

航空宇宙技術研究所特別資料

SPECIAL PUBLICATION OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

SP-34

第14回航空機計算空気力学シンポジウム論文集

航空機計算空気力学シンポジウム運営委員会

1997年1月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

第14回航空機計算空気力学シンポジウム 論文集

Proceedings of the 14th NAL Symposium on
Aircraft Computational Aerodynamics

開催期日 平成8年6月6日(木)～7日(金)
開催場所 航空宇宙技術研究所

6 June ~ 7 June, 1996
National Aerospace Laboratory, Tokyo

航空宇宙技術研究所
航空機計算空気力学シンポジウム運営委員会

まえがき

本シンポジウムは昭和58年に創始され、本年で14回を迎えました。始めた時の主旨は、CFDの大きな可能性を空気力学の研究や応用に生かすべくこの方面の研究を活発にすることを目的としたものですが、創始以来の毎回の盛況は、この狙いが実現されてきたことを示すと考えられ、主催者として安堵と満足を感じるものです。

本シンポジウムの成果をできるだけ多くの方々に利用して戴くため、当初より、シンポジウムにおける講演を集成した論文集を航空宇宙技術研究所特別資料(SP)として刊行してまいりました。第14回航空機計算空気力学シンポジウムにつきましては、「Accurate Schemes in CFD」のオーガナイズド・セッション、「高エンタルピー・高速流」の企画セッションおよびその他の航空宇宙工学に関連する一般講演を募集いたしました結果、54講演の応募が得られました。本論文集はこれらの講演を集成したものであります。

この論文集が本シンポジウムの意義を更に高くするものであることを念じ、寄稿された所外の方々の御努力に感謝いたしますと共に、本シンポジウムの主旨を継続して実現していくため、今後とも関係各方面の方々の御協力をお願いする次第であります。

航空宇宙技術研究所長

海老原 正夫

目 次

まえがき

航空宇宙技術研究所長 海老原 正夫

1. Mathematical Theory on Difference Approximation for Scalar Conservation Law..... 1
NAL Hideaki AISO
2. Role of CFD in Aeronautical Engineering (No. 14)..... 7
—AUSM Type Upwind Schemes—
KHI Eiji SHIMA
National Institute for Fusion Science Tadamasa JOUNOUCHI
3. 非定常圧縮性流れの高解像度衝撃波／渦捕獲法.....13
東北大学大学院 山本悟
Satoru YAMAMOTO
4. Numerical Simulations of Wall Turbulence by Finite Difference Method19
Science University of Tokyo Hiroshi KAWAMURA
5. A Wavelet-Optimized very High Order Adaptive Grid and Order Numerical Method.....23
MHI Leland JAMESON
6. A New High-Accuracy Method-Finite Spectral Method.....29
NAL Jian-Ping WANG
7. A New High Resolution Scheme for the Solution of the Compressible
Navier-Stokes Equations33
MHI Shigefumi TATSUMI
8. Numerical Investigation of the Unsteady Flow Through Turbomachinery
Components on Parallel Computers39
DLR Karl ENGEL, Frank EULITZ
9. 極超音速飛行実験(HYFLEX)の飛行データについて43
航空宇宙技術研究所 渡辺重哉、白水正男
宇宙開発事業団 山本昌孝
Shigeya WATANABE, Masao SHIROUZU
Masataka YAMAMOTO
10. 極超音速飛行実験(HYFLEX)におけるCFD解析49
航空宇宙技術研究所 高木亮治、伊藤健
Ryoji TAKAKI, Takeshi ITO
11. 再突入飛行体まわりの空力加熱のCFD解析と実験55
航空宇宙技術研究所 山本行光
Yukimitsu YAMAMOTO

12. 高エンタルピー流れワークショップまとめ	61
航空宇宙技術研究所 山本行光 三向ソフトウェア開発 保阪陽子、斉藤亜希子 Yukimitsu YAMAMOTO Yoko HOSAKA, Akiko SAITO	
13. 実在気体効果をともなう極超音速流解析の検証	67
川崎重工業株式会社 岸本琢司、花光明 宇宙開発事業団 尾藤日出夫 Takuji KISHIMOTO, Akira HANAMITSU Hideo BITO	
14. VSL法を用いたOREX周りの非平衡流解析	73
三菱重工業株式会社 大山健一 Ken-ichi OHYAMA	
15. 再突入物体周りの極超音速非平衡流れに及ぼす壁面触媒性の影響について	77
三菱電機株式会社 黒滝卓司 Takuji KUROTAKI	
16. 再突入機周りの流れと空力加熱率の数値計算	83
日産自動車株式会社 嶋田徹、関野展弘 Toru SHIMADA, Nobuhiro SEKINO	
17. 相互干渉を考慮した多翼系の逆問題解法	89
富士通株式会社 松島紀佐 航空宇宙技術研究所 高梨進、岩宮敏幸 Kisa MATSUSHIMA Susumu TAKANASHI, Toshiyuki IWAMIYA	
18. ナビアストークス解法をベースにした超音速翼型の逆解法	95
名古屋大学 神谷信彦 本田技術研究所 玉置秀海 航空宇宙技術研究所 廣瀬直喜、石田洋治 Nobuhiko KAMIYA Hidemi TAMAKI Naoki HIROSE, Yoji ISHIDA	
19. 低アスペクト比翼の逆問題解法について	101
名古屋大学 神谷信彦 三菱重工業株式会社 服部恵介 航空宇宙技術研究所 高梨進、廣瀬直喜 Nobuhiko KAMIYA Keisuke HATTORI	

20. 三次元翼の空力最適化107
東北大学 大山聖、大林茂、中橋和博
航空宇宙技術研究所 中村孝
Akira OYAMA, Shigeru OBAYASHI and Kazuhiro NAKAHASHI
Takashi NAKAMURA
21. 構造的制限を考慮した翼平面形状の最適化113
東北大学 山口義博、大林茂、中橋和博
Yoshihiro YAMAGUCHI, Shigeru OBAYASHI and Kazuhiro NAKAHASHI
22. 次世代超音速旅客機の空力設計とCFDによる検証119
東北大学 山上勝彦、中橋和博、大林茂
Katsuhiko YAMAKAMI, Kazuhiro NAKAHASHI and Shigeru OBAYASHI
23. NWTにおける3次元ADI並列計算法の性能比較125
航空宇宙技術研究所 藤田直行
富士通株式会社 納富昭、上野潤一郎
Naoyuki FUJITA
Akira NOUDOMI, Junichiro UENO
24. 行列積における並列処理性能の評価131
航空宇宙技術研究所 中村孝、吉田正廣、山崎裕之
Takashi NAKAMURA, Masahiro YOSHIDA and Hiroyuki YAMAZAKI
25. 一次元移流拡散差分問題の誤差評価137
株式会社オーク情報システム 名古屋靖一郎
電気通信大学 牛島照夫
Seiichiro NAGOYA
Teruo USHIJIMA
26. 交互境界条件を用いた領域分割法143
電気通信大学 福原誠、竹田辰興
Makoto FUKUHARA, Tatsuoki TAKEDA
27. 4因子分解による3次元圧縮性流れの陰解法147
宇宙科学研究所 藤井孝蔵
Kozo FUJII
28. 3次元非構造格子上での空間前進解法153
東北大学 斎藤英司、中橋和博、Dmitri SHAROV
Eiji SAITOH, Kazuhiro NAKAHASHI and Dmitri SHAROV
29. プラズマトーチによる超音速燃焼強制着火159
防衛大学校 小幡茂男
Shigeo OBATA

30. 超音速空気への水素噴射の数値計算	165
航空宇宙技術研究所 溝渕泰寛、小川哲 Yasuhiro MIZOBUCHI, Satoru OGAWA	
31. HYPRフロントミキシングダクト内混合流の数値解析	171
石川島播磨重工業株式会社 平井健二、児玉秀和 航空宇宙技術研究所 田村敦宏、菊地一雄、野崎理 Kenji HIRAI, Hidekazu KODAMA Atsuhiko TAMURA, Kazuo KIKUCHI and Osamu NOZAKI	
32. 流路切り換え機構の空力解析	177
三菱重工業株式会社 清水邦弘、中西英全、三宅慶明、東森弘高 航空宇宙技術研究所 野崎理、菊地一雄、田村敦宏 Kunihiko SHIMIZU, Hidemasa NAKANISHI, Yoshiaki MIYAKE and Hirotaka HIGASHIMORI Osamu NOZAKI, Kazuo KIKUCHI and Atsuhiko TAMURA	
33. コンプレッサー全周流れの数値シミュレーション	183
航空宇宙技術研究所 菊地一雄、松尾裕一、野崎理 石川島播磨重工業株式会社 松永康二、竹内久雄、平井健二 Kazuo KIKUCHI, Yuichi MATSUO and Osamu NOZAKI Koji MATSUNAGA, Hisao TAKEUCHI and Kenji HIRAI	
34. タービン単段流れの数値シミュレーション	189
石川島播磨重工業株式会社 松永康二、竹内久雄、平井健二 航空宇宙技術研究所 松尾裕一、菊地一雄、野崎理 Koji MATSUNAGA, Hisao TAKEUCHI and Kenji HIRAI Yuichi MATSUO, Kazuo KIKUCHI and Osamu NOZAKI	
35. CADデータに基づく計算格子の作成	195
航空宇宙技術研究所 岩宮敏幸、吉田正廣、山崎裕之 Toshiyuki IWAMIYA, Masahiro YOSHIDA and Hiroyuki YAMAZAKI	
36. B-スプラインを用いた船型の系統的変形	199
船舶技術研究所 児玉良明、川島英幹、竹子春弥 Yoshiaki KODAMA, Hideki KAWASHIMA and Haruya TAKESHI	
37. 楕円型方程式を用いたマルチブロック格子生成法について	203
航空宇宙技術研究所 山本一臣 Kazuomi YAMAMOTO	
38. RCSジェットと希薄気流干渉のモンテカルロ直接シミュレーション	209
航空宇宙技術研究所 古浦勝久 大興電子通信株式会社 高平幹成、石川直恒 Katsuhisa KOURA	

Mikinari TAKAHIRA, Naotsune ISHIKAWA

39. van der Waals気体中の衝撃波の不安定解析215
京都大学 石井隆次
金沢大学 由比政年
Ryuji ISHII
Masatoshi YUHI
40. 浮力が作用する回転曲管内の流れと熱伝達221
航空宇宙技術研究所 石垣博
Hiroshi ISHIGAKI
41. 2重円管内乱流の数値シミュレーション227
東京理科大学 清水康弘、河村洋
航空宇宙技術研究所 山本稀義
Yasuhiro SHIMIZU, Hiroshi KAWAMURA
Kiyoshi YAMAMOTO
42. 乱流中のworm生成の数値シミュレーション233
電気通信大学 生出伸一、佐藤司、細川巖
航空宇宙技術研究所 山本稀義、末松和代
Shin-ichi OIDE, Tsukasa SATO and Iwao HOSOKAWA
Kiyoshi YAMAMOTO, Kazuyo SUEMATSU
43. 超音速圧縮・膨張斜面境界層におけるT-S波動の挙動239
大阪府立大学 坂上昇史、西岡通男
Shoji SAKAUE, Michio NISHIOKA
44. 圧縮性境界層における擾乱の空間的発達に対する壁面冷却の影響について245
名古屋大学 前田一郎、中村佳朗
Ichiro MAEDA, Yoshiaki NAKAMURA
45. ヘリコプタ・ブレードの幾何形状がBVI騒音に与える影響251
(株)ATIC 中村英明、近藤夏樹、青木誠
航空宇宙技術研究所 青山剛史、齊藤茂
Hideaki NAKAMURA, Natsuki KONDO and Makoto AOKI
Takashi AOYAMA, Shigeru SAITO
46. ヘリコプタ・ロータ空力騒音の数値解析257
三菱重工業株式会社 内山直樹、中尾雅弘
宇宙科学研究所 藤井孝蔵
株CTI 大村稔
Naoki UCHIYAMA, Masahiro NAKAO
Kozo FUJII
Minoru OHMURA

47. 近傍場におけるソニックブームの数値推算.....	263
東京大学 牧野好和、杉浦貴明、綿貫忠晴、久保田弘敏 航空宇宙技術研究所 青山剛史 Yoshikazu MAKINO, Takaaki SUGIURA, Tadaharu WATANUKI and Hirotoishi KUBOTA Takashi AOYAMA	
48. 3次元境界要素法による地面上を移動する物体周りの流れ解析	269
東京理科大学 菊地勝浩、元栄文則、柳澤三憲 Katsuhiko KIKUCHI, Fuminori MOTOE and Mitsunori YANAGIZAWA	
49. 連成モードで振動する翼のダイナミック・ストール	275
九州大学 磯貝紘二、新本康久 三菱重工業株式会社 渡部洋八郎 Koji ISOGAI, Yasuhisa SHINMOTO Yohachirou WATANABE	
50. 弾性モードで振動する翼周りの非定常粘性流の数値シミュレーション	285
東海大学 ケイランデイシュ ハミドレザ、別府護朗 航空宇宙技術研究所 中道二郎 Hamidreza KHEIRANDISH, Goro BEPPU Jiro NAKAMICHI	
51. Computational Study of Incompressible Flow by Finite-Difference Method	289
ISAS Kunio KUWAHARA	
52. Simulation of Subsonic Flow Past an Airfoil	295
ISAS Kunio KUWAHARA	
53. 極超音速化学平衡コードの検証	301
東北大学 田頭英臣、澤田恵介 Eishin DENDOU, Keisuke SAWADA	
54. 超音速輸送機の前縁ボルテックス・フラップ周りの流れの数値解析	307
富士重工業株式会社 檜垣郷子 日本航空機開発協会 前川昭三 Kyoko HIGAKI Shoji MAEKAWA	
第14回航空機計算空気力学シンポジウム運営委員会委員	313

Mathematical Theory on Difference Approximation for Scalar Conservation Law.

AISO, Hideaki *

Abstract

We review mathematical theory on difference approximation for scalar conservation law from the viewpoint of numerical viscosity. We present a new result as well. The most important thing in the theory is to prove the convergence to entropy solution (physically relevant solution). For the purpose we usually discuss the consistency with entropy condition. On the other hand, high accuracy is strongly required from the practical viewpoint. It is still an open problem to determine a general class of difference approximations which both converge to the entropy solution and are of high accuracy. Our objective is to give a clear overview of the theory from the viewpoint of numerical viscosity.

We classify the difference approximations by numerical viscosity coefficient. By the method we can clearly determine classes of difference approximation which converge to entropy solution. Especially our new theorem determines a general class of highly accurate difference approximations converging to the entropy solution. The new class is one of the widest class of such difference approximations and the theorem is important practically as well as theoretically.

1. Introduction.

We are concerned with difference approximation for scalar conservation law;

$$u_t + f(u)_x = 0. \quad (1)$$

It is still important to analyze difference approximation for scalar conservation law. In fact, we do not yet have mathematical theory enough to deal with difference approximations for systems of conservation laws, but we develop them being based on mathematical intuition from the scalar case. Therefore we still need to analyze difference approximation for scalar conservation law to obtain a good perspective which can be applied to develop difference approximations for systems of conservation laws.

The difficulty in analyzing difference approximations comes from the theory of conservation law. Even in the scalar case the existence and uniqueness of solution [15] is guaranteed not only with the concept of weak solution but also with the entropy condition (see also [11]), which is an additional condition described in an inequality. It means that difference approximations are required to be consistent with the entropy condition as well as with the original conservation law. To prove the consistency with entropy condition is still the main difficulty in theory of difference approximation for scalar conservation law.

We treat difference approximations in viscous form;

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} \{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)\} + \frac{\lambda}{2} \{a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - a_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n)\}. \quad (2)$$

The form is well known and naturally satisfy the property of conservation. Almost all the schemes of difference approximation known today are written in the form. Difference approximation in viscous form is characterized by coefficients $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ called numerical viscosity coefficients. The numerical viscosity coefficient is also convenient to classify difference approximations. Then a natural problem is to describe a condition for the convergence to entropy solution in terms of numerical viscosity coefficient.

From the experience of numerical computation and some theoretical works [6, 7, 15], we know that large numerical viscosity coefficients are safe for the convergence to entropy solution, and that too little ones may cause numerical instability, oscillation or convergence to a wrong solution. On the other hand, however, numerical experiments tell us that large numerical viscosity coefficients deteriorate the quality of approximation, *i.e.* cause a large error or dumping of discontinuities unless the mesh width of difference Δx and Δt are very small (much smaller than used in practical computations). Therefore it is strongly required to find numerical viscosity coefficients that solve the dilemma above.

Our discussion here gives a clear perspective. If we give the lower limit of each numerical viscosity coefficient $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ described in terms of u_i^n and u_{i+1}^n , theorem 3 is one of the best possible results. The theorem is an extension of several results obtained before (see, for example, [6, 7, 15, 17]), and includes well-known difference schemes of Lax-Friedrichs, Engquist-Osher, Godunov and Harten's first order-accurate TVD with entropy-fix. But the result is applicable only for first order-accurate difference approximations.

Then with the notation of flux modification by Harten

* Computational Sciences Division, National Aerospace Laboratory JAPAN (Address: Jindaiji-higashi-machi 7-44-1, Chofu, TOKYO 182 JAPAN, E-mail: aiso@nal.go.jp)

we have the main result, theorem 5. The theorem includes a general class of highly accurate difference approximation converging to the entropy solution as well as determine a very large class of difference approximation (not only highly accurate ones) converging to the entropy solution. Almost all the schemes of difference approximation which are empirically known to converge to the entropy solution are included in the theorem. We also mention that only the natural CFL condition;

$$\sup|f'| \leq 1 \quad (3)$$

is supposed throughout the discussion. We do not require any particular CFL restriction. It also means that the result is practical as well as theoretical.

2. Scalar Conservation Law.

By difference approximation we approximate the initial value problem for scalar conservation law;

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (4)$$

where the flux function f is strictly convex. We restrict ourselves into BV-category (the category of functions of bounded variation), i.e. we suppose that the initial function u_0 is of bounded variation and we consider only solutions of bounded variation.

We briefly review the property of solution to the problem (4). Nonlinearity of the flux function may violate the existence of smooth global solution even if the initial data might be smooth. To allow the discontinuities in solution we introduce the concept of weak solution. Then the existence of solution is guaranteed. But infinitely many different weak solutions may exist. Infinitely many physically irrelevant solutions may be included in them and only one physically relevant solution is expected.

To select out a physically relevant solution, we impose an additional condition, which is called the entropy condition, on weak solutions. (See [11])

Definition 1. A pair (U, F) of functions is called an entropy pair if U is convex and the relation $F' = U'f'$ holds. U and F are called an entropy function and entropy flux function, respectively. A weak solution $u = u(x, t)$ is called an entropy solution if it satisfies the entropy inequality

$$U(u)_t + F(u)_x \leq 0 \quad (5)$$

for every entropy pair (U, F) . Here the entropy inequality (5) is understood in the sense of distribution.

A weak solution satisfying the entropy condition is called an entropy solution. The existence and uniqueness of entropy solution is proved in [15]. When the flux function f is strictly convex, we have a theorem on the entropy condition. (See [5], also [2, 19, 18].)

Theorem 1. Suppose that the flux function f in the problem (4) is strictly convex. If the entropy inequality holds for an entropy pair with the entropy function

U strictly convex, then the entropy condition is satisfied. (i.e. the entropy inequality holds for every entropy pair.)

The theorem plays an essential role in the proof of main theorem.

3. Difference Approximation.

We consider difference approximation in viscous form;

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2} \{f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)\} + \frac{\lambda}{2} \{a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - a_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n)\}. \quad (6)$$

Each u_i^n is an approximate value for u at the node $(i\Delta x, n\Delta t)$ with $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$ the pair of mesh widths in x - and t - directions. The ratio $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ is fixed to satisfy the natural CFL condition

$$\lambda \max_{\inf_{n,i} u_i^n \leq s \leq \sup_{n,i} u_i^n} |f'(s)| \leq 1.1 \quad (7)$$

Each coefficient $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ is called a numerical viscosity coefficient. To guarantee the consistency with original conservation law, we suppose that all the numerical viscosity coefficients are uniquely bounded, i.e. $|a_{i+\frac{1}{2}}^n| < M$ for a constant M independent of $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$, n and i . We note that difference approximation in viscous form can be written also in conservative form;

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \left\{ \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \right\} \quad (8)$$

with the relation

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} \{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)\} - \frac{1}{2} a_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (9)$$

supposed between each numerical flux $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ and numerical viscosity coefficient $a_{i+\frac{1}{2}}^n$.

When we discuss the convergence of difference approximation for scalar conservation law, we need to examine two things, the stability (in other words, the compactness) and the consistency with entropy condition. Now we need some formulation to discuss the convergence. For each $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$ we define an approximate function u_Δ by

$$u_\Delta(x, t) = u_i^n \quad \text{if} \quad \begin{cases} (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x \\ n\Delta t \leq t < (n + 1)\Delta t. \end{cases} \quad (10)$$

u_Δ is just an extension of approximate values $\{u_i^n\}_{i,n \in \mathbf{Z}, n \geq 0}$ which are determined only at the nodes $\{(i\Delta x, n\Delta t)\}_{i,n \in \mathbf{Z}, n \geq 0}$. Assuming the initial data $\{u_i^0\}_{i \in \mathbf{Z}}$ are determined so that $u_\Delta(\cdot, 0)$ should converge to $u_0(\cdot)$ in $L_{loc}^1(\mathbf{R})$ as $\Delta \rightarrow (0, 0)$, we discuss the convergence of u_Δ in $L_{loc}^1(\mathbf{R} \times [0, \infty))$ as $\Delta \rightarrow (0, 0)$. By the word 'convergence of difference approximation', we mean the convergence of approximate solution u_Δ defined above.

¹In this article, we treat only TVD difference approximation. (We give the definition of TVD afterwards.) Therefore, if the inequality (7) is satisfied for $n = 0$, (7) is satisfied for $n \geq 1$ as well.

The concept of TVD is very important and often used in the discussion of stability (or L^1_{loc} -compactness). If a difference approximation satisfies

$$\sum_{i \in \mathcal{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathcal{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n|, \quad (11)$$

we say that the difference approximation is TVD (Total Variation Diminishing). If the difference approximation (6) is TVD, the family $\{u_\Delta\}_\Delta$ is compact in L^1_{loc} -topology, which means that there exists some convergent subsequence from $\{u_\Delta\}_\Delta$ (see, for example, [14]) and that the limit of each convergent subsequence is a weak solution to (4). (Note the uniform boundedness of numerical viscosity coefficients.)

The consistency with entropy condition is another thing and is inevitable when we prove the convergence to entropy solution. In fact the stability is not enough because it only guarantees that the convergence limits are weak solutions. With the stability of difference approximation assumed, the consistency with entropy condition implies that all the convergence limits of convergent subsequences from $\{u_\Delta\}_\Delta$ satisfy the entropy condition. It means that the convergence limits are the unique entropy solution. We have the following definition.

Definition 2. *We say that a difference approximation is consistent with the entropy condition if there exists an entropy pair (U, F) with the entropy function U strictly convex so that the approximate values $\{u_i^n\}_{i, n \in \mathcal{Z}, n \geq 0}$ satisfy the numerical entropy inequality;*

$$U(u_i^{n+1}) - U(u_i^n) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n)\} - \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(u_i^n - u_{i-1}^n)\} \leq 0 \quad (12)$$

for each $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$ with appropriate constants $\{A_{i+\frac{1}{2}}^n\}_{i, n \in \mathcal{Z}, n \geq 0}$. Here the coefficients $A_{i+\frac{1}{2}}^n$ should be uniquely bounded irrespective of $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$, n and i .

The definition is only for the case that the flux function f is strictly convex. Remember theorem 1.

When proving the convergence to entropy solution, we usually prove the TVD property (or other stability) first, and the consistency with entropy condition second. The TVD property is rather easily shown in almost all cases. Then the main difficulty in proof is to prove the numerical entropy inequality.

4. Examples of Difference Approximation.

We give some examples of numerical viscosity coefficients (i.e. schemes of difference approximation).

1. Lax-Friedrichs.

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^{LF} = \frac{1}{\lambda}. \quad (13)$$

2. Godunov.

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^G(u_i^n, u_{i+1}^n) = \max_{(s-u_i^n)(s-u_{i+1}^n) \leq 0} \frac{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n) - 2f(s)}{u_{i+1}^n - u_i^n}. \quad (14)$$

3. Murmann-Roe.

$$a^{MR}(u_L, u_R) = \left| \int_0^1 f'(u_L + (u_R - u_L)\theta) d\theta \right| = \left| \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} \right|. \quad (15)$$

4. Lax-Wendroff.

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = a^{LW}(u_i^n, u_{i+1}^n) = \lambda \{a^{MR}(u_{i+1}^n - u_i^n)\}^2 + O(\Delta) = \lambda \left(\frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right)^2 + O(\Delta), \quad (16)$$

The examples above are important in the theory of convergence as well.

5. Convergence to Entropy Solution.

As for TVD-property the following theorem is well known. (See [8, 9, 13].)

Theorem 2. *The difference approximation (6) is TVD if each numerical viscosity coefficient satisfies*

$$a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n) \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (17)$$

But the condition (17) does not guarantee the convergence to entropy solution. In fact Murmann-Roe scheme is TVD and may converge to a weak solution which violates the entropy condition. In [2] the author proves the following theorem which determines a general class of first order-accurate difference approximation converging to the entropy solution.

Theorem 3. (Theorem 5.2 in [2]) *Fix a positive constant ϵ less than 1.*

The difference approximation (6) converges to the entropy solution if each numerical viscosity coefficient $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ satisfies the inequality

$$\max \left\{ a^{MR}(u_i^n, u_{i+1}^n), \frac{\epsilon}{\lambda} \operatorname{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) \right\} \leq a_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (18)$$

We easily observe that the condition (18) is included in the condition (17) for TVD property and that almost all difference approximation satisfying (17) converge to the entropy solution. The theorem includes well-known difference schemes of Lax-Friedrichs [10], Engquist-Osher [6], Godunov [7] and Harten's first order-accurate TVD with entropy-fix [8, 9]. Especially the theorem is the first to prove that the scheme of Harten converges to the entropy solution. In fact the theorem is the best possible if the lower and upper limits for each numerical viscosity coefficient $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ are written in terms of u_i^n and u_{i+1}^n . We easily obtain a counter example if the condition (18) is violated.

But the theorem does not include highly accurate difference approximations because the lower and upper limits for $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ depend only on u_i^n and u_{i+1}^n . If the difference approximation (6) is both TVD and second order-accurate

in the smooth region (we allow exception around discontinuities), each numerical viscosity coefficient $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ can not be written in terms only of u_i^n and u_{i+1}^n . In fact Lax-Wendroff difference scheme, is only the case of second order-accurate difference approximation with each $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ a function of u_i^n and u_{i+1}^n , but it is not TVD.

To resolve the inconvenience above we employ the method of flux modification proposed by Harten [8, 9]. We consider difference approximation in the following form;

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\lambda}{2} \left[\{f(u_{i+1}^n) + \phi_{i+1}^n\} - \{f(u_{i-1}^n) + \phi_{i-1}^n\} \right] \\ &+ \frac{\lambda}{2} \left\{ \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - \tilde{a}_{i-\frac{1}{2}}^n (u_i^n - u_{i-1}^n) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Each ϕ_i^n is called the flux modification and $\tilde{f}_i^n = f(u_i^n) + \phi_i^n$ is called the modified flux. For keeping the consistency with original conservation law, each flux modification ϕ_i^n should satisfy the condition;

$$|\phi_i^n| \leq M \min \left\{ |u_i^n - u_{i-1}^n|, |u_{i+1}^n - u_i^n| \right\} \quad (20)$$

for a fixed constant M independent of Δ , n and i . We note that the difference approximation (19) is written also in the ordinary viscous form (6) with each $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ determined by

$$a_{i+\frac{1}{2}}^n = \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{\phi_i^n + \phi_{i+1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}. \quad (21)$$

Each $a_{i+\frac{1}{2}}^n$ is finite because each flux modification satisfies the condition (20).

We begin with the discussion on stability. The condition (17) for TVD property is no more directly applied for numerical viscosity coefficients of (21). But we easily obtain a result.

