

回転する曲管内の流れ

石垣 博*

Flow in Rotating Curved Pipes

by

Hiroshi ISHIGAKI

National Aerospace Laboratory, Kakuda Research Center.

ABSTRACT

When a coiled pipe rotates about the coil axis, the effect of rotation interacts with centrifugal and viscous effects to complicate the flow characteristics beyond those seen in stationary curved pipes. Following previous papers on the flow and heat transfer characteristics for large Rossby number flows, the effects of small Rossby number on the characteristics are studied for fully developed laminar flows through computational studies.

1 緒言

回転体内部に流路を設け、流体を流して冷却する回転機械の冷却問題では3つのモード、すなわち(I)直流路が回転軸に平行な場合(平行回転)、(II)直流路が回転軸に直交している場合(直交回転)、(III)曲流路が曲率中心のまわりに回転している場合(回転曲管)、が基本的に重要である。著者はこれらすべてのモードについて、流れと熱伝達の特性を系統的にしらべている。本報告はモード(III)についてのものであり、ロスビー数が大きい場合については既に報告した^{(1),(2)}。

曲管がその曲率中心のまわりに一定角速度で回転するとき、管内を流れる流体には回転によるコリオリ力と管の曲率による遠心力の二つの体積力が同時に作用し、流動伝熱特性は直管が回転している場合よりもさらに複雑になる。この流れの極限は、回転効果のない静止曲管流と曲率効果のない直交回転直管流の二つに帰着する。著者はこれら二つの極限流の流れおよび熱伝達特性のあいだには層流⁽³⁾⁻⁽⁴⁾、乱流⁽⁵⁾ともに定量的相似性(アナロジー)が

成立することを示し、管摩擦係数や平均熱伝達率を共通の式で表示した。回転曲管流についての著者の理論はこのアナロジーを基本概念として組立てられている。

著者の相似理論によれば、回転曲管流れの特性は、(i)一般にディーン数 K_{LC} 、体積力比 B_{CR} 、曲率パラメータ λ 、ロスビー数 Ro の四つのパラメータにより支配される、(ii) λ と Ro がともに大きい場合 ($\lambda, |Ro| > 8$) には特性は λ と Ro に独立になり、 K_{LC} と B_{CR} のみによって支配される。先の報告では流れ特性が二つのパラメータのみによって支配される(ii)の場合を解析して、その流れ特性⁽¹⁾と熱伝達特性⁽²⁾を明らかにした。本報告では Ro の制限をとりのぞき、流れが K_{LC} 、 B_{CR} 、 Ro の三パラメータに

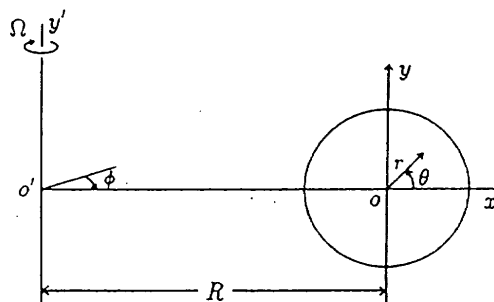


図1 回転曲管の座標系

* 航空宇宙技術研究所角田宇宙推進技術研究センター
(〒981-15 角田市君萱字小金沢1)。

より支配される場合を解析して、流れと熱伝達におよぼす Ro の影響を解明する。

一般に回転流体では、 Ro が小さくなってコリオリ力が慣性力に比して優勢になると、Taylor-Proudman 現象があらわれ、流れ特性は回転軸方向に一様になろうとし、二次元的になる⁽⁶⁾。著者はさきに直交回転直円管内流れを解析して、 Ro が小さいときに軸速度分布が回転軸方向に一様となり、全体の流れ特性が大きく変化することを示した⁽⁷⁾。本報告では回転曲管内流れの特性に Taylor-Proudman 現象がどのような影響を与えるかを見る。

回転曲管流の既存の研究については文献(1)で述べたので省略するが、 Ro の影響を系統的にしらべた研究は見あたらない。数値解析により比較的広いパラメータ空間でその特性をしらべた研究では伊藤ら^{(8),(9)}は K_{LC} と回転レイノルズ数 $R_\Omega = \Omega d^2/\nu$ 、Daskopoulos ら⁽¹⁰⁾は K_{LC} とテイラー数 $Ta = R_\Omega/\sqrt{\lambda}$ の二パラメータにより計算結果を表示している。しかしこれらの二パラメータ方式では、たとえば Taylor-Proudman 現象を効果的に分離して、流れ特性を簡潔に表示することは難しい。

