

# 可視化実験による渦構造の定量的解明 - 速度こう配テンソルの測定 -

森 友紀\* 福島 千晴\*\* 永田 拓\*\*

## Quantitative Study of Vortex Structure by Means of Flow Visualization Experiment --- Measurement of Velocity Gradient Tensor ---

Tomonori MORI\*, Chiharu FUKUSHIMA\*\* and Hiroshi NAGATA\*\*

\*Canon Co. Ltd. and \*\*Gifu University

### ABSTRACT

We proposed a technique for quantitative information to understand the vortex structure by means of hydrogen bubble techniques. Using the technique we obtained not only the velocity but the velocity gradient tensor in the vortex region in the near wake of a circular cylinder. Based on the values obtained in this technique, the patterns of sectional streamlines passing through stagnation points and extending to the region near the center of vortices and the contour of vorticity were illustrated to see the overall structure of the vortices. Thus, we determined the local values of shear stress and divergence in the vortex region as well as the global characteristic values of vortices, e. g. circulation, enstrophy, momentum, angular momentum, etc. These results suggest that the vortices change in structure from sheet-like vortices to rod-like vortices when the vortices formed behind the cylinder were convected downstream in the near wake of the cylinder.

Keywords : Flow Visualization, Vortex Structure, Velocity Gradient Tensor, Critical Point, Sectional Streamlines, Separator, Vorticity

### 1. はしがき

前報<sup>1)2)</sup>では、「渦を見る」ばかりでなく「渦を測る」ことが可能な、水素気泡法を用いた新しい可視化実験の方法を導いた。本研究ではこの方法を一様流中の円柱背後の渦流れに適用し、円柱直後の流れの速度場ばかりでなく、速度こう配テンソルを測定した。そして、渦構造を視覚的に理解するために、観察断面内の速度ベクトルが接線となる *sectional streamlines* や種々の物理量（渦度、発散、流れ関数等）の等値線を図示し、さらに、速度こう配テンソルの特性値 ( $p, q$ ) や、渦度  $\omega$  とせん断応力  $\tau$  の分布状況を明らかにした。これらの値は、観察座標系の並進速度  $U_0$  に依存しないので本質的な渦の構造が定量的に把握できると考えられる。

### 2. 実験の装置と方法

一様流中（速度： $U$ ）の円柱（直径： $d$ ）背後に、流れに直交するように気泡発生細線を設置し、これから気泡をパルス的に発生させる。図1に示すように、気泡が  $N$  回発生するごとに、照明光源のストロボを同期発光させる。こうして可視化した流れを、カメラのシャッターを開放にして、フィルムを巻き取りながら撮影する「流しカメラ」の手法によって、ストロボが発光するたびに1枚の画像を撮影する。図2は、この手法による連続写真の一例である。円柱は気泡発生細線の上流にあり、写真には写っていない。この場合のストロボの発光間隔  $\Delta t$  は0.26秒で、渦の放出周期  $T_v$  の  $1/12$  である。したがって、写真 (a) は、写真 (b) に比して渦中心が  $1/12$  下流に移流してい

\* キヤノン

\*\* 岐阜大学工学部

る状態を示している。気泡発生細線直後の一群のタイムラインから、気泡の流跡がわかるので、流跡の長さ（含方向）と時間 $t$ の関係から、気泡発生細線を通る流れの速度ベクトル $\mathbf{v}(u, v)$ の流れの横断方向（ $y$ 方向）の分布が、ストロボの発光時間間隔 $\Delta t$ ごとに求まる。 $\mathbf{v}(u, v)$ を局所的な速度と見なし、テラー仮説のもとに $\Delta x = u_i \Delta t$ （ $u_i$ : 渦の移流速度、 $x$ : 円柱の中心からの主流方向の距離）として $\Delta t$ を $\Delta x$ に置き替え、 $\mathbf{v}(t, y)$ を $\mathbf{v}(x, y)$ に読み替えた。そして、前報<sup>(1)(2)</sup>で述べたように、平滑化とスプライン補間<sup>3, 4</sup>によって、速度場の格子点上の速度 $u, v$ とその $x, y$ 微分 $u_x, u_y, v_x, v_y$ からなる速度こう配テンソル $\mathbf{F}$ を求めた。