Theorem 4. *The difference approximation (19) is TVD if each coefficient $\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^n$ satisfies*

$$\left| \frac{\tilde{f}_{i+1}^n - \tilde{f}_i^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right| \leq \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{\lambda}, \quad (22)$$

where $\tilde{f}_i^n = f(u_i^n) + \phi_i^n$.

Theorem 4 is an extension of theorem 2. If $\phi_i^n = 0$ ($\forall i, n$), they are the same. As for the proof, it is essential to observe the fact $|\tilde{f}_{i+1}^n - \tilde{f}_i^n| \leq \frac{1}{\lambda} |u_{i+1}^n - u_i^n|$ and the remaining part is almost similar to theorem 2.

Next we consider the consistency with entropy condition restricting ourselves into difference approximations included in theorem 4. Then we have the following theorem, which is the main result.

Theorem 5. *Let $\bar{\phi}_i^n$ be defined by*

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i^n &= \frac{1}{2} \left\{ \text{sgn} \Delta u_{i-\frac{1}{2}}^n + \text{sgn} \Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n \right\} \\ &\times \min \left\{ \frac{1}{2} q_{i-\frac{1}{2}}^n \left(1 - \lambda q_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \left| \Delta u_{i-\frac{1}{2}}^n \right|, \right. \\ &\left. \frac{1}{2} q_{i+\frac{1}{2}}^n \left(1 - \lambda q_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \left| \Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n \right| \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

where $\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n = u_{i+1}^n - u_i^n$, $\Delta f_{i+\frac{1}{2}}^n = f_{i+1}^n - f_i^n$ and $q_{i+\frac{1}{2}}^n = \left| \frac{\Delta f_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n} \right|$ ($q_{i+\frac{1}{2}}^n = f'(u_i^n)$ if $\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$). Suppose that each flux modification ϕ_i^n satisfies

$$(\phi_i^n - \bar{\phi}_i^n) \phi_i^n \leq 0. \quad (24)$$

The difference approximation (19) converges to the entropy solution if each coefficient $\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^n$ satisfies

$$\max \left\{ \left| \frac{\tilde{f}_{i+1}^n - \tilde{f}_i^n}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right|, \frac{\epsilon}{\lambda} \text{sgn} \Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n \right\} \leq \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^n \leq \frac{1}{\lambda}, \quad (25)$$

where ϵ is an arbitrary fixed positive number such that $0 < \epsilon \leq 1$.

The theorem is an extension of theorem 3. It is also possible to rewrite the condition in theorem 5 into the form of inequalities determining the range of each numerical viscosity coefficient $a_{i+\frac{1}{2}}^n$. If we do so, however, the statement of theorem would be more confusing.

Considering the order of accuracy, we obtain the following corollary.

Corollary 1. *If we add the assumption that each ϕ_i^n satisfies*

$$\phi_i^n = \bar{\phi}_i^n + O(\Delta^2) \quad (26)$$

to the condition of theorem 5, then the difference approximation (19) is also second order-accurate in the smooth region (i.e. except around the discontinuities).

Before theorem 5 a few works [1, 16] treat highly accurate difference approximations to get some results for the consistency with entropy condition. But the results seem to have some artificial restriction which comes from the method of proof. Theorem 5 seems to have the least of such artificial restriction and to be a very general result including [1] and [16]. The theorem includes also several highly accurate difference approximations, for example, Harten's second order-accurate TVD [8, 9] and some difference approximation obtained by the method of reconstruction within each cell (see [1, 4] also [12]).

At the last of section we again note that the assumption of strict convexity of flux function f is essential for theorem 3 and theorem 5. Otherwise we can not prove the theorems. Theorem 2 and 4 is still valid even when the flux function f is not strictly convex.

6. Sketch of Proof.

We give a sketch of proof for theorem 3 and theorem 5. The main part of proof is to prove the consistency with entropy condition. It suffices to construct an entropy pair (U, F) with the entropy function U strictly convex and a family of coefficients $\{A_{i+\frac{1}{2}}^n\}_{i,n \in \mathbb{Z}, n \geq 0}$ which satisfy the numerical entropy inequality (12), where the entropy pair (U, F) should be independent of $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$.

For that purpose we observe that every entropy pair is a convex linear combination of a family of entropy pairs

parametrized by $k \in \mathbf{R}$, and prepare modified flux functions. (The modified flux function is a concept different from the modified flux \tilde{f}_i^n by Harten in the previous section.) We finally construct an entropy pair (U, F) and coefficients $A_{i+\frac{1}{2}}^n$ satisfying the requirement.

First we choose a positive constant M_0 so that $-M_0 \leq u_i^0 \leq M_0$ be satisfied for all $i \in \mathbf{Z}$. We easily observe that $-M_0 \leq u_i^n \leq M_0$ for all n and i . We define a family of entropy pairs $\{U(\cdot; k), F(\cdot; k)\}_{k \in \mathbf{R}}$ by

$$\begin{aligned} U(s; k) &= \chi^-(k)(s-k)^- + \chi^+(k)(s-k)^+ \\ &= \begin{cases} (s-k)^- & \text{if } k < 0 \\ (s-k)^+ & \text{if } k > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

and

$$\begin{aligned} F(s; k) &= -\chi^-(k)\chi^-(s-k)\{f(s) - f(k)\} \\ &\quad + \chi^+(k)\chi^+(s-k)\{f(s) - f(k)\} \\ &= \begin{cases} -\chi^-(s-k)\{f(s) - f(k)\} & \text{if } k < 0 \\ \chi^+(s-k)\{f(s) - f(k)\} & \text{if } k > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

where $s^+ = \max\{s, 0\}$, $s^- = \max\{-s, 0\}$,

$$\chi^+(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < 0 \\ 1 & \text{if } s > 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \chi^-(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s < 0 \\ 0 & \text{if } s > 0. \end{cases}$$

We note that we do not have to define $\chi^+(0)$, $\chi^-(0)$, $U(\cdot, 0)$ nor $F(\cdot, 0)$. It is enough that they only have some finite values. Then we have the following relation for each entropy pair (U, F) with U strictly convex and of C^2 -class.

$$\begin{cases} U(s) = \int_{-\infty}^{\infty} U(s; k)U''(k)dk + sU'(0) + U(0) \\ F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s; k)U''(k)dk + sF'(0) + F(0) \end{cases} \quad (29)$$

Note that $U''(k) > 0$ for all $k \in \mathbf{R}$ because U is strictly convex. We suppose that $U(0) = F(0) = U'(0) = F'(0) = 0$ without loss of generality. We also note that the interval of integral in (29) could be $[-M_0, M_0]$ instead of $[-\infty, \infty]$ if we restrict the variable s within the interval $[-M_0, M_0]$.

Next we define modified flux functions, which consist of two kinds. Modified flux functions of the first kind are defined as follows. A function f_i^n is called a modified flux function of the first kind associated with \tilde{f}_i^n at (i, n) if it satisfies that

$$|(f_i^n)'(s)| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{if } s \in [-M_0, M_0],$$

$$f_i^n(u_i^n) = \tilde{f}_i^n$$

and

$$f_i^n(s) = f(s) \quad \text{if} \quad \begin{cases} s \leq \min\{u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n\} \\ \text{or} \\ s \geq \max\{u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n\}. \end{cases}$$

In the case of theorem 3, define $f_i^n \equiv f$. Modified flux functions of the second kind is defined as follows. A function $g_{i+\frac{1}{2}}^n$ is called a modified flux function of the second

kind associated with $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n$ (in theorem 3) or $\tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^n$ (in theorem 5) at $(i + \frac{1}{2}, n)$ if it satisfies that

$$|(g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s)| \leq \frac{1}{\lambda} \quad \text{if } s \in [-M_0, M_0],$$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n \text{ or } \tilde{\alpha}_{i+\frac{1}{2}}^n = \int_0^1 |(g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(u_i^n + (u_{i+1}^n - u_i^n)\theta)| d\theta$$

and

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} f_i^n(s) & \text{if } (s - u_i^n)(u_{i+1}^n - u_i^n) \leq 0 \\ f_{i+1}^n(s) & \text{if } (s - u_{i+1}^n)(u_i^n - u_{i+1}^n) \leq 0 \end{cases}$$

Of course, a modified flux function f_i^n or $g_{i+\frac{1}{2}}^n$ from the definition above is not uniquely determined. We choose appropriate ones imposing more precise condition, but we skip this discussion because of the short of space.

Now we assume that appropriate families $\{f_i^n\}_{n,i}$ and $\{g_{i+\frac{1}{2}}^n\}_{n,i}$ of modified flux functions are already chosen. We define functions $F_i^n(\cdot; k)$, $k \in \mathbf{R}$ by

$$F_i^n(s; k) = -\chi^-(k)\chi^-(s-k)\{f_i^n(s) - f_i^n(k)\} + \chi^+(k)\chi^+(s-k)\{f_i^n(s) - f_i^n(k)\} \quad (30)$$

and $A_{i+\frac{1}{2}}^n(k)$ ($k \in \mathbf{R}$ is a parameter) by the equation

$$\begin{aligned} A_{i+\frac{1}{2}}^n(k)(u_{i+1}^n - u_i^n) &= F(u_i^n; k) + F(u_{i+1}^n; k) - F_i^n(u_i^n; k) - F_{i+1}^n(u_{i+1}^n; k) \\ &\quad + \int_{u_i^n}^{u_{i+1}^n} |(g_{i+\frac{1}{2}}^n)'(s)| ds. \end{aligned} \quad (31)$$

Here we note that each $A_{i+\frac{1}{2}}^n(k)$ is determined to be a finite value and to be uniquely bounded, i.e. $|A_{i+\frac{1}{2}}^n(k)| \leq M$ for a constant M independent of Δ, n, i or k . Then we define $E_i^n(k)$ by

$$\begin{aligned} E_i^n(k) &= U(u_{i+1}^n; k) - U(u_i^n; k) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n; k) - F(u_{i-1}^n; k)\} \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n(k)(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(k)(u_i^n - u_{i-1}^n)\}. \end{aligned} \quad (32)$$

$E_i^n(k)$ is the left-hand side of numerical entropy inequality (12) for the entropy pair $(U(\cdot; k), F(\cdot; k))$. $E_i^n(k)$ is not always negative or zero, and changes the sign depending on k . It is possible to find a fixed strictly convex function U satisfying the inequality

$$\int_{-M_0}^{M_0} E_i^n(k)U''(k)dk \leq 0. \quad (33)$$

U is irrespective of Δ, n, i and k . We easily observe that the relation

$$\begin{aligned} \int_{-M_0}^{M_0} E_i^n(k)U''(k)dk &= U(u_{i+1}^n) - U(u_i^n) + \frac{\lambda}{2} \{F(u_{i+1}^n) - F(u_{i-1}^n)\} \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \{A_{i+\frac{1}{2}}^n(u_{i+1}^n - u_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n(u_i^n - u_{i-1}^n)\} \end{aligned} \quad (34)$$

holds, where

$$F(s) = \int_{-M_0}^{M_0} F(s; k)U''(k)dk \quad (35)$$

and

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = \int_{-M_0}^{M_0} A_{i+\frac{1}{2}}^n(k) U''(k) dk. \quad (36)$$

Clearly the functions U and F above make an entropy pair (U, F) .

Therefore we prove the numerical entropy inequality (12) for the entropy pair (U, F) with U strictly convex. It means that a weak solution to which the difference approximation converges satisfies the entropy inequality (5) for the entropy pair (U, F) . By theorem 1 we conclude that the difference approximation converges to the entropy solution.

7. Concluding Remarks

The new class we give in theorem 5 seems to be one of the widest ones of difference approximations converging to the entropy solution. Therefore theorem 5 can be used to examine the convergence of difference approximation, *i.e.* we expect that a difference scheme newly developed in future would belong to the class and converge to the entropy solution. For example, in [3] the author propose a new difference scheme which clearly captures edges of rarefactions as well as shock discontinuities, and the new scheme belongs to the class of theorem 5.

Of course, some extension into the system case is also expected. But this problem is still very difficult.

8. REFERENCES

- [1] H. Aiso. Second order TVD difference approximations of scalar conservation laws and the consistency with the entropy condition. *Report of Uppsala University, Dep. of Scientific Computing*. No.152/1993.
- [2] H. Aiso. Admissibility of difference approximation for scalar conservation laws. *Hiroshima Math. J.*, 23(1):15-61, 1993.
- [3] H. Aiso. Higher Order-Accurate Difference Approximation for Scalar Conservation Laws and the Consistency with Entropy Condition. *Collection of Technical Papers, 6th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, pages 7-12, 1995.
- [4] H. Aiso and T. Iwamiya. Construction and Analysis of Difference Approximation for Scalar Conservation Laws and Its Consistency with Entropy Condition Using Boltzmann-like Approach. *Special Publication of National Aerospace Laboratory JAPAN, SP-27*, pages 123-128, 1994.
- [5] R. J. DiPerna. Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws. *Indiana Univ. Math. J.*, 28:244-257, 1979.
- [6] B. Engquist and S. Osher. Stable and entropy satisfying approximations for transonic flow calculations. *Math. Comp.*, 34:45-75, 1980.
- [7] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics (in Russian). *Mat. Sb. (N.S.)*, 47:251-306, 1959.
- [8] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357-393, 1983.
- [9] A. Harten. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(1):1-23, 1984.
- [10] P. D. Lax. Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7:159-193, 1954.
- [11] P. D. Lax. Shock waves and entropy. In *Contributions to nonlinear functional analysis*, pages 603-634. Academic Press, New York, 1971.
- [12] B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 32:101-136, 1979.
- [13] A. Y. LeRoux. A numerical conception of entropy for quasi-linear equations. *Math. Comp.*, 31:848-872, 1977.
- [14] I. P. Natanson. *Theory of functions of a real variable*. Frederick Ungar, 1955. Translated from Russian by L. F. Boron.
- [15] O. Oleinik. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk. (N.S.)*, 12:3-73, 1957. English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 26*, 95-172.
- [16] S. Osher and E. Tadmor. On the convergence of difference approximations to scalar conservation laws. *Math. Comp.*, 50:19-51, 1988.
- [17] E. Tadmor. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes. *Math. Comp.*, 43:369-382, 1984.
- [18] A. I. Vol'pert. Spaces BV and quasi-linear equations. *Math. USSR-Sb.*, 2:225-267, 1967.
- [19] A. I. Vol'pert. *Analysis in classes of discontinuous functions and of mathematical physics*. Martinus Nijhoff Publishers, 1985.

Role of CFD in Aeronautical Engineering (No.14)

—AUSM Type Upwind Schemes—

Eiji Shima *, Tadamas Jounouchi †

Abstract

Upwind scheme is an one of the most important parts of modern numerical scheme for gas dynamics. No scheme, however, is perfect on accuracy, robustness and efficiency. Among a lot of schemes, AUSM developed by Liou and Steffen satisfy many requirement. Today, there are many practical scheme which can be written in the same form with AUSM. We call these scheme AUSM type schemes. Some AUSM type schemes are shown and characteristics of these schemes are investigated in this report. Several improvements of SHUS, which is one of the AUSM type schemes and has unique character in them, are also shown.

1 Introduction

Upwind schemes for gas dynamics have been widely used as the basis of high resolution schemes. FDS (Flux Difference Splitting) [1][2] and FVS (Flux Vector Splitting) [3][4][5] were developed as extension of an upwind scheme for liner equations and have achieved great success. It is known that FDS and FVS, however, have some weak points. A FDS sometime blows up at high Mach number and suffer from the serious carbuncle phenomenon. A FVS's numerical diffusion is too big for the viscous flow problems. HLLE (Harten-Lax-van Leer-Einfeldt) scheme and HLLEM (Harten-Lax-van Leer-Einfeldt Modified) scheme was developed [6] to improve FDS, but HLLE's numerical viscosity is as large as FVS and HLLEM suffers from the carbuncle too.

On the other hand, by simplifying FVS, Liou & Steffen [7] invented AUSM (Advection Upstream Splitting Method). AUSM is very simple, robust for strong shock and accurate for boundary layer, however, show overshoot at shock front. Inspired by AUSM, many schemes have been proposed. Jameson [8][9] showed CUSP (Convective Upstream Split Pressure) which is similar to AUSM but is expressed in combination of central difference and numerical diffusion. Jounouchi et. al. [10] showed SFS (Simplified Flux vector Splitting method) in the similar form with AUSM and improved overshoot at a shock. Wada and Liou [11] showed AUSMDV (AUSM with flux Difference splitting and flux Vector splitting) as an improvement from AUSM and showed precise research on their scheme and others. Shima and Jounouchi [12] showed that many schemes can be made which should be called AUSM type scheme in the common form with AUSM and introduced Uni-particle upwind schemes to AUSM type schemes and exhibited SHUS (Sim-

ple High-resolution Upwind Scheme) for an example. Jounouchi et. al. [13] pointed out the physical interpretation and theoretical background of AUSM type schemes and then showed that SFS is applicable to the two-phase flow. On the other hand, Nakamori and Nakamura proposed new FVS (NNFVS hereafter) as the improvement of Steger-Warming's FVS for accuracy of viscous flow. Liou [15] also presented AUSM⁺ and AUSM⁺-W to improve AUSM.

Although some of these schemes have been developed independently, these schemes can be written in the common form. These scheme can called as AUSM type schemes. Furthermore, some of them also are the member of Uni-particle upwind schemes which are in a smaller group in AUSM type schemes.

Since AUSM type schemes are simple, robust and accurate enough for practical application, they have been used for many application especially for hyper sonic viscous problems already.

The common notations of AUSM type scheme and Uni-particle upwind scheme are exhibited and characteristic of some schemes are analyzed in this study.

2 Formulation of AUSM type schemes

2.1 The common form of AUSM type schemes

We show the formulation of AUSM type schemes for two dimensional Euler equation. Extension to three dimension is straight forward. Two dimensional Euler equation can be written in the integral form as follows.

$$\int Q dv + \int \tilde{F} ds = 0 \quad (1)$$

*Gifu Technical Institute, Kawasaki Heavy Industries LTD.
†National Institute for Fusion Science

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = m\Phi + p\mathbf{N}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \\ y_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$m = \rho V_n, \quad V_n = x_n u + y_n v \quad (4)$$

where $\rho, u, v, e, p, h = (e + p)/\rho$ represent density, velocity in x-y direction, total energy per unit volume and total enthalpy respectively. x_n and y_n show unit normals of the surface. This form means that Euler flux can be divided into the advection term and the pressure term. AUSM is based on the fact that the advection term and the pressure term can be upwinded separately. AUSM and also other AUSM type schemes can be written in following form,

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{m + |m|}{2} \Phi_+ + \frac{m - |m|}{2} \Phi_- + \bar{p}\mathbf{N}, \quad (5)$$

where subscript \pm show physical value at left(+) and right(-) side of cell boundary, and \bar{p} mixing of pressure using Mach number of left and right state which is defined by,

$$\bar{p} = \beta_+ p_+ + \beta_- p_- + p', \quad (6)$$

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{4} (2 \mp M_{\pm}) (M_{\pm} \pm 1)^2, \text{ if } |M_{\pm}| \leq 1 \quad (7)$$

and β_{\pm} are smoothly switched to 1 or 0 for supersonic case. These function are the simplest smooth function which satisfy consistency, however other functions are possible.

2.2 Pressure correction term

Wada and Liou [11] indicated that the pressure term without the pressure correction is sufficient for an usual case, but it cause over shoot at a strong propagating shock like a supersonic colliding jet. They pointed out that the use of normal momentum flux of FVS solve this problem.

Let $\bar{\mathbf{F}}$ be an uncorrected flux and $\bar{\mathbf{F}}_{\text{FVS}}$ be a flux of FVS whose normal momentum flux is used. This correction can be written in the form of pressure correction as,

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{corrected}} = \bar{\mathbf{F}} + p'\mathbf{N} \quad (8)$$

$$p' = (\bar{\mathbf{F}}_{\text{FVS}} - \bar{\mathbf{F}}) \cdot \mathbf{N} \quad (9)$$

If the mass flux of Hänel's FVS is used, p' is written as,

$$p' = \frac{1}{2} (m_+ - m_- - |m|) (V_{n+} - V_{n-}). \quad (10)$$

Because Hänel's FVS is given by,

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{FVS}} = m_+ \Phi_+ + m_- \Phi_- + (\beta_+ p_+ + \beta_- p_-) \mathbf{N}. \quad (11)$$

Note that, this correction is only needed for a strong propagating shock and that no correction was used in examples of this report.

2.3 Selection of mass flux

In original AUSM, the mass flux is calculated from a simple switching using Mach number (see equation(A)), however, various schemes can be made replacing mass flux. Formulations of several AUSM type schemes are shown in appendix.

SFS and AUSMDV use variations of van Leer's FVS for their mass flux. Shima and Jounouchi [12] showed that any mass flux of an approximate Riemann solver can be used with an AUSM type scheme and derived SHUS using Roe schemes mass flux. On the other hand, NNFVS was originally designed as improvement of Steger-Warming's FVS, however, it also can be written as an AUSM type scheme.

2.4 Mass flux of a Uni-particle upwind scheme

The essence of Uni-particle formulation is the use of mass flux of an approximate Riemann flux such as FDS or FVS for the AUSM type scheme. SFS, AUSMDV, SHUS and NNFVS are categorized to Uni-particle upwind scheme in this sense. FDS and FVS are started from the approximate solution of Euler equation, so they owe the nature of Euler equation.

The difference in the behavior between Uni-particle upwind schemes and other AUSM type schemes can be clearly understood considering the response of the mass flux to the pressure difference. As the mass flux and the energy flux of an other AUSM type scheme such as AUSM and CUSP are zero if the convective velocity is zero. On the other hand, the mass flux proportional to the pressure difference exists in Uni-particle upwind schemes. For example, SFS and SHUS give following mass flux when convection velocity is zero.

SFS

$$m = \frac{\gamma}{4\bar{c}} (p_+ - p_-) \quad (12)$$

SHUS

$$m = \frac{1}{2\bar{c}} (p_+ - p_-) \quad (13)$$

Other Uni-particle upwind schemes give similar mass flux.

Let's consider the first step of shock tube problem. The initial convective velocity is zero everywhere, so the mass flux and the energy flux of an other AUSM type scheme is zero. As the momentum flux due to

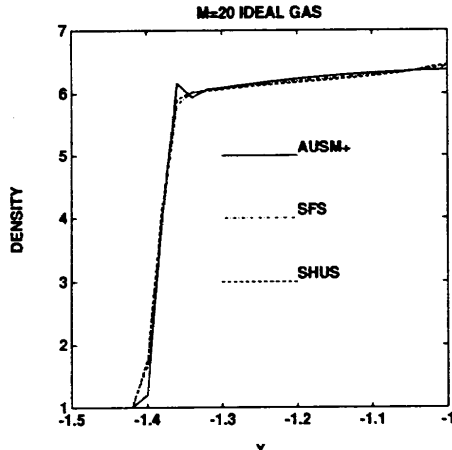


Figure 1: Density on the symmetry line in front of cylinder at Mach=20 (Ideal Gas): Small over shoot is found in the solution by AUSM⁺.

pressure term exist, velocity at next step is not zero at some points. As a result, pressure must be decrease or constant everywhere and it is not real situation. This is the reason why over shoot at shock front occurs on other AUSM type scheme.

On the other hand, this problem is avoided by Uniparticle upwind scheme because the mass flux and the energy flux proportional to pressure difference exist (See figure 1).

Over shoot of this kind is also found as noise at oblique shock created by a wedge in figure 2.

3 Improvements of SHUS

The most of AUSM type schemes except for SHUS are based on FVS and inherit many common features from FVS.

On the other hand, SHUS is partially based on Roe's FDS, thus it inherits Roe scheme's character and is different from others. It behaves like a more robust Roe scheme, then SHUS is suitable for alternative of Roe scheme.

The mass flux of SHUS is given by Roe scheme using the finite difference of primitive variables as,

$$m = \frac{1}{2} \left\{ (\rho V_n)_+ + (\rho V_n)_- - |\bar{V}_n| \Delta \rho - \frac{|\bar{M} + 1| - |\bar{M} - 1|}{2} \bar{\rho} \Delta V_n - \frac{|\bar{M} + 1| + |\bar{M} - 1| - 2|\bar{M}|}{2} \frac{\Delta p}{\bar{c}} \right\} \quad (14)$$

$$\Delta q = q_- - q_+, \quad \bar{M} = \bar{V}_n / \bar{c} \quad (15)$$

where $\bar{V}_n, \bar{\rho}, \bar{c}$ are arithmetic average of normal velocity, density and sound speed.

We show how we can avoid the weak points of Roe scheme with SHUS in the following two sections.

3.1 SHUS for the real gas

One of the benefit of an AUSM type scheme is the easiness of extension to the real gas, because they has

no Jacobian.

SHUS needs part of the Jacobian, however, we can show that SHUS can be used for general state equation without any change.

Let's see the Roe scheme for the general state equation where pressure is defined by the general function of density and internal energy per unit volume as,

$$p = p(\rho, e_i) \quad (16)$$

and sound velocity c is given by,

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial e_i} \frac{e_i}{\rho}} \quad (17)$$

If we use the finite differences of density, velocity and internal energy to construct the mass flux, we get,

$$m = \frac{1}{2} \left\{ (\rho V_n)_+ + (\rho V_n)_- - |\bar{V}_n| \Delta \rho - \frac{|\bar{M} + 1| - |\bar{M} - 1|}{2} \bar{\rho} \Delta V_n - \frac{|\bar{M} + 1| + |\bar{M} - 1| - 2|\bar{M}|}{2\bar{c}} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{\partial p}{\partial e_i} \Delta e_i \right) \right\} \quad (19)$$

If the last term is replaced with difference of pressure using differential relation such as,

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial p}{\partial e_i} de_i, \quad (20)$$

this form is exactly same as the form for ideal gas.

On the other hand, the mass flux of FVS, i.e. essentially the mass flux of AUSMDV or SFS, for general state equation is just an analogy of ideal gas's and have some inconsistency although it can be used directly. This leads small overshoot at a shock of AUSMDV's and SFS's result for equilibrium real gas flow. See figure 3.

3.2 Robustness for strong expansion

Treatment of the strong expansion where sometimes vacuum is found in the exact solution of Euler equation is a key to improve robustness of an upwind scheme. For Example, Roe scheme gives unphysical numerical flux and it blows up the computation.

On the other hand, FVS gives 0 flux for the super sonic expansion and its behavior is consistent with the exact solution. Many AUSM type schemes inherit this virtue from FVS and are more robust than FDS.

Consider a supersonic asymmetric expansion. The common form of AUSM type schemes clearly indicates that all fluxes vanish if the mass flux is zero.