この流れ系の実験研究では測定の高難しさのため、管摩擦係数だけが測定されている。そのなかで伊藤らはディーン数が一定の場合⁽⁸⁾と回転レイノルズ数が一定の場合⁽⁹⁾とに分けて管摩擦係数の詳細な実験を行い、合計 550 余の信頼性の高いデータを与えている。これらを Ro に換算して分類すると、300 個以上のデータが $|Ro| < 8$ になっている。前報⁽¹⁾では $|Ro| > 8$ の実験データを引用して計算結果と比較した。本報では $|Ro| < 8$ の実験データと数値解析結果を比較しながら、前報で与えた管摩擦係数と平均熱伝達率の実用式を Ro が小さい場合にも使用できるように拡張する。

2. 主な記号

- B_{CR} : 体積力比 = λ/Ro
- K_{LC} : 静止曲管の層流特性数, ディーン数 = $Re/\sqrt{\lambda}$
- K_{LR} : 直交回転直管の層流特性数 = $Re/\sqrt{|Ro|}$
- K_L : 回転曲管の(近似)層流特性数, 式(14b)
- Pr : プラントル数
- Re : レイノルズ数 = $w_m d/\nu$
- Ro : ロスピー数 = $w_m/\Omega d$
- w_m : 管内平均流速
- λ : 曲管の曲率パラメータ = R/d
- Ω : 曲管の回転角速度

3. 基礎方程式と数値解法

図1に示すように、曲率中心まわりに回転する曲管に固定して円環座標 (r, θ, ϕ) をとる。曲管は $0'-y'$ 軸のまわりに一定の角速度 Ω で回転するものとし、回転方向が流れ方向と同じ場合 ($\Omega > 0$) を正回転、逆の場合 ($\Omega < 0$) を逆回転と呼ぶ。 (r, θ, ϕ) 方向の速度成分を (u, v, w) 、温度を T とし、流れは定常、非圧縮性の層流で速度場、温度場ともに完全に発達しているものとする。実用的には R が大きい場合が重要なので、 λ が十分に大きいと仮定して、流れ特性が λ の影響を受けない場合を取扱う。また曲管は軸方向に一定の熱流束 q_w 、周方向に一定の壁温 T_w で加熱されているものとする。

このとき $z = R\phi$ とおけば、流れを記述する連続式と Navier-Stokes 式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{w^2 \cos \theta}{R} + 2\Omega w \cos \theta + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} - \frac{w^2 \sin \theta}{R} - 2\Omega w \sin \theta + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} - 2\Omega(u \cos \theta - v \sin \theta) + \nu \nabla^2 w \dots\dots\dots (4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \nabla^2 T \dots\dots\dots (5)$$

ここに ν は動粘性係数、 a は熱拡散係数であり、ラプラスアンは次式で与えられる。

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

また p^* は実際の圧力 p から回転遠心力場の作用による平衡圧力を引いた換算圧力である。

$$p^* = p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (R + r \cos \theta)^2 \dots\dots\dots (6)$$

完全発達領域では $\partial p^*/\partial z$ は定数になる。

$$-\frac{\partial p^*}{\partial z} = C \dots\dots\dots (7)$$

また軸方向に壁熱流束一定の熱的完全発達領域では

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_b}{dz} = \frac{4q_w}{\rho c_p w_m d} \dots\dots\dots (8)$$

の関係が成立する。ここに T_b は混合平均温度である。

数値計算プログラムは管内流についての著者の一連の研究に用いているものであり、有限体積法、スタガード格子、べき乗スキーム、SIMPLE法を用いている。計算は x 軸に関する流れの対称性を仮定して、半断面について行なった。格子点は r 方向42点（壁近傍で密な不等間隔）、 θ 方向37点（ほぼ等間隔）をとり、反復計算では全従属変数の無次元残差の最大値が 10^{-6} 以下になったときを収束条件とした。

4. 速度場、温度場の相似性

文献(1)、(2)で示したように、曲管流れを基準にとって断面内と軸方向の速度スケールを分離した次の変換を基礎式に施す。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{w_m} \sqrt{\lambda}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{w_m} \sqrt{\lambda}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{w_m}, \\ \tilde{p}^* &= \frac{p\lambda}{\rho w_m^2}, \quad \tilde{C} = \frac{d\sqrt{\lambda}C}{\rho w_m^2}, \quad \tilde{T} = \frac{T_w - T}{q_w d/k}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{d} \end{aligned} \right\} (9)$$

