に，其の特別なる場合の計算——風速の極めて緩漫なる動搖のときに於て，第一近似として cup の中心の速度の風の速度に對する比が變らぬものとして論じたので充分一般なる結果に到達しなかつた．此回はこの比が廣い範圍に渉つて變化すると考へ，Robinson factor の變化，緩やかに風速が變化する風の中での運動を考察した結果を述べる．

2. Mean torque

一樣な風の中で一樣な廻轉速度で運動する際の一廻轉中の平均の torque q を cup の中心の速度の風の速度に對する比 c の函數として決定する．q の種々の値に對する $\frac{q}{r\rho AV^2}$ の値を下に記す．

c	$\frac{q}{r\rho AV^2}$	(2) 式で計算した値
0.0	1.244	1.244
0.1	0.952	0.929
0.2	0.640	0.636
0.3	0.348	0.363
0.4	0.114	0.112
0.5	−0.122	−0.120
0.7	−0.491	−0.518
0.0	−0.961	−0.958

曲線で表せば，第一圖の如くである．



第 1 圖

$\frac{q}{r\rho AV^2}$ の表示式として次の二式を取り.

$$\frac{q}{r\rho AV^2}=a_0+b_0\left(\frac{v}{V}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{q}{r\rho AV^2}=a_1+b_1\left(\frac{v}{V}\right)+c_1\left(\frac{v}{V}\right)^2 \qquad (2)$$

(1) に於ては $\frac{q}{r\rho AV^2}$ の値が 0 となる所で曲線と最もよく合致する如く

係數 a_0, b_0 を決定し, (2) に於ては c の値全體に於て曲線と最もよく合致する如く
係數 a_1, b_1 c_1 を最小自乘法に從つて求めた. (第二第三圖)
其の數値は

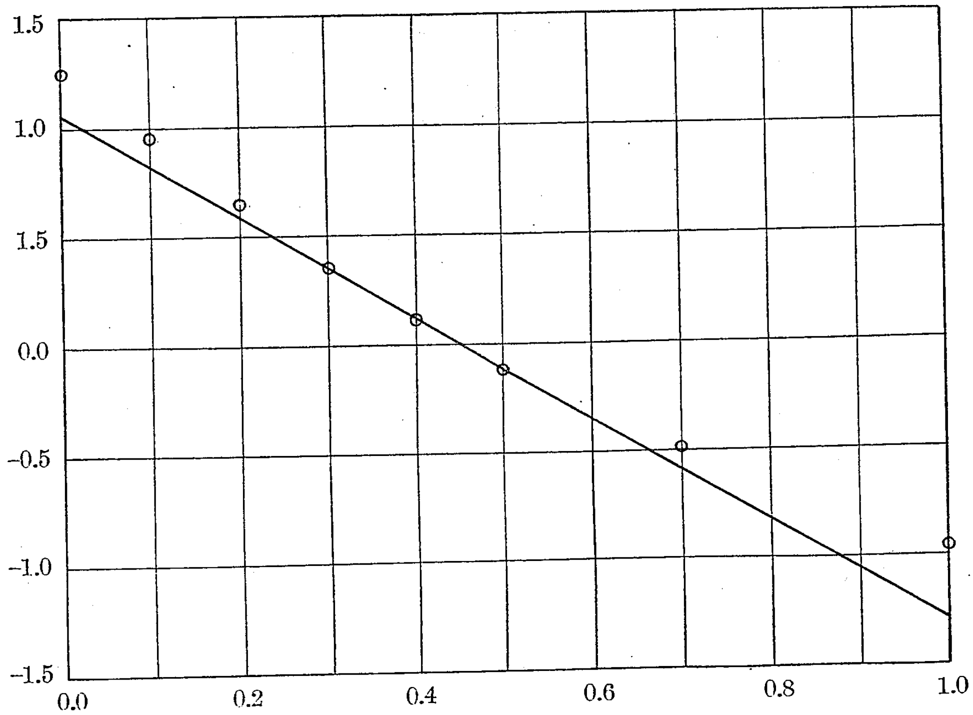
$$a_0=1.051 \qquad b_0=-2.341 \qquad (3)$$