On the other hand, the mass flux of Roe scheme is not zero for the asymmetric expansion and this gives the unphysical numerical flux. SHUS inherits this

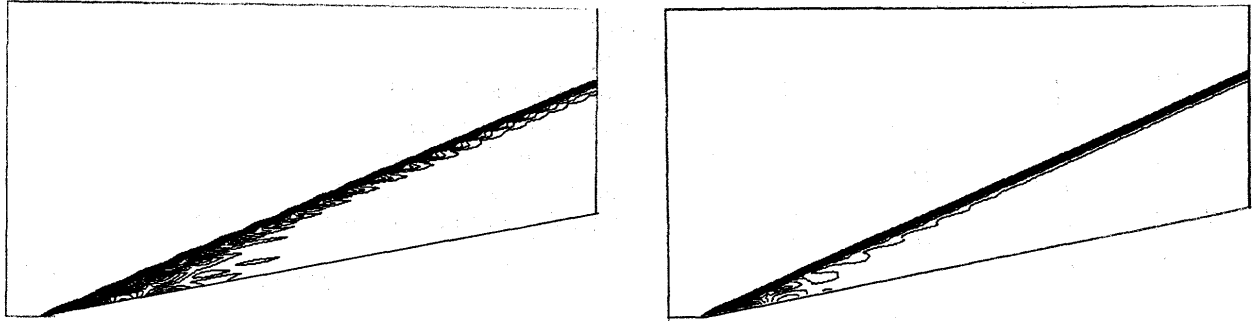


Figure 2: Shock induced by wedge: Pressure contour by AUSM+(LEFT) and SHUS(RIGHT). More noise is found in the solution of AUSM+ than SHUS

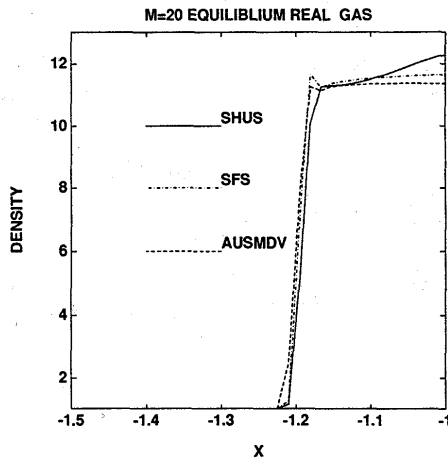


Figure 3: Density on the symmetry line in front of cylinder at Mach=20 (Equilibrium real gas): Small oscillation is found in the solution by SFS and AUSMDV

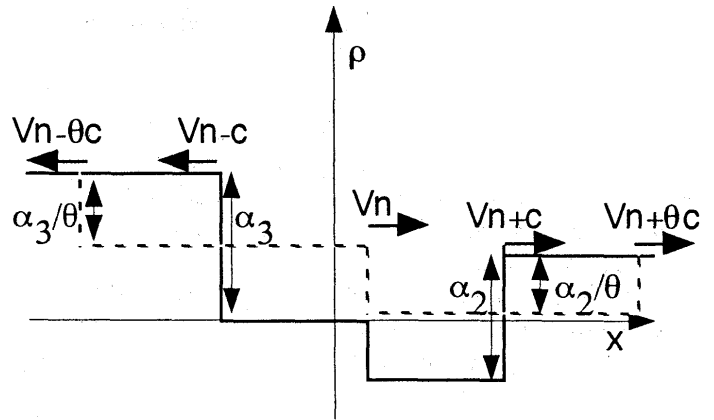


Figure 4: The solution of the linearized Riemann problem: The negative density at an intermediate state are cured by increasing the numerical sound speed.

weak point from Roe scheme. This SHUS's weak point can overcome by the simple procedure stated below.

Roe scheme also produces a non-physical solution even for a symmetric expansion since it gives a non-physical momentum flux. SHUS, however, gives no flux for this case then SHUS is more robust than Roe scheme. Because the symmetric expansion is found at the back of the body at the initial state of impulsive start where the computation frequently blow up.

The finite difference of density and mass flux can be splitted in to wave components as,

$$\Delta\rho = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \quad (21)$$

$$\Delta(\rho V_n) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \alpha_i, \quad (22)$$

where eigen values and corresponding wave components are given by,

$$\lambda_1 = \bar{V}_n, \alpha_1 = \Delta\rho - \frac{\Delta p}{\bar{c}^2} \quad (23)$$

$$\lambda_2 = \bar{V}_n + \bar{c}, \alpha_2 = \frac{\rho \Delta V_n}{2\bar{c}} + \frac{\Delta p}{2\bar{c}^2} \quad (24)$$

$$\lambda_3 = \bar{V}_n - \bar{c}, \alpha_3 = -\frac{\rho \Delta V_n}{2\bar{c}} + \frac{\Delta p}{2\bar{c}^2} \quad (25)$$

Mass flux can be also written using the eigen values and the wave components as,

$$m = \frac{1}{2}((\rho V_n)_+ + (\rho V_n)_- - \sum_{i=1}^3 |\lambda_i| \alpha_i). \quad (26)$$

This wave decomposition is illustrated by the solution of linearized Riemann problem. It can be presented as figure 4. A non-physical solution is produced if the density at an intermediate state is negative. Einfeldt et al [6] pointed out that this phenomenon happens because the width of intermediate states are too narrow. We follow their spirit but the procedure is different.

We can reduce the variation due to wave α_2 and α_3 by dividing by a common scalar θ . The width of intermediate states are broadened by multiplying θ to the sound velocity to keep conservation. Following this procedure, the eigen values and the wave components are modified as,

$$\lambda'_2 = \bar{V}_n + \theta \bar{c}, \alpha'_2 = \alpha_2 / \theta \quad (27)$$

$$\lambda'_3 = \bar{V}_n - \theta \bar{c}, \alpha'_3 = \alpha_3 / \theta, \quad (28)$$

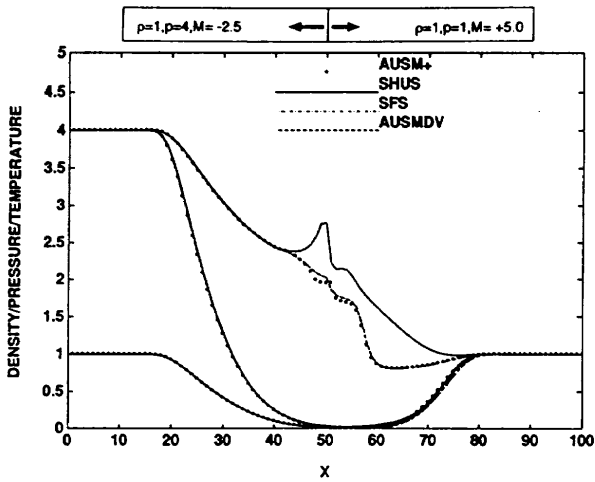


Figure 5: Solution by several 1st order AUSM type schemes on the asymmetric expansion .

where θ is given as below in order to satisfy positivity condition.

$$\rho_- + \alpha'_3 \geq 0 \quad (29)$$

$$\rho_+ - \alpha'_2 \geq 0 \quad (30)$$

Another component is also changed to satisfy equation (21) as,

$$\lambda'_1 = \bar{V}_n, \alpha'_1 = \Delta\rho - \frac{\Delta p}{\theta \bar{c}^2} \quad (31)$$

These eigen values and wave components also satisfy equation (22).

As a result, this correction is realized by only replacing the definition of Mach number in the mass flux of equation (14). The corrected Mach number \bar{M} is given by,

$$\bar{M} = \bar{M}/\theta \quad (32)$$

where

$$\theta = \max\left(1, \frac{1}{2\rho_+} \left(\frac{\bar{\rho}\Delta V_n}{\bar{c}} - \frac{\Delta p}{\bar{c}^2}\right), \frac{1}{2\rho_-} \left(\frac{\bar{\rho}\Delta V_n}{\bar{c}} + \frac{\Delta p}{\bar{c}^2}\right)\right) \quad (33)$$

Solution of asymmetric super sonic expansion by several AUSM type schemes are shown in figure(5). Unmodified SHUS or Roe scheme can not compute this case.

4 Summary and discussion

The common formulation of an AUSM type scheme is exhibited and it is shown that some recent schemes such as SFS, AUSMDV, SHUS and NNFVS can be expressed as a Uni-particle upwind scheme. Uni-particle upwind schemes are a simple but effective improvements for AUSM type schemes. It is also shown that SHUS has a little different characteristics from other schemes but that it can be as robust and as easy to extend, as other AUSM type schemes.

We can not say which scheme is the best at this point . Nevertheless some character of each scheme

can be pointed out. All schemes stated below are robust for strong shocks and expansions, and accurate for stationary contact surfaces and boundary layers.

AUSM is simple and can capture a moving contact but show small overshoot at a shock. SFS is simple but can not capture a moving contact. AUSMDV is simple and can capture a moving contact but contain an artificial function just tuned for a moving contact. SHUS is simple, can capture a moving contact and suitable for replacement of Roe scheme especially with an implicit scheme. However modification stated before is necessary for a strong expansion. NNFVS can capture a moving contact but slightly more complex than the other schemes.

Although enough research on other AUSM type schemes such as AUSM⁺ or CUSP has not been done, it can be said that they are not free from over shoot at a shock and are slightly more complex. Liou[15] reported that AUSM⁺-W improve the overshoot by introducing the pressure correction term.

The carbuncle phenomenon is a one of the biggest problem for the hypersonic computation. Although AUSM type schemes less frequently encounter the carbuncle than Roe scheme, they are not always free from it. Among AUSM type schemes, the original AUSM, and also possibly AUSM⁺ and CUSP, is relatively safe. Nevertheless it experiences the shock front instability which is thought to be related to the carbuncle if the computational mesh is fine enough or the higher order scheme is used [16]. The analysis of the mechanism of the carbuncle and the solution are expected.

A Formulation of AUSM type schemes

AUSM

$$m = \left(\frac{\bar{M} + |\bar{M}|}{2}\right)\rho_+c_+ + \left(\frac{\bar{M} - |\bar{M}|}{2}\right)\rho_-c_- \quad (34)$$

$$\bar{M} = M_+ + M_- \quad (35)$$

$$M_{\pm} = \pm \frac{1}{4} \left(\frac{V_{n\pm}}{c_{\pm}} \pm 1\right)^2, \text{ if } |M_{\pm}| < 1 \quad (36)$$

Pure upwind side value or 0 will be used for supersonic case.

AUSM⁺ AUSM⁺ is very similar to AUSM , but smooth splitting function for average Mach number and pressure are different.

$$M_{\pm} = \pm \frac{1}{4} (M_{\pm} \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8} (M_{\pm}^2 - 1)^2, \text{ if } |M_{\pm}| < 1 \quad (37)$$

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{4} (2 \mp M_{\pm}) (M_{\pm} \pm 1)^2 \pm \frac{3}{16} M_{\pm} (M_{\pm}^2 - 1)^2, \text{ if } |M_{\pm}| \leq 1 \quad (38)$$

$$M_{\pm} = \frac{V_{n\pm}}{\bar{c}} \quad (39)$$

An arithmetic average of sound speed \bar{c} is good for general case.

SFS

$$m = m_+ + m_- \quad (40)$$

$$m_{\pm} = \pm \frac{\rho_{\pm} c_{\pm}^2}{4\bar{c}} (M_{\pm} \pm 1)^2, \text{ if } |M_{\pm}| \leq 1 \quad (41)$$

$$M_{\pm} = \frac{V_n}{\bar{c}}, \quad \bar{c}_{\pm} = \frac{c_{\pm}^2}{\bar{c}}, \quad c_{\pm}^2 = \gamma \frac{p_{\pm}}{\rho_{\pm}} \quad (42)$$

where \bar{c} is arithmetic average of sound speed and pure upwind side value or 0 of M_{\pm} will be used for supersonic case.

AUSMDV

$$m = \rho_+ \tilde{V}_+ + \rho_- \tilde{V}_- \quad (43)$$

$$\tilde{V}_{n\pm} = \alpha_{\pm} \left(\pm \bar{c} \frac{(M_{\pm} \pm 1)^2}{4} - \frac{V_{n\pm} \pm |V_{n\pm}|}{2} \right) + \frac{V_{n\pm} \pm |V_{n\pm}|}{2}, \text{ if } |M_{\pm}| < 1 \quad (44)$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{2(p/\rho)_{\pm}}{(p/\rho)_+ + (p/\rho)_-}, \quad M_{\pm} = \frac{V_{n\pm}}{\bar{c}}, \quad \bar{c} = \max(c_+, c_-) \quad (45)$$

Pure upwind side value or 0 will be used for supersonic case. The pressure correction term is introduced as,

$$p' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + s \right) (\rho_+ V_{n+} - \rho_- V_{n-} - |m|) (V_{n+} - V_{n-}) \quad (46)$$

$$s = \frac{1}{2} \min \left(1, 10 \frac{|p_+ - p_-|}{\min(p_+, p_-)} \right) \quad (47)$$

SHUS See section 3.

NNFVS

$$m = m_+ + m_- \quad (48)$$

$$m_{\pm} = \rho_{\pm} \lambda_1^{\pm} + \frac{p_{\pm}}{\bar{c}^2} (-2\lambda_1^{\pm} + \lambda_2^{\pm} + \lambda_3^{\pm}) \quad (49)$$

with average sound velocity, modified Mach number and smoothed eigen values such as,

$$\bar{c} = \frac{c_+ + c_-}{2}, \quad \bar{M}_{\pm} = \frac{V_{n\pm}}{\bar{c}} \quad (50)$$

$$\lambda_1^{\pm} = \begin{cases} \frac{\bar{c}(\bar{M}_{\pm} \pm \bar{M})}{2} & |\bar{M}| \geq \varepsilon \\ \frac{\bar{c}(\bar{M}_{\pm} \pm \varepsilon)^2}{2} & |\bar{M}| < \varepsilon \end{cases} \quad (51)$$

$$\varepsilon = 0.2 \frac{\min(p_+, p_-)}{\max(p_+, p_-)} \quad (52)$$

$$\lambda_2^+ = \begin{cases} \frac{\bar{c}(\bar{M}_+ + 1)^2 (\bar{M}_+^2 - 4\bar{M}_+ + 7)}{2(\bar{M}_+ + 1 + |\bar{M}_+ + 1|)} & |\bar{M}_+| < 1 \\ \frac{\bar{c}(\bar{M}_+ + 1)^2}{2} & |\bar{M}_+| \geq 1 \end{cases} \quad (53)$$

$$\lambda_3^+ = \begin{cases} \frac{\bar{c}(\bar{M}_+ - 1)(\bar{M}_+ + 1)^3}{2(\bar{M}_+ - 1 + |\bar{M}_+ - 1|)} & |\bar{M}_+| < 1 \\ \frac{\bar{c}(\bar{M}_+ - 1)^2}{2} & |\bar{M}_+| \geq 1 \end{cases} \quad (54)$$

$$\lambda_2^-(\bar{M}) = \lambda_3^+(-\bar{M}) \quad (55)$$

$$\lambda_3^-(\bar{M}) = \lambda_2^+(-\bar{M}) \quad (56)$$

The use of one side upwind density is recommended if $|\bar{M}| < \varepsilon$. The pressure correction term is given by,

$$p' = \frac{1}{2} (m_+ - m_- - |m|) (V_{n+} - V_{n-}) \quad (57)$$

References

- [1] Roe, P.L., *J. Comp. Phys.*, Vol.43, 1981, pp.357-372.
- [2] Chakravarthy, S.R. and Osher, S., AIAA Paper 82-0975, 1982
- [3] Steger, J.L. and Warming, R.F., *J. Comp. Phys.* vol.40, 1981, pp.263-293
- [4] van Leer, B., *Lecture Note in Physics.*, vol.170, 1982, pp.507-512
- [5] Hänel, D. and Schwane, R., AIAA Paper 89-0274, 1989
- [6] Einfeldt, B., Munz, C.C., Roe, P.L. and Sjogreen, B., *J. Comp. Phys.* vol.92, 1991, pp.273-275
- [7] Liou, M.S. and Steffen, C.J., *J. Comp. Phys.* vol.107, 1993, pp.23-39
- [8] Jameson, A., AIAA Paper 93-3359, 1993
- [9] Tatsumi, S., Martinelli, L. and Jameson, A., AIAA Paper 95-0466, 1995
- [10] Jounouchi, T., Kitagawa, Sakasita, Yasuhara, *Proceedings of 7th CFD Symposium*, 1993, in Japanese
- [11] Wada, Y. and Liou, M.S., AIAA Paper 94-0083, 1994
- [12] E.Shima and T.Jounouchi, *NAL-SP27, Proceedings of 12th NAL symposium on Aircraft Computational Aerodynamics*, 1994, pp.255-260, in Japanese
- [13] T.Jounouchi, E.Shima, I.Kitagawa, T.Yasue and M.Yasuhara, *Proceedings of 8th CFD Symposium*, 1994, pp.5-8, in Japanese
- [14] Nakamori, I. and Nakamura, Y., *Proceedings of 8th CFD Symposium*, 1994, pp.9-12, in Japanese
- [15] Liou, M.S., AIAA Paper 95-1701-CP
- [16] E.Shima, *NAL-SP30, Proceedings of 13th NAL symposium on Aircraft Computational Aerodynamics*, 1996, pp.41-46, in Japanese

非定常圧縮性流れの高解像度衝撃波 / 渦捕獲法

山本 悟

東北大学大学院航空宇宙工学専攻

Higher-Order Shock-Vortex Capturing for Unsteady Internal and External Flows

Satoru Yamamoto

Dept. of Aeronautics and Space Engineering, Tohoku University

ABSTRACT

Some complicated unsteady flow problems involving not only shocks, but vortices are numerically investigated. Numerical methods employed in the present research are composed of the higher-resolution shock capturing schemes in space difference based on the fourth-order compact MUSCL TVD scheme coupled with an efficient approximate Riemann solver, and the maximum second-order accurate implicit schemes. Some typical calculated results are shown. The first case is the unsteady transonic flow problem through a turbine cascade tunnel. The second case is the unsteady transonic flow around NACA airfoil at high angle of attack, and the third case is unsteady hypersonic shock/shock interference flow known as the Type IV shock heating problem. Finally, the reliability of so-called the shock-vortex capturing method is discussed.

1. はじめに

ほとんどの流体现象は、もともと本質的に非定常であると言えるが、その現象が複雑であるため、詳細に解明された例はまだまだ少なく、定常(時間平均)を仮定して実験・計算が行われているのが現状である。たとえば実験においては、局所的な非定常性は把握できるものの、全体的なものを把握しようとするならば、流れを可視化する以外に方法はなく、その可視化技術はまだ未開発の部分が多い。一方、計算、特にCFDによる流れ解析技術も、ナビエ・ストークス方程式を解いて定常流れを数値解析する上ではかなりのレベルに達成したと言えるが、定常という仮定のもとでは必ずしも流れの本質を理解できるとは言えない。非定常流れ解析もいくつか行われており、層流を仮定した非圧縮性流れもしくは亜音速流れの解析では実用的段階に至っているかもしれないが、たとえば複雑な形状周りの非定常流れ、非定常翼列干渉流れ、衝撃波を伴った非定常流れ、そして乱流などの複雑な非定常流れの解析は今後の計算アルゴリズムの開発に期待するところが大きい。

著者らは、その中の一つである非定常衝撃波 / 渦干渉流れ現象の解明を目的にそれらの捕獲に優れた高解像度衝撃波 / 渦捕獲法を提案し、いくつかの典型的な流れ問題を数値解析したので報告する。

2. 高解像度衝撃波 / 渦捕獲法

この数値解法を簡単に説明すれば次のようになる。

- 1) 空間差分に、著者らが提案した4次精度コンパクトMUSCL TVD(FCMT)スキーム [1] を用いる。特に接触不連続面などの比較的弱い不連続や渦の捕獲において既存の2次精度の空間差分スキームに比べてかなりの優位性が示されている。
- 2) 対流項の離散化に、修正流束分離法 [2]、流束差分法 [3]、そして対流・圧力分離法 [4] を、流れ問題に応じて、使い分けて用いる。
- 3) 時間積分には、ニュートン反復法とクランク・ニコルソン法を組み合わせた手法を対角化近似因子化法 [5] もしくはLU-SGS法 [6] に適用し、時間方向最大2次精度を得る [2][4]。

FCMTスキームの最大の利点は、まずそのアルゴリズムの簡単さにあり、MUSCL [7] をベースにした既存のCFDコードがあれば、本スキームの高次の項のみからなる高々数行のサブルーチンを組み込めばよい。ENOスキームなどの既存の差分スキームに比べ、格段に簡単なアルゴリズムでありしかも空間精度は従来のTVDスキームより衝撃波近傍を除き高次である。一方、時間積分に用いた方法は、既存の対角化近似因子化法もしくはLU-SGS法をほとんどそのままの形で用いることができ、ベクトル化が可

能でかつ記憶容量を増やす必要がない。また、高次精度の陽解法に比べ、極めて複雑な非定常流れでも大きな時間刻み(ただし $CFL \approx 1$)で安定に計算することができる。

3. 4次精度コンパクトMUSCL TVD(FCMT)スキーム

空間方向の離散化に用いるFCMTスキームについて式を用いて説明する。簡単のため、次の1次元双曲型スカラー保存則を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

これを空間方向に離散化すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{\ell+1/2} - \hat{f}_{\ell-1/2}) = 0 \quad (2)$$

ℓ は空間座標 x に沿った格子点を表し、 \hat{f} は数値流束を意味する。 $\hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)}$ を1次精度で補間すれば

$$\hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_{\ell} + f_{\ell+1}) - \frac{1}{2}(\Delta f_{\ell+1/2}^{+} - \Delta f_{\ell+1/2}^{-}) \quad (3)$$

ただし、 Δf^{\pm} は通常、線形化されて以下のように変形される。

$$\Delta f_{j+1/2}^{\pm} = a_{\ell+1/2}^{\pm} \Delta u_{j+1/2} \quad (4)$$

$$\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j \quad (5)$$

a^{\pm} における a は、位相速度もしくは特性速度と呼ばれ、 $a = \partial f / \partial u$ で定義される。この a の符号によって上流化が行われる。

次に、Chakravarthy-Osher TVD(C-O)スキーム [8] は以下のように書き表せる。

$$\hat{f}_{\ell+1/2} = \hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)} + \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{(2)} \quad (6)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{(2)} &= \frac{1-\kappa}{4} \Delta f_{\ell-1/2}^{+} + \frac{1+\kappa}{4} \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{+} \\ &\quad - \frac{1+\kappa}{4} \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{-} - \frac{1-\kappa}{4} \Delta \hat{f}_{\ell+3/2}^{-} \end{aligned}$$

$$\Delta \hat{f}_{j+1/2}^{\pm} = m(\Delta f_{j+1/2}^{\pm}, b_1 \Delta f_{j-1/2}^{\pm})$$

$$\Delta \hat{f}_{j+1/2}^{\pm} = m(\Delta f_{j-1/2}^{\pm}, b_1 \Delta f_{j+1/2}^{\pm})$$

$$m(x, y) = s \cdot \max\{0, \min\{(x), s \cdot y\}\}$$

$$s = \text{sign}(x)$$

b_1 の値は、通常その最大値 $(3-\kappa)/(1-\kappa)$ に設定され、空間方向は2次精度となるが、 $\kappa = 1/3$ の時のみ3次精度になる。

一方、4次精度の上流差分スキーム [1] は、次のように記述することができる。

$$\hat{f}_{\ell+1/2} = \hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)} + \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{(3)} + \Delta^3 \hat{f}_{\ell+1/2}^{(4)} \quad (7)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{(3)} &= \frac{1}{6}(\Delta f_{\ell-1/2}^+ + 2\Delta f_{\ell+1/2}^+ \\ &\quad - 2\Delta f_{\ell+1/2}^- - \Delta f_{\ell+3/2}^-) \\ \Delta^3 \hat{f}_{\ell+1/2}^{(4)} &= -\frac{1}{6}\left(\frac{1-\phi}{4}\Delta^3 f_{\ell-1/2}^+ + \frac{1+\phi}{4}\Delta^3 f_{\ell+1/2}^+ \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+\phi}{4}\Delta^3 f_{\ell+1/2}^- - \frac{1-\phi}{4}\Delta^3 f_{\ell+3/2}^- \right) \\ \Delta^3 f_{j+1/2} &= \Delta f_{j-1/2} - 2\Delta f_{j+1/2} + \Delta f_{j+3/2} \\ &= \Delta^2 f_{j+1} - \Delta^2 f_j \end{aligned}$$

これは、3次精度上流差分と高精度化するための付加項の和で表されており、 $\phi = 1/5$ のとき5次精度となる。著者らによって提案された4次精度コンパクト TVD スキーム [1] は $\phi = 1/3$ とすることにより、以下のように導出される。

$$\hat{f}_{\ell+1/2} = \hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)} + \Delta^* \hat{f}_{\ell+1/2}^{(3)} \quad (8)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta^* \hat{f}_{\ell+1/2}^{(3)} &= \frac{1}{6}(\Delta^* \bar{f}_{\ell-1/2}^+ + 2\Delta^* \bar{f}_{\ell+1/2}^+ \\ &\quad - 2\Delta^* \bar{f}_{\ell+1/2}^- - \Delta^* \bar{f}_{\ell+3/2}^-) \\ \Delta^* \bar{f}_{j+1/2}^\pm &= m(\Delta^* f_{j+1/2}^\pm, b_1 \Delta^* f_{j-1/2}^\pm) \\ \Delta^* \bar{f}_{j+1/2}^\pm &= m(\Delta^* f_{j+1/2}^\pm, b_1 \Delta^* f_{j+3/2}^\pm) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)における $\Delta^* f_{j+1/2}^\pm$ は二つの項からなる次式で定義される。

$$\Delta^* f_{j+1/2}^\pm = \Delta f_{j+1/2}^\pm - \frac{1}{6}\Delta^3 f_{j+1/2}^\pm \quad (10)$$

式(10)の右辺第1項が3次精度のC-O TVDスキームであり、第2項は、4次精度の付加項である。すなわち、3次精度のC-O TVDスキームを用いたCFDコードがあれば、この第2項を付加するだけで簡単に高精度化できることを意味している。さらに、TVD条件を満足するために、この第2項にも以下のような流束制限を施す。

$$\Delta^3 \bar{f}_{j+1/2}^\pm = \Delta \bar{f}_{j-1/2}^\pm - 2\Delta \bar{f}_{j+1/2}^\pm + \Delta \bar{f}_{j+3/2}^\pm \quad (11)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta \bar{f}_{j-1/2}^\pm &= m(\Delta f_{j-1/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j+1/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j+3/2}^\pm) \\ \Delta \bar{f}_{j+1/2}^\pm &= m(\Delta f_{j+1/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j+3/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j-1/2}^\pm) \\ \Delta \bar{f}_{j+3/2}^\pm &= m(\Delta f_{j+3/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j-1/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j+1/2}^\pm) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} m(x, y, z) &= s \cdot \max\{0, \min\{|x|, s \cdot y, s \cdot z\}\} \\ s &= \text{sign}(x) \end{aligned}$$

b_2 は2としている。上式は、極値が存在する部分では、 $\Delta^* f = \Delta f$ 、すなわち $\Delta^3 f = 0$ となり、少なくとも空間精度が3次精度以下になるように設定されている。

FCMTスキームは、MUSCLアプローチ [7] を用いることで簡単に導出できる。その場合に数値流束 $\hat{f}_{\ell+1/2}$ は次のように定義される。

$$\hat{f}_{\ell+1/2} = f^+(u_{\ell+1/2}^L) + f^-(u_{\ell+1/2}^R) \quad (13)$$

u^L, u^R は MUSCL アプローチにより外挿された物理変数を意味する。具体的には、次のように外挿される。

$$\begin{aligned} u_{\ell+1/2}^L &= u_\ell + \frac{1}{6}(\Delta^* \bar{u}_{\ell-1/2} + 2\Delta^* \bar{u}_{\ell+1/2}) \\ u_{\ell+1/2}^R &= u_{\ell+1} - \frac{1}{6}(2\Delta^* \bar{u}_{\ell+1/2} + \Delta^* \bar{u}_{\ell+3/2}) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta^* \bar{u}_{j+1/2} &= m(\Delta^* u_{j+1/2}, b_1 \Delta^* u_{j-1/2}) \\ \Delta^* \bar{u}_{j+1/2} &= m(\Delta^* u_{j+1/2}, b_1 \Delta^* u_{j+3/2}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta^* u_{j+1/2} = \Delta u_{j+1/2} - \frac{1}{6}\Delta^3 \bar{u}_{j+1/2} \quad (16)$$

$$\Delta^3 \bar{u}_{j+1/2} = \Delta \bar{u}_{j-1/2} - 2\Delta \bar{u}_{j+1/2} + \Delta \bar{u}_{j+3/2} \quad (17)$$

$$\Delta \bar{u}_{j-1/2} = m(\Delta u_{j-1/2}, b_2 \Delta u_{j+1/2}, b_2 \Delta u_{j+3/2})$$

$$\Delta \bar{u}_{j+1/2} = m(\Delta u_{j+1/2}, b_2 \Delta u_{j+3/2}, b_2 \Delta u_{j-1/2})$$

$$\Delta \bar{u}_{j+3/2} = m(\Delta u_{j+3/2}, b_2 \Delta u_{j-1/2}, b_2 \Delta u_{j+1/2}) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} m(x, y, z) &= s \cdot \max\{0, \min\{|x|, s \cdot y, s \cdot z\}\} \\ s &= \text{sign}(x) \end{aligned}$$

4. 方程式系への適用

FCMTスキームを、方程式系に適用するために、数値流束を定義する必要がある。本研究では流れ問題に合わせて、修正流束分離法、流束差分法、対流・圧力分離法の3種類を使い分ける。

