

弾性的片持翼の屈曲-振りフラッターの研究

(第三報, 減衰力聯成の影響)

所 員 妹 澤 克 惟
内 田 郁 雄

1. 弾性的片持翼の屈曲振り振動の理論

弾性的片持翼の屈曲振りフラッターの模型実験及びその數理的分析の結果を二回に涉つて報告して置いた。(1)(2) 自由振動の場合にも強制振動の場合にも聯成振動の效果的減衰係数が最も大切であつて、この係数が零になると自由振動のときにはそれが不安定となつてフラッターが現れ、又、強制振動のときにはその共振の振幅が無限大になる傾向のあることがわかつたのである。

しかし數理的取扱に出て来る係数の中には實驗的に前以て簡單に出し得ぬやうなものもあるのである。それでこの前の計算ではフラッターの起る風速及び各風速に於ける振動數や振動減衰係数から逆に前記の係数を出したところもあつた譯である。前以て簡單に出し難い係数とは次の自由振動の方程式

$$A_1 z + (B_0 + B_1 V) z + EI \frac{d^4 z}{dx^4} + G_1 \ddot{\theta} + J_1 V \dot{\theta} + K_1 V^2 \theta = 0, \dots\dots(1)$$

$$A_3 z + B_3 V z + G_3 \ddot{\theta} + (J_0 + J_3 V) \dot{\theta} + K_3 V^2 \theta - \mu \frac{d^2 \theta}{dy^2} + \sum_m E_m I_m l_m^2 \frac{d^4 \theta}{dx^4} = 0 \dots\dots(2)$$

に於ける J_1, B_3 なる係数のことである。

上式を解くに當つて前以て注意すべき點は振りが聯成しない場合の翼の振動の Eigenvalue を考へて置くことである。例へば振り振動に於て $\theta = T\Theta$ とすれば

$$\frac{G_3 \dot{T}}{T} + \frac{(J_0 + J_3 V) \dot{T}}{T} = -\alpha, \dots\dots(3)$$

$$-K_3 V^2 + \mu \frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\sum_m E_m I_m l_m^2 \Theta''''}{\Theta} = -\alpha \dots\dots(4)$$

なる関係ができるから、

$$\alpha = G_3 n^2 \dots\dots(5)$$

となる。但し $n^2 = n_2^2 + k^2$, $n_2 = 2\pi$ 振動數, $k = (J_0 + J_3 V)/2G_3 =$ 減衰係數である。(4) から

$$\mu \frac{\Theta''}{\Theta} - \frac{\sum_m E_m I_m l_m^2 \Theta''''}{\Theta} = -c \quad (c = \text{定數}) \dots\dots(6)$$

(1) 妹澤, 向井, “弾性的片持翼の屈曲-振りフラッターの研究” 航研彙報第169號 (昭和13年9月), 478—495.

(2) 妹澤, 向井, “同第2報, 強制振動の模型實驗”, 航研彙報第170號 (昭和13年10月), 572—580.

でなければならぬ。 $\mu = 0$ の場合には

$$\sum_m E_m I_m l_m^2 \theta'''' = (\alpha - K_3 V^2) \theta, \dots\dots\dots(7)$$

$\sum_m E_m I_m l_m^2 = 0$ の場合には

$$\mu \theta'' + (\alpha - K_3 V^2) \theta = 0 \dots\dots\dots(8)$$

なる関係が出る。(7), (8) 何れの場合にも

$$\alpha - K_3 V^2 = c \dots\dots\dots(9)$$

であつて、片持翼の両端の条件が與へられてをれば、 $c/\sum_m E_m I_m l_m^2$ なり、 c/μ なりが夫々一定の値を取る事になるのである。換言すれば Eigen-value を取ることになるのである。

只今の場合に自己振動の實驗から μ や $E_m I_m$ を出す代わりにその振動數から (5) を用ひて直接に α を出したのである。振り振動數は 15.5/毎秒であつた。

さて前の實驗の場合に近い A_1, B_0, \dots 等の數値を出して見ると次の如くなる。その出し方は前回と同様であるから省略する。

$$\begin{aligned} A_1 &= 1.85 \text{ gms/cm}, \quad B_0 = 3.7 \text{ gms/cm. sec}, \\ B_1 &= \frac{B - B_0}{V} = \frac{2.3 \cdot 3.185 - 3.7}{500} = 1.74 \cdot 10^{-2} \text{ gms/cm}^2, \\ EI &= 6.01 \cdot 10^8 \text{ cm}^3 \cdot \text{gms/sec}^2, \\ EIc^4 &= 8.52 \cdot 10^3 \text{ gms/cm, sec}^2, \quad (c \text{ は (7) の解の argument}) \\ A_3 &= G_1 = -sA_1 = -1.56 \text{ gms}, \\ K_1 &= -B_1 = -0.174 \text{ gms/cm}^2, \\ G_3 &= 19.96 + 5.8 \sqrt{3.6^2 + 3^2} / 32.9 = 20.8 \text{ gms. cm}, \\ J_0 &= 61.7 \text{ gms. cm/sec}, \\ \alpha &= 2.247 \cdot 10^5 \text{ gms. cm/sec}^2, \\ K_3 &= \frac{\alpha \left(1 - \frac{n_5^2}{n_0^2}\right)}{V^2} = \frac{2.247 \cdot 10^5 \times 0.06}{2.5 \cdot 10^5} = 5.39 \cdot 10^{-2} \text{ gms/sec}, \\ J_3 &= K_3 \left(\frac{l}{2} - e\right) = 5.39 \cdot 10^{-2} \left(\frac{12}{2} - 4.4\right) = 8.62 \cdot 10^{-2} \text{ gms} \end{aligned}$$