このとき式(2)~(5)は次のようになる(式(1)は形が変わらないので省略する)。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{r}} = -\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{r}} + \tilde{w}^2 \cos \theta + 2B_{CR} \tilde{w} \cos \theta + \frac{1}{K_{LC}} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{u} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (10)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{r}} = -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \theta} - \tilde{w}^2 \sin \theta - 2B_{CR} \tilde{w} \sin \theta + \frac{1}{K_{LC}} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{v} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (11)$$

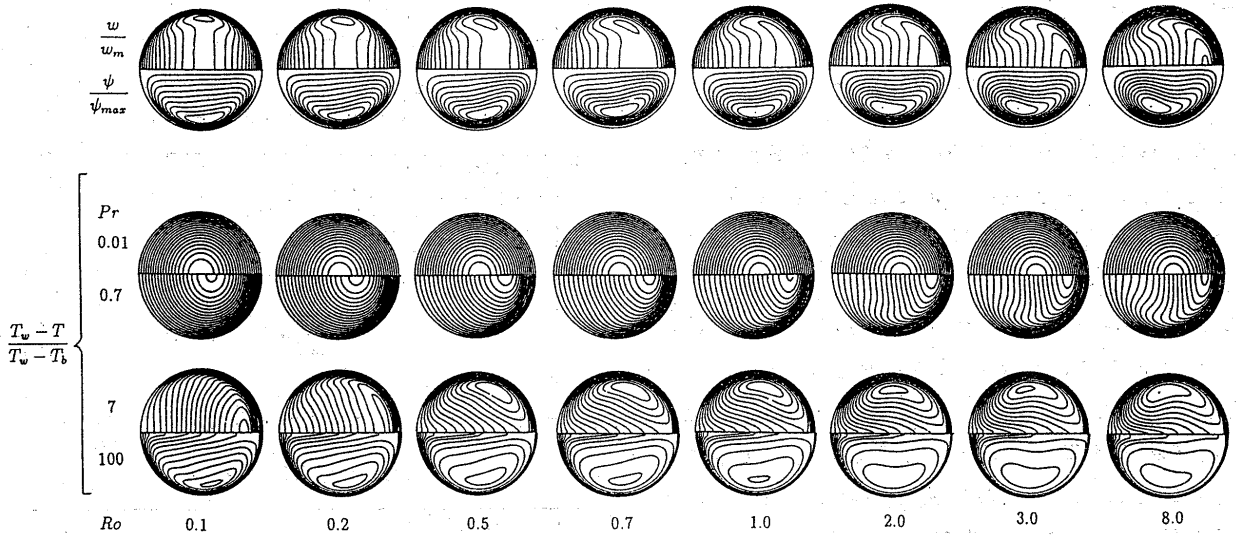


図2 ロスビー数による軸速度、二次流線と温度場の変化（正回転, $K_{LC} = 30$, $B_{CR} = 100$, $K_L = 302$ ）

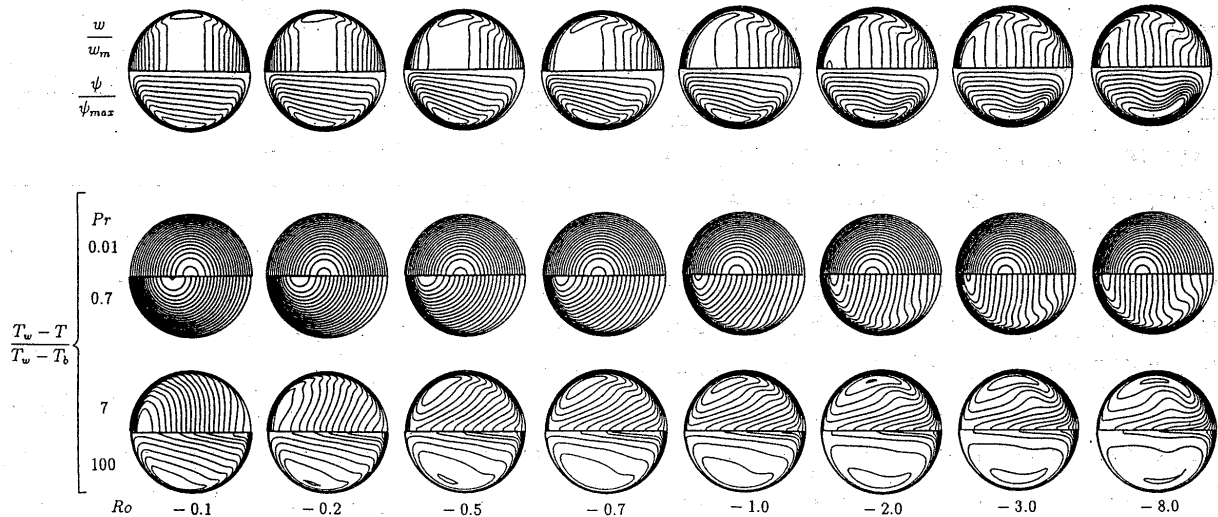


図3 ロスビー数による軸速度、二次流線と温度場の変化（逆回転, $K_{LC} = 100$, $B_{CR} = -100$, $K_L = 995$ ）

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} = \tilde{C} - \frac{2}{Ro} (\tilde{u} \cos \theta - \tilde{v} \sin \theta) + \frac{1}{K_{LC}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{w} \quad (12)$$

$$Pr \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} \right) + \frac{4\tilde{w}}{K_{LC}} = \frac{1}{K_{LC}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \dots \dots \dots (13)$$