図3は、円柱表面を発色電極とする電解沈殿法によって、円柱背後の流れを可視化したものである。この写真に見られるように、渦列の構造は、円柱からの距離によって変化する。この変化を定量的に知るために、気泡発生細線の設置位置 $X_H/d$ （ $X_H$ : 円柱中心からの距離）を3.0, 5.0, 及び7.0（図中矢印）に変えて上述の方法を適用した。

### 3. 速度こう配テンソルと渦構造

#### 3. 1. 渦の局所的構造

前述の方法により求めた格子点の速度こう配テンソル $\mathbf{F}$ から、以下の渦構造の局所的な特性が算出できる。

$$p = -(u_x + v_y) = -\text{div}(u, v) = -\text{trace}\mathbf{F}$$

$$q = u_x v_y - u_y v_x, \quad x = \det\mathbf{F}$$

$$\omega = v_x - u_y: \text{渦度}$$

$$\tau = \mu(v_x - u_y): \text{せん断応力} (\mu: \text{粘性係数})$$

#### 3. 2. 渦の大域的構造

##### 3. 2. 1 渦度の積分量

前述の方法により求めた格子点上の渦度 $\omega$ から、以下に示す渦の特性値が算出できる。

$$\text{循環}: \Gamma = \iint \omega dA \quad \text{エンストロフィ}: e = \iint \omega^2 dA$$

$$\text{運動量}: \mathbf{P} = \iint \mathbf{r} \omega dA \quad \text{角運動量}: \mathbf{M} = \iint \mathbf{r}^2 \omega dA$$

$$\text{単位質量当りのエネルギー}: E = \iint \Psi \omega dA$$

ここで、 $\Psi$ は流れ関数で、格子点上の $\omega$ の値を与えて $\Delta\Psi = -\omega$ を数値的に解いて求めた。 $A$ は面積、 $\mathbf{r}$ はsectional streamlineが示す渦中心を始点とする位置ベクトルである。

##### 3. 2. 2 Critical Point近傍の流体粒子の軌道

速度 $v$ が0の点（不動点）、すなわち速度の方向が0/0の不定になる点をcritical pointと呼んでいる。critical pointの極く近くの速度は、critical pointを始点とする位置ベク

トルを $\mathbf{x}$ とすると $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$ と近似できるので、critical point近傍の流体粒子の軌道は、速度こう配テンソル $\mathbf{F}$ の $p^* = pd/U$ ,  $q^* = qd^2/U^2$ の値によって、図4のように分類できる<sup>(6)</sup>。

#### 3. 2. 3 Sectional Streamlinesの描き方

前述の方法により格子点上の速度 $(u, v)$ が求まるので、前報<sup>(1)(2)</sup>に述べたように、Bissetら<sup>(5)</sup>と同様な方法でsectional streamlinesを描くことができる。前報<sup>(1)(2)</sup>では、sectional streamlineの始点を任意に設定し、多くの本数の曲線により渦構造を表示したが、本研究では、まず速度こう配テンソル $\mathbf{F}$ の値からsaddle pointの位置を特定し、この点を始点とするsectional streamlineを求めた。この方法によれば、セパラトリックスに相当するsectional streamlineが描けるので、critical pointを通過する少数の曲線で渦構造が簡明に表示できる。また、saddle pointから、速度こう配テンソルの固有ベクトルの方向に曲線を伸ばすことによって、より正確にsectional streamlineを描くことができる。