J_3 の値は別の實驗から正確に出した結果、少しく異なる値になるが、この計算のときには上の値で試みたのである。上の數値から漏れてをるのは J_1, B_3 なる聯成減衰力の係數である。

2. 種々の J_1, B_3 に対するフラッターの限界速度

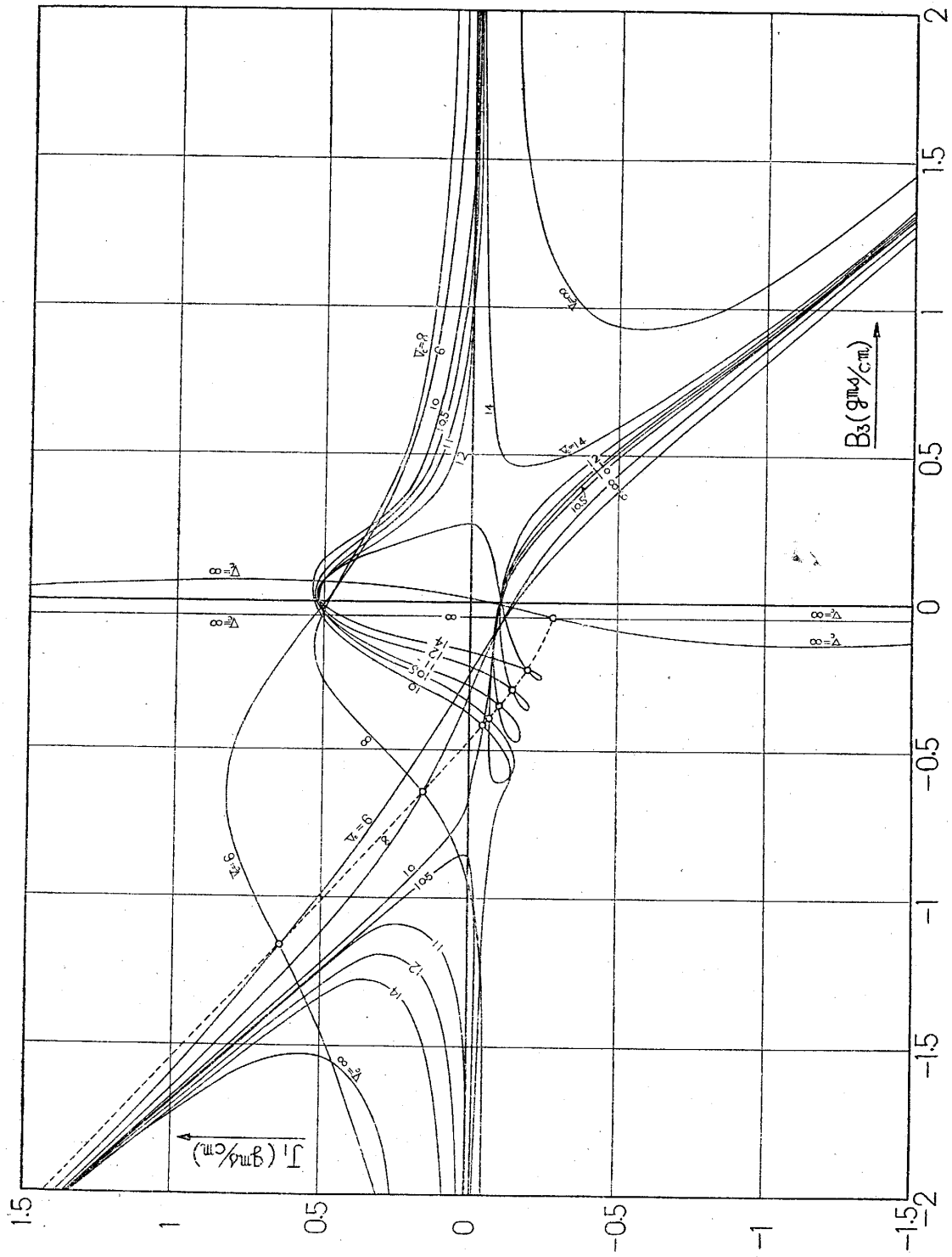
J_1, B_3 を直接測定して出すことは只今別に研究中であるが、本文の研究のときには、種々の J_1, B_3 を與へて如何なる限界速度や振動數が出るかといふ試みをなしたのである。

計算には前回の數式の關係を用ひた。之を再び詳しく記載することは煩しいから省略して示すと次の如くなる。

$$a = a_1, \quad b = b_1 + b_2 (J_1 + B_3), \quad c = c_1 + c_2 J_1 B_3, \quad d = d_1 + d_2 B_3, \quad e = e$$

となる。之から X を作ると

(3) 妹澤, 向井, 前掲 (1), 第 (17) 式。



第1圖 種々の B_3, J_1 に於ける限界速度

$$\begin{aligned}
X = & b_2 \{c_2 (d_1 + d_2 B_3) B_3 - b_2 e\} J_1^2 \\
& + [(b_1 + b_2 B_3) \{c_2 (d_1 + d_2 B_3) B_3 - b_2 e\} \\
& + b_2 \{c_1 (d_1 + d_2 B_3) - e (b_1 + b_2 B_3)\}] J_1 \\
& + \{(b_1 + b_2 B_3) c_1 (d_1 + d_2 B_3) - a (d_1 + d_2 B_3)^2 \\
& - e (b_1 + b_2 B_3)^2\}.
\end{aligned}$$

前節に與へた係数は一定にして、限界風速 V_G が (i) ∞ , (ii) 14 m/s, (iii) 12 m/s, (iv) 11 m/s, (v) 10.5 m/s, (vi) 10 m/s, (vii) 8 m/s, (viii) 6 m/s になるやうな J_1, B_3 の値を出すことにした。第1圖の如く横軸に B_3 , 縦軸に J_1 を取り、各種の限局風速に相當する $B_3 - J_1$ の關係を示してある。