$$a_1=1.344 \qquad b_1=-3.251 \qquad c_1=1.049 \qquad (4)$$

である. 尙

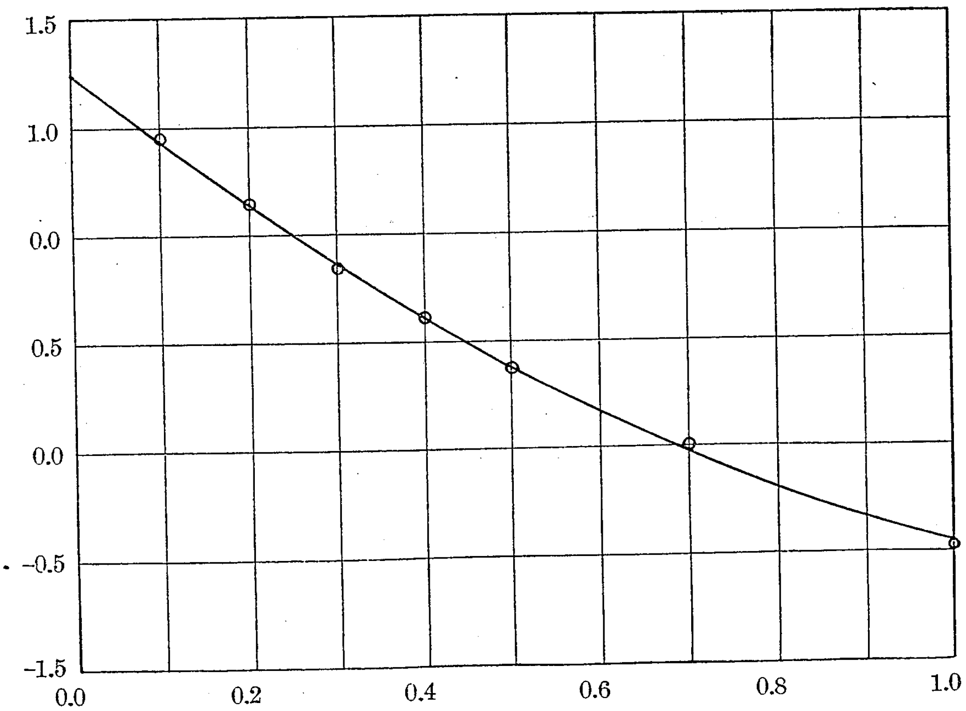
$$\frac{q}{r\rho AV^2}=a_2+b_2\left(\frac{v}{V}\right)^2$$

の如き式はよく曲線を表示する事が出來ぬ故, 以後は (1), (2) の式によつて torque が表



$$\frac{v}{V}=\frac{1}{f}$$

第　2　圖



$$\frac{a}{V}=\frac{1}{f}$$

第　3　圖

現されるものとして考察する. mean torque q は

$$\frac{q}{r\rho A V^2}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{4}\left\{V^2+v^2-2Vv\sin\left(\theta+(k-1)\frac{\pi}{2}\right)\right\}k_n\ (\theta_k-\varphi_k)\ d\theta$$

に從つて計算した.

3. Robinson factor.

V なる速度の一様な風が來るとき, 此の風の與へる torque が frictional torque と平衡して居る故,

$$q\left(\frac{v}{V}\right)=q_{fr.}$$

即ち

$$a_1+2b_1\left(\frac{v}{V}\right)+c_1\left(\frac{v}{V}\right)^2=\frac{q_{fr.}}{r\rho A V^2} \tag{5}$$

$\frac{q_{fr.}}{\rho A r}=C$ とおけば

$$a_1 f^2+2b_1 f+c=\frac{C}{v^2} \tag{6}$$

$$f=\frac{-b_1+\sqrt{b_1^{\ 2}-a_1(c_1-\frac{C}{v})}}{a_1} \tag{7}$$

で Robinson factor f が與へられる. f の性質は前の論文に述べたる如くである. 今回のものは $q_{fr.}$ の相當廣き範圍の變化に對しても正しきものである. $q_{fr.}=0$ として (4) を代入して f を求めると $f=2.237$ を得る.