ここに

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

上式からわかるようにλが大きいときの流れ特性を決定するパラメータは K_{LC} 、 B_{CR} 、 Ro (熱伝達ではさらに Pr が加わる) であり、 $|Ro|$ が小さいときにその直接的影響が軸速度場にあらわれる。本報では $|Ro|$ が小さくなったときに流動伝熱特性がどのようなかを解析する。なお各パラメータの物理的意味とその流動伝熱場への効果については前報を参照していただきたい。

5. 速度場、温度場の構造

速度場、温度場に対する Ro の影響を系統的に把握するため、 K_{LC} と B_{CR} を一定に保ちながら Ro を順次変化させたとき、速度場、温度場がどのように変化するかを見る。

図2は $K_{LC} = 30$ 、 $B_{CR} = 100$ に固定した計算結果を示したもので、 $\lambda \geq 8$ に保ちながら Ro を0.1~8の範囲で変化させている。 $Ro = 8$ の w と二次流れ関数 ψ の等高線は既に文献(1)で示したもので、これ以上の値では Ro の影響はあらわれない (Ro の漸近不変性)。このとき曲管流と直交回転流のアナロジーが成立し、二つの二次流れの重ね合せにより、 $K_{LC} \approx 300$ の静止曲管流と相似なパターンをとる。他方 $Ro = 0.1$ では、非粘性コア部の等高線は回転軸の方向に一様になっている。これが Taylor-Proudman 現象の特徴であり、このパターンは Ro がさらに小さくなくても変わらない。このとき二次流れ線は y 軸に関して対称形に漸近する。 $Ro = 0.2 \sim 3$ の等高線は $Ro = 0.1$ と8の二つの極限状態のあいだの遷移状況を示している。

これに対する温度場の応答は Pr の値により大きく異なる。文献(2)で明らかにしたように、 $Ro = 8$ における温度場のパターンは、(i) $Pr \ll 1$ では放物面分布、(ii) $Pr = 0.7$ では軸速度場と相似、(iii) $Pr \gg 1$ では二次流れ線場に相似になる、というものであった。しかし Ro が小さくなって Ro の影響があらわれると、これらパターン同士の相似性は成立しなくなる。 $Pr \ll 1$ の場合には、式(13)からわかるように、

T は依然として二次流れ u 、 v とは無関係にポアソン式の解として求まるので、放物面分布のままであり、 Ro の影響をほとんどうけない。

$Pr = 0.7$ では二次流れ u 、 v の影響は w と同程度に入ってくるが、 Ro が小さくなるほど二次流れは弱くなるので (図8参照)、ポアソン式の解である放物面に近づいていく。 $Pr = 7.0$ では二次流れの影響が w よりも強いが、 $Ro = 0.1$ では u 、 v が小さくなって w の寄与と同程度になり、 $Pr = 0.7$ の場合の中間