## 4. 実験の結果と考察

### 4. 1. 等値線図とCritical Pointの分布

渦度 $\omega^* = \omega d/U$ , 流れ関数 $\Psi^* = \Psi/Ud$ , 発散 $-p^* = -pd/U$ , 及びせん断応力 $\tau^* = \tau d/\mu U$ の等値線図と $p^*-q^*$ 図で区分された種々のcritical pointの分布図が、図5にまとめられている。

#### 4. 1. 1 渦度と流れ関数の等値線

図5-Iは、円柱背後に設置した気泡発生細線を通る渦列の渦度分布を、白黒の濃淡と等渦度線で表示したものである。円柱直後の $X_H/d=3.0$ の場合には、流れ方向に扁平な領域に渦度は集中しているが、下流に移行する( $X_H/d \rightarrow \text{大}$ )に従って、 $\omega^*_{\text{max}}$ は小さくなり、渦度の集中領域は円形に近づくことがわかる。この図に示す渦度の集中領域は、前報<sup>(1)(2)</sup>で示したように、円柱表面から溶出する色素の分布状況と良く対応している。

図5-IVは、上述の渦度分布 $\omega = \omega(x, y)$ を用いて、ポアソン方程式 $\nabla^2\Psi = -\omega$ を数値的に解いて求めた流れ関数 $\Psi^* = \Psi/Ud$ の等値線を示す。流れが二次元流 $\mathbf{v}(u, v, 0)$ の場合には、この等値線は流線と一致するが、後述するように、流れはこの面内にだけでなく三次元的であるので、前報<sup>(1)(2)</sup>で示したようにこれらの等値線は流線と一致しない。三次元的な渦構造を知るためには、流れ関数 $\Psi$ の等値線よりも、前報<sup>(1)(2)</sup>で示したsectional streamlinesや後に示すセパラトリックスの方が、より詳細な情報が視覚化できる。(例えば、流れ関数 $\Psi = \text{一定}$ の曲線群は、渦中心近傍で閉曲線となり、sectional streamlinesやセパラトリックスが示すspiral-inやspiral-outの曲線になることはな

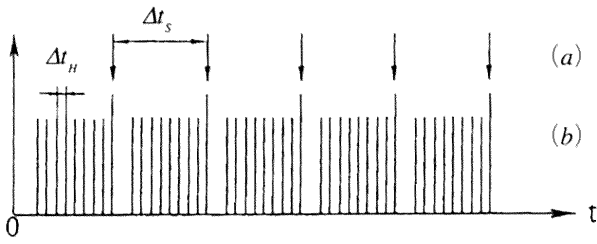


図1 水素気泡の発生時期とストロボの発光時期の関係  
(a) ストロボ発光時期 (b) 水素気泡発生時期

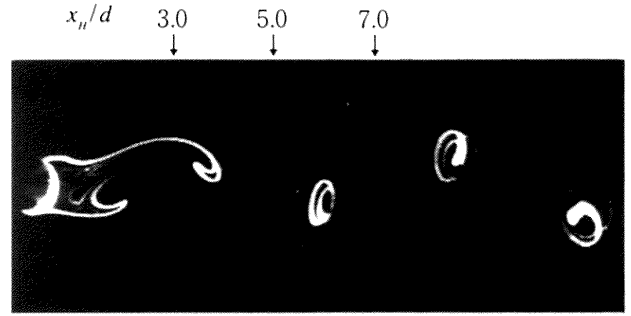
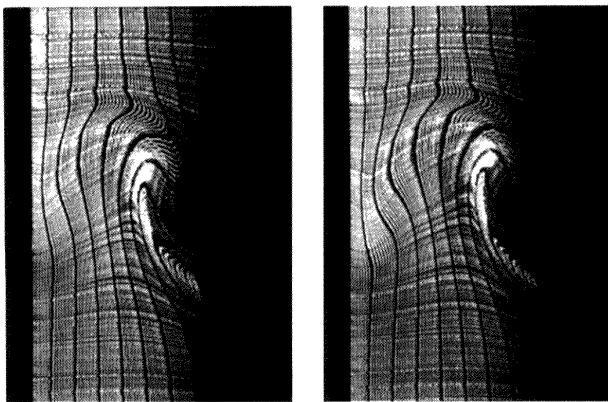


