

# 直接数値シミュレーションに基づく乱流構造の数値解析

電気通信大学 生出 伸一、山口 博、細川 巖  
航空宇宙技術研究所 山本 稀義、末松 和代

Numerical analysis of turbulence based on a DNS data-base

by

Shin-ichi Oide<sup>1</sup>, Hiroshi Yamaguchi<sup>1</sup>, Iwao Hosokawa<sup>1</sup>, Kiyoshi Yamamoto<sup>2</sup>,  
and Kazuyo Suematsu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>The University of Electro-Communications

<sup>2</sup>National Aerospace Laboratory

## Abstract

Direct numerical simulation (DNS) of decaying isotropic turbulence was made using the Numerical Wind Tunnel (NWT). A fully developed turbulent flow and a passive scalar field, temperature, were obtained by the DNS with up to  $512^3$  mesh points in space. From the analysis of the flow, it is obtained that intense portions of the turbulent vorticity concentrate into worm-like regions, but those of the temperature gradient into sheet like regions in space. Most vorticity vectors nearby the worm-like regions align into the direction of the eigen vectors corresponding to the intermediate eigenvalue of the strain rate tensor. In contrast with this, most temperature gradient vectors nearby the sheet-like regions align into the direction of the eigen vectors corresponding to the negative eigenvalue of the strain rate tensor. These results show that the worm-like regions have a similar property to Burger's Vortex. On the other hand, the mechanism forming the sheet-like regions of temperature gradient is not yet clear.

## 1. はじめに

乱流現象は様々な流れに見られるごく一般的な流体現象であるが、その性質については未だに分からない部分が多い。しかし、いくつかの性質は現在までの研究により判ってきており、高レイノルズ数において乱流は局所的に等方性を有すると考えられる。従って、等方性乱流を研究する事により乱流の普遍的な性質を知る事が出来ると期待される。

直接数値シミュレーション (DNS) は計算機の発達と共に乱流研究の有力な手法になってきている。その最大の利点は、各瞬間の速度場や温度場の変動データを同時に得られる事である。ただ、乱流は複雑な流れであり、より高レイノルズ数でのDNSを高精度に行うには多くの空間格子点数の計算を必要とするため、大容量の一次記憶装置と高速な計算機が不可欠である。そのため、乱流のDNSはその時代の最高性能を持つ計算機によって実行されてきたが、最近のコンピュータの高性能化により、この方法による研究が盛んになってきている。<sup>1)~9)</sup>

本研究では、新型の並列計算機である航空宇宙技術研究所の数値風洞 (NWT) を用いて行われた減衰等方性乱流のDNSから得られたテイラーマイクロスケール・レイノルズ数  $R_\lambda \sim 134$  の乱流速度場、温度変動場の計算データ<sup>1)</sup> を数値解析し、乱流の様々な力学構造を調べた。

## 2. 数値計算法

乱流場の基礎方程式として Navier Stokes 方程式、連続の式、温度場の拡散方程式の3つを用いる。

$$\frac{D\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{D\theta(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{1}{\text{RePr}} \nabla^2 \theta(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

ここで、温度場  $\theta$  はパッシブスカラーを仮定する。流れ場に長さ  $L = 4\pi$  の周期性を仮定し、速度場、温度場をフーリエ級数展開して、各フーリエ成分についてスペクトル法で計算する<sup>12, 4)</sup>。時間方向の発展には、ルンゲ・クッタ・ギル法を用いた。

本研究では減衰等方性乱流を計算するので、初期の乱流場を与える必要がある。このため、(4)式のような乱れのエネルギースペクトルを速度、温度の双方について正規分布で与える。

$$E(k, 0) = \frac{16}{3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} k^4 \exp(-2k^2) \quad (4)$$