また.

$$a_0+b_0\left(\frac{v}{V}\right)=\frac{q_{fr.}}{r\rho A V^2}$$

を使へば,

$$a_0 f^2+b_0 f=\frac{C}{v^2}$$

$$f=\frac{-b_0+\sqrt{b_0^{\ 2}-4a_0\frac{C}{v^2}}}{2a_0}$$

を得る. $q_{fr.}=0$ とすれば $f=\frac{b_0}{a_0}=2.227$ となる.

$q_{\mathrm{fr.}}$ が知れたときの Robinson factor を求めるには，風速を V とすれば第三，第四圖の縦座標値が $\dfrac{q_{\mathrm{fr.}}}{r\rho A V^2}$ なる横座標 $\left(\dfrac{v}{V}\right)$ の逆數を取ればよい.

4. 速度の變化が緩漫な風の中の運動

A.

風速が $V=V_0\ (1+\lambda\sin pt)$ で與へられる樣な $\dfrac{2\pi}{p}$ の大きな週期を持つ場合とし，風の與ふる torque は (2) の式で表はされるものとすれば，此の場合の運動方程式は次の樣になる.

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}=r\rho A V_0^{\,2}\ (1+\lambda\sin pt)^2\left\{a_0+b_0\frac{r\dfrac{d\theta}{dt}}{V_0(1+\lambda\sin pt)}\right\}q_{\mathrm{fr.}} \tag{8}$$

$r\dfrac{d\theta}{dt}=v,\ \dfrac{d^2\theta}{dt}=\dfrac{1}{r}\ \dfrac{dv}{dt},\ \ v=v_0+v_1$ とおき，v_0 は V_0 の速度の一樣な風が來た場合のものとする．然らば，上の式は，

$$\frac{dv_1}{dt}+\alpha\ (1+\lambda\sin pt)\ v_1=\beta\sin pt+\gamma\sin^2 pt \tag{9}$$

こゝに，

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=-\frac{J}{r^2\rho A}V_0 b_0\\ \beta&=\frac{\lambda}{J}r\ (a_0V_0^{\,2}\rho A+q_{\mathrm{fr.}})\\ \gamma&=\lambda^2-\frac{r^2\rho A}{J}a_0V_0^{\,2}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

である．(9) の微分方程式を解き，前報告の如く處理すれば 定常狀態の運動式として

$$v_1=\frac{\beta\,(\alpha\sin pt-p\cos pt)}{\alpha^2+p^2}+\frac{\gamma(\alpha^2+4p^2-\alpha^2\cos pt-2\alpha p\sin 2pt)}{2\alpha\ (\alpha^2+4p^2)} \tag{11}$$

を得る．これの平均値を取れば，

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{2\alpha}&=-\frac{a_0V_0}{2b_0}\lambda^2\\ &=0.224V_0\lambda^2\end{aligned}$$

となる．$q_{\mathrm{fr.}}$ には無關係に $22.4\lambda^2\%$ だけ多く廻轉せることゝなる.

B.

次には，前の場合の如く運動方程式の解を求める方法と少し異つて，moment of force の

mean value が zero とならねばならぬ條件より計算する.