図3 電解沈殿法により可視化した円柱背後の流れ ( $Re=120$ )



(a)  $t = t_1$  (b)  $t = t_1 + \Delta t_s$

図2 流しカメラの手法で連続撮影した可視化写真の一例  
( $Re=120$ ,  $\Delta t_s=0.26S$ ,  $\Delta t_H=\Delta t_s/10$ ,  $\Delta t_s/Tv=1/12$ ,  $x_H/d=3.0$ )

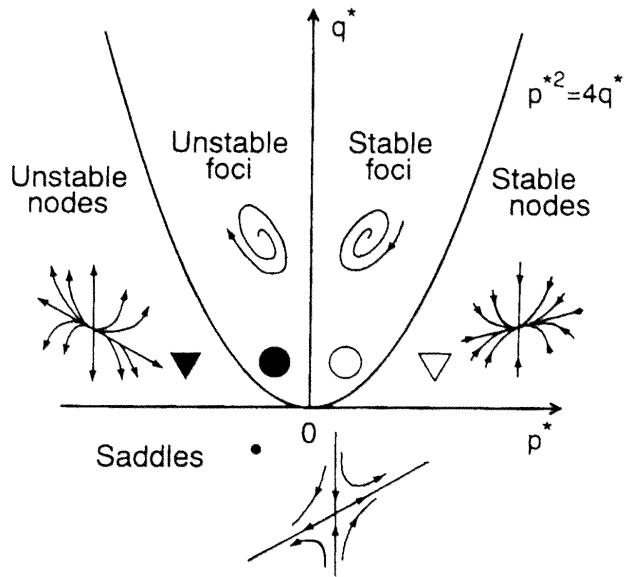


図4  $p^*-q^*$  図上のcritical pointの区分

い。

4. 1. 2. 速度こう配テンソルの特性値( $p^*, q^*$ )の分布

図6-Iは、格子点 ( $58 \times 88 = 5104$ 点) 上の $p^*$ と $q^*$ の値を $p^*-q^*$ 面にプロットしたものである。図中の実線は、前述のcritical pointの判別曲線 $p^{*2}=4q^*$ を示す。ここで $p^*=-\text{div}(u^*, v^*)$ であるので、流れが観察断面内にだけあれば $p^*$ の値は0になるはずである。しかし $x_H/d=3.0$ の場合の $p^*$ の値は、 $p^*=0$ を中心に $\pm 0.4$ の範囲に分散しており、この面を貫く流れが存在することを示す。 $p^*$ の値の分散範囲は $x_H/d$ が5.0, 7.0と大きくなる程小さくなり、渦が下流に移行するに従って流れが二次元的になることを示している。

図5-IIは、上述の $p^*, q^*$ 値によって区分したcritical pointの空間分布状況を、前述の図4中に示した記号(例えば○印: stable foci)を用いて、 $xy$ 面内に表示したもので

ある。図中○と●( $4q^* > p^{*2}$ )の分布領域は、前述の図5-Iの渦度分布が示す渦領域と良く対応している。この流れは、基本的には二次元流であるので、 $p^*=-\text{div}(u^*, v^*)$ の値は0に近いはずである。しかし、図6-Iの $p^*$ の分布状況が示すように、 $x_H/d=3.0$ の場合には、 $\omega^*_{max}/p^*_{max}$ は約0.25程度であり、 $p^*$ と $\omega^*$ の測定精度は同程度と考えられるので、 $\omega^*$ の値に比して $p^*$ の値は無視しうる程小さくはない。