この圖に示した結果を見ると、甚だ複雑ではあるが相當面白い關係になつてをる事がわかる。極く大づかみに見ると双曲線の場合に多少似た性質が含まれてをる。而して曲線の性質上から3種の場合に分類される。

第1の場合は曲線の枝が双曲線の如き兩枝及び原點附近の閉曲線又は非閉曲線との3枝に分れてをるもの、

第2の場合は双曲線の如き枝の一方が原點附近の閉曲線と連続し、結局は全體として2枝から成るもの、

第3の場合は双曲線の如き枝の兩方が原點附近の閉曲線と連続し、結局は全體が通じるもの、但しこの場合には双曲線のときの漸近線の如く2枝が相交つて存在するものになる。

只今の例では (i) $V_G = \infty$, (ii) $V_G = 14$ m/s が第1の場合に屬し, (iii) $V_G = 12$ m/s, (iv) $V_G = 11$ m/s, (v) $V_G = 10.5$ m/s が第2の場合に當り, (vi) $V_G = 10$ m/s, (vii) $V_G = 8$ m/s, (viii) $V_G = 6$ m/s が第3の場合になつてをることがわかる。

第1の場合に於ける原點附近の曲線、第2の場合即ち2種のもものが連続せる場合の原點附近の曲線には必ず1個の二重點が出来る。而して各 V_G に對する之等の二重點は破線の如く一つの連続せる曲線上に乗り、而も第3の場合に屬する2曲線の交點とも同じ曲線上に在る事がわかる。

以上の如く $B_3 - J_1$ の分布は平面幾何學的に面白い性質を示してをるのである。

3. $J_1 - B_3$ の性質

第1圖に掲げた曲線はフラッターになる限界の $J_1 - B_3$ を與へた譯である。故に曲線を境として一方の部分ではフラッターが起り、他の部分ではそれが起らないのである。

例へば (i) $V_G = \infty$ の場合は $B_3 > 0, J_1 < 0$ で各の絶対値が相當大なるときか、 $B_3 < 0, J_1 > 0$ で各の絶対値が相當大きいときか、又は $B_3 = 0$ の附近の細長い部分中にある J_1 の値のときには、 $V_G = \infty$ でもフラッターが起り得ない、(ii) $V_G = 14$ m/s のときには $B_3 > 0, J_1 < 0$ で各の絶対値が可なり大きいときか、 $B_3 < 0, J_1 > 0$ で各の絶対値が相當大きいときか、 B_3, J_1 が何れも小さく且つ特定の値になるときはフラッターが起らない。(iii) $V_G = 6$ m/s の場合でも $V_G = \infty$ の場合の B_3, J_1 に近いが相當變化せる B_3, J_1 の關係でフラッターが起らない。

$V_G = \infty$ の場合の二重點は原點附近の2枝の交叉點になつてをり、前節に述べた二重點の軌跡は實はこの點から始まつてをるのである、

何れにしても $B_3 \ll 0$ でない以上は $J_1 > 0$ の相當廣い範圍に涉つて如何なる風速でも

フラッターが起り得るし、又、 $B_3 > 0$ でない以上は $J_1 < 0$ の相當廣い範圍に涉つて如何なる風速でもフラッターが起り得る事がわかる。即ち J_1 なる値はフラッターに非常に關係のある事がわかる。

(1), (2) を見ると J_1 なる係数は翼の僅かの迎角變化速度によつて屈曲振動の減衰が影響されることを示してをる。故に翼に捩れ振動が起つてもその空氣力學的減衰力が翼の上下振動には影響を與へぬやうになつてをること、換言すれば捩り減衰力の中心が捩れ軸の中心と一致してをれば、フラッターが相當の程度まで防げることを意味するのである。

尙、注意すべき事は、 $V_0 = \infty$ でもフラッターが起らぬ $B_3 - J_1$ の組合せに於ては有限の風速でフラッターが起らぬといふ事にはならないのである。前節に述べた分類中で第1類のもの即ち3枝からなるものでは J_1, B_3 の絶對値を零から増加し第1枝から外へ出るとフラッターになり、第2又は第3枝を通過した後は再びフラッターが無くなるのである。第2類のものでは、第1枝と第2枝と連續せる場合には適當の J_1 と B_3 の組合せになるやうに調整して行けば如何なる速度でもフラッターにならぬ事を意味する譯である。

4. 限界速度に於ける振動數と減衰係數

限界速度に於ける振動數と減衰係數とは比較的容易に出し得る事はしばしば論じてある。あらゆる速度に於けるそれ等は後に述べる事にする。

限界速度が 14 m/s になる場合と 6 m/s になる場合の $B_3 - J_1$ の組合せを第1圖から取出し之を夫々第2圖、第3圖に破線を以て一應畫いてある。この圖の上に更に B_3 を横軸に取り、それに相當する振動數 $p/2\pi$ (秒⁻¹)、 $q/2\pi$ (秒⁻¹) 及び $p/2\pi$ に相當する増幅係數(負の減衰係數) ξ (秒⁻¹) を出して置いた。第2圖中の曲線中の點で後に吟味したい點を (a), (b), (c) …… を以て示してある。又、曲線同志の相當部分は I, II で區別してある。

第2圖、第3圖の場合に減衰係數 ξ が正の値になつてをるのは $p/2\pi$ に相當する振動までもフラッターになつてをる事を意味する。

第2圖の場合には $B_3 - J_1$ 曲線の第1枝の二重點から左の部分及び第3枝に相當する減衰係數 ξ は正の符號であり、 $p/2\pi$ の振動もフラッターになつてをるのである。