4.1 修正流束分離法 [2]

ここで用いる流束分離法は、Steger-Warming FVS[9]に基づく方法で、境界層の計算が精度良くできるよう著者らが改良したものである。まず、一般曲線座標系で表された圧縮性ナビエ・ストークス方程式の対流項、すなわち流束ベクトルは次のような数値流束に離散化される。

$$(\hat{F}_i)_{\ell+1/2} = (A_i^+)_{\ell+1/2} \hat{Q}_{\ell+1/2}^L + (A_i^-)_{\ell+1/2} \hat{Q}_{\ell+1/2}^R \quad (19)$$

ここで、 $A_i^\pm (i = 1, 2)$ はヤコビ行列で、特性速度(固有値)の符号により分離される。 $\hat{Q}^{L(R)}$ は上述のMUSCLアプローチにより物理変数が外挿される。最終的に $(\hat{A}_i^\pm)_{\ell+1/2} \hat{Q}^M$ は、次のようなサブベクトルの和で記述される。

$$(\hat{A}_i^\pm)_{\ell+1/2} \hat{Q}^M = \bar{\lambda}_{i1}^\pm \hat{Q}^M + \frac{\bar{\lambda}_{i\alpha}^\pm}{\bar{c}\sqrt{g_{ii}}} \bar{Q}_{i\alpha} + \frac{\bar{\lambda}_{i\beta}^\pm}{\bar{c}^2} \bar{Q}_{i\beta} \quad (20)$$

ただし、 M は $A = A^{+(-)}$ で $L(R)$ を意味し、

$$\lambda_{i1} = U_i, \lambda_{i4} = U_i + c\sqrt{g_{ii}}, \lambda_{i5} = U_i - c\sqrt{g_{ii}}$$

$$\lambda_{i\alpha}^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_{i4}^\pm - \lambda_{i5}^\pm), \lambda_{i\beta}^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_{i4}^\pm + \lambda_{i5}^\pm) - \lambda_{i1}^\pm \quad (21)$$

また

$$\bar{Q}_{i\alpha} = \bar{p}\bar{Q}_{i\alpha} + \Delta \bar{m}_i \bar{Q}_d \quad (22)$$

$$\bar{Q}_{i\beta} = \Delta \bar{m}_i \bar{Q}_{i\beta} + \bar{p}\bar{Q}_d \quad (23)$$

$$\bar{p} = \bar{Q}_p \cdot \hat{Q}^M \quad (24)$$

$$\Delta \bar{m}_i = \bar{Q}_{im} \cdot \hat{Q}^M \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Q_{ic} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \partial \xi_i / \partial x_1 \\ \partial \xi_i / \partial x_2 \\ U_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_d = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ (e+p)/\rho \\ k \\ \varepsilon \end{bmatrix} \\ Q_p &= \begin{bmatrix} \phi^2 \\ -\tilde{\gamma} u_1 \\ -\tilde{\gamma} u_2 \\ \tilde{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{im} = \begin{bmatrix} -U_i \\ \partial \xi_i / \partial x_1 \\ \partial \xi_i / \partial x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

この式には、Roeが提案した近似リーマン解法 [10] を組み込まれており、オーバーラインの付いた変数が Roe 平均される。

4.2 流束差分法 [3]

Roe の近似リーマン解法に基づく流束差分法をベクトル形で導出すると、数値流束 $(\hat{F}_i)_{t+1/2}$ は次式で表される。

$$(\hat{F}_i)_{t+1/2} = \frac{1}{2} [\hat{F}_i(\hat{Q}_{t+1/2}^L) + \hat{F}_i(\hat{Q}_{t+1/2}^R) - |(\hat{A}_i)_{t+1/2}(\hat{Q}_{t+1/2}^R - \hat{Q}_{t+1/2}^L)|] \quad (26)$$

$(\hat{A}_i)_{t+1/2}$ ($i = 1, 2$) は Roe 平均を施して次式で計算される。

$$|(\hat{A}_i)_{t+1/2} \hat{Q}^M| = |\bar{\lambda}_{i1}| \hat{Q}^M + \frac{|\bar{\lambda}_{ia}|}{\bar{c}\sqrt{g_{ii}}} \bar{Q}_{ia} + \frac{|\bar{\lambda}_{ib}|}{\bar{c}^2} \bar{Q}_{ib} \quad (27)$$

ただし、

$$|\lambda_{ia}| = \frac{1}{2} (|\lambda_{i4}| - |\lambda_{i5}|) \\ |\lambda_{ib}| = \frac{1}{2} (|\lambda_{i4}| + |\lambda_{i5}|) - |\lambda_{i1}| \quad (28)$$

本研究で用いる修正流束差分法と流束差分法は、基本的に Roe の近似リーマン解法に基づくように変形されているので、流束差分法の中心差分の評価にもよるが、ほぼ同一の特徴を持った式となっている。

4.3 対流・圧力分離法

これは、Liou によって提案された AUSM スキーム [11] に基づく方法である。本研究では、衝撃波の捕獲能力を向上するため、Hänel の提案した FVS スキーム [12] と AUSM スキームを圧力の勾配の応じて切り替える方法を提案した。すなわち、数値流束は、次式で表される。

$$(\hat{F}_i)_{t+1/2} = J\sqrt{g_{ii}} [(M_i^+)_{L} \hat{Q}_L + (M_i^-)_{R} \hat{Q}_R + \delta_{1/2} (M_i)_{LR} \Delta \hat{Q}] + J \hat{P} \quad (29)$$

ただし、

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \rho c \\ \rho c u_1 \\ \rho c u_2 \\ \rho c H \end{bmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{i,1}(p_L^+ + p_R^-) \\ \xi_{i,2}(p_L^+ + p_R^-) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで、

$$M_i = \frac{U_i}{c\sqrt{g_{ii}}} \quad (30)$$

$$(M_i)_{1/2} = (M_i^+)_{L} + (M_i^-)_{R} \quad (31)$$

$$M_i^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_i \pm 1)^2, & (|M_i| \leq 1) \\ \frac{1}{2} (M_i \pm |M_i|), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} p (M_i \pm 1)^2 (2 \mp M_i), & (|M_i| \leq 1) \\ \frac{1}{2} p (M_i \pm |M_i|) / M_i, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (33)$$

$$\Delta[\cdot] = [\cdot]_R - [\cdot]_L \quad (34)$$

$$(M_i)_{LR} = \begin{cases} -(M_i^-)_{R}, & (M_i)_{1/2} \geq 0 \\ (M_i^+)_{L}, & (M_i)_{1/2} < 0 \end{cases} \quad (35)$$

$$\delta_{1/2} = 1 - \frac{|p_L - p_R|}{\max(p_L, p_R)} \quad (36)$$

$\delta_{1/2} = 1$ のとき AUSM スキーム、 $\delta_{1/2} = 0$ のとき、Hänel's FVS スキームとなる。

5. 時間積分

5.1 定常計算

本研究では、陰的時間進行法に基づく時間積分スキームを用いる。まずは Beam-Warming の近似因子化 [13]、Pulliam-Chaussee の対角化 [5]、ならびに Steger-Warming の上流化 [9] が施されて導出された定常計算のための対角化近似因子化法は次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{Step 1} \quad & [I + \theta \Delta t (\Lambda_1^+ \nabla_1 + \Lambda_1^- \Delta_1)] \Delta \hat{Q}^n \\ & = -\Delta t \hat{L}_1 N \cdot RHS^n \\ \text{Step 2} \quad & [I + \theta \Delta t (\Lambda_2^+ \nabla_2 + \Lambda_2^- \Delta_2)] \Delta \hat{Q}^n \\ & = \hat{L}_2 \hat{L}_1^{-1} \Delta \hat{Q}^n \\ \text{Step 3} \quad & \Delta \hat{Q}^n = N^{-1} \hat{L}_2^{-1} \Delta \hat{Q}^n \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、

$$RHS^n = -\Delta t \hat{\mathcal{F}}^*(\hat{Q}) \quad (38)$$

$\theta = 1/2$ or 1 , ∇_i と Δ_i それぞれ前進、後退差分演算子である。 $\hat{\mathcal{F}}^*$ はナビエ・ストークス方程式の空間微分項 (粘性項も含む) の差分演算子。 \hat{L}_i ($i = 1, 2$) は、非保存形表示された左固有ベクトルからなる行列、 N は保存形から非保存形に変換するための行列で、以下のような要素からなる。

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -U_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -U_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \phi^2 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \bar{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\hat{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_{2i} \frac{g_{12}}{g_{22}} & \delta_{1i} \sqrt{g_{ii}}/c & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{1i} \frac{g_{21}}{g_{11}} & 1 & \delta_{2i} \sqrt{g_{ii}}/c & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{1i} & -\delta_{2i} & \sqrt{g_{ii}}/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

5.2 非定常計算 (近似因子化法)

式 (37) はニュートン反復法とクランク・ニコルソン法を組み込むことで、時間最大 2 次精度に拡張でき、次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{Step 1} \quad & [I + \theta \Delta t (\Lambda_1^+ \nabla_1 + \Lambda_1^- \Delta_1)]^m \Delta \hat{Q}^{*m} \\ & = -\Delta t (\hat{L}_1 N)^m \cdot RHS^m \\ \text{Step 2} \quad & [I + \theta \Delta t (\Lambda_2^+ \nabla_2 + \Lambda_2^- \Delta_2)]^m \Delta \hat{Q}^{*m} \\ & = (\hat{L}_2 \hat{L}_1^{-1})^m \Delta \hat{Q}^{*m} \\ \text{Step 3} \quad & \Delta \hat{Q}^m = (N^{-1} \hat{L}_2^{-1})^m \Delta \hat{Q}^{*m} \end{aligned} \quad (41)$$

ただし、

$$\Delta \hat{Q}^m = \hat{Q}^{m+1} - \hat{Q}^m \quad (42)$$

$$RHS^m = -(\hat{Q}^m - \hat{Q}^n) - \Delta t \{ \hat{\mathcal{F}}^*(\hat{Q}^m) + \hat{\mathcal{F}}^*(\hat{Q}^n) \} / 2 \quad (43)$$

m はニュートン反復の回数で、 $m = 0$ のとき、 $\hat{Q}^m = \hat{Q}^n$ 。もし $m \Rightarrow \infty$ ならば、 $\Delta \hat{Q}^m \Rightarrow 0$ すなわち $\hat{Q}^m \Rightarrow \hat{Q}^{n+1}$ で、時間最大 2 次精度の解が得られる。

5.3 非定常計算 (LU-SGS 法)

Yoon らによって提案された LU-SGS スキーム [6] にニュートン反復法とクランク・ニコルソン法と組み込んで、時間方向最大 2 次精度の時間積分法を構築すると、次式のようになる。

$$D \Delta \hat{q}_{i,j}^{*m} = (RHS)_{i,j}^m + \theta_L \Delta t [(\hat{A}_1^+ \Delta \hat{q}^*)_{i-1,j}^m]$$

$$+ (\hat{A}_2^+ \Delta \hat{q}^*)_{i,j-1}^m \quad (44)$$

$$\Delta \hat{q}_{i,j}^m = \Delta \hat{q}_{i,j}^{*m} - D^{-1} \theta_L \Delta t [(\hat{A}_1^- \Delta \hat{q})_{i+1,j}^m + (\hat{A}_2^- \Delta \hat{q})_{i,j+1}^m] \quad (45)$$

ただし、

$$D = [1 + \theta_L \Delta t (r_1 + r_2)] I \quad (46)$$

$$r_\ell = \kappa \max[|\lambda(\hat{A}_\ell^\pm)|] \quad (\kappa \geq 1) \quad (47)$$

$$\hat{A}_\ell^\pm = [\hat{A}_\ell^\pm \pm r_\ell I] / 2 \quad (48)$$

$$\Delta \hat{q}^m = \hat{q}^{m+1} - \hat{q}^m \quad (49)$$

$$RHS^m = -(\hat{q}^m - \hat{q}^n) - \Delta t [\theta_R \hat{L}^*(\hat{q}^m) + (1 - \theta_R) \hat{L}^*(\hat{q}^n)] \quad (50)$$

$\theta_L = \theta_R = 1/2$ ならばクランク・ニコルソン法となるが、実際には $\theta_L = 1$ を計算に用いている。これは、左辺の計算が解に依存しないという仮定に基づく。

6 数値計算例

6.1 高迎角翼周りと後流の非定常衝撃波 / 渦干渉流れ

ここで用いられる衝撃波 / 渦捕獲法の特徴は次の通りである。

- 1) 計算格子に重合格子を採用し、物体周りに O 型格子もしくは C 型格子、そして一様流れ場には直交格子が生成される。互いの情報は 3 次精度 Lagrange 補間により陽的に交換される。
- 2) 対流項の離散化には、修正流束分離法、FCMT スキームを使用し、時間積分には最大 2 次精度近似因子化法を使用する。
- 3) 物体表面近傍のみに渦粘性を評価するため、修正 Baldwin-Lomax モデル [14] を使用し、物体後流域には乱流モデルは用いない。

数値計算例として、迎角 15° と 20° の NACA0012 翼について計算した結果を示す。計算格子は、図 1 に示すような重合格子からなり、翼周りに格子点数 121×41 の C 型格子、流れ場に格子点数 121×101 の直交格子を発生させている。迎角の変化は、翼周りの計算格子を回転することにより得る。一様流マッハ数は 0.8、レイノルズ数は 6.0×10^6 。図 2(a)(b) と図 3(a)(b) には、各迎角での計算された無次元時間における瞬間等マッハ数分布ならびに渦度分布を示す。衝撃波と境界層の干渉に伴って発生した渦が、周期的に下流へ流れて行く様子が示されており、本解法が衝撃波・渦捕獲能力にすぐれているのがわかる。図 2、図 3 いずれに関しても渦が翼のかなり後方までその構造を保ちながら流れているが、さらに後方域では、翼迎角の違いによる流れ構造の差異が見だされている。

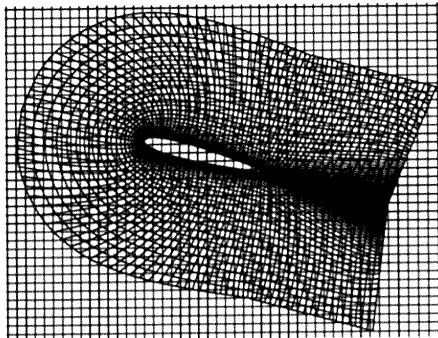
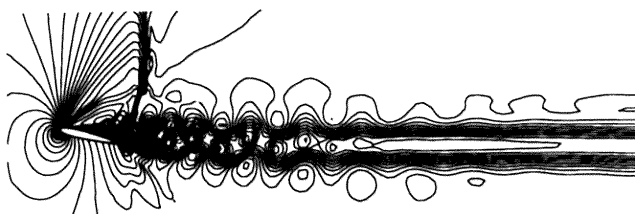


図 1 計算格子 (一部を表示)

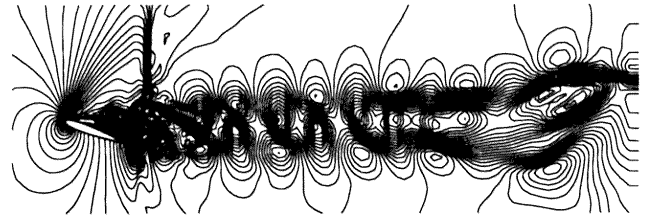


(a) 瞬間マッハ数分布



(b) 瞬間渦度分布

図 2 計算結果 (迎角 15° の NACA0012 翼)



(a) 瞬間マッハ数分布



(b) 瞬間渦度分布

図 3 計算結果 (迎角 20° の NACA0012 翼)

6.2 遷音速タービン翼列の非定常衝撃波 / 渦干渉流れ

ここで用いられる衝撃波 / 渦捕獲法の特徴を簡単に説明すると次のようなものである。

- 1) 計算格子に修正 H 型格子を採用する。これは、格子の直交性を良くするために、後流領域の周期境界で格子点が食い違っているのに特徴がある。
- 2) 対流項の離散化には、流束差分法、FCMT スキームを使用し、時間積分には最大 2 次精度近似因子化法を使用する。
- 3) 乱流計算のため、低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデル [15] を用い、計算初期段階での数値的不安定性を除去するために、乱流運動エネルギーの生成と散逸のバランスに制限を施す [3]。

用いた計算格子を図 4 に示す。格子点数は 181×61 。計算条件は以下に示す通りである。

表 1 計算条件

翼形状	VKI LS-59 翼
ピッチ	0.71
全圧 (Pa)	0.964×10^5
全温 (K)	290
レイノルズ数	8.50×10^5
流出マッハ数	0.99
流入角 (deg)	30.0

時間精度を比較するため、時間 1 次精度での計算と時間最大 2 次精度 (本解法) での計算を行った場合に得られた等マッハ数分布を、図 5(a)(b) に示す。時間 1 次精度では、図 5(a) に示す通り定常解となり、翼後縁からの後流は直線的な形で捕らえられてしまう。一方、図 5(b) は本解法による瞬間値を表し、翼後縁から周期的な渦が発生している様子や、翼後縁で発生している衝撃波との干渉によりその渦が変形している様子が鮮明に捕らえられている。図 6(a)(b) には、図 5(b) と同じ時間での瞬間等渦度分布と渦粘性係数分布を示す。実験 [16] においては、本計算で対象としたタービン翼列の後流から周期的な渦が発生することがすでに報告されており、本解法による計算結果はその事実を裏付けていると言える。

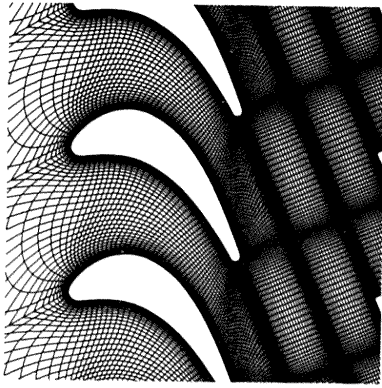
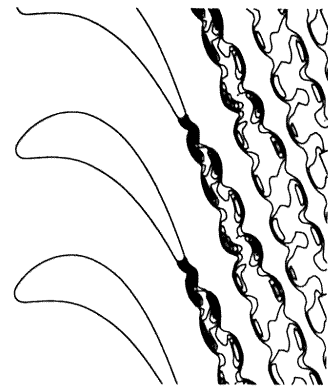
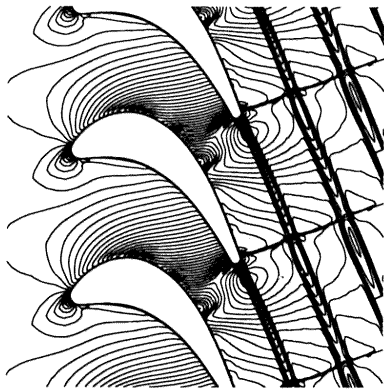


図4 計算格子



(b) 渦粘性分布

図6 後流域の計算結果



(a) 時間1次精度



(b) 本解法

図5 等マッハ数分布

次に、計算結果の妥当性をさらに検証するため、実験値との定量的な比較を行なう。図7は無次元化された翼表面上における等エントロピーマッハ数分布図を表し、定常計算による解 (Steady)、本計算による異なった3種類の瞬間値 (Instantaneous 1,2,3)、ならびにその時間平均値 (Average) が実験値 (Experiment) と比較されている。翼負圧面側の衝撃波付近を除いて、時間平均値は定常解と同様に実験結果とよく一致していると言える。3種類の瞬間値が衝撃波付近で異なる理由は、その衝撃波が周期的に振動していることによると思われる。

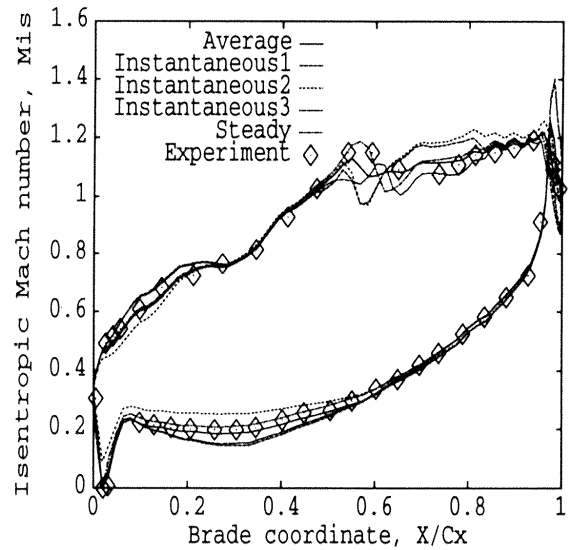


図7 翼表面等エントロピーマッハ数分布

次に、出口流失角度 β (deg) と損失係数 ζ (%) が実験結果と比較される。以下のように上記条件の他に、 $M_2 = 1.145$ についても同様の計算を行って定量値を計算した。

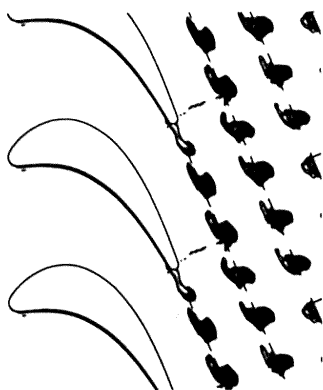
表2 (a) 出口流失角度 β (deg)

	計算値	実験値	誤差
$M_2=0.969$	67.2	66.9	0.4 %
$M_2=1.145$	66.5	65.9	0.9 %

表2 (b) 損失係数 ζ (%)

	計算値	実験値	誤差
$M_2=0.969$	4.58	5.02	8.7 %
$M_2=1.145$	6.94	6.99	0.7 %

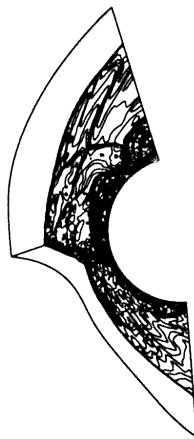
これらからもわかる通り、実験結果に非常に近い結果を得ることができた。なお、渦放出周期としてストローハル数 S_L を計算したところ $S_L = 0.17$ という値が得られている。



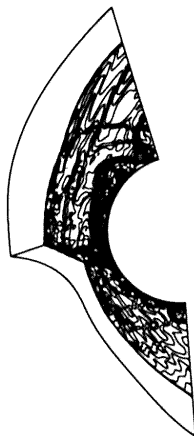
(a) 等渦度分布

6.3 鈍頭物体周りの非定常極超音速衝撃波干渉流れ

極超音速で航行する飛翔体に斜め衝撃波が干渉すると、衝撃波 / 衝撃波干渉による超音速ジェットや滑り線が発生して、強い非定常流れとなる。この場合問題になるのは、これらの発生に伴う局所的な温度上昇であり、設計上極めて重要な問題である。ここでは、最も典型的な衝撃波干渉加熱問題である TYPEIV[17]を対象として、空間方向、対流・圧力分離法、FCMT スキーム、時間方向、最大 2 次精度 LU-SGS 法による衝撃波 / 渦捕獲法を使用した。なお、乱流モデルは用いていない。計算条件は、主流条件として、マッハ数 8.03、流入角 0(deg) について考える。また、入射衝撃波角度を 18.1(deg) とし、入射衝撃波背後条件を、マッハ数 5.25、流入角 12.5(deg) とする。計算格子点数は、265 × 153。図 8(a)(b) には、計算により得られた異なった無次元時間における瞬間等温度分布を示す。衝撃波干渉により生じた超音速ジェットが温度境界層と干渉して、非定常的なせん断層を形成している様子が鮮明に捕獲されている。



(a) $t = t_1$



(b) $t = t_2$

図 8 瞬間等温度分布

図 9 には、物体表面熱流束の時間変化を示す。縦軸は主流における熱流束との比を表し、瞬間最大値は、時間平均された実験値よりも 30% 近く大きな値を示しており、非定常流れを考慮した解析の必要性が示唆される。

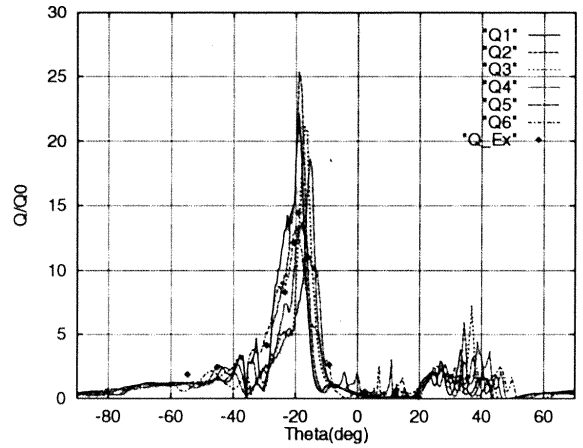


図 9 物体表面熱流束の時間変化

7. あとがき

空間方向に、4 次精度コンパクト MUSCL TVD スキームと、修正流束分離法、流束差分法、もしくは対流・圧力分離法を組み合わせた差分スキームを、そして時間方向には時間最大 2 次精度の近似因子化法もしくは LU-SGS 法による時間積分を用いた、3 種類のいわゆる衝撃波 / 渦捕獲法を開発しその有効性について検討した。本研究のコンセプトは、衝撃波のみならず渦も含めた高次精度での捕獲であり、開発された解法はその要求をかなり満足するものである。現在これらの解法を、3 次元問題ならびに、複雑方程式系、たとえば反応や相変化が考慮できる解法へ拡張しているところである。

文 献

1. Yamamoto, S. and Daiguji, H., Computers & Fluids, Vol.22, (1993), pp.259-270.
2. Yamamoto, S. and Daiguji, H., AIAA Paper No.92-3044, (1992).
3. Yuan, X., Yamamoto, S. and Daiguji, H., AIAA Paper No.94-3199, (1994).
4. Yamamoto, S. and Kano, S., AIAA Paper No.96-2152, (1996).
5. Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., J. Comp. Phys., Vol.39(1981), pp.347-363.
6. Yoon, S. and Jameson, A., AIAA J., Vol.26(1988), pp.1025-1026.
7. Anderson, W.K., Thomas, L. and van Leer, B., AIAA J., Vol.24(1986), pp.1453-1459.
8. Chakravarthy, S.R. and Osher, S., AIAA Paper 85-0363, (1985).
9. Steger, J.L. and Warming, R.F., J. Comp. Phys., Vol.40(1981), pp.263-293.
10. Roe, P.L., J. Comp. Phys., Vol.43(1981), pp.357-372.
11. Liou, M.-S. and Steffen, C.J., J. Comp. Phys., Vol.107(1993), pp.23-39.
12. Hänel, D. and Schwane, R., AIAA Paper 89-0274, (1989).
13. Beam, R.M. and Warming, R.F., AIAA J., Vol.16(1978), pp.393-402.
14. Degani, D. and Schiff, L.B., J. Comp. Phys., Vol.66(1987), pp.173-196.
15. Chien, K.-Y., AIAA J., Vol.20(1982), pp.33-38.
16. Kiock, R., et al., Trans. ASME, J. of Engng. for Gas Turbine and Power, Vol.108(1986), pp.277-285.
17. Edney, B. E., FFA Report 115, 1968.

Numerical Simulations of Wall Turbulence by Finite Difference Method

H. Kawamura¹

ABSTRACT

Recent advances in super and parallel computers gradually enables us to perform turbulence simulations based on fundamental physical principles with minimal assumptions. Existing methods to analyze the turbulent flow are briefly reviewed and the present status of Direct Numerical Simulation (DNS) is described. Although the spectral method is preferred in DNS because of its relatively high numerical accuracy, the finite difference method (FDM) has an advantage to be able to calculate relatively complex geometries. Difficulties in performing DNS with the FDM are considered and a new scheme is proposed to preserve a correct turbulence energy budget. Some examples of the simulations for the channel flow are presented with the use of the scheme.

1. INTRODUCTION

Most of the single phase flow encountered in engineering or environment are turbulent. Numerical simulations of turbulence are now performed widely with aid of the recent advances in computers. Their method can be categorized as

- (1) RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes Eq.)
- (2) LES (Large Eddy Simulation)
- (3) DNS (Direct Numerical Simulation).