$p^*$ の値が $p^* \neq 0$ である点では、流れが $xy$ 面内だけでなく、 $z$ 方向の速度 $w$ がある。また、 $\text{div}(u, v, w) = 0$ から、 $p = Up^*/d = w_z$ であるので、 $p^* > 0$ なら流体要素は $z$ 方向に引き伸ばされ、 $p^* > 0$ かつ $4q^* > p^{*2}$ のcritical pointにおける流体の軌道は、spiral-in(図4中のstable foci)となる。 $(p^* < 0$ の場合は、 $w_z < 0$ , spiral-outとなる。)

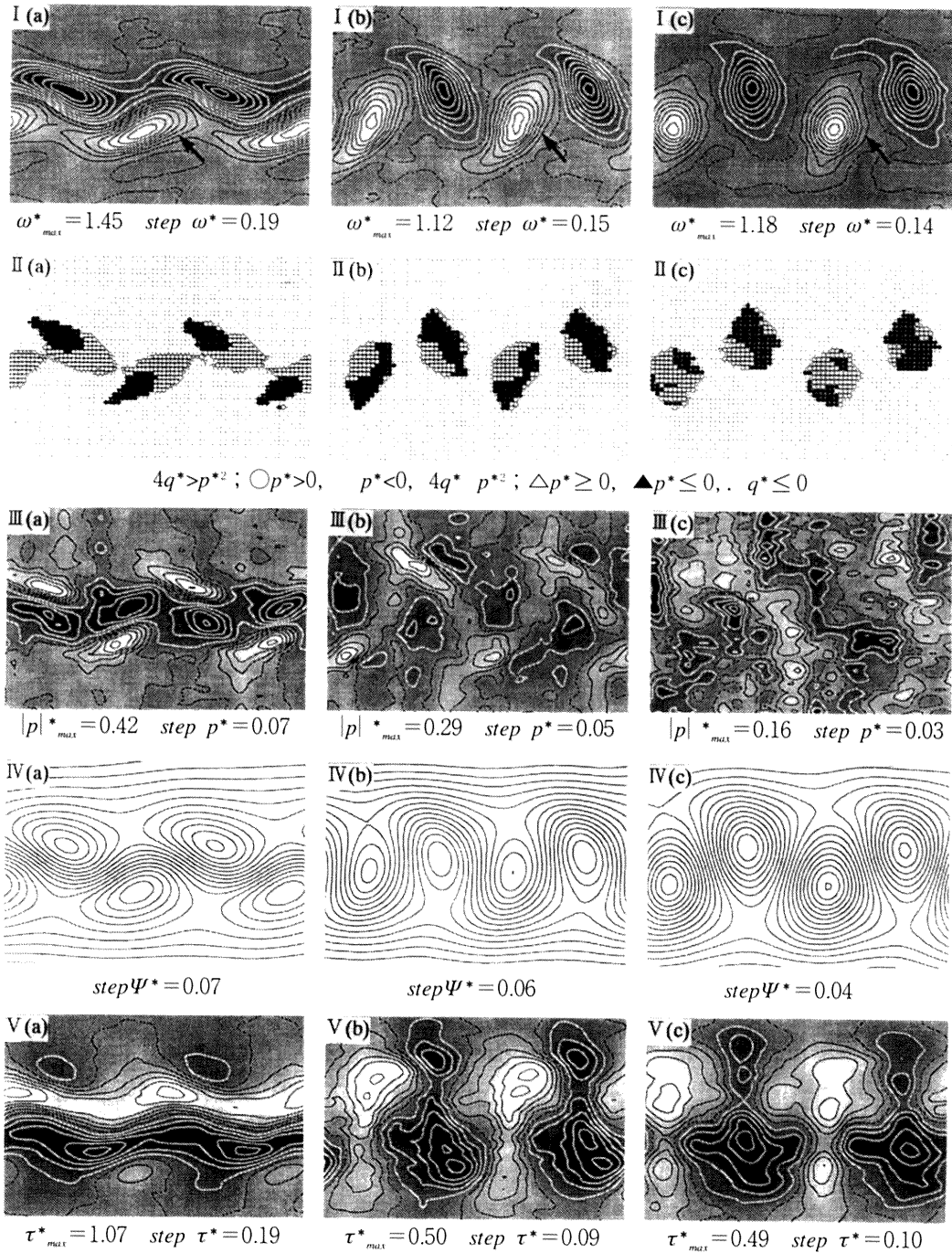


図5 気泡発生細線を通過する渦構造 (a)  $x_{11}/d=3.0$  (b)  $x_{11}/d=5.0$  (c)  $x_{11}/d=7.0$   
 I : 等渦度線 II :  $p-q$ 値により区分したcritical pointの分布  
 III : 発散 $u_x^* + v_y^* = -p^*$  IV : 流れ関数の等値線 V : セン断応力 $\tau^*$ の等値線