第3圖の場合には $B_3 - J_1$ 曲線の2枝が相交る事は既に示した通りであるが、この交點より左の B_3 に對しては ξ が正となり、 $p/2\pi$ の振動のフラッターが起るのである。

$p/2\pi$, $q/2\pi$ の振動數も B_3, J_1 によりて著しく變り、 $B_3 - J_1$ 曲線の二重點を境として振動數の値も相入れ代ることがわかる。

5. 任意の速度に於ける振動數と減衰係數の計算法

前節に述べた振動數及び減衰係數は限界速度の場合にのみ限られてをるのである。任意の速度に於ける振動數と減衰係數とを出す譯には行かぬものか。略算法を用ひて之等の値を出す事は既に試みたけれども、數學的に正確な運算法は未だ出してなかつたのである。今度我等の一人(内田)の努力によつて正確なる運算の方がむしろ容易な事がわかつた。

前回の報告に於て一般に自己振動數 p, q と増幅係數(負の減衰係數) ξ, η との間に次の關係

(4) 前掲 (1).

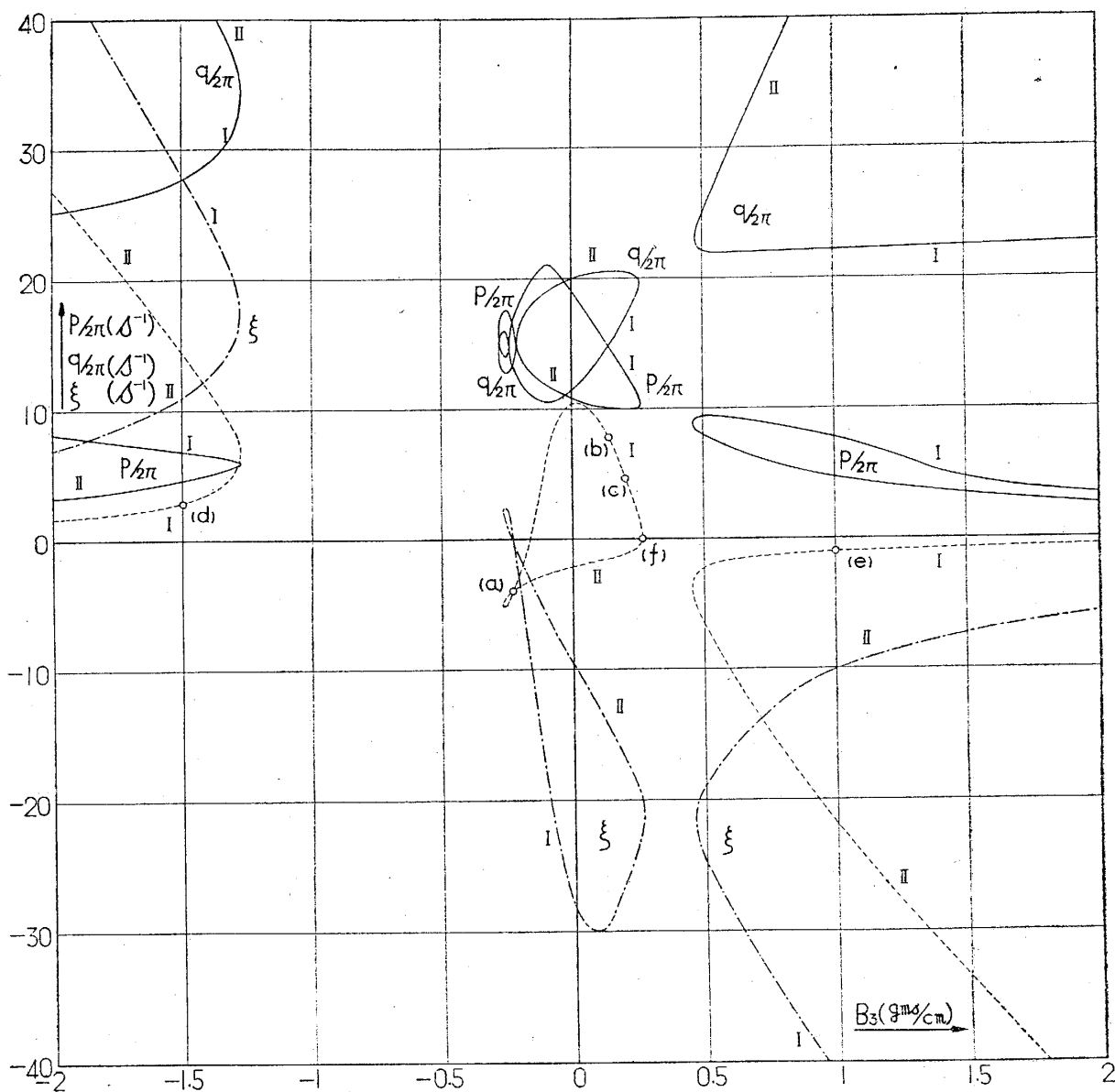
$$\left. \begin{aligned} 2(\xi + \eta) &= -b/a, \\ \xi^2 + p^2 + 4\xi\eta + \eta^2 + q^2 &= c/a \\ 2\xi(\eta^2 + q^2) + 2\eta(\xi^2 + p^2) &= -d/a, \\ (\xi^2 + p^2)(\eta^2 + q^2) &= e/a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