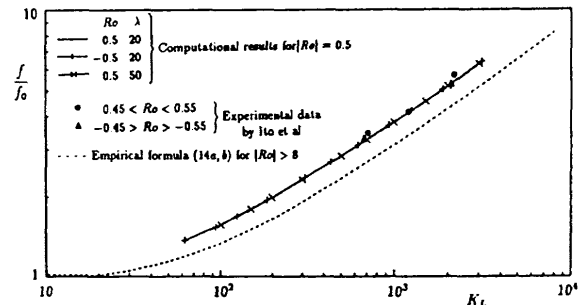
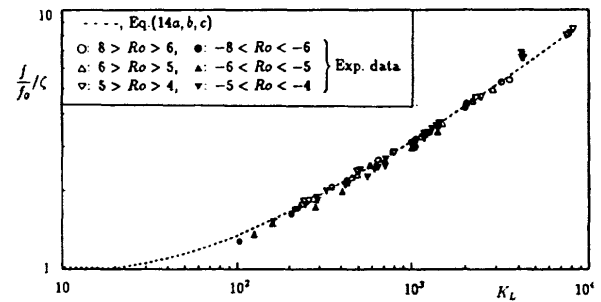
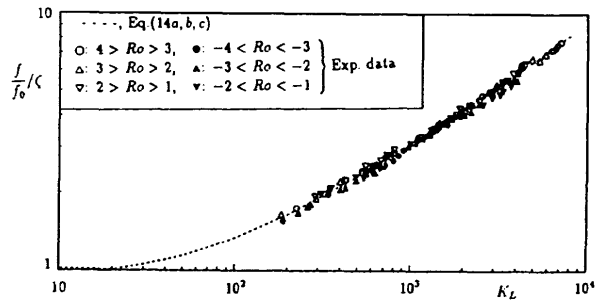


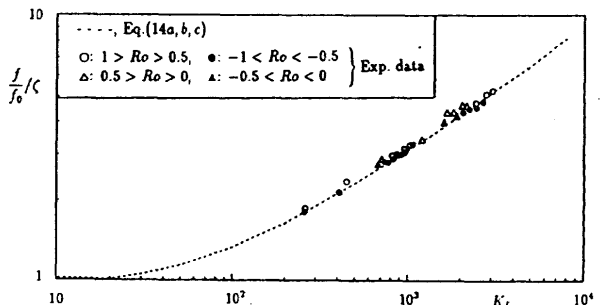
図4 $|Ro| = 0.5$ における管摩擦係数 ($f_0 = 16/Re$ は静止直管の値)



(a) $8 > |Ro| > 4$



(b) $4 > |Ro| > 1$



(c) $1 > |Ro| > 0$

図5 補正(14c)をほどとした管摩擦係数の実用式と伊藤らの実験データの比較

度の Ro (たとえば $Ro = 1.0$) のときに似た温度パターンをとる。さらに Ro が小さくなると二次流れは無視できるほど小さくなり、結果的に $Pr \ll 1$ の場合のパターン (放物面) に漸近する。 $Pr = 100$ の場合も同様に Ro が小さくなるにしたがって温度場のパターンは ψ パターン $\rightarrow w$ パターン \rightarrow 放物面分布 ($Ro \rightarrow 0$ の極限) という経過をたどる (図省略)。

図3は K_L がさらに大きいときの逆回転の場合の等高線を示したもので、二次流れは図2とは逆向きである。上記の議論が同じように成立することがわかる。

6. 管摩擦係数

文献(1)では二つの極限流のアナロジー式に変換 K_L をほどこすことにより、 $|Ro| > 8$ に対する Fanning の管摩擦係数 $f = \tau_w / \frac{1}{2} \rho w_m^2$ (ここに τ_w は平均壁面摩擦) の実用式として次式を与えた。

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{K_L(0.0899 + 1.11K_L^{-0.701})} \dots (14a)$$

ここに $f_0 = 16/Re$ は静止直円管の管摩擦係数で、 K_L は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_L &= K_{LC} \sqrt{B_{CR} + 1}, & (B_{CR} > -0.80) \\ &= K_{LC} \sqrt{|B_{CR}| - 1}, & (B_{CR} < -1.30) \end{aligned} \right\} (14b)$$

式(14a,b)は $|Ro| > 8$ の計算結果をよく表し、伊藤らの実験データともよく一致する。また K_L は回転曲管層流の便宜的な支配無次元数として使用できる⁽¹⁾。