### 4. 2. セパトトリックス

図7は、 $x_{11}/d=3.0$ に設置した気泡発生細線を通る渦流れの速度ベクトルと、critical pointを通るsectional streamlinesすなわちセパトトリックスを示す。図7の (a) と (b) は、同一の流れであるが、観察座標系の並進速度  $U_0$  が異なり、それぞれ  $U_0/U_v=1.0$  と  $U_0/U_v=0.6$  の場合を示す。ここでは  $U_v$  は渦の移流速度を示す。いずれの sectional streamlines もよどみ点 (saddle point) から渦中

心 (foci point) につながっている。注目すべきは、同じ流れでも、観察座標系の速度  $U_0$  によって流線パターンは著しく異なり、渦中心に向かう流線が、図 (a) では spiral-out (unstable foci)、図 (b) では spiral-in (stable foci) になっていることである。これは、観察座標系の並進速度  $U_0$  の相違によって速度が0になる渦の中心位置が見かけ上異なり、その中心近くで  $p^*$  の値の符号が、図 (a) の場合には負、図 (b) の場合には正になっていることと

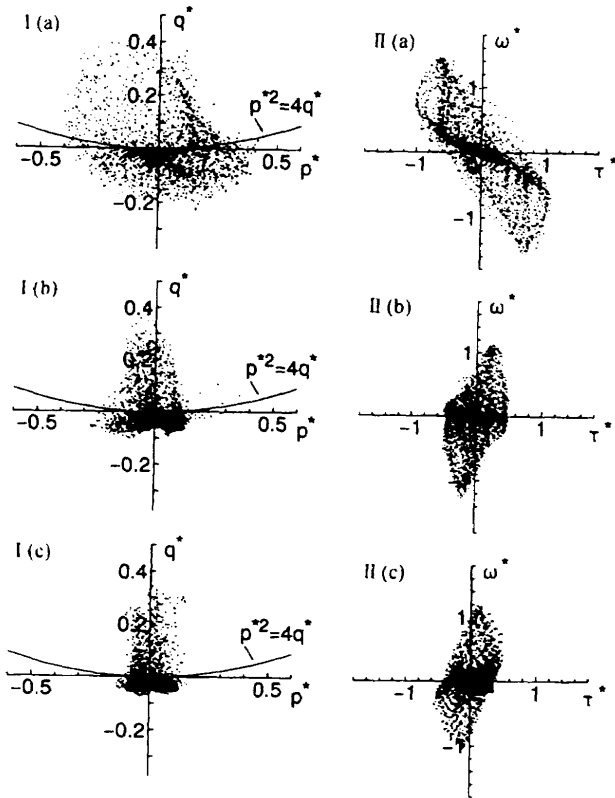
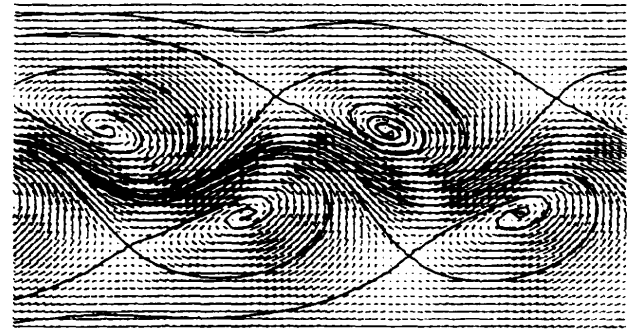
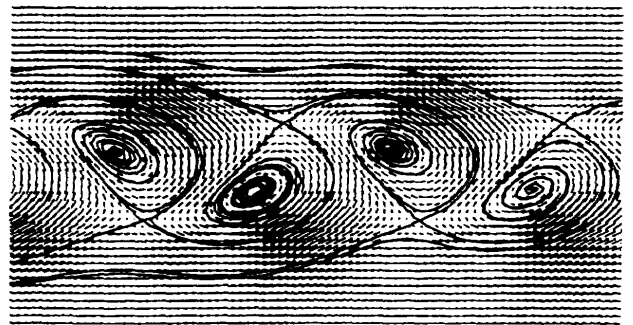