の存在する事を示して置いた. 今, 之を解く爲に

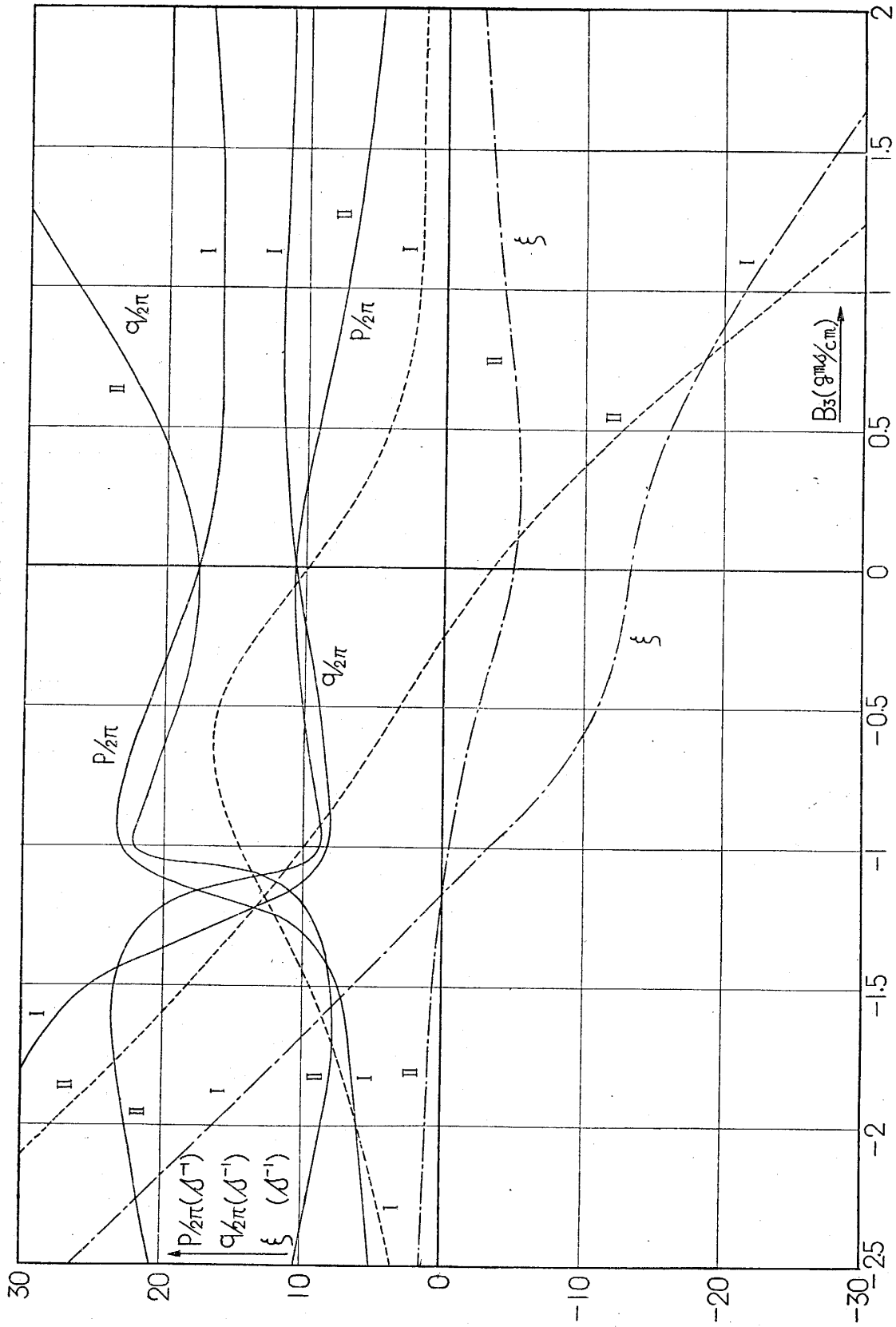
$$\left. \begin{aligned} \xi^2 + p^2 &= X, \quad \eta^2 + q^2 = Y, \\ -b/2a = a', \quad c/a = b', \quad -d/2a = c', \quad e/a = d' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

と書けば, (10) は

$$\xi + \eta = a, \quad X + Y + 4\xi\eta = b', \quad \dots\dots\dots(12), (13)$$



第 2 圖 $V_G = 14 \text{ m/s}$ の場合の $B_3 - J_1$ 曲線, 振動数, 減衰係数



第3圖 $V_G = 6m/s$ の場合 $B_3 - J_1$ 曲線, 振動数, 減衰係数

$$\eta X + \xi Y = c', \quad XY = d' \dots\dots\dots(14), (15)$$

に變る。(12), (14) から

$$\xi = \frac{a'X - c'}{X - Y}, \quad \eta = -\frac{a'Y - c'}{X - Y} \dots\dots\dots(16)$$

を作り、之を(13) 入れると次式が作られる。

$$(X + Y) - \frac{4\{a'^2XY - a'c'(X + Y) + c'^2\}}{(X + Y)^2 - 4XY} = b'. \dots\dots\dots(17)$$

(15) の関係を用ひ

$$(X + Y) - \frac{4\{a'^2d' - a'c'(X + Y) + c'^2\}}{(X + Y)^2 - 4d'} = b'. \dots\dots\dots(18)$$

$$X + Y = r \dots\dots\dots(19)$$

と置けば(18) は

$$r^3 - b'r^2 + 4(a'c' - d')r + 4(b'd' - a'^2d' - c'^2) = 0. \dots\dots\dots(20)$$

$$r = r' + \frac{b}{3} \dots\dots\dots(21)$$

と書けば(20) は

$$r'^3 + 3pr' + 2q = 0 \dots\dots\dots(22)$$

但し

$$p = -\left(\frac{b'}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}(a'c' - d'),$$

$$q = -\left(\frac{b'}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}b'(a'c' - d') + 2(b'd' - a'^2d' - c'^2) \dots\dots\dots(23)$$