この結果初期流れ場に基づいたレイノルズ数は

$Re = U_0/k_0 \nu$  と定義される。ここで、

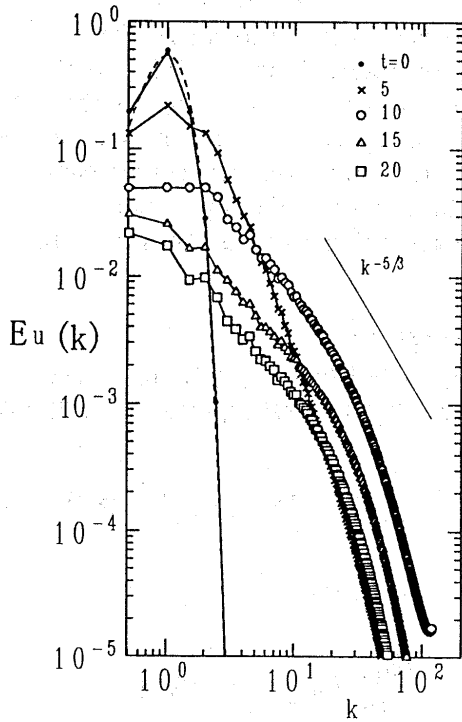
$U_0 = \sqrt{2 \int E_u(k,0) dk}$  で、 $k_0$  は初期スペクトル(4)が最大値をとる波数 ( $k_0 = 1$ ) である。数値計算は航技研の数値風洞 (NWT) を用い、空間格子点数を最大  $512^3$  まで計算できた<sup>1)</sup>。その結果、 $Re = 2000$ 、 $R_\lambda = 134$  の DNS が実現できた。

### 3. 計算結果と考察

#### 3.1 DNSにより得られたエネルギー・スペクトル

乱流速度場のエネルギー・スペクトル  $E_u(k)$  の時間的発達の結果を図1に示す。図1より乱流エネルギーは時間と共に低波数領域より高波数領域へ流れることが分かる。これはエネルギー・カスケードと呼ばれる。

図1. 乱流速度場のエネルギー・スペクトルの時間的発達 (Re=2000)



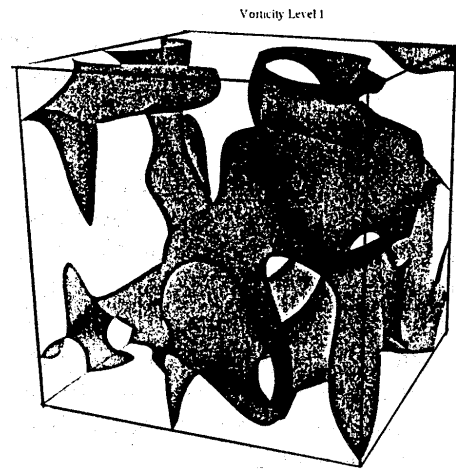
エネルギー・スペクトルは  $t = 10$  の時、高波数領域の値が最大となり、それ以降は単調に減衰している。したがって、この  $t = 10$  の流れが最も発達した乱流となっていることが分かる。また、この時波数空間  $k$  の中間領域でコルモゴロフスペクトル ( $E(k) \propto k^{-5/3}$ ) が観測されている。

#### 3.2 乱流渦度場の空間的微細構造

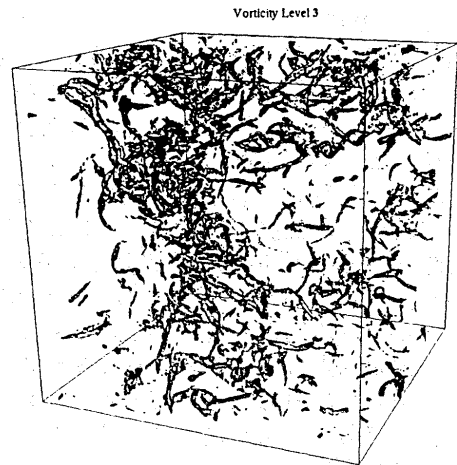
前述したように乱流エネルギーはエネルギー・カスケード過程により低波数領域から高波数領域へと流れ込むのだが、これは乱流内の大きなスケールの

渦度構造が崩れ、より小さなスケールの渦度構造へエネルギーが移動していることを意味する。図2はDNSにより得られた乱流渦度構造の時間的変化を可視化した結果で、(a)は初期与えた乱流渦度場、(b)は  $t=10$  で得られた高波数成分が最も発達した乱流渦度場を示す。  $t=10$  で得られた発達した乱流中では高渦度領域が空間の局所的な渦管状領域に集中することを示しているが、このような渦管状の領域は最近 worm と呼ばれ、その形成の力学構造が注目されている<sup>2)</sup>。