In RANS, the transient fluctuation of turbulence is not reproduced but only the averaged quantities are obtained. Effect of fluctuation on the averaged values are considered in term of the turbulence model. LES is to simulate turbulence of a higher Reynolds number. In such flow, the smallest eddy cannot be resolved by the computational mesh; so, a subgrid model must be introduced to treat eddies smaller than the available mesh size.

DNS is the method to simulate turbulence by solving N.S. equation without introducing any modelling. The difficulty in the DNS is that the turbulence contains wide spectrum of vortices with an equal physical importance. With increase of the Reynolds number the size ratio of the largest to the smallest vortices increases. This makes it difficult to perform the DNS of a turbulence with a higher Reynolds number. Inversely, however, if the Reynolds number is low enough, the DNS of turbulence does not require extremely large computational efforts.

The first attempt of DNS was made by Orszag and Patterson already in 1972 with use of the spectral method. They simulated decay of homogeneous turbulence by a spectral method. Their Reynolds number based on the longitudinal Taylor microscale λ was $Re_\lambda=35$. The typical calculation time was one

and half hours by CDC 6600. This level of calculation can be easily done nowadays by a desktop EWS.

Several recent large scale simulations of the homogeneous turbulence are listed in Table 1. It is noticeable that all of these computations were made by using parallel computers. Critical limitation of this kind of calculation lays not only in the calculation speed but also in the storage size. This is a major reason why the parallel computers were employed in these simulations.

A flow bounded between two infinite parallel plates is called "channel flow". This configuration has been often employed in LES and DNS because of its simple geometry. Boundary conditions are periodic in streamwise and spanwise directions and nonslip on both solid walls. Thus the fully developed flow is realized.

The first large scale LES of this type of turbulent flow was performed by Moin and Kim (1982). Using a parallel computer ILLIAC IV, they revealed that the numerical simulation was able to reproduce the near-wall quasi coherent structure observed in visualization experiments. The same group (Kim et al., 1987) later conducted a series of direct numerical simulations for the channel flow. Typical DNS's of the channel flow are given in Table 2.

One of the major features of DNS is that it can provide an accurate budget of the Reynolds stress transport equation, which is hardly obtainable from laboratory experiments. The budget is indispensable in constructing the second order closure models such as $k-\epsilon$ or Reynolds stress models.

Table 1. Recent large scale DNS of decaying homogeneous turbulence

	N_x	Re_λ	Machine	Number of Proc.
Chen (1993)	512	202	CM-2	
Jimenez (1993)	256	94	intel	128
	512	168	Delta	512
Yamamoto (1994)	512	134	NWT	128

¹Science University of Tokyo

Table 2. DNS of turbulent channel flow

	Reynolds number Re_m, Re_r	mesh or mode number	Method
Kim et al. (1987)	5600, 180 13750, 395	192 × 129 × 160 256 × 193 × 192	Spectral Spectral
Kuroda et al. (1989)	2890, 100	64 × 65 × 64	Spectral
Kuroda (1990)	4560, 150	128 × 97 × 128	Spectral
Horiuchi (1992)	5600, 180	128 × 129 × 128	Spectral
Rai-Moin (1993)	5600, 180	192 × 101 × 192	FDM(5th upwnd. / 6th cnt.)
Satake-Kasagi (1993)	4560, 150	48 × 97 × 36	FDM(5th upwnd. / 4th cnt.)
Suzuki-Kawamura (1993) (1994)	5600, 180	128 × 66 × 128	FDM (3rd upwnd. / 2nd cnt.) (2nd consistent)

2. NUMERICAL METHODS

Methods of DNS can be categorized to the spectral and the finite difference methods. Between them, the spectral method is preferred because of its relatively high numerical accuracy. It has been often employed in many of DNS's ever performed. Use of the spectral method is, however, limited to simple geometries. On the other hand, the finite difference method (FDM) has an advantage to be able to calculate relatively complex geometries with rather small computational scale. However, its numerical accuracy is strongly dependent upon the discretisation scheme.

Several DNS's have been performed with the use of the FDM as listed in Table 2. They employ several combinations of discretization schemes in convective and viscous terms such as

Convective / Viscous terms

Rai, Moin (1991) 5th upwind / 6th central
Satake, Kasagi (1993) 5th upwind / 4th central
Suzuki, Kawamura (1994) 2nd(consistent) central.

These results are compared with those by the spectral method and mostly excellent agreements are obtained for the mean velocity or Reynolds stress profiles. However, when the budget of the Reynolds stress transport equation is examined carefully, a non-negligible residual is found to remain. That is, the sum of all the contributing terms of the transport equation deviates appreciably from zero. The reason of the deficiency is often attributed to the numerical viscosity due to the insufficient accuracy of the scheme in the FDM.

However, recalling that both the shear stress distribution and the Reynolds stress equation are derived from the momentum equation and that the momentum equation must be satisfied with a sufficient accuracy through the numerical integration, it is questionable if these deficiencies can be simply attributable to the numerical viscosity.

Present authors Suzuki-Kawamura (1994), Kondo et al. (1994) noticed that this is due to the inconsistency between the analytical schemes and the numerical ones in the derivation of the budget of the Reynolds

or turbulent heat flux equations. The transport equations are derived from the momentum and continuity equations after many analytical differential operations. These differential operations are of course held correctly; however, it is not always the case with the numerical differentiation.

The relation between the conservative and convective forms of the convection term in the Navier-Stokes equation is

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (1)$$

The second term in R.H.S. is zero due to the continuity. Thus, the two forms are equivalent based on the analytical operations. In the numerical analysis, however, the above relation cannot always be satisfied. Let us assume a one-dimensional case for simplicity. The analytical differentiation at a point i yields

$$\left. \frac{\partial f g}{\partial x} \right|_i = f \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_i + g \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \quad (2)$$

A usual way of discretization with the use of the 2nd order central difference is

$$\left. \frac{\partial f g}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} g_{i+1} - f_{i-1} g_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (3)$$

$$f \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_i = f_i \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (4)$$

$$g \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = g_i \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (5)$$

These expressions, however, do not satisfy Eq.(2).

Schumann (1975) pointed out that the numerical differentiation can be consistent with the analytical operation if one employs the following discretization instead of Eqs. (4) and (5).

$$\begin{aligned} f \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_i &= \frac{1}{2} \left\{ f \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2}} + f \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{f_{i+1} + f_i}{2} \frac{g_{i+1} - g_i}{\Delta x} + \frac{f_i + f_{i-1}}{2} \frac{g_i - g_{i-1}}{\Delta x} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

$$g \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{1}{2} \left\{ g \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} + g \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{g_{i+1} + g_i}{2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \frac{g_i + g_{i-1}}{2} \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \right\} \quad (7)$$

In this paper, the numerical scheme that is consistent with the analytical differential operation is called "Consistent scheme" and it is applied to the DNS of the turbulent channel flow.

3. NUMERICAL CALCULATION

The fundamental equations to describe turbulent flows are well known. With neglecting the property variations, the continuity and momentum (Navier-Stokes) equations become

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (9)$$

where u_i is the velocity; p , pressure; T , temperature; ρ , density; ν , kinematic viscosity.

Calculational domain is shown in Fig. 1. The boundary conditions are noslip over the top and bottom surfaces, periodic in stream and spanwise directions.

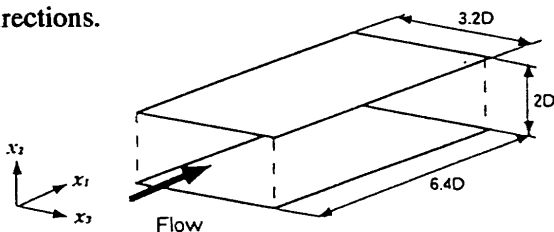


Fig. 1 Calculation domain

The computational conditions are summarized in Table 3. The spatial resolution is comparative to that of the spectral ones.

Two cases are calculated with application of the different combination of the schemes; that is

	Convection term	Viscosity term
Case 1	4th order central	2nd order central
Case 2	2nd order consistent	2nd order central.

Table 3. Calculation conditions

Reynolds number	$Re_\tau = 180$
Prandtl number	$Pr = 0.71$
Computational volume	$6.4\delta \times 2\delta \times 3.2\delta$
Grid number	$128 \times 66 \times 128$
Spatial resolution	$\Delta x_1^+ = 9$
	$\Delta x_2^+ = 0.8 \sim 11.8$
	$\Delta x_3^+ = 4.5$
Averaging time interval	$2880 \nu / u_\tau^2$

4. RESULTS

The mean velocity profile and the velocity fluctuations of case 1 are compared with those of the spectral method by Kim et al.(1987) in Figs. 2 and 3.

The agreement is good but still non-negligible discrepancies are found in these figures. The budget of the turbulence kinetic energy is shown in Fig. 4 Each term agrees fairly well with the corresponding ones by the spectral method. However, an appreciable residual, the sum of all terms, is found to remain. This is due to the inconsistency between the analytical and numerical differentiations in the derivation of the budget terms.

The results with the consistent scheme are shown in Figs. 5 to 7. Agreements with the spectral results are even better than the case 1, although the order of discretization is even lower in this case. Especially the residual in the turbulent energy budget (Fig. 7) is remarkably reduced, compared with that of the case 1 (Fig. 4). This is due to the consistency of differential operations in case 2.

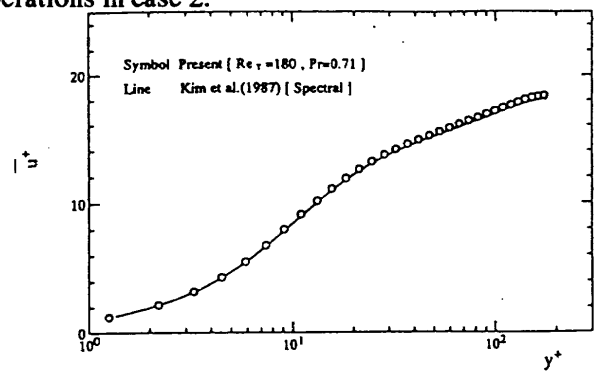


Fig. 2 Mean velocity profile (Case 1)

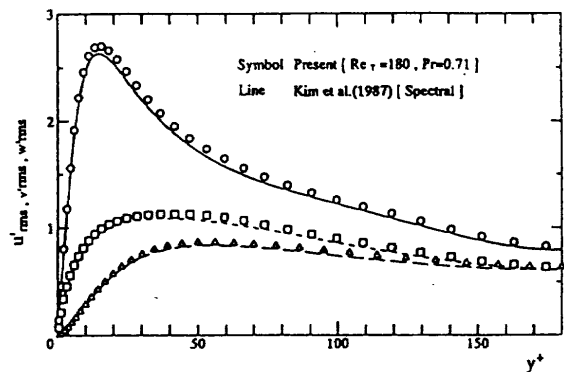


Fig. 3 R.M.S. of velocity fluctuations (Case 1)

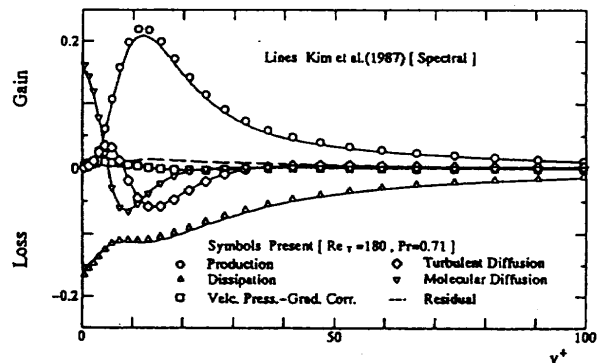


Fig. 4 Budget of turbulent kinetic energy (Case 1)

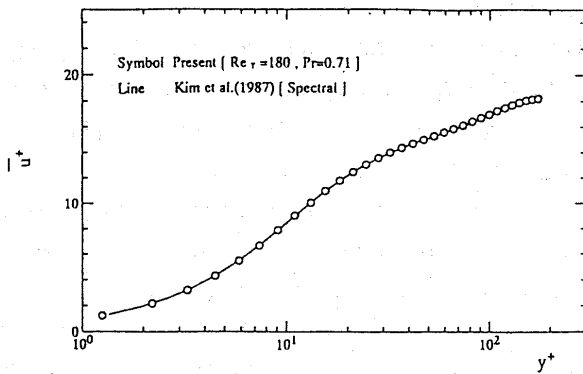


Fig. 5 Mean velocity profile (Case 2)

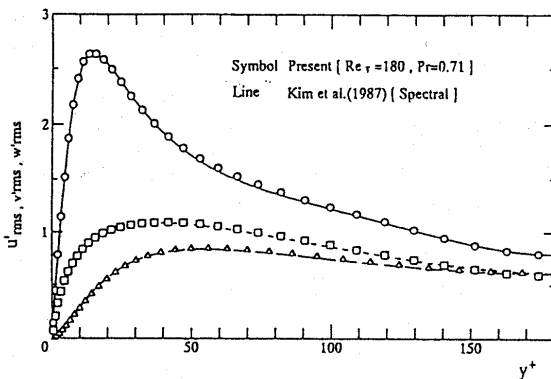


Fig. 6 R.M.S. of velocity fluctuations (Case 2)

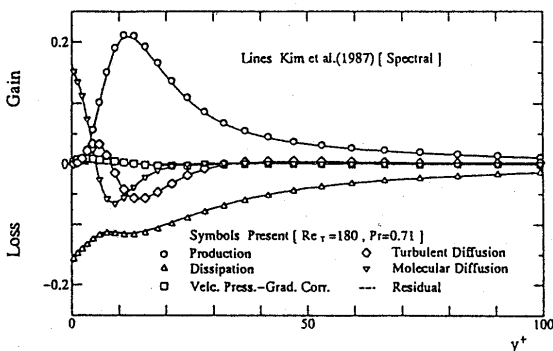


Fig. 7 Budget of turbulent kinetic energy (Case 2)

5. FURTHER DEVELOPMENTS

The present DNS is restricted to relatively low Reynolds numbers. The mesh number required for calculation of the larger Reynolds number can be estimated as follows. One may assume that the smallest eddy size can be scaled by ν / u_τ , where u_τ is the friction velocity. Let f be the friction factor, then $u_\tau = U_b (f/2)^{1/2}$ and f is proportional to $Re_D^{-1/4}$, where Re_D is the Reynolds number based on the bulk mean velocity U_b and the channel height $2D$. Then the mesh number required in one direction will be proportional to $Re_D^{7/8}$. Presently, the DNS of $Re_\tau = 180$ ($Re_D = 5600$) is performed by several researchers with mesh number of 1 to 2 times 10^6 . Their results agree well with each other. Thus one may expect that the total mesh number

required in the DNS of the channel flow is approximately estimated as 1 to 2 million times $(Re_D/5600)^{21/8}$. This estimation is shown in Fig. 8.

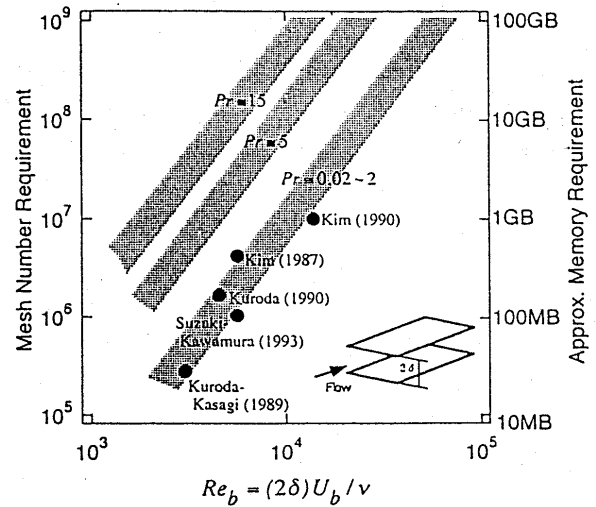


Fig. 8. Estimation of mesh and memory requirement for DNS of channel flow

In a near future, we will possess a tera flops machine actually (not as a design specification on paper). With such a capability, we will be able to perform more practical or realistic simulations, with property variations, chemical reactions or phase change. As seen in this short review, what is done up to now is only limited compared to a wide variety of heat transfer phenomena. Still many issues are left to be challenged in the field of the heat transfer research with advancement of the super or parallel computings.

References

- Horiuchi, K., (1992), J. Fluid Mech., Vol.238, pp.405-433.
- Jimenez, J., et al., (1993), J. Fluid Mech., 255, pp.65-90.
- Kim, J., Moin, P. and Moser, R., (1987), J. Fluid Mech., 177, pp.133-166.
- Kondo, Y., Kawamura, H., (1996) Proc. KSME-JSME Conf., MA-203.
- Kuroda, A., (1990), Ph.D thesis, University of Tokyo.
- Kuroda, A., et al., (1989), Proc. Int. Symp. Comp. Fluid Dyn., pp.1174-1179.
- Moin, P. and Kim, J., (1982), J. Fluid Mech., 118, pp.341-377.
- Orszag, S. A. and Patterson, G. S., (1972), Phys. Rev. Lett., 28, pp.76-79.
- Rai, M. and Moin, P., (1991), J. Compt. Phys., Vol.96, pp.15-53.
- Satake, S. and Kasagi, N., (1993), Proc. 5th Int. Symp. CFD, Sendai, Vol. III, pp.63-68.
- Schumann, U., (1975) J. Comput. Phys. Vol.18, pp.376-404.
- Suzuki, T., Kawamura, H. (1994), Trans JSME (B), 60-578, pp.3280-3286.
- Yamamoto, K., (1994), Parallel CFD'94, Kyoto, pp.1-6.

A WAVELET-OPTIMIZED, VERY HIGH ORDER ADAPTIVE GRID *and* ORDER NUMERICAL METHOD

by

Leland Jameson

Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.
Advanced Technology Research Center
8-1, Sachiura, 1-Chome, Kanazawa-ku,
Yokohama, 236, Japan
email: lmj@atrc.mhi.co.jp

ABSTRACT

Differencing operators of arbitrarily high order can be constructed by interpolating a polynomial through a set of data followed by differentiation of this polynomial and finally evaluation of the polynomial at the point where a derivative approximation is desired. An adaptive numerical method is introduced which adapts the numerical grid and the order of the differencing operator depending on the data. The numerical grid adaptation is performed on a Chebyshev grid. The order of the differencing operator will be between 8 and 32. In essence, this new numerical method is an adaptive grid, adaptive order spectral method.

1 Introduction

One can argue that high order numerical methods are appropriate for problems in 1) the direct numerical simulation of turbulence, 2) flows with shocks and nonlinear physics, and 3) flows with smooth propagating structures such as those encountered in aeroacoustics. Assertion number 3) is based on convergence properties of the hp-refinement method in finite elements in which convergence is very fast for high order polynomials as long as the function at hand is smooth. In addition, high order methods are more efficient for long time integration of unsteady flow problems.

This paper introduces a numerical method which combines very high order differencing with a wavelet-based grid and order selection mechanism. Here very high order differencing will be schemes of order greater than or equal to 8, i.e., perhaps 16, 20, or maybe order 32. Such high orders of accuracy can produce solutions which are very close to those produced by spectral methods.

The numerical method introduced here is named the Wavelet-Optimized Finite Difference method 2, or WOFD2. WOFD2 is an extension of WOFD, see [5], [1], in which wavelets are used for grid refinement, see [6], for finite difference schemes. The new

method extends this scheme to very high orders and also adapts the order of accuracy depending on the data.

2 Difference Equations

Given a vector of N numbers \vec{f} how can we get an approximate value of the derivative \vec{f}' at the $i - th$ point and how good will this approximate value be? Generally speaking, the more elements around the $i - th$ point of \vec{f} that are used to approximate \vec{f}' the better the approximation will be. Common finite difference formulas are found by fitting a algebraic polynomial of degree q locally around the $i - th$ point of a vector \vec{f} of evenly-spaced elements to obtain difference approximations of accuracy $q - 1$.

This section will generalize this concept to find the difference equations of arbitrary accuracy on arbitrary grids using algebraic, trigonometric, cosine and exponential polynomials. As special cases, one can obtain all the usual finite difference formulas as well as the Fourier collocation and Chebyshev collocation spectral differential matrices.

2.1 Interpolation

One can generate differencing coefficients by first interpolating a polynomial through a set of data, followed by differentiation of this

polynomial and evaluated at a grid point.

The main reason that differentiation was studied with a variety of types of differentiation operators was to find out if there was any advantage to using, say, trigonometric polynomials to differentiate as opposed to algebraic polynomials when the function to be differentiated was for example a Gaussian pulse. It seemed like an appropriate study to undertake given the current research activity in the area or aeroacoustics where one is often confronted with the need to computationally propagate some type of wave motion. The thought was that perhaps trigonometric polynomials might have some advantage at propagating wave motion over the more common algebraic polynomials. One of the conclusions of this section is that there is no advantage and that one should simply use algebraic polynomials for the generation of differencing equations. In fact, the only important issues involved with obtaining approximate derivatives is the order of the finite difference operator and the density of the numerical grid.

2.1.1 Algebraic Polynomials

Interpolation with algebraic polynomials is probably the most common form of interpolation, and it is from this type of interpolation that

common uniform grid finite difference methods can be found. Using the following formula one can find the finite difference coefficients for an arbitrary grid and of arbitrary order. One simply fits the polynomial to the data, followed by differentiation of the polynomial, and finally one evaluates the polynomial at the point of interest. The well-known Lagrange interpolation formula for algebraic interpolation is,

$$A_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n (x - x_k) / \prod_{k=0, k \neq j}^n (x_j - x_k). \quad (1)$$

$A_j(x_k) = \delta_{jk}$. For given values w_0, w_1, \dots, w_n , the polynomial

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n w_k A_k(x). \quad (2)$$

in P_n and takes on these values at the points x_i :

$$p_n(x_k) = w_k, \quad (3)$$

for $k = 0, 1, \dots, n$.

3 Wavelet-based Grid and Order Selection

The previous section introduced the idea of building very high order algebraically-generated difference operators on Chebyshev grids as a way of obtaining very high accuracy

which is almost spectral in nature. This section will explore the idea of performing wavelet-based grid refinement on these Chebyshev grids as a way to obtain the necessary Chebyshev grid distribution near a boundary while having the ability to refine the grid away from the boundary for proper physical-space function resolution.

3.1 Uniform Grids

The idea of using wavelets to generate numerical grids began with the observation in [2] that the essence of an adaptive wavelet-Galerkin method is nothing more than a finite difference method with grid refinement. So, instead of letting the magnitude of wavelet coefficients choose which basis functions to use in a Galerkin approach, let the same coefficients choose which grid points to use and then think of the wavelet method in a collocation sense.

In other words, suppose a calculation begins with N evenly-spaced samples of a function \vec{f} and that some quadrature method produces N scaling function coefficients on the finest scale denoted by V_0 . If the spacing between adjacent values in the vector \vec{f} is Δx , then this is also the physical-space resolution of any calculation done in V_0 . Now, decompose V_0 once to get $V_0 = V_1 \oplus W_1$. Similarly speaking, the physical-space resolution of V_1 is $2\Delta x$

and the refinement from the $2\Delta x$ physical-space resolution to the Δx physical-space resolution is dictated by the wavelet coefficients in W_1 . This is the reasoning which led to WOFD and to the following subroutine which is at the heart of WOFD. The remainder of the paper is concerned with giving the reader an idea of how the WOFD grid refinement software works.

3.2 Chebyshev Grids

Chebyshev grids are not evenly-spaced in physical space, but are evenly-spaced in angle. That is, a Chebyshev grid comes from $x_j = \cos(\theta_j)$, $j = 0, \dots, N$, where the angle $\theta_j = \pi j/N$ is evenly-spaced. The above described refinement mechanism can now be applied to the uniform angle grid point values to define a new numerical grid. That is, all the above grid refinement machinery can be applied to Chebyshev grids where each subspace V_j will coincide with a uniform angle or usual Chebyshev grid and each refinement subspace W_j will coincide with additional points being added to the usual Chebyshev grid. It is well known that the Chebyshev grid is the best grid, in terms of minimal error, for algebraic polynomial interpolation.

A refinement, W_1 , on Chebyshev grid, V_1 , to get $V_0 = V_1 \oplus W_1$ is designed to begin with a grid which in one sense in perfect, the Chebyshev

grid, and perturb from this grid.

4 A New Numerical Method: WOFD2

In [5] a numerical method was defined which was called the Wavelet-Optimized Finite Difference method or WOFD. WOFD used wavelets in their finite difference form. In essence, this meant that wavelets were used to choose a numerical grid and all computations were performed on this grid using arbitrary-grid finite difference operators.

WOFD2 is an extension of this idea. WOFD2 uses wavelets to choose not only a numerical grid but also the order of the difference operator used on this grid. In addition, WOFD2 uses very high order finite difference operators on the order of 8, 16 or maybe 32. Furthermore, the physical-space grids are no longer evenly-spaced at every resolution but are Chebyshev. That is, wavelet-based grid generation, see [6], requires that a grid be selected from a uniform finest grid. But, high order polynomials can be highly-oscillatory on uniform grids. Therefore, WOFD2 works with Chebyshev grids at each resolution level. Recall, that Chebyshev grids $x_i = \cos(\theta_i)$ are not uniform in the physical space variable x_i but are uniform in the angle variable θ_i . It is in this uniform angle variable θ_i that grid refinement is performed.

Using the grid selection mechanism in [6] to select the order is a minor extension of the idea that wavelets are very good at finding regions of the domain at which a large numerical error is likely to occur. Numerical error will be determined by the truncation error of a polynomial which is locally interpolated to the data. The truncation error will be the product of intervals and a constant. Imagine the intervals are all a multiple of a smallest interval Δx then the key component in the truncation error will be $(\Delta x)^n$. This component can be decreased by either decreasing the size of Δx or by increasing the order of the scheme, i.e., increasing n . Or, one can decrease Δx and increase n simultaneously.

5 Conclusion

This paper has covered many topics related to the construction of a very high order adaptive order and adaptive grid numerical method which has been named the Wavelet-Optimized Finite Difference Method 2, or WOFD2. First it was necessary to explore the various ways in which difference operators can be constructed. This included a comparison of difference operators generated from algebraic, trigonometric, exponential, and cosine polynomials. Next, which type of polynomial would be best for the construction of very high order numerical differencing. The

conclusion, which is not a big surprise, is that one should use algebraic polynomials on Chebyshev grids. The next step was to apply wavelet grid and order adaptation in order to be able to reduce errors throughout the domain by either increasing the order of the numerical method or by increasing the grid density in the appropriate region. The results of the numerical tests were very positive and it appears that WOFD2 will be applicable to a large range of numerical problems. The version of WOFD2 which has been presented here has been 'tweaked' very little. That is, it worked essentially for the first time it was tried. This is encouraging because most high order numerical methods require some kind of filtering or other refinement. Future plans for WOFD2 would be, perhaps, to try to find a proof of stability and to apply the method in higher dimensions.

References

- [1] (1996) G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, L. Jameson, "Wavelets: Theory and Applications", Oxford.
- [2] L. Jameson, "On The Wavelet Based Differentiation Matrix", Journal of Scientific Computing, September 1993 and ICASE Report No. 93-95, NASA CR-191583.

- [3] L. Jameson, "On The Differentiation Matrix for Daubechies-Based Wavelets on an Interval", SIAM J. Sci. Comp., Vol. 17, Issue 2, 3/96 and ICASE Report No. 93-94, NASA CR-191582.

- [4] L. Jameson, T.L. Jackson, D.G. Lasseigne, "Wavelets as a Numerical Tool", Proceedings from the Joint US-Japan Workshop on Combustion, 1993, J. Buckmaster, T. Takeno (eds.), Springer-Verlag.

- [5] L. Jameson, "On the Wavelet-Optimized Finite Difference Method", ICASE Report No. 94-9, NASA CR-191601.

- [6] L. Jameson, "Wavelet-based Grid Generation", 12-95, submitted to Journal of Computational Physics.

- [7] L. Jameson, "A Wavelet-Optimized, Very High Order Adaptive Grid and Order Numerical Method", 3-96, submitted to SIAM Journal of Scientific Computing.

A New High-Accuracy Method—Finite Spectral Method

Jian-Ping Wang*

Abstract

The conception of finite spectral method is given in this paper. The method of non-periodic Fourier transform and two finite spectral schemes are presented. Numerical tests of a wave propagation problem and a shock tube problem are performed.