である。

(i) $q^2 + p^3 > 0$ の場合には(22) は1個の實根 r_1' と2個の虚數 r_2', r_3' を有し、

$$r_1' = u + v, \quad r_2' = \alpha_1 u + \alpha_2 v, \quad r_3' = \alpha_2 u + \alpha_1 v \dots\dots\dots(24)$$

となる。但し $\alpha_1, \alpha_2 = -(1 \pm \sqrt{3}i)/2$, $u, v = \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{q^2 + p^3}}$ である。

(ii) $q^2 + p^3 = 0$ の場合には3個の實根があり、

$$r_1' = 2\sqrt[3]{q}, \quad r_2', r_3' = -\sqrt[3]{q}. \dots\dots\dots(25)$$

(iii) $q^2 + p^3 < 0$ の場合には $\cos u = q/(p\sqrt{-p})$, $0 < u < \pi$ として

$$r_1' = 2\sqrt{-p} \cos \frac{u}{3}, \quad r_2' = 2\sqrt{-p} \cos \left(\frac{u}{3} + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$r_3' = 2\sqrt{-p} \cos \left(\frac{u}{3} + \frac{4\pi}{3}\right). \dots\dots\dots(26)$$

之等から(21) を用ひて $X + Y (= r)$ の値を出す事ができる。従て(15) を入れ、

$$X + Y = r, \quad XY = d' \dots\dots\dots(19'), (15')$$

によつて X, Y が定まる。(12), (14) によつて ξ, η が出るし、(11) によつて p^2, q^2 が求められる。

數値を入れて計算した結果を次節に示してある。

6. 任意の速度に於ける振動數と減衰係數

前節の數式を利用して任意の速度に於ける振動數 $p/2\pi$, $q/2\pi$ と減衰係數 $(-\xi)$, $(-\eta)$ とを算出して見る。但し限界速度は 14 m/s であるが、 B_3, J_1 については次の如く別々の場

合を取つて見たのである、之等の (a), (b), (c) …… の $B_3 - J_1$ の點は第2圖中にも記してある。

- (a) $B_3 = -0.228$ gms/cm, $J_1 = 0.196$ gms/cm (一つの二重點に當る),
- (b) $B_3 = 0.14$ gms/cm, $J_1 = 0.39$ gms/cm,
- (c) $B_3 = 0.20$ gms/cm, $J_1 = 0.23$ gms/cm,
- (d) $B_3 = -1.5$ gms/cm, $J_1 = 0.145$ gms/cm,
- (e) $B_3 = 1$ gms/cm, $J_1 = -0.05$ gms/cm,
- (f) $B_3 = 0.262$ gms/cm, $J_1 = 0$.

之等の場合につき計算した結果が第4(a)圖～第4(f)圖に示してある。何れの場合にも振動數の低い方を $p/2\pi$, 高い方を $q/2\pi$ に取る, 而して $V_0 = 14$ m/s で減衰係數が零になるのは (a) 以外は η の方である。(d) の場合には $V_0 = 14$ m/s で $(-\eta)$ が正から負に轉じ, 且つ $(-\xi)$ の方がもつと低い速度で零になつてしまふ。

低い速度で $(-\xi)$ の値が負になるのは B_3 が負の場合になつてゐるやうである。之は $p/2\pi$ の振動が卓越屈曲振動であり, $q/2\pi$ の振動が卓越振り振動であるといふ見做し方からいふと多少不思議に思はれる。

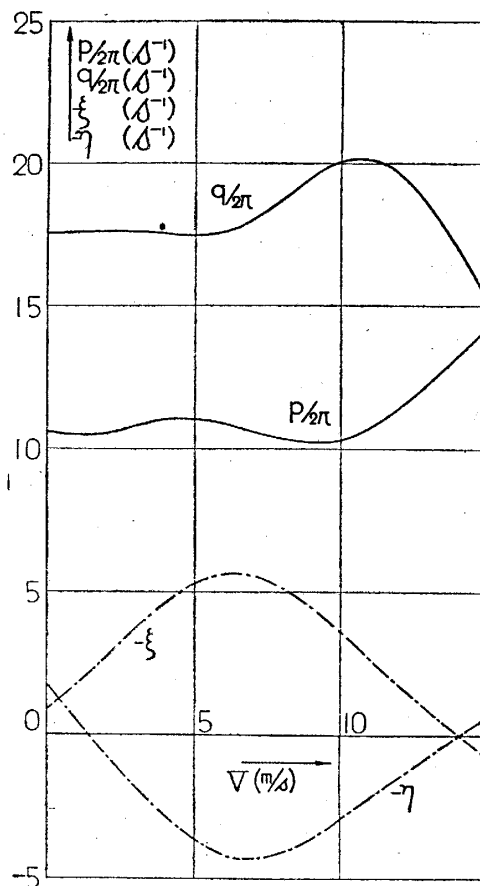
以前に試みた實驗(5)の場合の限界速度, 振動數, 減衰係數の變化に最も近い變化をするのは(f)の場合である。即ち J_1 の方は零であるが, B_3 が正の値を取るといふ場合である。之は別の實驗に徴して尤もらしい事と考へられる。この(f)の場合には以前の實驗と同じく振り振動數が屈曲振動數の約2倍になつてをり, 屈曲の減衰係數は速度とともに著しく増加する。又, 振りの減衰係數は一度増加してから更に減じ, 限界速度で遂に零になるのである。實驗の場合の委しい性質は前の論文を参照されたい。