図2. 乱流高渦度領域の空間的構造 (Re=2000)  
(a)初期乱流渦度場 (t=0)



(b)発達した乱流渦度場 (t=10)



乱流中におけるこのような渦度の集中の機構は次の様に考える事が出来る。(1)式からエンストロフィ  $\frac{1}{2} \omega_i^2$  の方程式を導くと、

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \omega_i^2 \right) = \omega_i \omega_j S_{ij} - \frac{1}{Re} \left\{ \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{1}{2} \omega_i^2 \right) \right\} \quad (5)$$

が得られる。

ここで、歪み速度テンソル $S_{ij}$ は

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6)$$

である。(5)式の右辺第1項は渦度のストレッチングによる発達を表し、第2項は粘性による減衰を表す。また、(5)式の平均をとり、乱流の一樣等方性を仮定すると、

$$\frac{D}{Dt} \left\langle \frac{1}{2} \omega_i^2 \right\rangle = \left\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \right\rangle - \frac{1}{\text{Re}} \left\langle \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \quad (7)$$

となる<sup>10)</sup>。ここで、右辺第1項は下記のように速度の縦微分の歪度因子 $\sigma$ に関係する<sup>10)</sup>。

$$\left\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \right\rangle \sim - \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\rangle = - \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \sigma \quad (8)$$

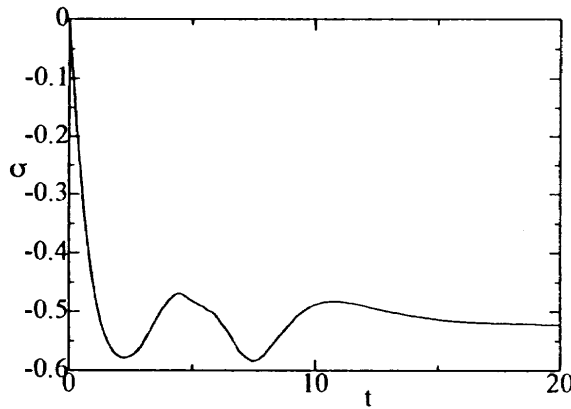
ただし、

$$\sigma = \frac{\left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\rangle}{\left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

である。

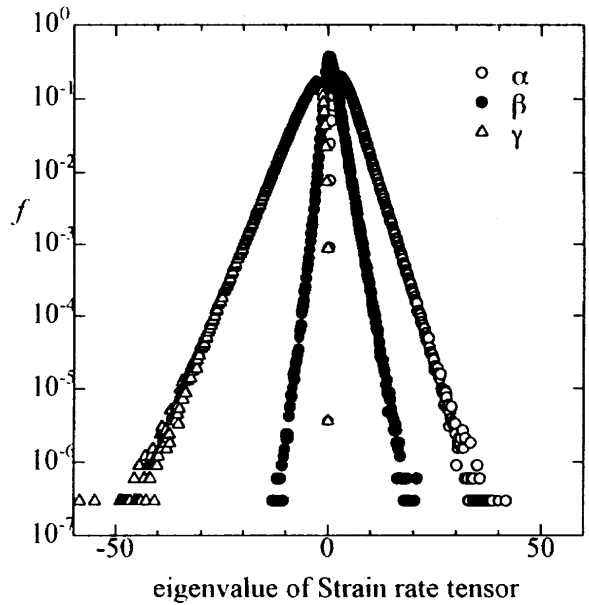
歪度因子 $\sigma$ の計算結果を図3に示す。これより(8)式の右辺は常に正となるので、渦度場の非線形なストレッチングは乱流渦度を平均として常に増加させる事が分かる。

図3. 速度の縦微分 $\partial u/\partial x$ の歪度因子の時間変化



(5)式の右辺第1項の主軸変換をとると、 $\omega_i S_{ij} \omega_j \rightarrow \lambda_i \omega_i \omega_i$ のようになり、歪み速度テンソル $S_{ij}$ の固有値 $\lambda_i$ の正の方向に渦度は発達し、負の方向に減衰する事が分かる。ここで、歪み速度テンソルの固有値を降順に $\alpha, \beta, \gamma$ とし、それに対応する固有ベクトルを $\alpha, \beta, \gamma$ ベクトルとする。図4はDNSにより得られた各固有値の全空間での確率分布 $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ を示す。これを見ると、 $\alpha$ は常に正であり、 $\gamma$ は常に負、 $\beta$ は負から正に分布していることがわかる。各固有値の平均値の組み合わせは $(\alpha, \beta, \gamma) = (4.3, 0.8, -5.1)$ となっている(連続の条件より、 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ である)。