1 Introduction

The advance in computational fluid dynamics enables almost all problems in fluid dynamics to be solved numerically. However, there are still many difficulties to make their results reliable. Two approaches to real results are considered: one is the construction of proper mathematical models, and another is the development of accurate numerical methods. For instance, the numerical research on turbulence just relies on these two keys. Spectral methods have taken an important role in numerical studies on turbulence due to their high-accuracy, while their applications have been restricted to simple geometry and uniform variations. Although the spectral element method [1] and the uniform high-order spectral methods [2] have been proposed, their flexibility is not satisfactory to deal with arbitrary geometry and their algorithm is complicated for programming. To review the progress of spectral methods, all efforts have been made to overcome the contradiction between the global properties of spectral methods and the local properties of flow fields[3]. Therefore, it becomes necessary to construct local spectral methods as flexible as finite difference methods and finite element methods.

Finite spectral method is a new conception defined as local spectral schemes based on non-periodic Fourier transform with finite order and finite points[4]. The non-periodic Fourier transform owns both non-periodicity and uniform mesh, which makes it possible to construct spectral schemes pointwise or cellwise. In this paper, we propose two finite spectral schemes and give their applications to the wave propagation problem and the shock tube problem.

2 Non-periodic Fourier Transform

To change the conventional point of view, we find that non-periodic functions are approximated by Fourier series in arbitrary sub-intervals of the whole periodic interval. Using a truncated Fourier series with periodicity on $[-1, 1]$ to interpolate $u(\xi)$, a non-periodic function on $[-l, l]$ ($-1 < -l < l < 1$), we have the fol-

lowing relations at the $2N + 1$ uniform discrete points $\xi_j = j/l/N$ ($j = -N, -N + 1, \dots, N$):

$$u(\xi_j) = \sum_{n=-N}^N \hat{u}_n e^{i\pi n \xi_j}. \quad (1)$$

The $2N + 1$ unknown coefficients \hat{u}_n are obtained by solving the above system.

3 Finite Spectral Method

3.1 Central Spectral Scheme

This is the simplest scheme in finite spectral method, which is similar to the central difference scheme. We introduce $\tilde{u}(\xi^i)$, a local Fourier series centered on x_i , to approximate a smooth function $u(x)$ as

$$\tilde{u}(\xi_j^i) = \sum_{n=-N}^N \hat{u}_n^i e^{i\pi n \xi_j^i}, \quad (2)$$

where ξ^i is the local coordinate given by

$$\xi^i = (x - x_i) \frac{l}{N\Delta x}, \quad (3)$$

Δx is the increment of x , l and N have the same definition with eq.(1). \tilde{u} interpolates u at the stencil points

$$\tilde{u}(\xi_j^i) = u(x_{i+j}), \quad (j = -N, -N + 1, \dots, N). \quad (4)$$

Thus the spatial derivatives of u near x_i can be expressed as

$$u_x^i(x) = \xi_x \tilde{u}_\xi(\xi^i) = \frac{i\pi l}{N\Delta x} \sum_{n=-N}^N n \hat{u}_n^i e^{i\pi n \xi^i}, \quad (5)$$

$$u_{xx}^i(x) = (\xi_x)^2 \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi^i) = - \left(\frac{\pi l}{N\Delta x} \right)^2 \sum_{n=-N}^N n^2 \hat{u}_n^i e^{i\pi n \xi^i}. \quad (6)$$

The higher order derivatives can be derived similarly. The above equations are reduced to the following simple forms at the center x_i

$$u_x^i(x_i) = - \frac{\pi l}{N\Delta x} \sum_{n=-N}^N n \hat{u}_{n,i}^i, \quad (7)$$

$$u_{xx}^i(x_i) = - \left(\frac{\pi l}{N\Delta x} \right)^2 \sum_{n=-N}^N n^2 \hat{u}_{n,r}^i, \quad (8)$$

where $\hat{u}_{n,r}^i$ and $\hat{u}_{n,i}^i$ are the real part and the imaginary part of \hat{u}_n^i respectively.

*Aerodynamics Division, National Aerospace Laboratory, 7-44-1 Jindaiji Higashi, Chofu, Tokyo 182, Japan, Email wang@nal.go.jp

3.2 Finite Spectral ENO Scheme

The ENO schemes can be divided into two processes: estimation of the smoothness and interpolation of the solution. Although there are some differences between them, the existing ENO schemes all use divided differences for the former and Newton interpolation for the latter[2]. Here we introduce a new scheme to the second process, that is, using non-periodic Fourier interpolation instead of Newton interpolation. The algorithm of the finite spectral ENO scheme is as follows:

1. Primitive function

$$H(x_{i+1/2}) = \Delta x \sum_{k=1}^i f(x_k). \quad (9)$$

2. Divided differences

$$\begin{aligned} & H[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+k-1/2}] \\ &= \{H[x_{i+1/2}, \dots, x_{i+k-1/2}] - H[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+k-3/2}]\} \\ & \quad / (x_{i+k-1/2} - x_{i-1/2}) \\ & \quad (k = 1, 2, \dots, 2N). \end{aligned} \quad (10)$$

3. Propagation speed. For the Euler equations, the characteristic speeds $\bar{c}_{i+1/2}$ ($\bar{u}_{i+1/2}$, $\bar{u}_{i+1/2} \pm \bar{a}_{i+1/2}$) are calculated by using the Roe average[5].

4. Smoothest stencil. Let j_{local} be the point on the local coordinate corresponding to the cell boundary point $i + 1/2$ on the global coordinate, $i_{\text{min}} = i$, $j_{\text{local}} = -N$ if $\bar{c}_{i+1/2} > 0$, then $i_{\text{min}} = i_{\text{min}} - 1$, $j_{\text{local}} = j_{\text{local}} + 1$. if $|H[x_{i_{\text{min}}-1/2}, \dots, x_{i_{\text{min}}+l-1/2}]| > |H[x_{i_{\text{min}}-3/2}, \dots, x_{i_{\text{min}}+l-3/2}]|$, then $i_{\text{min}} = i_{\text{min}} - 1$, $j_{\text{local}} = j_{\text{local}} + 1$, ($l=2, 3, \dots, 2N$).

5. Error Limitation. Define that $R^{(l)}(x)$ be the l th error term of Newton interpolation of $f = dH/dx$, then

$$\begin{aligned} R^{(l)}(x) &= H[x_{i_{\text{min}}-1/2}, \dots, x_{i_{\text{min}}+l-1/2}] \\ & \quad \prod_{i=i_{\text{min}}, i \neq j+1}^{i_{\text{min}}+l-1} (x - x_{i-1/2}). \end{aligned} \quad (11)$$

$$(12)$$

Since $R^{(l)}(x_{j+1/2})$ is the approximation of the error, we shorten the stencil when $R^{(l)} > R^{(l-1)}$.

6. Non-periodic Fourier interpolation. The values of the primitive function are replaced to the local coordinate as

$$\tilde{H}(\xi_j^{i+1/2}) = H(x_{i_{\text{min}}+1/2+N+j}), \quad (j = -N, -N+1, \dots, N). \quad (13)$$

The non-periodic Fourier transform is done on the smoothest stencil with

$$\tilde{H}(\xi_j^{i+1/2}) = \sum_{n=-N}^N \hat{u}_n^{i+1/2} e^{i\pi n \xi_j^{i+1/2}}. \quad (14)$$

7. Reconstruction of flux

$$\bar{f}_{i+1/2} = \left. \frac{dH(x)}{dx} \right|_{i+1/2} = \frac{i\pi l}{N\Delta x} \sum_{n=-N}^N n \hat{u}_n^{i+1/2} e^{i\pi n \xi_{j_{\text{local}}}^{i+1/2}}. \quad (15)$$

4 Results

The complex form of LU decomposition method is used for solving eq.(1). Once the LU decomposition matrix is obtained, it can be used repeatedly. The coefficients are calculated in $M(M+1)/2$ ($M = 2N + 1$) operations.

First we choose the wave equation

$$u_t + u_x = 0 \quad (16)$$

as a test problem. The central spectral scheme and the central difference scheme are employed for calculating the spatial derivative, and the Euler scheme is used for the time-integration. Figure 1 shows the exact solution and the numerical results after one period of propagation starting from the initial condition

$$u(x) = \sum_{n=0}^{Nt} \{\cos[2\pi n(x + 0.5)] + \sin[2\pi n(x + 0.5)]\}. \quad (17)$$

We set $l = 0.5$, $N = 3$, $Nt = 8$, $\Delta t = 0.0001$ and the total grid number $Nx = 32$. The result of the central difference method departs from the exact solution considerably, and one peak is lost. In contrast the central spectral method gives good accuracy. This is because that the difference schemes are inherently accompanied by phase errors, i.e. the components with different frequencies propagate in different speeds, while the spectral schemes are characterized by no phase error occurring.

Next we apply the finite spectral ENO scheme to the Sod's standard shock tube problem. The one-dimensional Euler equations are written as

$$u_t + f_x = 0, \quad (18)$$

where

$$u = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ u(e + p) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

The flux vector f is divided into three characteristic components as

$$\begin{aligned} f^1 &= \frac{\rho(u-a)}{2\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ u-a \\ h-ua \end{bmatrix}, \\ f^2 &= \frac{(\gamma-1)\rho u}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \\ f^3 &= \frac{\rho(u+a)}{2\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ u+a \\ h+ua \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

to which the finite spectral ENO scheme is imposed. The time-integration is performed in the following form:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}) = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{k=1}^3 (\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^k - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^k). \quad (21)$$

The initial conditions are $(\rho_L, u_L, P_L) = (1, 0, 1)$, $(\rho_R, u_R, P_R) = (0.125, 0, 0.01)$, and the CFL number, the non-periodic interval and the grid number are set to $CFL = 0.3$, $l = 0.02$, $Nx = 100$. Figure 2 and 3 illustrate respectively the density distribution of the shock tube problem without and with error limitation. The shock wave is captured sharply, and the effect of the error limitation is obvious. The comparison between the numerical result and the exact solution is excellent.

5 Concluding Remarks

Non-periodic Fourier transform enables us to construct spectral schemes pointwise or cellwise. The central spectral scheme and the finite spectral ENO scheme proposed in this paper are two applications of them. These local schemes keep the high-order accuracy of spectral method, and possess the flexibility which has not been existed in conventional ones. The results of the two examples implies that finite spectral method is attractive for solving both unsteady problems and discontinuous problems. Since finite spectral method is a most fundamental methodology, further developments are necessary to be done.

References

- [1] A. T. Patera: A Spectral Element Method for Fluid Dynamics: Laminar Flow in a Channel Expansion, *J. Comput. Phys.*, **54**(1984), pp.329-335.
- [2] W. Cai and C.-W. Shu: Uniform High-Order Spectral Methods for One- and Two-Dimensional Euler Equations, *J. Comput. Phys.*, **104**(1993), pp.427-443.
- [3] J. P. Wang, Y. Nakamura and M. Yasuhara: Global Coefficient Adjustment Method for Neumann Condition in Explicit Chebyshev Collocation to Compressible Navier-Stokes Equations, *J. Comput. Phys.*, **107**(1993), pp. 160-175.
- [4] J. P. Wang: Non-Periodic Fourier Transform and Finite Spectral Method, A Collection of Technical Papers of Sixth International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Lake Tahoe(1995), pp. 1339-1344.
- [5] P. L. Roe: Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **18**(1986), pp. 337-365.

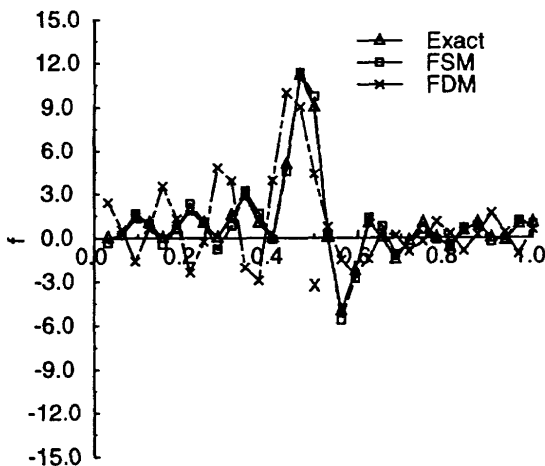


Figure 1 Comparison between exact solution and numerical solutions of wave equation by using 3rd-order central spectral scheme and 3rd-order central difference scheme.

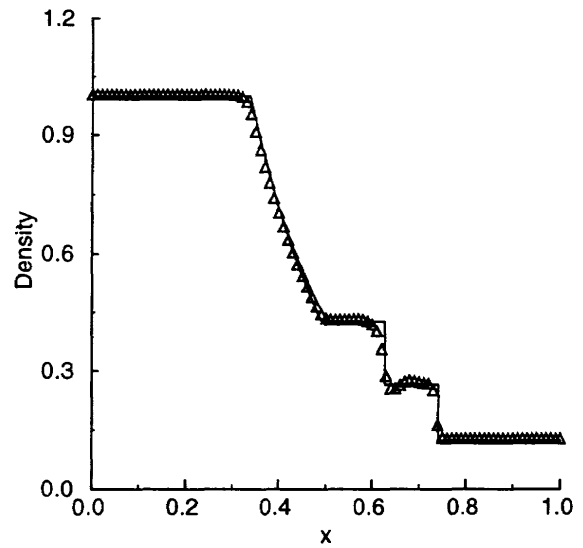


Figure 2 Density distribution of shock tube problem using finite spectral ENO scheme with five-point stencil and without error limitation.

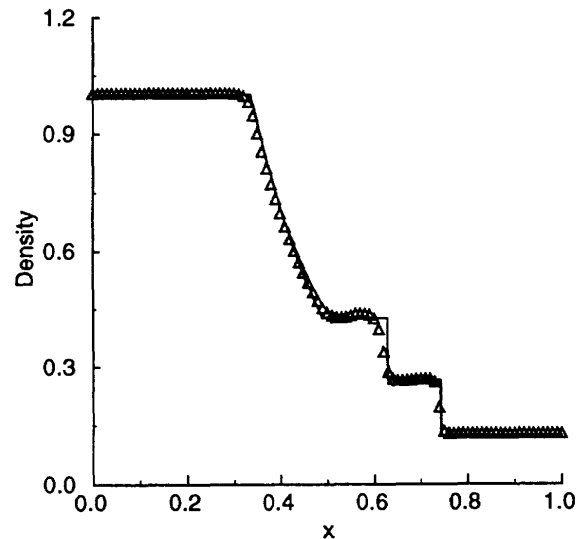


Figure 3 Density distribution of shock tube problem using finite spectral ENO scheme with five-point stencil and with error limitation.

A New High Resolution Scheme for the Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations

Shigefumi Tatsumi

Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., Nagoya Aerospace Systems Works
Nagoya, Japan

Abstract

A new flux splitting and limiting technique which yields one-point stationary shock capturing is presented. The technique is applied to the full Navier-Stokes and Reynolds Averaged Navier-Stokes equations. Calculations of laminar boundary layers at subsonic and supersonic speeds are presented together with calculations of transonic flows around airfoils. The results show very good agreement with theoretical solutions or existing experimental data. It is shown that the proposed scheme improves the resolution of viscous flows while maintaining one-point shock capturing property.

1. Introduction

The calculation of compressible viscous flows requires schemes which could not affect the global accuracy of the solution of the *physical* viscous problem though they should be *numerically* dissipative enough on the other hand. Recently a large class of schemes including High Resolution Switched schemes, Symmetric Limited Positive (SLIP), and Upstream Limited Positive (USLIP) schemes has been analyzed.^{5,13} SLIP and USLIP schemes were implemented and tested using several forms of flux-splitting including scalar, characteristic, and Convective Upwind and Split Pressure (CUSP) schemes. Careful comparisons with analytical results for laminar boundary layers clearly indicate that the limiting process plays a greater role than the flux-splitting in determining the quality of viscous results. However, new trade-offs between the different forms of flux-splitting arise whenever crisp resolution of shocks becomes important.

Roe has shown that characteristic splitting can yield an optimal discrete shock resolution with only one interior point.¹⁰ More recently Jameson has shown that a discrete shock structure with a single interior point can be supported by artificial diffusion which both produces an upwind flux for the flow determined to be supersonic and satisfies a generalized eigenvalue problem for the exit from the shock. These two conditions can be satisfied by both the characteristic and CUSP schemes whereas scalar diffusion fails to satisfy the first condition.

The present work focuses on the CUSP based schemes which combine perfect one-point shock capturing of stationary shocks with high resolution of boundary layer properties.

2. Formulations

2.1 Convective Upwind and Split Pressure (CUSP)

For simplicity we consider the general one dimensional conservation law for a system of equations which can be expressed as

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0. \quad (1)$$

Here the following are the state and flux vectors.

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{pmatrix} \quad (2)$$

If γ is the ratio of specific heats and c is the speed of sound, then

$$p = (\gamma - 1)\rho \left(E - \frac{u^2}{2} \right)$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$H = E + \frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2}$$

In a steady flow H is constant. This remains true for the discrete scheme only if the numerical diffusion is constructed so that it is comparable with this condition.

The conservation law (1) is approximated on a mesh with an interval Δx by the semi-discrete scheme

$$\Delta x \frac{dw_j}{dt} + h_{j+1/2} - h_{j-1/2} = 0, \quad (3)$$

and the numerical flux can be taken as the following equation.

$$h_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f_{j+1} + f_j) - d_{j+1/2} \quad (4)$$

$d_{j+1/2}$ is a diffusive flux which is introduced to enable the scheme to resolve discontinuities without producing oscillations in the discrete solution.

Suppose that the first order diffusive flux is defined as a combination of differences of the state and flux vectors

$$d_{j+1/2} = \frac{1}{2} \alpha^*_{j+1/2} c (w_{j+1} - w_j) + \frac{1}{2} \beta_{j+1/2} (f_{j+1} - f_j). \quad (5)$$

Schemes of this class are fully upwind in supersonic flow if one takes $\alpha_{j+1/2} = 0$ and $\beta_{j+1/2} = \text{sign}(M)$ when the absolute value of the local Mach number satisfies $|M| > 1$. In order to support a stationary discrete shock structure with a single interior point, α^* and β cannot be chosen independently. It turns out that once α^* is chosen, β is uniquely determined by the equilibrium at the exit of the shock, leading to a one parameter family of schemes satisfying the relation

$$\alpha^* = (1 + \beta)(1 - M)$$

when $M > 1$. The choice $\beta = M$ corresponds to the Harten-Lax-Van Leer (HLL) scheme, which is extremely diffusive. We will develop schemes of this class based on a decomposition of the flux vector f . If the convective terms are separated by splitting the flux according to the following equations (6) and (7), then the total effective coefficient of convective diffusion is expressed as (8),

$$f = uw + f_p, \quad \text{where } f_p = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ up \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$f_{j+1} - f_j = \bar{u}(w_{j+1} - w_j) + \bar{w}(u_{j+1} - u_j) + f_{p,j+1} - f_{p,j} \quad (7)$$

$$\alpha c = \alpha^* c + \beta \bar{u} \quad (8)$$

where \bar{u} and \bar{w} are arithmetic averages.

The choice of $\alpha c = \bar{u}$ leads to low diffusion near a stagnation point, and also leads to a smooth continuation of convective diffusion across the sonic line since $\alpha^* = 0$ and $\beta = 1$ when $|M| > 1$. The scheme must also be formulated so that the cases of $u > 0$ and $u < 0$ are treated symmetrically. Using the notation $M = u/c$ and $\lambda^\pm = u \pm c$, this leads to the diffusion coefficients

$$\alpha = |M|, \quad \beta = \begin{cases} + \max(0, \frac{u + \lambda^-}{u - \lambda^-}) & \text{if } 0 \leq M \leq 1 \\ - \max(0, \frac{u + \lambda^+}{u - \lambda^+}) & \text{if } -1 \leq M \leq 0 \\ \text{sign}(M) & \text{if } |M| \geq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Near a stagnation point α may be modified to

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\alpha_0 + \frac{M^2}{\alpha_0} \right) \text{ if } |M| \text{ is smaller than a threshold } \alpha_0.$$

Equation (9) remains valid when CUSP scheme is modified to

allow solutions with constant stagnation enthalpy. The coefficients $\alpha(M)$ and $\beta(M)$ are displayed in figure 1 for the case of $\alpha_0 = 0$. The cutoff of β when $|M| < 1/2$, together with α approaching zero as $|M|$ approaches zero, is also appropriate for the capture of contact discontinuities.

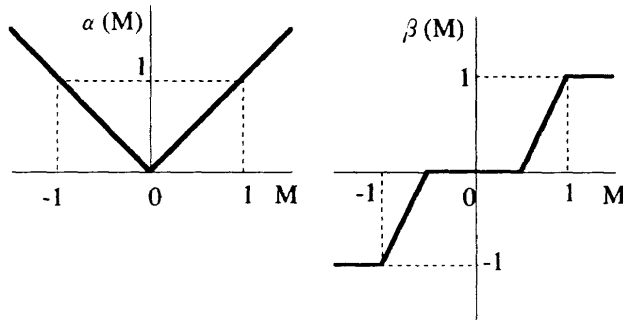


Figure 1: Coefficients of the scheme

An important property of this scheme is that it has lower diffusion than the standard characteristic upwind scheme, which can be illustrated by introducing a Roe linearization and by rewriting the diffusive flux as

$$d_{j+1/2} = \frac{1}{2} (\alpha^* cI + \beta A_{j+1/2}) (w_{j+1} - w_j). \quad (10)$$

Introducing the characteristic decomposition, the diffusive flux can now be represented as

$$d_{j+1/2} = RMR^{-1} (w_{j+1} - w_j) \quad (11)$$

The matrix M is diagonal with eigenvalues $\mu_1 c$, $\mu_2 c$, $\mu_3 c$ displayed in figure 2.

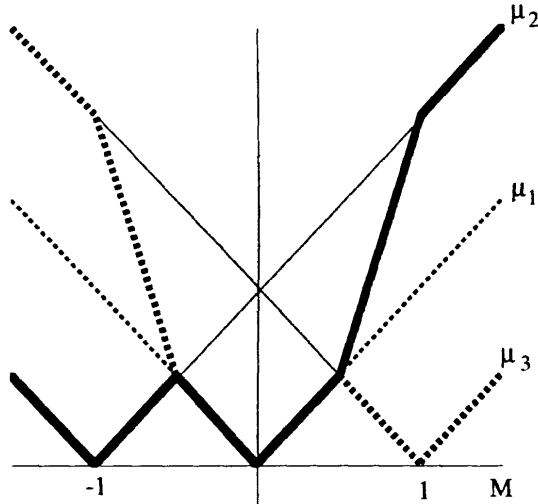


Figure 2: Eigenvalues of diffusion matrix

Strict positivity is not enforced, but at a shock

$$\Delta f = A \Delta w = S \Delta w$$

where S is the shock speed. Thus Δw must be an eigenvector corresponding to one of the eigenvalues $u \pm c$, and positivity is enforced for the corresponding characteristic variable.

2.2 H-CUSP Formulation

In steady flow the stagnation enthalpy H is constant, corresponding to the fact that the energy and mass equations are consistent when the constant factor H is removed from the energy equation. Discrete and semi-discrete schemes do not necessarily satisfy this property. In the case of a semi-discrete scheme expressed in viscous form - equations (3) and (4) - a solution with constant H is admitted if the viscosity for the energy equation reduces to the viscosity for the continuity equation with ρ replaced by ρH .

In order to extend the CUSP formulation to allow for isenthalpic solutions, we introduce the linearization

$$f_R - f_L = A_h (w_{hR} - w_{hL})$$

where w_h is a modified state vector with ρH replacing ρE . The matrix A_h may be calculated in the same way as the standard Roe linearization. In particular, by introducing the vector

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} u \\ \sqrt{\rho} H \end{pmatrix}$$

all quantities in both f and w_h are products of the form $v_j v_k$ which have the property that a finite difference $\Delta(v_j v_k)$ between left and right states can be expressed as

$$\Delta(v_j v_k) = \bar{v}_j \Delta v_k + \bar{v}_k \Delta v_j$$

where \bar{v}_j is the arithmetic mean $1/2(v_{jR} + v_{jL})$. Therefore,

$$\Delta w = B \Delta v, \quad \Delta f = C \Delta v = C B^{-1} \Delta w,$$

where B and C can be expressed in terms of appropriate mean values of the quantities v_j . Thus, by defining

$$u = \frac{\sqrt{\rho_R} u_R + \sqrt{\rho_L} u_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}, \quad H = \frac{\sqrt{\rho_R} H_R + \sqrt{\rho_L} H_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}},$$

and

$$c = \sqrt{(\gamma - 1)(H - u^2/2)},$$

it follows that

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{u^2}{2} & \frac{\gamma+1}{\gamma} u & \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ -uH & H & u \end{pmatrix}$$

The eigenvalues of A_h are u , λ^+ , and λ^- where

$$\lambda^\pm = \frac{\gamma+1}{2\gamma} u \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} u\right)^2 + \frac{c^2 - u^2}{\gamma}}$$

Note that λ^+ and λ^- have the same sign as $u+c$ and $u-c$, respectively, and change sign at the sonic line $u = \pm c$. The corresponding left and right eigenvectors of A_h can be computed, and are given in Reference 7.

Using the modified linearization, the CUSP scheme can be reformulated as follows to admit isenthalpic steady solutions. The diffusive flux is expressed as

$$d_{j+1/2} = \frac{1}{2} \alpha^* c \Delta w_h + \frac{1}{2} \beta \Delta f,$$

where Δ denotes the difference from $j+1$ to j . The split is redefined as

$$f = u w_h + f_p,$$

where

$$f_p = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

and the diffusive flux can be expressed as

$$d_{j+1/2} = \frac{1}{2} \alpha c \Delta w_h + \frac{1}{2} \beta \bar{w}_h \Delta u + \frac{1}{2} \beta \Delta f_p.$$

As before, α and β are defined by equation (9), using the modified eigenvalues λ^\pm defined above.

2.3 Implementation of Limiters

In the case of scalar conservation law, high resolution schemes which guarantee the preservation of the positivity or monotonicity of the solution can be constructed by limiting the effect of higher order or anti-diffusive terms, which might otherwise cause extrema to grow. The fluxes appearing in the CUSP scheme have different slopes approaching from either side of the sonic line, and use of limiters which depends on comparisons of these fluxes can lead to a loss of smoothness in the solution at the entrance to supersonic zones in the flow.

This problem can be avoided in the implementation of the CUSP scheme by forming the diffusive flux from left and right states at the cell interface. These are interpolated or extrapolated from nearby data, subject to limiters to preserve monotonicity. In a similar manner to the reconstruction of the solution in Van Leer's MUSCL scheme⁸, the following construction is used. Define the limiter

$$R(u, v) = 1 - \frac{|u - v|^q}{(|u| + |v|)^q}, \quad (12)$$

where q is a positive power which is set equal to two in the present study. Also define the limited average

$$L(u, v) = \frac{1}{2} R(u, v)(u + v). \quad (13)$$

Let $w^{(k)}$ denote the k th element of the state vector w . Now define left and right states for each dependent variable separately as

$$w_L^{(k)} = w_j^{(k)} + \frac{1}{2} L(\Delta w_{j+3/2}^{(k)}, \Delta w_{j-1/2}^{(k)})$$

$$w_R^{(k)} = w_{j+1}^{(k)} - \frac{1}{2} L(\Delta w_{j+3/2}^{(k)}, \Delta w_{j-1/2}^{(k)}),$$

where

$$\Delta w_{j+1/2} = w_{j+1} - w_j$$

Then

$$w_R^{(k)} - w_L^{(k)} = \Delta w_{j+1/2}^{(k)} - L(\Delta w_{j+3/2}^{(k)}, \Delta w_{j-1/2}^{(k)}), \quad (14)$$

which in the case of a scalar equation reduces to the SLIP formulation⁶.