(f) の場合は $B_3 - J_1$ 曲線に3枝のあるものゝ中央の枝の一點に當つてをる譯である。

(a) の場合も (f) と同じ種類の枝の中にあるけれども二重點に相當してをる。

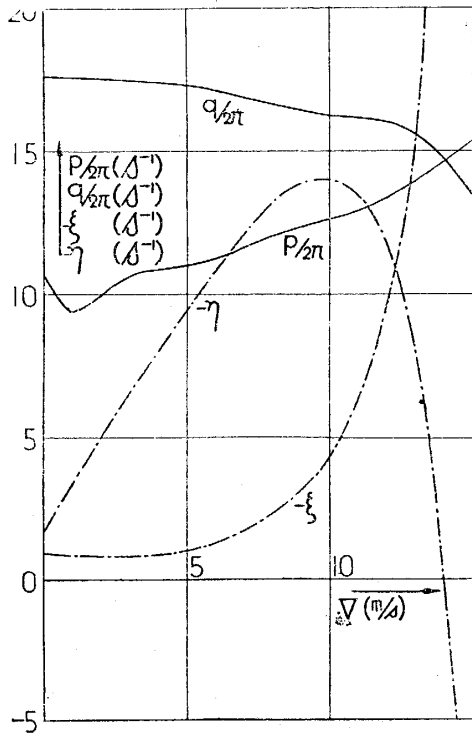
7. B_3 及び J_1 の軸について

以上の計算結果から B_3 と J_1 の値を可なり廣い範圍に變化調節しても, 限界速度は實驗値に合はせることができるといふ事がわかつた。但し各速度に於ける振動數を考へると $B_3 - J_1$ の組合せは相當制限される事になるやうである。只今の場合には $J_1 \rightarrow 0$ で $B_3 = 0.262$ gms/cm が實驗値に近いから, 風力の振動減衰モーメントの中心が

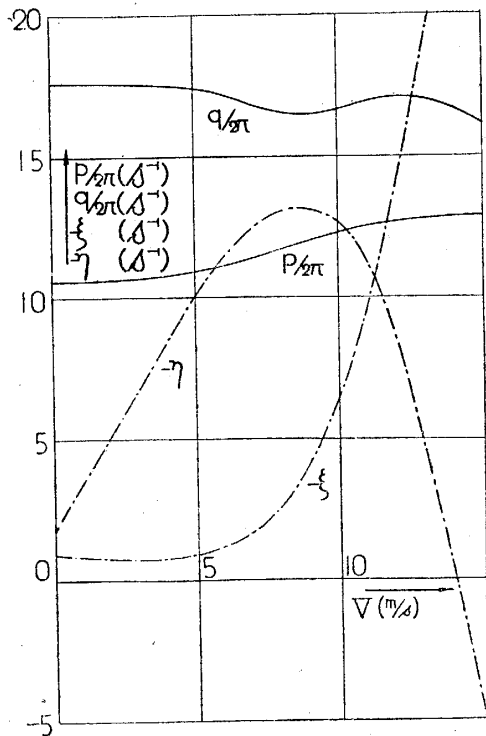


第4(a)圖 任意の速度に於ける振動數と減衰係數
(a) の場合. $B_3 = -0.228$ gms/cm, $J_1 = -0.196$ gms/cm.

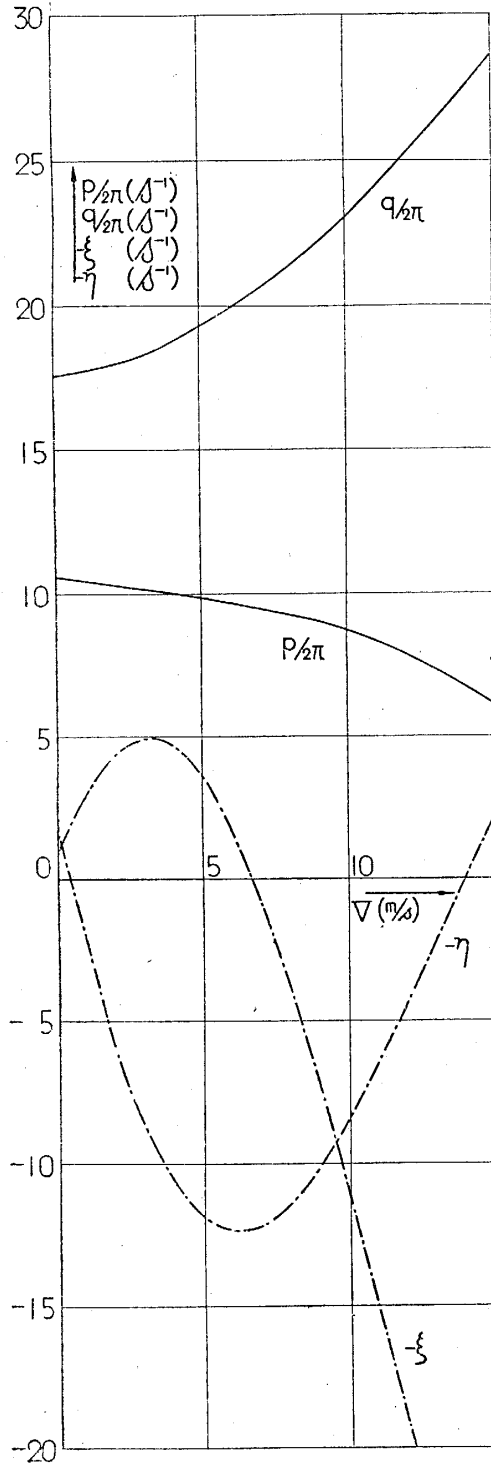
(5) 前掲(1), (2).