図4. 歪み速度テンソルの各固有値の確率分布



直感的に言えばこの場合渦度は一次元的渦管より2方向に引き伸ばされてシート状に集中すると思えるが、木田によれば、(+, +, -)の固有値セットと渦管の存在はBurgers渦の例から見て矛盾しない<sup>11)</sup>。ここでBurgers渦とは、軸対称な一樣歪み流れ場における定常な一定方向を向いた渦管である。これはNavier-Stokes方程式において速度を時間平均値と変動成分に分け、その時間的平均値を取り、さらに流れが定常、軸対称であり、かつ軸方向について変化が無いとみなした場合の厳密解である<sup>12)</sup>。

図5, 6, 7は各格子点ごとの渦度ベクトル $\omega$ と歪み速度テンソル $S_{ij}$ の固有ベクトル $\alpha, \beta, \gamma$ との成す角の確率分布を調べたものである。横軸に各格子点における両者の成す角度の余弦値をとり、縦軸はその確率を示している。図5は全格子点について計算したものであり、図6は渦度がその標準偏差の1/2以下の格子点について調べたもので全領域の60.6%を占める。図7は渦度がその標準偏差の3倍以上になる格子点について調べており全領域の7.8%を占める。この結果、全体的に渦度ベクトルは $\beta$ ベクトルの方向を向くものが最も多く、そのため $\alpha, \gamma$ ベクトルは渦度ベクトルと直交するものが多くなる。この傾向は渦度が強い領域ほど顕著である。それに対して低渦度領域では、渦度ベクトルが $\alpha$ ベクトルの方向を向く確率が増加している。このことは、渦度の強い領域、すなわち渦管の近傍では局所的にBurgers渦と似た性質<sup>11)</sup>を示している。つまり、発達した乱流場の渦度集中領域はBurgers渦に近い形になっているという事が考えられる。

図5. 全空間での歪み速度テンソルの各固有ベクトルと渦度ベクトルの成す角の確率分布 (rmsは渦度 $\omega$ の自乗平均値の平方根)

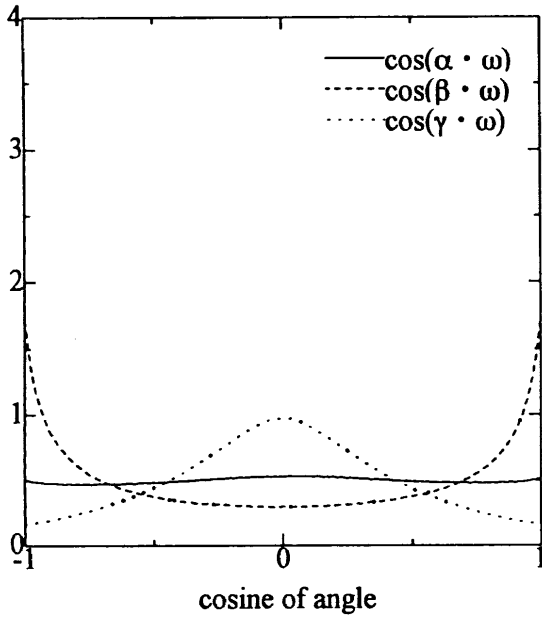


図6. 低渦度領域 ( $\omega \leq 0.5rms$ ) における歪み速度テンソルの各固有ベクトルと渦度ベクトルの成す角の確率分布 (rmsは渦度 $\omega$ の自乗平均値の平方根)