For the CUSP schemes the pressures p_L and p_R for the left and right states are determined from w_L and w_R . Then the diffusive flux is calculated by substituting w_L for w_j and w_R for w_{j+1} to give

$$d_{j+1} = \frac{1}{2} \alpha^* c(w_R - w_L) + \frac{1}{2} \beta \{f(w_R) - f(w_L)\}.$$

The alternative reconstruction:

$$w_L^{(k)} = w_j^{(k)} + R(\Delta w_{j+3/2}^{(k)}, \Delta w_{j-1/2}^{(k)}) \Delta w_{j-1/2}^{(k)}$$

$$w_R^{(k)} = w_{j+1}^{(k)} - R(\Delta w_{j+3/2}^{(k)}, \Delta w_{j-1/2}^{(k)}) \Delta w_{j+3/2}^{(k)}$$

has been found to yield essentially identical results for calculations of steady flows.

3. Numerical Results

Extensive numerical tests have been performed with the CUSP type schemes to verify their properties⁷. Results for inviscid flow calculated with the program FLO82 verify the one-point capturing of shocks. Examples of an inviscid result are presented in Figure 3, 4, and 5. The flow condition of freestream Mach number 0.75 and an angle of attack of 3 degrees was selected for the flow around RAE2822 airfoil. The typical O-type grid consisting of 320x64 structured grid points was used in the case. The conventional Scalar-Switch scheme¹³ needs 3 internal points to form the shock wave, where the CUSP scheme needs a single point. Figure 5 shows the convergence history for Scalar-Switch and CUSP schemes. Both schemes show very rapid convergence, especially the CUSP needs only 100 multigrid cycles to achieve a final level of the averaged density residuals of the order of 10^{-11} , where the initial level is the order of 10^{-1} . In this section the results obtained for two dimensional viscous flows are mainly reported.

The calculations were performed with the program FLO103, which uses a cell-centered finite volume scheme to discretize the full Navier-Stokes equations. Time integration is carried out by a five-stage scheme which requires re-evaluation of the dissipative operators only at alternate stages⁷. This scheme couples the desirable feature of a wide stability region along both the imaginary and real axes with good high frequency

damping. The efficiency of the scheme was enhanced by using an implicit averaging scheme with variable coefficients, and an effective multigrid strategy which utilizes a W-cycle.

The set of calculations presented in Figure 6 and 7 are aimed at investigating the behavior of the scheme in the supersonic regime for a flat-plate laminar boundary layer problem. Results are presented for a Reynolds number of 1×10^5 , on a grid with 32 cells in the boundary layer. They are scaled by using the Illingworth-Stewartson transformation¹¹, and compared with the Blasius solution. The results show that the scheme accurately reproduces the boundary layer properties in the supersonic regime.

The next test case is a turbulent boundary layer developing over a flat-plate at zero incidence. The case was chosen to investigate the behavior of the scheme for the Reynolds Averaged Navier-Stokes equations coupled with a typical turbulent model. To make comparisons as simple as possible, the well known algebraic model¹ was used in the cases. The computation results are compared with the following logarithmic formula¹¹.

$$\frac{u}{u_\tau} = 5.85 \log y^+ + 5.56, \quad u_\tau = \sqrt{\tau_0 / \rho}, \quad y^+ = y u_\tau / \nu. \quad (15)$$

Here u , τ_0 , ρ , y , and ν are tangential velocity component, wall shearing stress, density, normal distance from the wall, and kinetic viscosity respectively. The freestream Mach number of 0.15 and the Reynolds number of 1×10^7 have been chosen for the case. Figure 8 and 9 show the results of u / u_τ in terms of

$\log y^+$ using Scalar-Switch and CUSP respectively. Although the computation results don't seem to perfectly follow the self-similarity law and there are small differences between the both schemes, all the results follow the logarithmic formula in general. This fact suggests that the property of each scheme, which has been validated in laminar cases, is not much influenced by the presence of a turbulence model.

Calculations presented in Figure 11 and 12 are aimed at examining the applicability of the CUSP to laminar viscous flow problems around airfoil-like shapes. A diamond shape airfoil was chosen for the purpose. The computational grid is shown in Figure 10, where C-type grid consisting of 512x64 structured grid points is used. The freestream Mach number and an angle of attack are $M_\infty = 3.0$ and $\alpha = 0$ degree, respectively. 1×10^4 and 1×10^5 of the Reynolds number were used in the case to assume the flow is laminar. The Euler equation's case was also conducted for the comparison. Figure 11 shows the computed surface pressure distributions together with an inviscid analytical solution, where the Euler computation using CUSP nicely recovers the analytical solution. The result for $Re_\infty = 1 \times 10^5$ suggests that the comparison between computed boundary layer velocity profile and the scaled Blasius solution would be meaningful since there is not much pressure gradient on the first half of the airfoil surface. Figure 12 clearly proves this hypothesis by showing that the computed tangential velocity profiles follow the self-similarity law recovering the scaled Blasius solution.

The next two cases are to examine the behavior of the CUSP scheme in practical transonic turbulent flow problems. The first one is the flow around RAE2822 airfoil with $M_\infty = 0.75$, $\alpha = 3.19$ deg., and $Re_\infty = 6.2 \times 10^6$. The grid consists of a total of 480x64 grid points with 360 points fitted on the airfoil. Transition was fixed at the experimental location of the trip wire³. A Baldwin and Lomax turbulence model has been used for this case because the flow field was expected to be attached, and the behavior of the solution predicted by this model is reasonably well understood¹. Figure 13 shows a comparison of the computed and experimental pressure distribution along the airfoil, where the agreement between them is fairly good.

The second case consists of a RC(4)-10 airfoil with $M_\infty = 0.59$ and $Re_\infty = 7.5 \times 10^6$. The airfoil was designed for

application to the inboard region of a helicopter main rotor blade⁹. The turbulence model used here is again the simple algebraic one. Figure 14 shows the C-type grid consisting of a total of 512x64 grid points, which was used in the calculation. Figure 15 shows the comparison of surface pressure distribution between the computed result and experimental data at $\alpha=3.41$ degrees. The agreement is very good including the shock location where the critical pressure coefficient $C_{p,crit} = -1.36$. The computed lift, drag, and pitching moment coefficients in terms of α are shown in Figure 16 in comparison with experimental data. The agreement is again pretty good except at higher α where steadiness of the flow is questionable.

4. Conclusions

A new flux splitting and limiting scheme has been applied to the solution of the compressible Navier-Stokes equations. The calculations performed so far indicate the scheme, which was originally tailored for non-oscillatory shock capturing, yields accurate solutions for viscous flows. It will lead an improvement of the overall computational efficiency in practical problems by allowing the use of coarser grids.

References

1. Baldwin, B. and Lomax, H., "Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flow," AIAA Paper 78-257, 1978.
2. Einfeldt, B., "On Godunov-type methods for gas dynamics," *SIAM J. Num. Anal.*, 25:294-318, 1988.
3. Cook P. H., Mc Donald, M. A., and Firmin, M. C. P., "Airfoil RAE 2822 pressure distributions, Boundary layer and wake measurements," AGARD Advisory Report 138, 1979.
4. Harten, A., Lax, P. D., and Van Leer, B., "On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws," *SIAM Review*, 25:35-61, 1983.
5. Jameson, A., "Computational algorithms for aerodynamic analysis and design," *Appl. Num. Math.*, 13:383-422, 1993.
6. Jameson, A., "Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics I, artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on multigrid convergence," *Int. J. Comp. Fluid. Dyn.* 1995.
7. Jameson, A., "Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics II, artificial diffusion and discrete shock structure," *Int. J. Comp. Fluid. Dyn.* 1995.
8. Van Leer, B., "Towards the ultimate conservative difference scheme V, a second order sequel to Godunov's method," *J. Comp. Phys.*, 32:101-136, 1979.
9. Noonan, K. W., "Aerodynamic characteristics of two rotorcraft airfoils designed for application to the inboard region of a main rotor blade," NASA-TP 3009, 1990.
10. Roe, P. L., "Fluctuations and signals - a framework for numerical evolution problems," In Morton K. W. and Baines, M. J., editors, *Proceedings of IMA Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pp. 219-257, 1981.
11. Schlichting, H., "Boundary Layer Theory," 7th edition, McGraw - Hill, New York, 1979.
12. Tatsumi, S., Martinelli, L. and Jameson, A., "A New High Resolution Scheme for Compressible Viscous Flows with Shocks," AIAA Paper 95-0466, Jan. 1995.
13. Tatsumi, S., Martinelli, L., and Jameson, A., "Flux-Limited Schemes for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 2, pp. 252-261, February 1995.

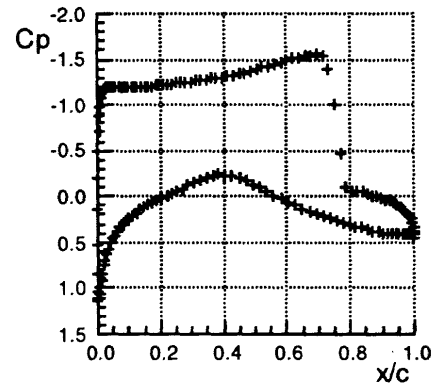


Figure 3: C_p distribution - Euler equations with Scalar-Switch RAE 2822 airfoil, $M=0.75$, $\alpha=3$ deg.

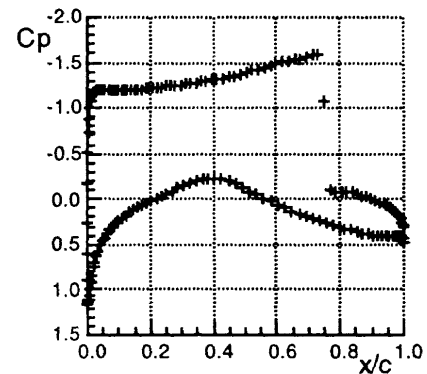


Figure 4: C_p distribution - Euler equations with CUSP RAE 2822 airfoil, $M=0.75$, $\alpha=3$ deg.

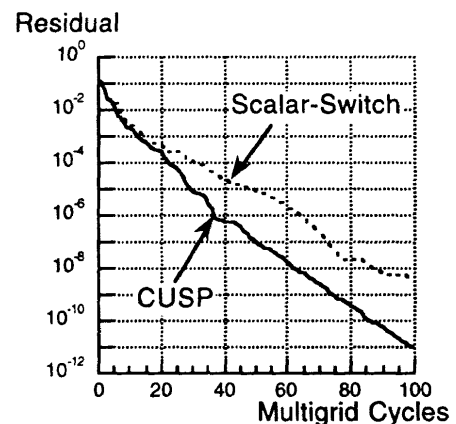


Figure 5: Convergence history - Euler equations RAE 2822 airfoil, $M=0.75$, $\alpha=3$ deg.

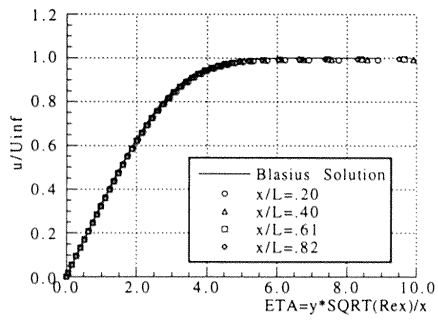


Figure 6: Flat plate laminar boundary layer tangential velocity profile at $M=2.0$ and $Re=1 \times 10^5$ - CUSP

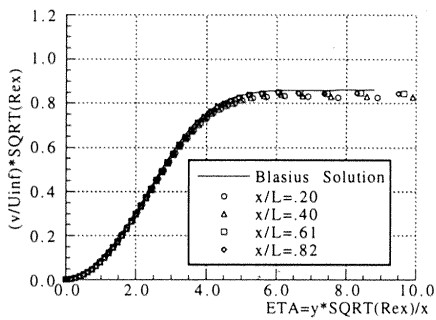


Figure 7: Flat plate laminar boundary layer transverse velocity profile at $M=2.0$ and $Re=1 \times 10^5$ - CUSP

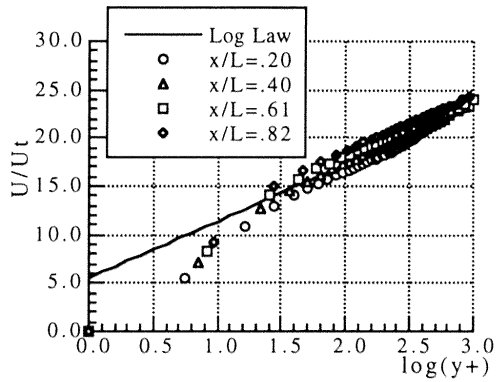


Figure 8: Flat plate turbulent boundary layer tangential velocity profile at $M=0.15$ and $Re=1 \times 10^7$ - Scalar-Switch

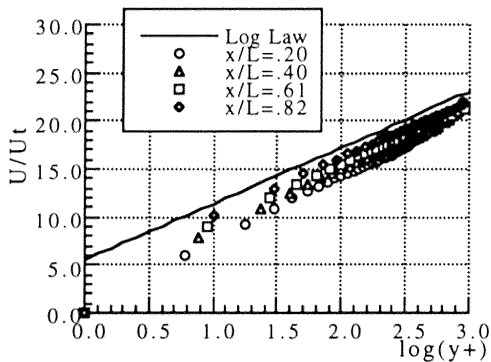


Figure 9: Flat plate turbulent boundary layer tangential velocity profile at $M=0.15$ and $Re=1 \times 10^7$ - CUSP

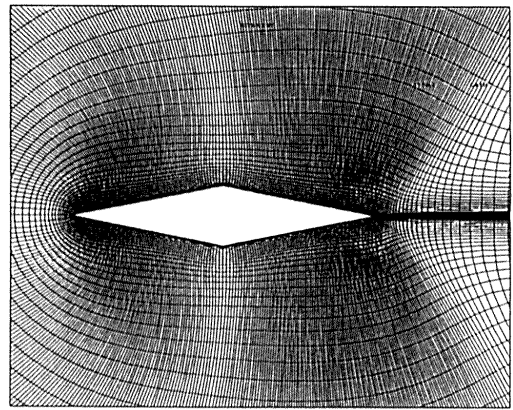


Figure 10: Computational grid for a diamond airfoil (512x64)

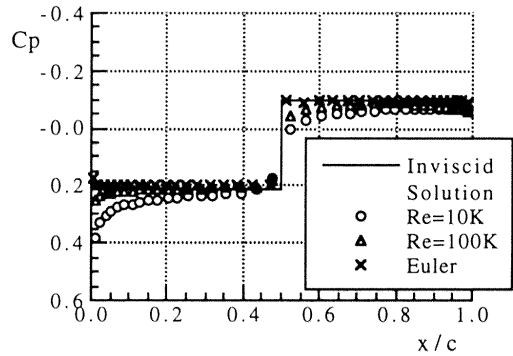


Figure 11: C_p distribution on a diamond airfoil at $M=3.0$ and $\alpha=0\text{deg.}$ - CUSP

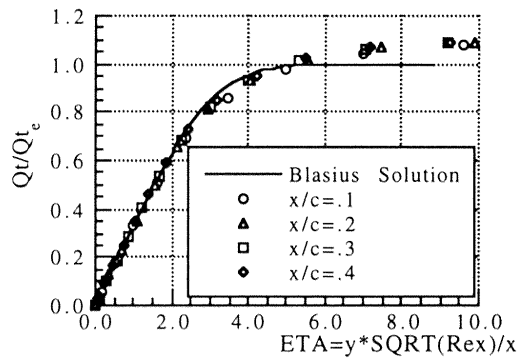


Figure 12: Laminar boundary layer tangential velocity profile on a diamond airfoil at $M=3.0$, $\alpha=0\text{deg.}$, and $Re=1 \times 10^5$ - CUSP

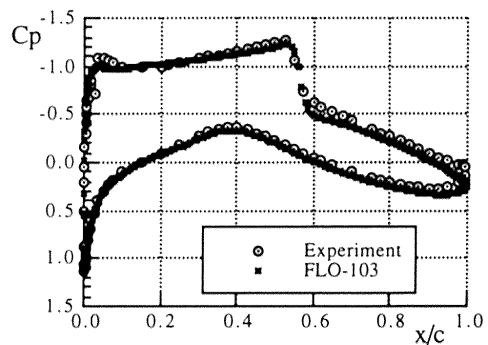


Figure 13: C_p distribution on RAE2822 airfoil at $M=0.75$, $\alpha=3.19\text{deg.}$, and $Re=6.2 \times 10^6$ - CUSP

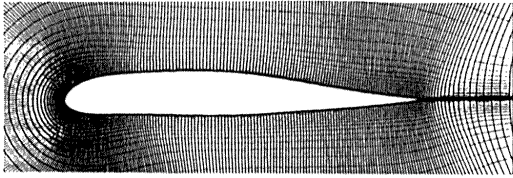


Figure 14:Computational grid for RC(4)-10 airfoil

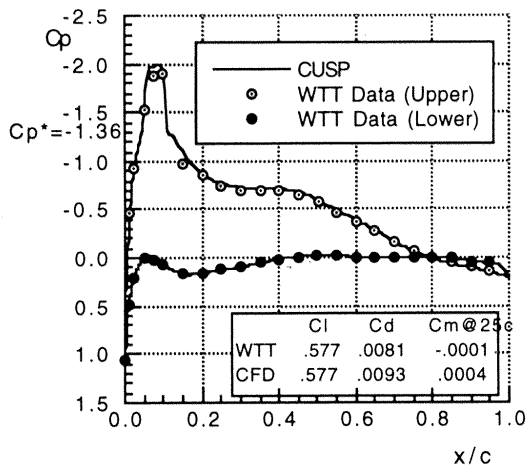


Figure 15: C_p distribution on RC(4)-10 airfoil at $M=0.59$, $\alpha=3.41\text{deg.}$, and $Re=7,5 \times 10^6$ - CUSP

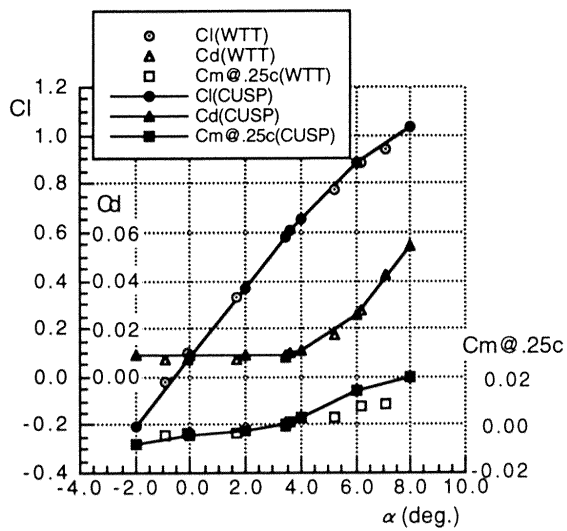


Figure 16:Comparison with experimental data for RC(4)-10 in Cl , Cd , and Cm at $M=0.59$ and $Re=7,5 \times 10^6$

Numerical Investigation of the Unsteady Flow through Turbomachinery Components on Parallel Computers

Karl Engel*, Frank Eulitz

German Aerospace Research Establishment,
Institute for Propulsion Technology, 54117 Cologne, Germany

Abstract

For the numerical investigation of the unsteady flow in turbomachinery components a simulation system has been developed by the authors. In the paper some of the key features of the code will be described and applications to unsteady turbomachinery flow will be presented. As a part of a common research project between the the National Aerospace Laboratory and the German Aerospace Research Establishment this program system has been successfully implemented on NAL's Numerical Wind Tunnel. Concerning to this some performance tests will be also discussed.

1 Introduction

Modern compressor and turbine design trends are towards size and weight reduction. As a result of fewer stages with fewer blades per row and narrowing of the axial gap, the aerodynamic loading of the blades increases. In particular, unsteady effects will gain in magnitude and importance for the design. Also the realization of new propulsion concepts like counter-rotating prop-fan rotors or counter-rotating turbine stages are impossible without a more detailed understanding of the time dependent behaviour of the flow. Classically, experiment, theory and CFD form the basis of turbomachinery flow investigations. In some cases the computational approach is found to be the only valid tool left for the analysis of highly non-linear and unsteady flow in complex geometries. This is particularly true when time dependent flow data of rotating configurations are needed as these can hardly be accessed with instrumentation. The perfect numerical simulation, however, is hampered by the complexity of the unsteady, transonic, three dimensional, viscous flow physics and the limited computational resources regarding CPU power and storage capacity. For the numerical simulation of unsteady flow, the time leads to the fourth dimension in the physical domain of dependence. A natu-

ral architecture for the solution to large scale problems is a parallel computer since, from the theoretical point of view, it can be scaled arbitrarily with the problem size presuming that the code itself is fully scalable. This is especially true for turbomachinery applications: For more passages or more stages to compute, more processors with independent memory have to be added. Based on this, the parallel and interactive flow simulation system T.R.A.C.E. (Turbomachinery Research Aerodynamics Computational Environment) has been developed by the authors [2]. The system which consists of a 2D, a Q3D and a 3D Navier Stokes solver is used to study and analyze unsteady flow phenomena in turbomachinery components. The flow solver along with a data processing unit is parallelized based on domain decomposition and the message passing model. By using the communication libraries PVM and MPI hardware independency can be achieved. Therefore the flow solver runs on heterogeneous workstation clusters and on various parallel hardware platforms. While this hardware platforms are based on scalar processors without exception, the implementation of the system on the Numerical Wind Tunnel [11] at NAL offers the ability to get experience also with vector parallel computers.

2 Flow Solver

The three-dimensional time dependent, Reynolds-averaged Navier-Stokes equations are solved for the compressible gas in conjunction with a turbulence model. The convective fluxes are discretized using Roe's upwind scheme [6] which is combined with van Leer's MUSCL extrapolation [7] to obtain second order accuracy in space. The flow solver makes use of different time integration methods during different phases of the simulation process. To efficiently compute an initial condition for the unsteady simulation, the flow solver is run in the steady-state multistage mode which is accelerated by local time stepping and implicit residual smoothing. For the unsteady calculation the time integration is based also on explicit, fully local algo-

*NAL guest researcher, Aeroengine Division

rithms. Stability is enhanced through either a time accurate two-grid approach or a dual time stepping procedure. The in- and outflow boundaries are treated with non reflecting boundary technique. This method is based on the linear perturbation theory and allows perturbation waves to leave the integration domain. Turbulence is accounted for by using a new two-layer formulation [5] of the Spalart-Allmaras [8] one-equation model. This model is coupled with the transition model of Abu-Ghanam-Shaw [1].

3 Parallelization and execution control structure

Besides the numerical procedures to integrate the flow field a subsystem was designed to allow for the execution within a distributed environment and to control the setup and execution of the entire simulation. Parallelization of the flow solver is based on domain decomposition. The resulting multiblock structure of the code is extended by communication procedures to be executed on a parallel computer. Each processor of this parallel computer integrates one time step on every local block and subsequently triggers exchange of the boundary values or application of the physical boundary conditions respectively. The overall execution of the simulation process is described by a control language. It is used to describe and set all parameters as well as to control the execution and I/O for the entire program. The number of processors is specified on program start-up and is independently of the number of blocks. No recompilation is necessary to run the program on different number of processors. Due to the full dynamic memory allocation in the ANSI-C language even no recompilation is necessary to run the code on different block sizes.

4 Results

In the following section the usefulness of the program system is demonstrated by an unsteady flow calculation. It is the investigation of the clocking effects in a multistage turbine which was recently carried out by the authors and is well documented in some related papers [3],[4]. The basic idea of this research work is to determine the role of unsteadiness on turbine clocking and to increase the turbine performance simply by choosing an optimal clocking position of the downstream stator blade row against the upstream stator blade row.

A stator/rotor/stator (Fig. 1) configuration with equal pitches of a model low pressure turbine was considered. The mesh consists of total 80,000 grid nodes. With y^+ values of 2 to 3 for the attached boundary layer the wall spacing is just

fine enough to ensure resolution of the sublayer. The steady state multistage calculation took approximately 20 CPU minutes on each of the ten nodes of an IBM SP2 parallel computer. Using the time accurate two-grid method for the unsteady calculation, a CFL number of 12 with respect to the smallest cell was obtained. Therefore one period was calculated within 3000 time steps which took 1.1 CPU hour on each of the ten processors used. Figure 1 shows a time sequence for the time-periodic operating point of the model turbine.

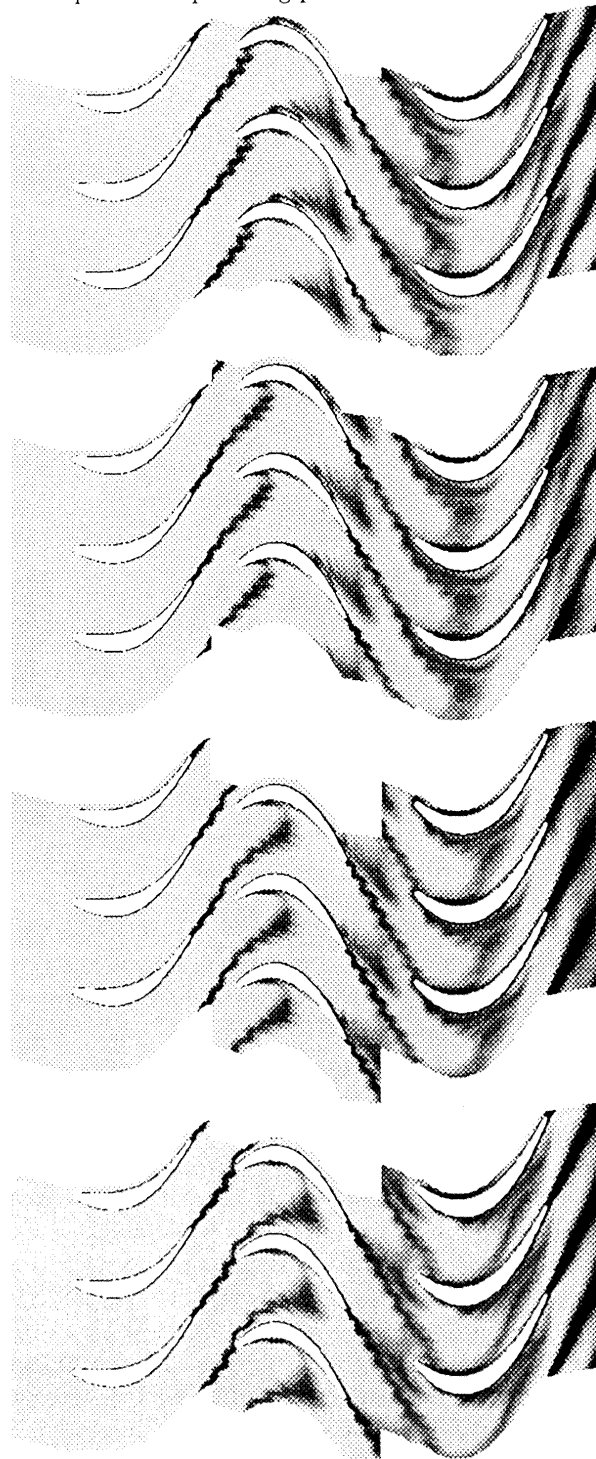


Fig.1 Numerical investigation of the clocking effect in a turbine stage. Shown: Instantaneous entropy contours

5 Implementation on NWT

During a six month stay at NAL the simulation system has been successfully implemented on the Numerical Wind Tunnel. Since the code, which is coded in ANSI-C, was originally designed for Scalar Processors, it has been vectorized using the Fujitsu Vector C language VPP C/VP [9]. Parallel execution on NWT was enhanced by using the Fujitsu adapted PVM library [10]. Different performance tests have been carried out. For the real applications of unsteady turbomachinery flow calculations the speed-up as well as the scalability performance of the code is of interest.

The speedup case is relevant during the steady-state multistage calculation by using as many processors as possible on a fixed computational domain size to achieve the initialization flow field as fast as possible.

The scalability case is of interest for the unsteady calculation since the computational domain has to be enlarged. The reason for this is the necessity of a correct representation of the physical domain of dependence including the periodic boundaries, which are typical for turbomachinery applications. Figure 2 shows the speedup performance of TRACE implemented on NWT using PVM.