こゝでは風の與ふる torque は(1)式で表はされるものとする. 即ち

$$q=r\rho A\left\{a_0V_0^2(1+\lambda\sin pt)^2+b_0V_0(1+\lambda\sin pt)v\right\}$$

moment condition より,

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left\{a_0V_0^2(1+\lambda\sin pt)^2+b_0V_0(1+\lambda\sin pt)v(t)\right\}dt=\frac{q_{\mathrm{fr.}}}{r\rho A}\tag{13}$$

$v(t)$ が Fourier 級數で表はされるものと考へ,

$$v(t)=v_0\left(1+u_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\mu_{m1}\sin mpt+\mu_{m2}\cos mpt)\right)\tag{14}$$

$v(t)$ は週期 $T=\dfrac{2\pi}{p}$ の週期函數と考へても差支へないと思はれるからである.

然らば(13)の moment condition の式は,

$$a_0V_0^2\left(1+\frac{\lambda^2}{2}\right)+b_0V_0v_0\left(1+u_0+\frac{\lambda\mu_{11}}{2}\right)=\frac{q_{\mathrm{fr.}}}{r\rho A}\tag{15}$$

v_0 は $\lambda=0$ のときの moment condition を滿すものとすれば,

$$a_0V_0^2+b_0V_0v_0=\frac{q_{\mathrm{fr.}}}{r\rho A}\tag{16}$$

となる. (15) を u_0 につきて解けば,

$$u_0=-\frac{a_0V_0^2\dfrac{\lambda^2}{2}+b_0V_0v_0\dfrac{\lambda\mu_{11}}{2}}{b_0V_0v_0}$$

$\dfrac{V_0}{v_0}=f$ とすると

$$u_0=-\frac{a_0f\dfrac{\lambda^2}{2}+b_0f_0\dfrac{\lambda\mu_{11}}{2}}{b_0}\tag{17}$$

となる. u_0 が廻轉數增加を與へるものである.

(1). Moment of inertia が極めて大きく, λ が大きくないときには, v は殆んど一定と考へてよい場合がある. このときは $\mu_{11}=0$ としてよいから,

$$u_0=-\frac{a_0}{b_0}\frac{\lambda^2}{2}f\tag{18}$$

$a_0=1.051$, $b_0=-2.341$ を代入すると,

$$u_0=+0.224V_0\lambda^2$$

となり v の增加は,

$$v_0 u_0 = +0.224 V_0 \lambda^2$$

となり(A)の場合の結果と全く一致する.

從つて(A)に得た結果は實は J が極めて大なる場合に相當するものと思はれる.

(2). Moment of inertia が大きい場合.

此の場合には，週期的可變部分の初めの項のみが有效であると考へ，

$$v(t) = v_0 \, (1 + u_0 + u_t + \mu_{11} \sin pt + \mu_{12} \cos pt) \tag{19}$$

これを運動方程式

$$\frac{J}{r} \frac{dv}{dt} = r\rho A V^2 \left(a_0 + b_0 \frac{v}{V} \right)$$

入れて依數 μ_{11} を求めると，

$$\mu_{11} = \lambda b_0 \frac{2a_0 f + b_0(1 + u_0 + u_t)}{\frac{a_0^2}{V_0^2} - b_0^2} \tag{20}$$

$$\left(a_0 = \frac{Jp}{r^2 \rho A} \right)$$

となつて，從つて

$$u_t = -\frac{\lambda^2}{2} \frac{2a_0 b_0 f + b_0^2}{\frac{a_0^2}{V_0^2} \left(1 - \frac{b_0^2 V_0^2}{a_0^2} \right)} = -\lambda^2 \frac{V_0^2}{a_0^2} \frac{a_0 b_0 f + \frac{b_0^2}{2}}{1 - \frac{b_0^2 V_0^2}{a_0^2}}$$

$\dfrac{b_0^2 V_0^2}{a_0^2} \ll 1$ ならば，

$$\fallingdotseq -2.698 \frac{V_0^2}{J^2 p^2} r^4 \rho^2 A \lambda^2 \tag{21}$$

となる.

$$v_{\text{mean}} = v_0 \, (1 + u_0 + u_t)$$

$$= v_0 \left(1 - \frac{a_0}{b_0} f \frac{\lambda^2}{2} \lambda^2 V_0^2 \frac{a_0 b_0 f + \frac{b_0^2}{2}}{J^2 p^2} r^4 \rho^2 A^2 \right) \tag{22}$$

故に，J が減少するに從つて，或ひは風速 V_0 が增加するに從つて，v_{mean} は v_0 に近づく.