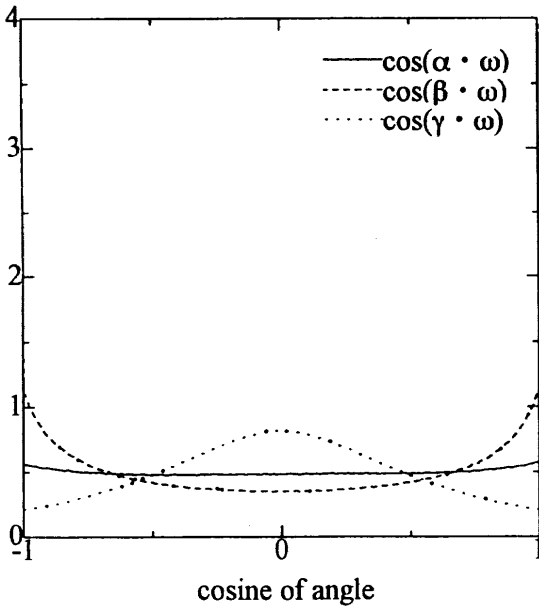
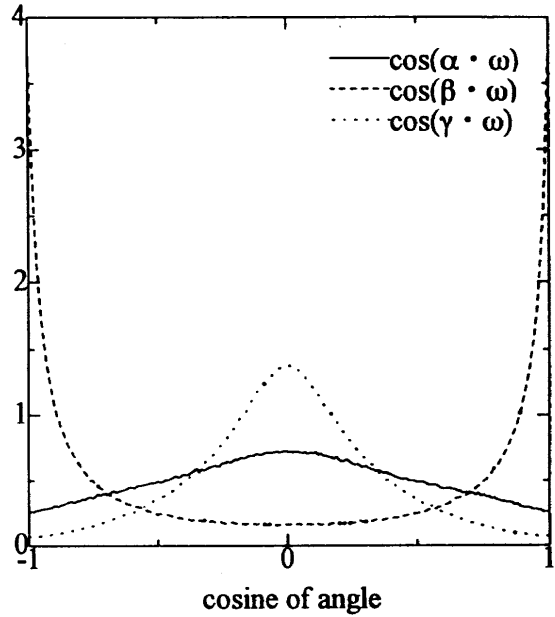


図7. 高渦度領域 ( $\omega \geq 3rms$ ) における歪み速度テンソルの各固有ベクトルと渦度ベクトルの成す角の確率分布 (rmsは渦度 $\omega$ の自乗平均値の平方根)



3.3 温度勾配の空間的微細構造

次に温度場の空間分布について考える。図8は(a)初期流れ場( $t=0$ )と(b)乱流の発達した時刻( $t=10$ )での温度勾配の空間的分布を示す。これらの図から温度勾配場についても渦度集中構造の場合と同様、初期において大きなスケールの構造を持っていたものが乱流の発達に伴うエネルギー・カスケードとともに小さなスケールを持つ構造へと変化してゆくことが判る。図8(b)は温度勾配の等値面とその断面を示しているのだが、その断面の状態から、発達した乱流場では温度勾配の集中領域はシート状になっていることが分かる<sup>1)</sup>。

エンストロフィ方程式と同様にして、(3)式から、次のような温度勾配に関する方程式を導くことが出来る。

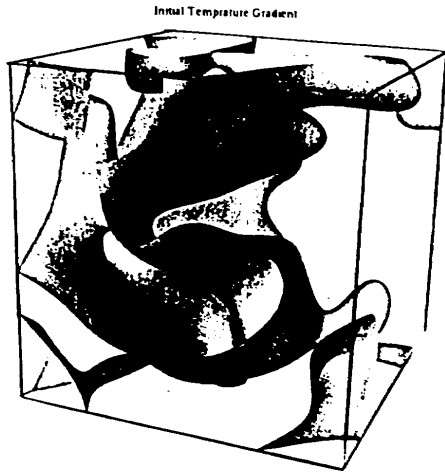
$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} H_i^2 \right) = -H_i H_j S_{ij} + \frac{1}{\text{RePr}} \left\{ \left( \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \frac{1}{2} H_i^2 \right) \right\} \tag{10}$$

ここで、 $H_i$ は温度勾配ベクトル $H$ の*i*方向成分を示す。

(10)式を見ると、(5)式と比較して右辺第一項の符号と右辺第二項の係数を除いて同じ形になっており、右辺第一項が温度勾配の成長・減衰を、右辺第二項が粘性による減衰を示している。なお、本研究では $\text{Pr}=1.0$ としているので、右辺第二項は(5)式と同じ形になっている。よって渦度集中構造と温度勾配集中構造の差異は両式の右辺第一項の差異から生じてい