図6 位相面表示した渦特性  
(a)  $x_H = 3.0$  (b)  $x_H = 5.0$  (c)  $x_H = 7.0$



(a)  $U_0/U_V = 1.0$



(b)  $U_0/U_V = 0.6$

図7 観察座標系の速度 $U_0$ によるセパトリックスの変化と速度ベクトル ( $Re=120, x_H = 3.0$ )

対応している。

### 4. 3. 渦度とせん断応力の分布

渦領域は、剥離せん断層が巻き込んだ領域であるので、せん断応力と渦度の分布状況についての知見は、渦の特性を知る上で極めて重要である。渦領域（渦度 $\omega^*$ が大の領域）の特性を、渦度 $\omega^*$ とせん断応力 $\tau^* = \tau d / \mu U$ の相対的な大きさによって、 $\omega^* \gg \tau^*$ の場合をrod状の渦 (vortex tube),  $\omega^* \sim \tau^*$ の場合をsheet状の渦 (vortex layer) と呼び、rod状の渦は安定しており、sheet上の渦は不安定であることが知られている<sup>17</sup>。このような観点から渦構造を理解するために、図6-IIは、格子点上の渦度とせん断応力を、 $\omega^*$ と $\tau^*$ の位相面にプロットしたものである。個々のプロット点の流れ場における分布状況は、図5-Iと図5-Vにそれぞれ $\omega^*$ と $\tau^*$ の等値線として示す。これらの図から、円柱直後の $x_H = 3.0$ ではsheet状の渦に近く、渦が下流に移行するに従ってrod状の渦に変化する様子がわかる。

### 4. 4 渦度の積分量

図8は、3. 2節で述べた渦度の積分量が示す渦の特性値をまとめたものである。渦度の面積分は、 $\omega^* = 0.4$ の等渦度線で囲まれた領域と、渦領域の外周に近い等渦度線

(図5-I 中矢印で示す) で囲まれた領域について行った。図には、 $U$ と $d$ で無次元化した循環 $\Gamma^*$ 、エンストロフィ $e^*$ 、運動量 $P^*$ 、角運動量 $M^*$ 、及びエネルギー $E^*$  (計算式は3. 2節参照) と $x_H, d$ の関係を示す。さらに平均渦度 $\omega^* = \Gamma^* / A^*$ 、渦度分布の断面二次モーメントに相当する渦度分布の広がり $M^* / \Gamma^*$ 及び、渦度分布の重心 $|P^*| / \Gamma^*$ の $x_H, d$ に対する変化が図示されている。これらの渦度の積分量から渦の下流への移行に伴って、渦領域の特性が変化する状況が定量的に把握できる。