(3). Moment of inertia が小なる場合.

此の場合は更に order の高き項をも入れて計算するので(11)の結果を使用して μ_{11} を決定すると，

$$\mu_{11} = \frac{1}{v_0} \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + p^2} = -\lambda b_0 f \left(\frac{a_0 V_0^2 r^4 p^2 A^2}{J^2} + \frac{q_{\text{fr.}} r^3 \rho A}{J} \right) \frac{1}{p^2 + \frac{r^4 \rho^2 A^2 V_0^2 b_0^2}{J^2}} \tag{23}$$

J が大として (2) の場合の計算をすれば全く同一の結果となる.

J が小, $q_{fr.}=0$ とすると　$p^2 \ll \dfrac{r^4\rho^2 A^2 V_0{}^2 b^2}{J^2}$

$$\mu_{11}=+\lambda\frac{a_0}{b_0}f\frac{p^2J^2}{r^4\rho^2A^2V_0{}^2b^2}-\lambda\frac{a_0}{b_0}f$$

となり,

$$u_0=-\frac{\lambda^2}{2}\frac{a_0}{b_0{}^3}f\frac{J^2p^2}{(r^2\rho A V_0)^2} \tag{24}$$

となる. この数値は正確となり, J^2p^2 に比例して增加する.

(4) Moment of inertia が 0 の場合.

$J=0$ であるから少しの遲れもなく, 風速計は V に追從して廻轉する故, (24) よりも解る如く $u_0=0$ となる. 卽ち正しき風速の平均値を與へる.

C.

風の與へる torque が (2) 式で表はされる場合.

$a_1=a,\ b_1=2b,\ c_1=c$ として,

$$q=r\rho A\{aV_0{}^2(1+\lambda\sin pt)^2+2bv(t(V_0(1+\gamma\sin pt)+cv^2(t)\} \tag{25}$$

$v=v_0+v_1$ とおき, v_0 が

$$aV_0{}^2+2bV_0v_0+cv^{02}=\frac{q_{fr.}}{r\rho A}$$

を滿すものとすれば,

$$\frac{q-q_{fr.}}{r\rho A}=2(bV_0+\lambda bV_0\sin pt+cv_0)v_1+cv_1{}^2$$
$$+2\lambda(aV_0{}^2+bv_0V_0)\sin pt+\lambda^2aV_0{}^2\sin^2 pt$$

(1). J が極めて大にして $v_1(t)=v_1=\mathrm{const.}$ と考へてよいとき,

momont condition

$$\int_0^T\frac{q-q_{fr.}}{r\rho A}=0$$

より c_1 を求めると,

$$cv_1{}^2+2(bV_0{}^2+cv_0)v_1+aV_0{}^2\frac{\lambda^2}{2}=0$$

$$v_1=-\left(\frac{b}{c}V_0+v_0\right)+\sqrt{\left(\frac{b}{c}V_0+v_0\right)^2-\frac{aV_0{}^2\lambda^2}{2c}}$$

$$v_1\fallingdotseq-\frac{\lambda^2}{4}\frac{aV_0}{b+c\dfrac{v_0}{V_0}}$$

$$\frac{v_1}{v_0} \doteqdot -\frac{\lambda^2}{4}\frac{af^2}{bf+c} \tag{28}$$

の結果を得る.

次に, $v_1(t)$ が次の式で表はされる場合を考へる.

$$v_1(t)=v_0\left(v_m+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k1}\sin kp+t\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k2}\cos kpt\right) \tag{29}$$

この場合 moment condition は,

$$aV_0^2\frac{\lambda^2}{2}+2\,(bV_0+cv_0)\,v_0v_m+2\lambda bV_0v_0\frac{\mu_{11}}{2}$$
$$+cv_0^2v_m^2+\frac{cv_0^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_{k1}^2+\mu_{k2}^2)=0 \tag{30}$$

この式で v_m を求めるのであるが, μ_{11}, μ_{k1}, μ_{k2} が未知であるからこれらを運動方程式より求める.