る事が予想できる。この式についても(5)式と同様に右辺第一項の直交変換を考えると  $-H_i S_{ij} H_j \rightarrow -\lambda_i H_i H_i$  のようになる。よって、歪み速度テンソル  $S_{ij}$  の固有値  $\lambda_i$  の正の方向では温度勾配は減衰し、負の方向で発達する事が分かる。

図8. 乱流場における等温度勾配領域の分布  
( $Re=2000, Pr=1.0$ )  
(a)初期流れ場 ( $t=0$ )



(b)発達した乱流場 ( $t=10$ )  
左側面に等値面の断面を示す。

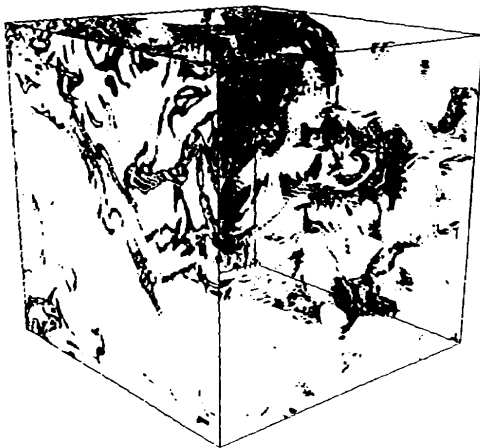


図9, 10, 11 は各格子点ごとの温度勾配ベクトル  $H$  と歪み速度テンソル  $S_{ij}$  の固有ベクトル  $\alpha, \beta, \gamma$  との成す角の確率分布を調べたものである。図9は全領域、図10は温度勾配がその標準偏差の  $1/2$  より小さい領域(全領域の  $61.5\%$ )、図11は温度勾配がその標準偏差の2倍以上になる領域(全領域の  $12.3\%$ )について計算したものである。その結果、全体的に温度勾配ベクトルは  $\gamma$  ベクトルの方向を向くものが最も多く、そのため  $\alpha, \beta$  ベクトルは温度勾

図9. 全空間での温度勾配ベクトルと歪み速度テンソルの各固有ベクトルとの成す角の確率分布 ( $rms$  は温度勾配  $H$  の自乗平均値の平方根)

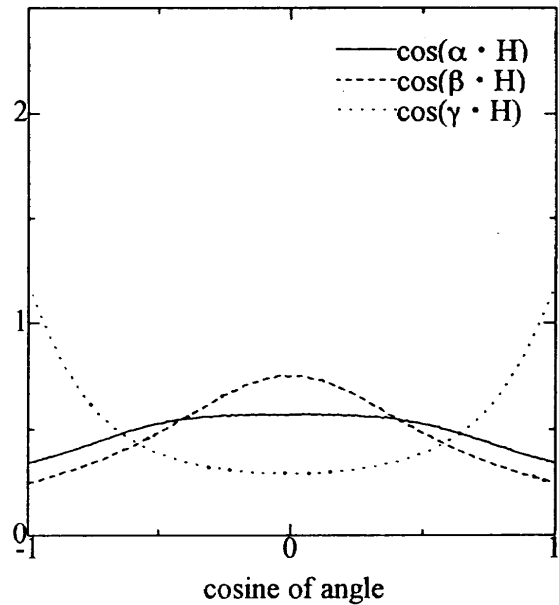
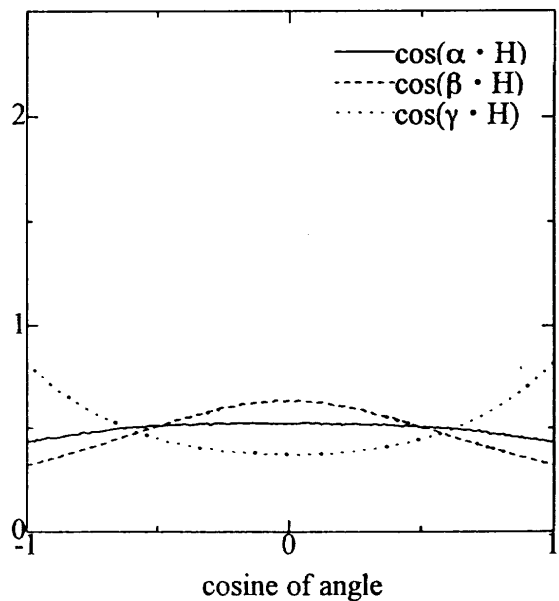