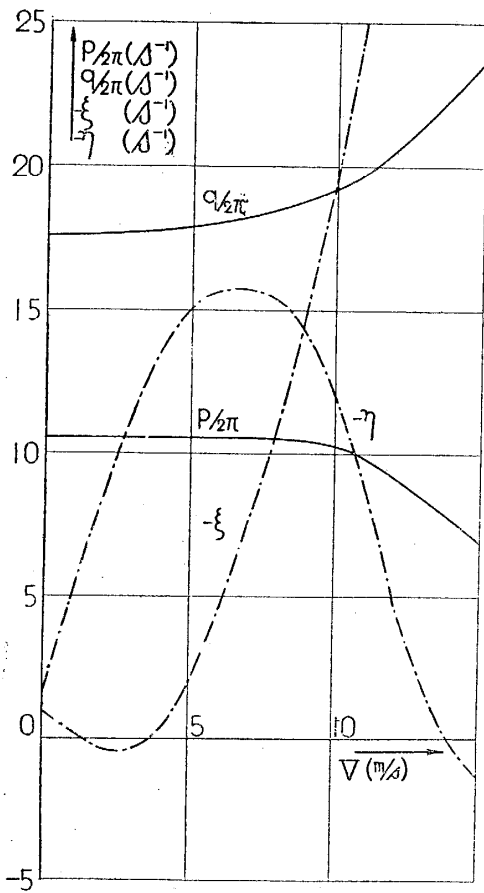
第4(b)圖 任意の速度に於ける
振動数と減衰係数
(b) の場合. $B_2=0.14$ gms/cm,
 $J_1=0.39$ gms/cm.



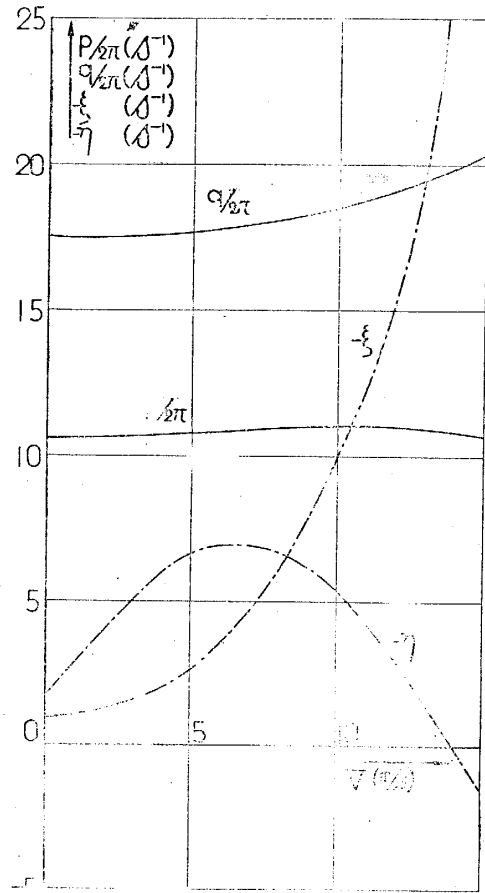
第4(c)圖 任意の速度に於ける
振動数と減衰係数
(c) の場合. $B_2=0.20$ gms/cm,
 $J_1=0.23$ gms/cm.



第4(d)圖 任意の速度に於ける
振動数と減衰係数
(d) の場合. $B_2=-1.5$ gms/cm,
 $J_1=0.145$ gms/cm.



第4(e)圖 任意の速度に於ける
振動数と減衰係数
(e) の場合. $B_3=1.0$ gms/cm,
 $J_1=-0.05$ gms/cm.



第4(f)圖 任意の速度に於ける
振動数と減衰係数
(f) の場合. $B_3=0.262$ gms/cm,
 $J_1=0$.

相當後方にあり、而も之が振り振動にのみよく働く状態、換言すれば、このモーメントの力は小さいけれどもその中心が振り振動軸よりも相當距つてをる事を意味するのである。

(1), (2) の兩式を見ると K_1, G_3 は何れも空氣力學モーメントの係数を表すものであり、且つ復原的の性質を持つものである。之等は何れも振り振動の軸から風壓中心までの距離に比例したものに近いやうである。 J_1, B_3 は復原的でなく振動の減衰に關係したものであり、復原力に於ける K_1, G_3 に對應するものである。従て J_1, B_3 の中心線を考へ得る譯である。風壓の中心が (1/4) 翼弦の附近にあるやうに J_1, B_3 の軸も何れかの位置にある譯である。

我々又は他の人々の以前の研究では減衰モーメントも單に復原モーメントの延長の如く考へた結果、しばしば J_1, B_3 の軸までも (1/4) 翼弦附近にあると假定した事があつた。然るに只今の理論から綜合して考へると J_1, B_3 の軸は相當に後方にあるらしい事がわかつた。而も J_1 と B_3 とは必しも相比例したものでななさうな事もわかつた。この結果は遂に J_1, B_3 を特に測定する考に到達し、只今別にその實驗的研究を進めてをるやうな譯である。但し適當の假定のもとに薄板の場合の J_1, B_3 を出す事もできるが直接の實驗に若かぬ譯である。

8. 結 語

フラッターの研究に於て最も不明瞭なもので而も問題を支配する重要な J_1, B_3 の性質を理論的に研究して見たのである。即ち J_1, B_3 を態と種々の値に變化する結果として起るフラッターの限界速度の各風速に於ける振動數, 減衰係數等の變化を一々確め, 之等の結果を前に研究した模型實驗の結果と比較したのである。その結果 J_1, B_3 に相當する軸は翼の可なり後方にある事がわかつた。この結果は我々に別の模型實驗を企てしめるに至つたのである。

尙, 只今の研究は自然振動のみを取扱つたが, その強制振動の場合の理論も少しくしらべた。その結果は次の報告で述べる事にする。

この研究は財團法人服部報公會の御援助によつて特に著しく進展したのであり, 茲に同會に厚く御禮を申述べる次第である。