$|Ro|$ が小さいときの f が $|Ro|$ が大きいときの式とどのように異なるかを知るために、 $|Ro| = 0.5$ の3種の計算結果を図4に示す。破線は式(14a,b)を示し、 $|Ro| = 0.5$ の計算結果はこれよりも大きくなって、 Ro が小さくなると管摩擦係数が増加することを示している。 $|Ro| = 0.5$ にとって諸元を変えた3種の計算曲線が一本の曲線に重なることは、本研究のパラメータ選定が力学的相似則に適ったものであることを示している。また図からわかるように、計算結果は $|Ro| \approx 0.5$ の伊藤らの実験データとよく一致している。

つぎに式(14a)に補正を加えて Ro が小さいときの計算結果も含むように修正する。 $|Ro| \geq 0.1$ の計算結果は(14a)に次の補正関数 ζ を乗じてよく表すことができる。

$$\zeta = 1 + 0.047 K_L^{0.156} Ro^{-0.721} \dots (14c)$$

式(14a)に補正(14c)をほどこした式と伊藤らの実験データとの比較を $|Ro|$ の3つの範囲に分けて図5(a)、(b)、(c)に示す。白印は正回転、黒印は逆回転の実験データであり、実験データの Ro の最小値は $|Ro| = 0.3$ であるから、 $|Ro| \geq 0.3$ の領域で式(14a, b, c)は実験データとよく一致していることがわかる。式(14c)を用いれば、 f におよぼす Ro の影響を容易に見積ることができ、たとえば $K_L = 10^3$ のとき、 ζ は $Ro = 1$ で 1.14、 $Ro = 0.5$ で 1.23、 $Ro = 0.1$ で 1.73 である。

7. 平均熱伝達率

文献(2)では $|Ro|$ が大きいときの回転曲管の層流

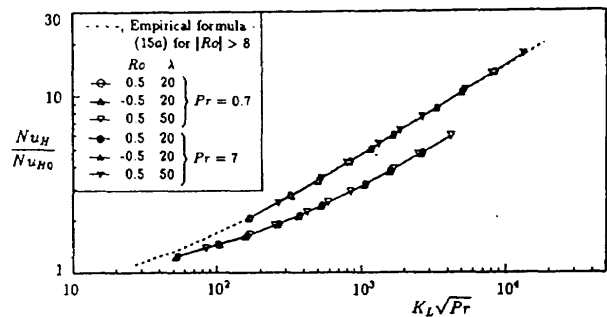


図6 $|Ro| = 0.5$ における平均ヌッセルト数比

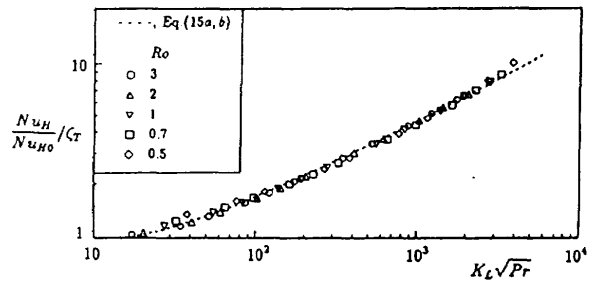


図7 補正した平均ヌッセルト数実用式(15a, b) ($Pr = 0.7$ の場合)

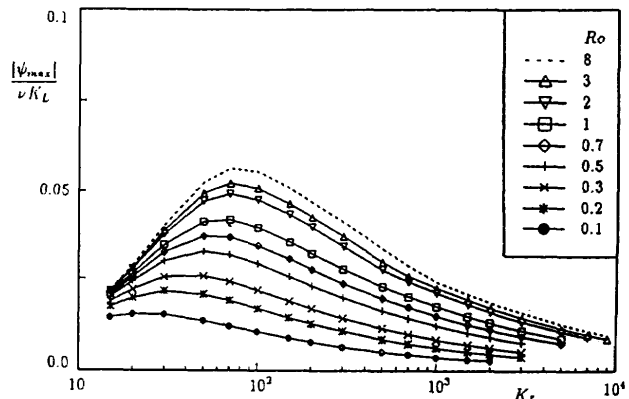


図8 二次流れ関数の最大値の変化

熱伝達について、壁熱流束一定と壁温一定の二つの場合に対して、 $0.7 < Pr < 1000$ の範囲でそれぞれの簡易実用式を提案した。ここでは実用的に重要な $Pr = 0.7$ (空気) と 7 (水) の二つの場合について、壁熱流束一定の条件での平均熱伝達率におよぼす Ro の影響をしらべる。