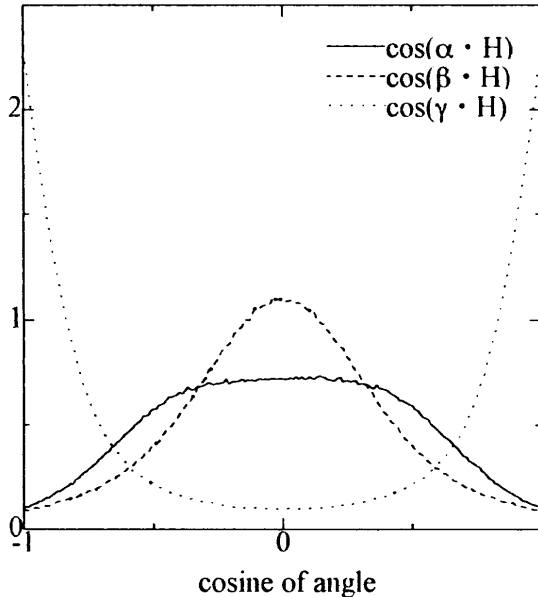
図10. 温度勾配の低い領域 ( $H \leq 0.5rms$ ) における温度勾配ベクトルと歪み速度テンソルの各固有ベクトルとの成す角の確率分布 ( $rms$  は温度勾配  $H$  の自乗平均値の平方根)



配ベクトルと直交するものが多くなる。この傾向は温度勾配が大きい領域ほど顕著である。これは温度勾配の大きい領域、すなわち、シート状の領域内部では温度勾配ベクトルが歪み速度テンソルの固有値が負であり、かつ絶対値の大きいものに対応する固有ベクトルの方向を向いているということであり、(10)式と矛盾しない結果となった。ただし、発達し

た乱流温度勾配場がシート状に集中してゆく機構とこの結果との関係は未だ明確ではない。

図11. 温度勾配の高い領域 ( $H \geq 2rms$ ) における温度勾配ベクトルと歪み速度テンソルの各固有ベクトルとの成す角の確率分布 ( $rms$ は温度勾配 $H$ の自乗平均値の平方根)



#### 4. 結言

今回の数値解析より、発達した乱流中では渦度の集中領域は渦管を形成する事が分かった。また、渦度の強弱によって渦度ベクトルが歪み速度テンソルの各固有ベクトルの方向を向く確率分布に変化があり、高渦度領域ではその近傍で局所的に Burgers 渦の性質と類似している事も分かった。この事をよりはっきりさせるために、多数の渦管を乱流場から選びだし、その統計的性質を調べている。

また、温度勾配の大きい領域は発達した乱流中ではシート状に分布し、そこでの温度勾配ベクトルは負の大きな固有値に対応する $\gamma$ ベクトルの方向を向くものが多いことも分かったが、その構造の生成に関する力学的機構については未だはっきりとしていない。

#### 参考文献

- 1) K. Yamamoto, I. Hosokawa and S. Oide: 第12回航空機計算力学シンポジウム論文集(1994)195
- 2) S. Oide, K. Yamamoto and I. Hosokawa: 第26回乱流シンポジウム講演論文集(1994)370
- 3) K. Sakai, K. Yamamoto and I. Hosokawa: 第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集(1993)229
- 4) K. Yamamoto: to appear in Proc. Parallel CFD'94 (eds. A. Ecer et al. Elsevier Science)
- 5) K. Yamamoto and I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Japan, 57 (1988)1532
- 6) R. M. Kerr: J. Fluid Mech., 153(1985)31
- 7) A. Vincent and M. Meneguzzi: J. Fluid Mech., 225(1991)1
- 8) S. Chen, G. Doolen, R. H. Kraichnan and Z. S. She: Phys. Fluids, A 5(1993)458
- 9) J. Jimenez, A. A. Wray, P. G. Saffman and R. S. Rogallo: J. Fluid Mech., 255(1993)65
- 10) A. S. Monin and A. M. Yaglom: 統計流体力学3 (文一総合出版, 1978)
- 11) S. Kida: Lecture Notes in Num. Appl., 12, (1993)137
- 12) 小川 明: 渦学 (山海堂, 1981)