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0&=\frac{r^2\rho A}{J}2\,(bV_0+cv_0)\\
\alpha_1&=\frac{r^2\rho A}{J}2\lambda bV_0\\
\alpha_2&=\frac{r^2\rho A}{J}c\\
\alpha_3&=\frac{r^2\rho A}{J}2\lambda\,(aV_0^2+qV_0v_0)\\
\alpha_4&=\frac{r^2\rho A}{J}\lambda^2aV_0^2
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

とおけば, 運動方程式は

$$\frac{dv_1}{dt}=(\alpha_0+\alpha_1\sin pt)\,v_1+\alpha_2v_{12}+\alpha_3\sin pt+\alpha_4\sin^2pt \tag{32}$$

となる. これに(29)を入れて μ_{11}, μ_{12} を求めると,

$$\mu_{11}=\frac{1}{p}\,(\alpha^0+2\alpha_1v_0v_m)\,\mu_{12}$$

$$\mu_{12}=-\frac{1}{p}\left\{\frac{\alpha_3}{v_0}+\alpha_1v_m+(\alpha_0+2\alpha_2v_0v_m)\,\mu_{11}+\alpha_2v_0\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k+1,1}\mu_{k2}\right\}$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k1,1}\,\mu_{k2}$ を省略して μ_{11}, μ_{12} を求めると,

$$\mu_{11}=-\frac{\left(\frac{\alpha_3}{v_0}+\alpha_1v_m\right)(\alpha_0+2\alpha_2v_0v_m)}{p^2+(\alpha_0+2\alpha_2v_0v_m)^2}$$

$$\mu_{12}=-\frac{\frac{\alpha_3}{v_0}+\alpha_1 v_m}{p^2+(\alpha_0+2\alpha_2 v_0 v_m)}p$$

となり moment condition は,

$$\frac{aV_0^2\lambda^2}{2}+\alpha_0 v_0 v_m-\lambda bV_0 v_0\frac{\left(\frac{\alpha_3}{v_0}+\alpha_1 v_m\right)\left(\alpha_0+2\alpha_2 v_0 v_m\right)}{p^2+(\alpha_0+2\alpha_2 v_0 v_m)_2}$$

$$+cv_0^2 v_m^2+\frac{cv_0^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_{k1}^2+\mu_{k2}^2)=0 \quad (33)$$

となる.

(2) Moment of inertia が大きい場合

(33) を簡單にする事が出來て, v_m を求めると $p^2\gg(\alpha_0+2\alpha_2 v_0 v_m)^2$ ならば, 近似的に

$$v_m=-\frac{aV_0^2\frac{\lambda^2}{2}}{2(bV_0+cv_0)}+\frac{\lambda^2 r^4\rho^2 A^2}{J^2p^2}2b(aV_0^2+bV_0v_0)V_0 \quad (34)$$

を得る. 第一項は $J=\infty$ の場合に相當し, 第二項は負値で J^2p^2 に反比例して減少することを示す.

(3) Momentof inertia が小さい場合.

風速大にして J が小なる場合は矢張 J^2p^2 に比例する影響が現はれる.

$J\to 0$ の場合は勿論 $v_m\to 0$ となる.

尙. μ_{21}, μ_{22}……の高次の係數をも考慮すれば更に精確な結果が出る.

D.