## 5. 結言

水素気泡法を用いた新しい可視化実験の方法によって、円柱背後の渦構造が定量的に明らかにされた。渦構造を定量化する物理量として、「速度」ばかりでなく、「速度こう配テンソル」を流れ場全体に亘って測定できた。これらの測定値から、セパトリックスに相当するsectional streamlinesや、渦度等の物理量の等値線を描くことによって、渦構造が視覚的に把握できた。さらに、渦構造の特性値として、循環、渦度とせん断応力及び発散の分布、エンストロフィ、渦の運動量と角運動量及びエネルギーが明らかにされた。これらの結果から、円柱背後の渦列

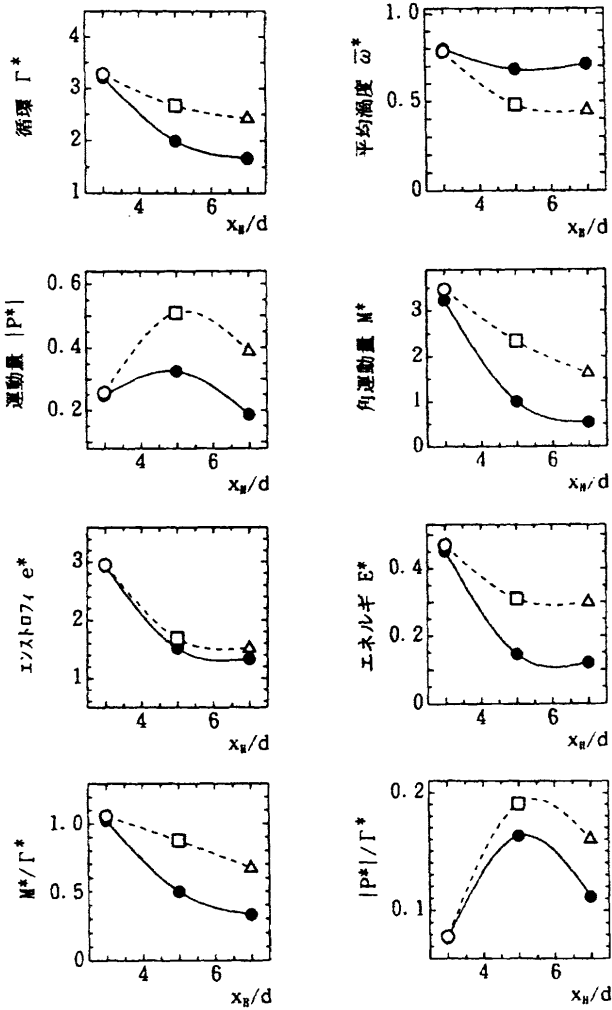


図8 等渦度線で囲まれた領域の渦構造を示す各種の特性値 (等渦度線上の渦度,  $\bullet \omega^* = 0.40$ , open symbols: 図5-I 中矢印で示す等渦度線;  $\circ \omega^* = 0.42$ ,  $\square \omega^* = 0.17$ ,  $\triangle \omega^* = 0.15$ )

は、円柱直後で三次元的なsheet状の渦構造であるが、下流に移行するに従って、二次元的なrod状の渦構造に変化する経過が定量的に明らかにされた。

参考文献

- 1) 森, 福島, 永田, ながれ, 別冊 (1994) 401-404.
- 2) 永田, 福島, 森, 航空宇宙技術研究所特別資料, SP-25 (1994) 47-50.
- 3) 吉村, 高山, パソコンによるスプライン関数, (東京電機大学出版, 1988) 174-192.
- 4) Spedding, G. R., and Rignot, E. J. M., Exp. in Fluids, 15 (1993) 417-430.
- 5) Bisset, D. K., Antonia, R. A. and Browne, L. W. B., J. Fluid Mech., 218 (1990) 439-461.
- 6) Perry, A. E. and Chong, M. S., Ann. Rev. Fluid Mech., 19 (1987) 125-155.
- 7) Kida, S., and Tanaka, M., J. Fluid Mech., 274 (1994) 43-68.