$0.7 < Pr < 10$ 、 $|Ro| > 8$ に対する壁熱流束一定の場合の平均ヌッセルト数 $Nu_H (= q_w d / [(T_w - T_b)k])$ 、ただし k は流体の熱伝導率) の実用式は次のようなものであった。

$$\frac{Nu_H}{Nu_{H0}} = 0.145 \sqrt{K_P} (1 + 7.15 K_P^{-0.827}) \dots \dots (15a)$$

ここに $K_P = K_L \sqrt{Pr}$ 、 $Nu_{H0} = 48/11$ は静止直管の値を示し、上式で $Nu_H / Nu_{H0} < 1.0$ となったときは 1.0 でおきかえる。図2、3の $|Ro| = 8$ の温度パターンからわかるように、 $Pr = 0.7$ と 7.0 では両者の温度パターンは全く異なるが、 Nu_H の実用式は $|Ro| > 8$ では一つの式 (15a) で表すことができた (文献 (2) の図5)。

はじめに図4に対応して、 Nu_H が $|Ro| = 0.5$ の場合の計算結果が式 (15a) とどのように異なるかを図6に示す。図4の $|Ro| = 0.5$ の場合の管摩擦係数は $|Ro| > 8$ の場合よりも増加するが、 Nu_H は $Pr = 0.7$ では逆に減少する。また $Pr = 7$ の Nu_H は $|Ro| = 0.5$ のときには $|Ro| > 8$ の値と変わらないが、 $|Ro| = 0.1$ では Nu_H は減少する。

$Pr = 0.7$ の $|Ro| \geq 0.5$ についての計算結果は式 (15a) に次の補正関数 ζ_T を乗じてよく表すことができる (図7)。

$$\zeta_T = 1 - 0.0254 K_P^{0.262} Ro^{-1.01} \dots \dots \dots (15b)$$

ふたたび $K_P = 10^3$ として ζ_T の大きさを見積もれば $Ro = 1$ で $\zeta_T = 0.84$ 、 $Ro = 0.5$ で 0.69 となる。ちなみに $Ro = 0.1$ では計算結果から 0.39 となる。 $|Ro| < 0.4$ では Nu_H 曲線はより平坦になってきて、式 (15b) のような関数形では表しにくい。 $Pr = 7$ の場合には $|Ro| > 0.2$ の計算結果は式 (15a) でよく表すことができる。 $Pr = 7$ の計算結果から $Ro = 0.1$ の ζ_T に相当する値を求めれば、 0.83 である。

8. 二次流れの強さ

速度場の特性を定量的に表す例として、断面内二次流れの強さの尺度となる二次流線関数の最大値 ψ_{max} が Ro によりどのように変化するかを図8に示す。 $Ro = 8$ の破線は Ro が大きいときの漸近曲線で

あり、 Ro が小さくなるほど二次流れは弱くなることがわかる。この事実は軸速度場の式 (12) では Ro が小さくなるほど右辺第2項が大きくなって、 w は二次流れ対流項の影響をうけなくなることを示す。また温度の式 (13) では、たとえ Pr が大きくとも、 $Ro \rightarrow 0$ の極限では二次流れによる熱輸送がなくなることを示している。

引用文献

- (1) 石垣, 日本機械学会論文集, 58-561-B, (1993), 1494.
- (2) 石垣, 日本機械学会論文集, 61-582-B, (1995), 672.
- (3) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 268(1994) 133.
- (4) 石垣, 日本機械学会論文集, 61-585-B, (1995), 1782.
- (5) 石垣, 日本機械学会論文集, 60-576-B, (1994), 2736.
- (6) Batchelor, G. K., An Introduction to Fluid Dynamics, (1967), 559, Cambridge Univ. Press.
- (7) 石垣・田村, 日本機械学会論文集, 57-540-B, (1991), 2523.
- (8) 伊藤・小牧ほか, 東北大学・速研報告, 58(1987), 1.
- (9) 伊藤・秋田ほか, 東北大学・速研報告, 59(1988), 1.
- (10) Daskopoulos, P. and Lenhoff, A. M., J. Fluid Mech., 217(1990), 575.