J が非常に大きいときには, 風速の週期的變動の形が一般的なる場合にも容易に計算出來

$T=\frac{2\pi}{p}$ るなる週期を持つならば,

$$V=V_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k1}\sin kpt+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{k2}\cos kpt\right) \quad (35)$$

なる形に表現する事が出來る. moment condition より

$$aV_0^2\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k1}+\lambda^2_{k2}}{2}\right)+2bV_0v+cv^2=\frac{q_{\text{fr.}}}{r\rho A}$$

$v=v_0(1+v_1)$ とおき, $aV_0^2+2bV_0v_0+cv_0^2=0$ とおけば,

$$v_1=-\left(\frac{b}{c}f+1\right)+\sqrt{\left(\frac{b}{c}f+1\right)^2-\frac{a}{c}f^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k1}^2+\lambda_k^2}{2}} \quad (36)$$

$c=0$ なる場合は,

$$v_1=-\frac{a_0}{b_0}f\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k1}^2+\lambda_{k2}^2}{2} \quad (37)$$

となる．例へば，次の圖の様な場合には，

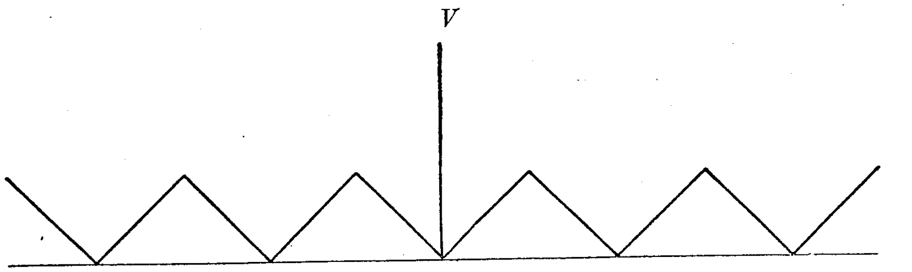
$$V=V_0\left\{1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)pt}{(2k-1)^2}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k_2}{}^2}{2}=\frac{32}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{32}{96}=0.333$$

$$\therefore\quad v_1=-\frac{a_0}{b_0}f\ 0.333$$

となるが如きである．



第　4　圖

5，結　　言

ロビンソン風盃速度計の受けるtorqueの表現式を求めそれに從つてRobinson factorの變化の様子を廣い範圍で正しき式にて調べ，風速の動搖の影響をmoment of inertiaの大さに依つて如何に異るかを詳細に調べた．前報告に於ては迎角の變化を無視した爲に，著しく小さな影響であつたが，今度の結果は相當大きいので，實驗にて驗證する積りである．尚，玆に述べたgustの影響の計算の仕方はvane anemometerにも適用ができる故，これも調べる積りである．(昭和十年五月)

正　誤　表

〔彙報第百三十一號.　ロビンソン風盃速度計の理論（續報）〕

頁		誤	正
572	下より2行目	0.0	1.0
581	上より10行目	$\mu_{11}=\lambda b_0\dfrac{''}{\dfrac{a_0^2}{V_0^2}-b_0^2}$	$\mu_{11}=-\lambda b_0\dfrac{''}{\dfrac{a_0^2}{V_0^2}+b_0^2}$
	上より15行目	$u_t=-\dfrac{\lambda^2}{2}\dfrac{''}{\dfrac{a_0^2}{V_0^2}\left(1-\dfrac{b_0^2V_0^2}{a_0^2}\right)}$	$u_t=+\dfrac{\lambda^2}{2}\dfrac{''}{\dfrac{a_0^2}{V_0^2}\left(1+\dfrac{b_0^2V_0^2}{a_0^2}\right)}$
	上より20行目	……$\dfrac{a_0}{b_0}f\dfrac{\lambda^2}{2}\lambda^2V_0^2$……	$\dfrac{a_0}{b_0}f\dfrac{\lambda^2}{2}+\lambda^2V_0^2$……
583	下より 4 行目	……$)\mu_{12}$	……$\mu_{12}+\dfrac{2}{p}a_2v_0\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k+1,1}\mu_{k,1}+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k+1,2}\mu_{k,2}\right\}$
	下より 3 行目	$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_{k+1,1}\mu_{k2}$	$\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_{k+1,1}\mu_{k2}-\mu_{k1}\mu_{k+1,2})$