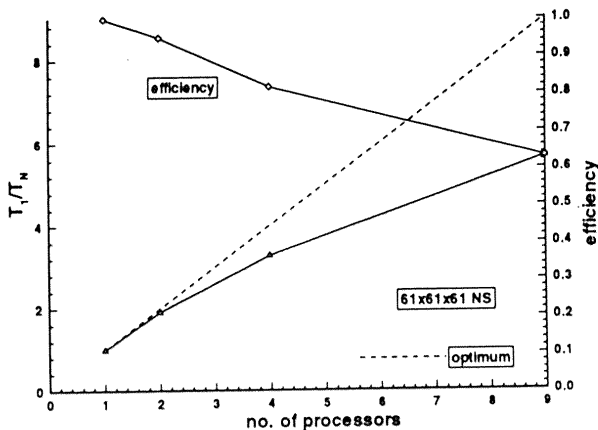


Fig.2 Speedup performance. T_N : calculation time with n processors, T_1 : calculation time used with one processor.

In this case, a laminar Navier-Stokes calculation has been carried out on a block with 61x61x61 grid lines. This block has been subdivided into 2, 4 and 9 equally sized subdomains and mapped onto the same number of processors. When the block size becomes smaller and smaller the relative computational speed decreases. This is a typical effect on vector parallel computers, since the vector pipes can not be filled completely when the loop size decreases.

Figure 3 shows the scalability performance for a fixed problem size. Here, a Euler calculation with a block size of 41x41x41 grid lines and laminar

Navier Stokes calculations using the same block size and a block size of 59x59x59 grid lines have been made. Remarkable here is that only large block sizes of more than 200,000 grid points on each processor guarantees a good scalability performance if the number of processors becomes more than 20. Therefore the shown configuration with TRACE on NWT using PVM is extremely useful for huge applications with a few million grid points.

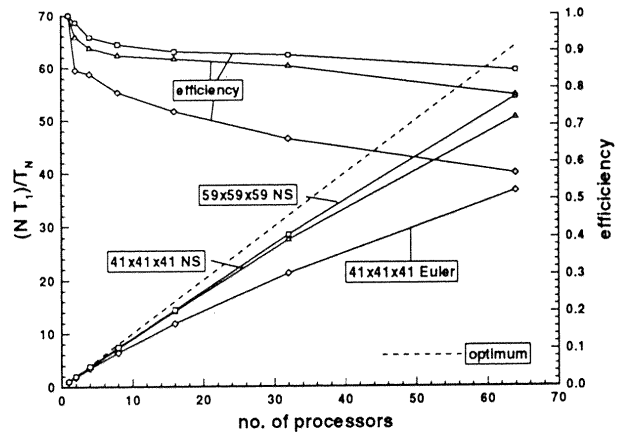


Fig.3 Scalability performance. N : number of processors.

Beside this different test calculations another large size application on NWT has been run: The investigation of the unsteady flow field of the CRISP (Counter Rotating Inner Shrouded Propfan Rotor) rotor. Figure 4 shows a result of this calculations on a coarse test grid, which consists of approximately 4.2 Million grid points. It is subdivided into 59 blocks.

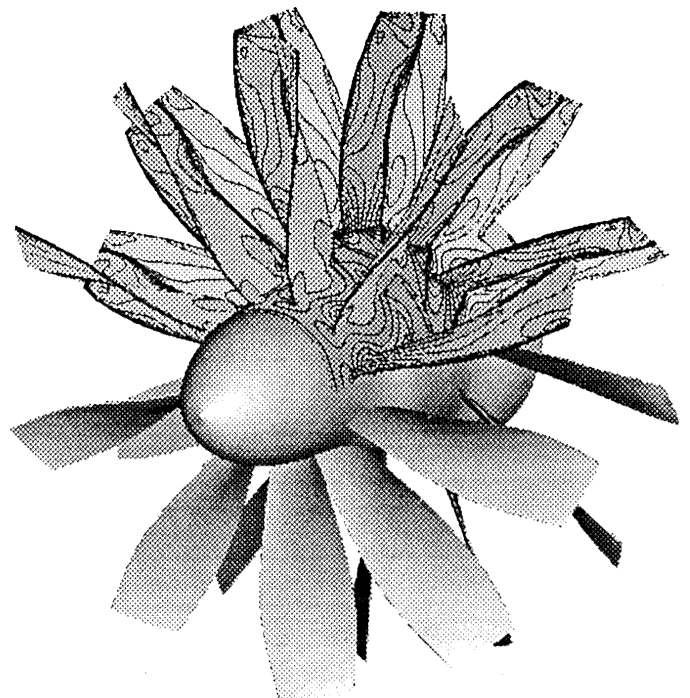


Fig.4 Numerical investigation of the unsteady flow field of CRISP Shown: Iso pressure surface

The calculation is carried out on NWT using 20-32 processors. Here, the computational domain consists of 5 passages of the front and 6 passages of the aft rotor.

6 Acknowledgements

Parts of the presented work have been carried out during a six month stay at the National Aerospace Laboratory in Tokyo on behalf of a common research project between DLR and NAL. The authors would like to thank members of the aeroengine division, the computational sciences division as well as Fujitsu Company for their kind support.

References

- [1] Abu-Ghanam, Shaw, R., "Natural Transition of Boundary Layers - The Effects of Turbulence Pressure Gradients and Flow History", J. of Mech. Eng. 1980.
- [2] Engel, K., Eulitz F., Pokorny, P., Faden, M., "3D Navier-Stokes Solver for the Simulation of the Unsteady Turbomachinery Flow on a Massively Parallel Hardware Architecture", Notes on Numerical Fluid Dynamics, Vol. 52, Vieweg, 1996
- [3] Engel, K., Eulitz, F., "Numerical Investigation of the Clocking Effects in a Multistage Turbine" Proceedings of the ASME 95 symposium: Computational Fluid Dynamics in Aeropropulsion, San Francisco, USA.
- [4] Eulitz, F., Engel, K., Gebing, H., "Numerical Investigation of the Clocking Effects in a Multistage Turbine", ASME-96-GT-26, 1996.
- [5] Eulitz, F., Engel, K., Gebing, H., "Application of a One-Equation Eddy-Viscosity Model to Unsteady Turbomachinery Flow", Proceedings of the 3rd ISETMM conference, Elsevier, Amsterdam 1996.
- [6] Roe, P.L. "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vector and Difference Schemes" J.Comp.Phys.,43, (1981), 357
- [7] van Leer, B. "Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V, A Second Order Sequel to Godunov's Method", J.Comp.Phys.,32, (1979),101.
- [8] Spalart P.R., Allmaras, S. R. "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows", AIAA-92-0439.
- [9] UXP/M VPP C/VP Users Guide (V10) Fujitsu Limited 1995
- [10] UXP/V PVM Users Guide (V10) Fujitsu Limited 1995
- [11] Numerical Wind Tunnel NAL research progress, 1995

極超音速飛行実験(HYFLEX)の飛行データについて

渡辺 重哉*¹、白水 正男*¹、山本 昌孝*²

ON FLIGHT DATA OF HYFLEX

by

Shigeya Watanabe *¹, Masao Shirouzu *¹, and Masataka Yamamoto *²

ABSTRACT

HYFLEX - Hypersonic Flight Experiment which was planned for the development of the Japanese unmanned orbiting plane, HOPE, was successfully conducted on Feb. 12, 1996. The vehicle used in the experiment has a 4.4m-long slender body configuration whose gross weight is 1073kg. Various hypersonic lifting flight data on aerodynamics, thermal protection system, and guidance & control were acquired during the flight. In this paper, the following flight data in respect to hypersonic aerodynamics are briefly reviewed: aerodynamic characteristics, aerodynamic heating, pressure measurements for ADS (Air Data Sensor) and RCS gas-jet interaction experiment, and electron density around the vehicle. The data are compared with the preflight predictions based on wind tunnel test results and CFD calculations in order to investigate validity of the prediction methods.

1. はじめに

極超音速飛行実験 (HYFLEX ; Hypersonic Flight Experiment) は、HOPE 開発に必要となる重要技術の開発を目的として実施される一連の小型実験機の一つとして計画され、平成 8 年 2 月 12 日に実施された¹⁾。HYFLEX の目的は、極超音速揚力機の設計、製作、飛行経験を蓄積するとともに、地上の試験設備では模擬が困難な実飛行環境における極超音速飛行に関する技術データを取得することである。そのため、機体には温度センサ、圧力センサ等の各種センサが搭載され、テレメトリにより飛行データが地上に送信される。本報告では、HYFLEX において取得された空力関連の飛行データの概要とデータ解析の現状について述べる。

2. 実験機および飛行の概要

HYFLEX 実験機は、図 1 に示すように細長いリフティングボディ形状をしており、全長 4.4m、全備重量 1073kg である。機体の姿勢制御用デバイスは、エレボンと呼ばれるエレベータとエルロンの両方の機能を有する左右一対の空力舵面と胴体後端部に配置された姿勢制御用スラスタ (RCS) 6 基からなる。熱防護材

としては、最も空力加熱の厳しいノーズ部とエレボンには C/C 材を、次に加熱が厳しい胴体下面と安定翼にはセラミックタイルを、比較的加熱が小さい胴体上面と後端面には可撓断熱材を使用している。

HYFLEX 実験機は、NASDA 種子島宇宙センタから J-I ロケット試験機 1 号機により打ち上げられ、238 秒後に高度 107km、速度 3.90km/s で分離された後、揚力を用いて誘導制御を行いながら滑空降下し、分離後 837 秒後に小笠原北東海上に着水した。分離後の飛行経路は計画経路と非常によく一致しており、また着水点は目標着水点から 5km 以内であり、誘導制御則及び搭載機器がきわめて正常に機能したと言える。また、滑空降下中に取得された飛行データは、ほぼすべてのセンサについて問題なく取得された。

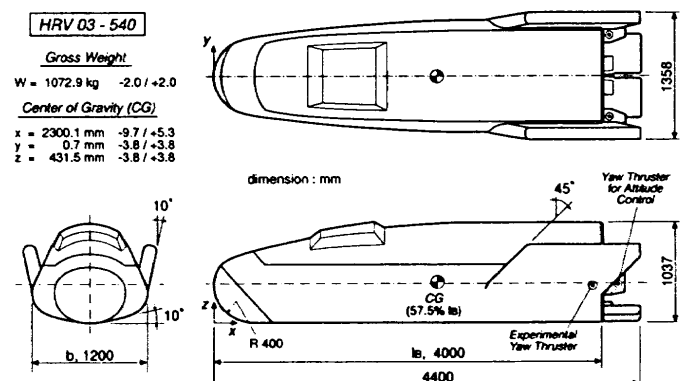


図 1 HYFLEX 実験機 機体形状

*1 航空宇宙技術研究所 National Aerospace Laboratory

*2 宇宙開発事業団 National Space Development Agency of Japan

図2²⁾に実験機分離後の対地速度、マッハ数、高度の時間履歴を、図3に迎角、横滑角とマッハ数の関係を示す。

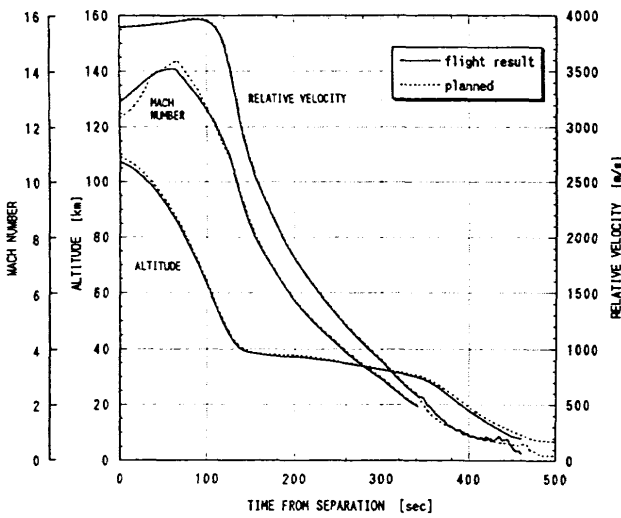


図2 対地速度、マッハ数、高度の時間履歴

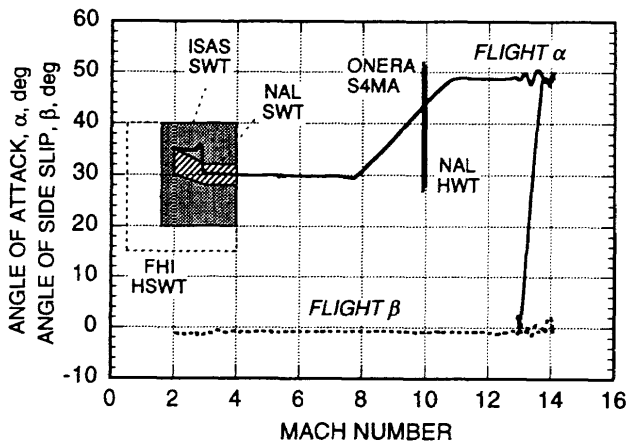


図3 迎角、横滑角 vs マッハ数

3. 飛行データ

3.1 空力特性データ

垂直力、軸力、横力の3種類の空力係数は、機上の慣性センサユニットの加速度計出力から算出された。その際無次元化のために使用する飛行経路上の動圧は、NOAA(米国海洋大気局)の極軌道気象観測衛星による飛行当日の飛行領域における大気温度計測データに基づき推定された。

垂直力係数 C_N 、軸力係数 C_A の飛行結果と風洞試験結果に基づく飛行前の予測値との比較をそれぞれ図4.5に示す。 C_N は飛行の全域において予測値と大変よく一致した結果となっている。それに対し、 C_A は

マッハ数12以上と4以下の領域において飛行試験結果の方が予測値よりも大きくなっている。高マッハ数領域での不一致の原因はスペースシャトルでも経験された粘性干渉効果によるものと推定される。スペースシャトルに対して提案された粘性干渉効果の C_A への影響の経験式³⁾により、両者の差は定性的によく説明できる。また、超音速領域の差は、風洞試験で得られた軸力係数にベース抵抗の補正を行い、飛行状態での軸力係数を推定する際の手法が適切でなかったことによる⁴⁾。

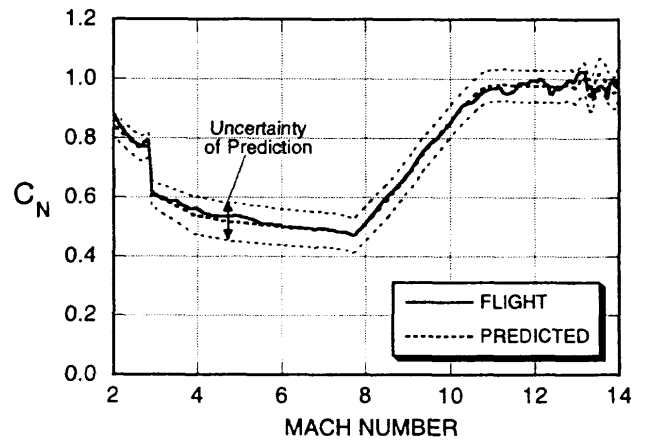


図4 垂直力係数 vs マッハ数

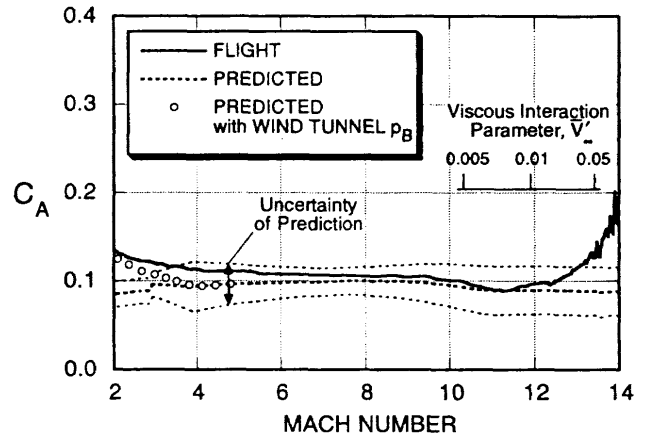


図5 軸力係数 vs マッハ数

縦トリム特性評価として、トリムのためのエレボン(エレベータ)舵角の飛行試験結果と予測値を比較した結果を図6に示す。マッハ数10以上と3以下の領域で実飛行時の方がエレボンが上げ舵側(負側)となっているが、その原因は現在のところ不明である。

図7に、エレボン・ヒンジモーメントの比較を示す。全飛行域において飛行前の風洞試験結果と予測値はよく一致している。

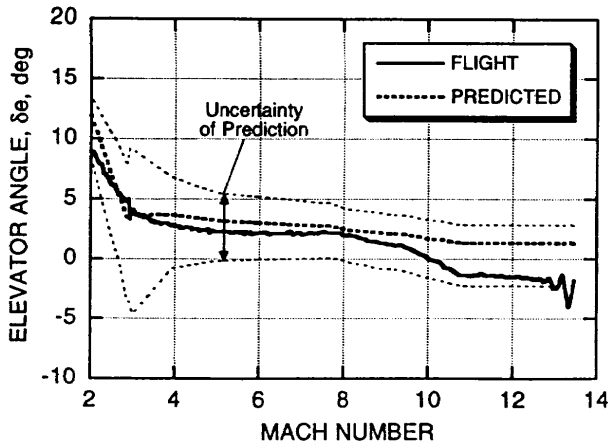


図6 エレボントリム舵角 vs マッハ数

に伴い再び層流に戻ったものと推定される。

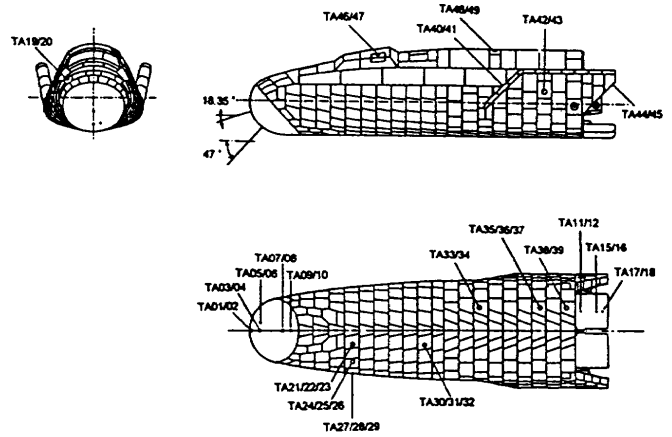


図8 空力加熱計測用温度センサ位置

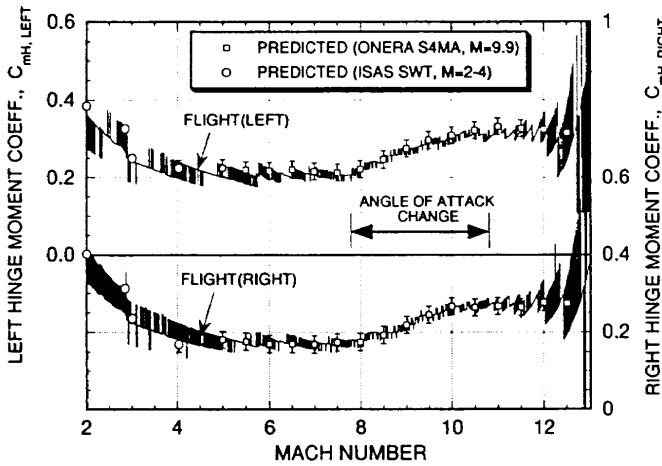


図7 エレボンヒンジモーメント係数 vs マッハ数

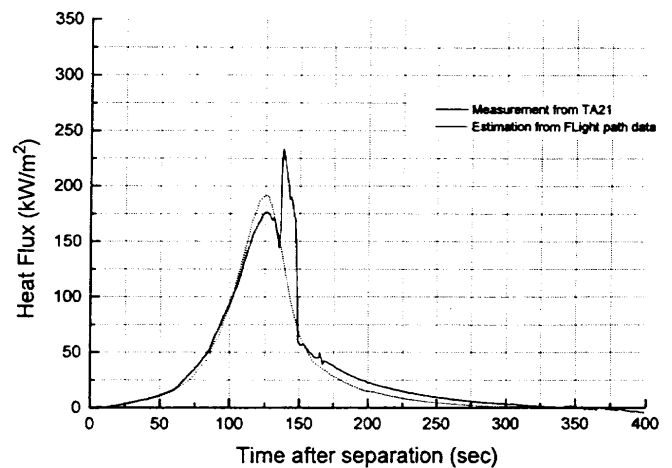


図9 TA21における空力加熱率の時間履歴

3.2 空力加熱計測データ⁵⁾

機体表面の空力加熱率を測定するために、49個の温度センサが実験機に搭載された(図8)。地上での加熱率較正試験により検証されたセンサ部の熱モデルを用いて、温度センサ出力より空力加熱率が推算された。

胴体下面のセラミックタイル部の温度センサ(TA21)出力より、空力加熱率を推算した結果を図9に示す。また、TA21における無次元化されたスタントン数と迎角の関係を図10に示す。分離後136secまでと150sec以降は、飛行結果はCFD解析結果および風洞試験結果とおよそ一致しているが、136~150secの区間は飛行結果の方が2倍程度加熱率が高くなっている。これはこの区間だけ境界層遷移が発生したことによると考えられる。HYFLEXの飛行では分離後約135secまでは一様流レイノルズ数が単調に増加するが、その後はレイノルズ数の変化は非常に小さい。そのため、136sec時点で一度遷移した境界層が迎角の減少

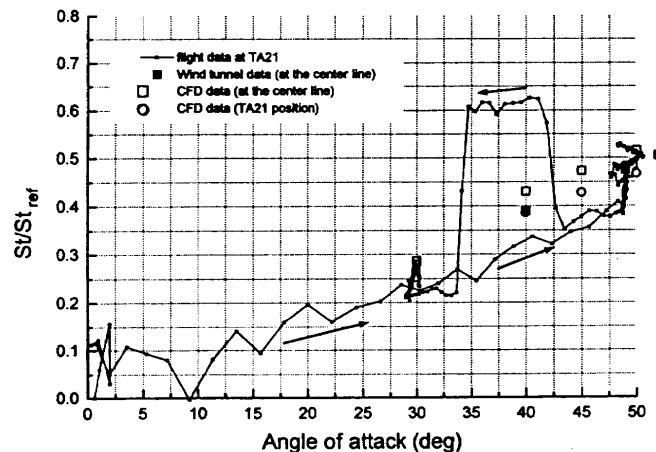


図10 TA21におけるスタントン数と迎角の関係

3.3 ADS (Air Data Sensor) 用圧力計測データ⁶⁾

飛行データの処理において、基準量として一様流動圧および対気姿勢（迎角、横滑角）が必要となる。HYFLEX においては、それらの量を機上の圧力計測により求める ADS の実験を行った。ノーズキャップに十字上にあけられた9点の圧力データから、ノーズ部の圧力が Modified Newtonian Theory に従うと仮定して動圧、迎角、横滑角を逆算した。

飛行中の迎角と動圧の ADS による推定値と機上の慣性航法ユニット (IMU) による推定値との比較をそれぞれ図 11,12 に示す。ADS と IMU による迎角の差は、圧力センサ精度が問題となる高高度領域（100sec 以前）を除き、1deg 以下の精度で一致している。動

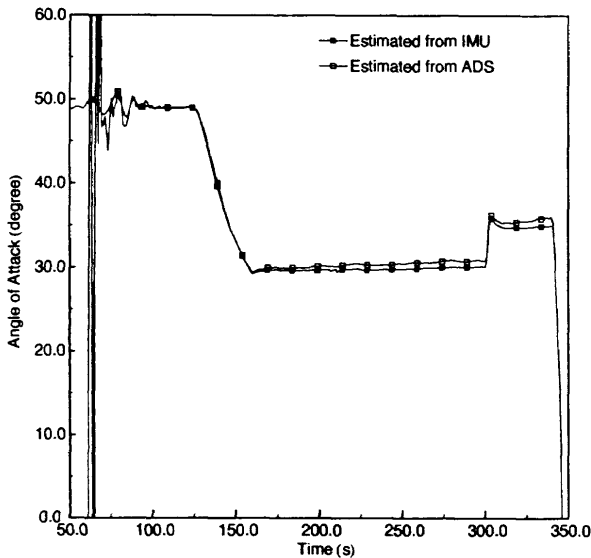


図 11 ADS と IMU により推定した迎角の比較

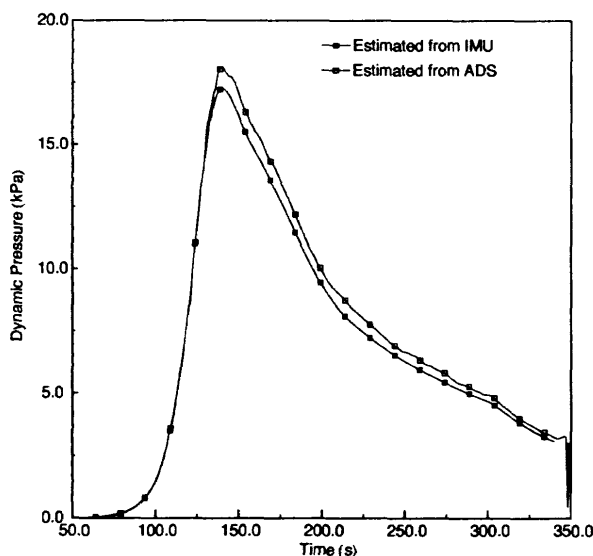


図 12 ADS と IMU により推定した動圧の比較

圧については、両者の差は 5% 程度である。迎角、動圧の真の値は不明であるが、両者の一致の程度から、HYFLEX で用いたタイプの ADS がマッハ数 2 以上の速度域で実用となる可能性が確認された。

3.4 RCS 空力干渉計測用圧力計測データ⁷⁾

極超音速揚力飛行体における重要な技術課題である姿勢制御用ガスジェット (RCS) と外部流との干渉問題を調べるため、安定翼側面に配置した実験計測用スラスト (図 1 参照) の周りの表面圧力を計測した。図 13 に圧力計測孔の位置を示す。

図 14 に、マッハ数 12.6 における RCS 干渉による表面圧力係数の変化量を示す。また、圧力変化量の等高線図を図 15 に示す。干渉の影響によりスラストの前方 (PS13) および側後方 (PS17,18,19,21) の圧力が上昇し、スラスト後方 (PS14) の圧力が減少しているのがわかる。この流れ場は、2次元平板に垂直に噴射したジェットの周りの流れ場と定性的に類似したものである。また、ジェット干渉の関連パラメータの一つである運動量比を実飛行条件と合わせた極超音速風洞試験結果は、飛行結果とよく一致していることがわかる。ただし、さらにレイノルズ数の高い場合のジェット干渉の影響は、風洞試験結果により正しく模擬されておらず、今後境界層の状態（層流/乱流）も考慮した検討が必要である。

3.5 機体周り電子密度計測データ⁸⁾

機体周りの電子密度を計測し、電離を含めた CFD 解析コードの精度検証を行うことを目的として、リフレクタを搭載した。リフレクタとは、機上から電波を放射し、周りのプラズマ流により反射された電波の強度を測定することにより、機体周りの電子密度を計測する装置である。ただし、電子密度は空間的に一様ではないため、反射率から直接電子密度

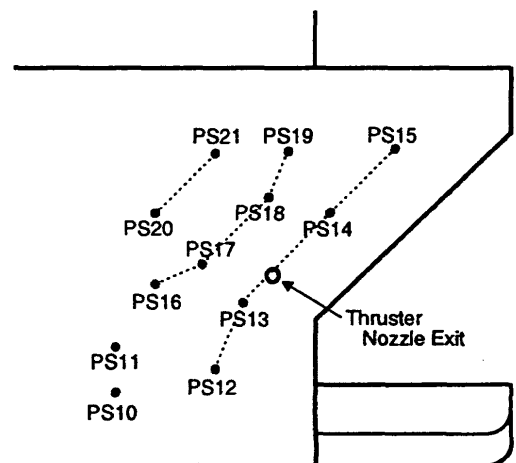


図 13 RCS 空力干渉計測用表面圧力計測孔位置

を知ることはできない。そこで、HYFLEXでは、実在気体CFD解析により得られた電子密度分布を用いて、マクスウェル方程式とプラズマ粒子の運動方程式を数値解析により解いて電波反射強度を推定するという方法を取った。

リフレクタの配置を図16に示す。周波数の異なる2基のリフレクタ (902.85MHz, 1676.5MHz) が胴体前方下面に搭載されている。図17に電波反射強度の時間履歴を示す。CFD解析結果に基づく2次元の電波反射強度解析に対して3次元効果の簡易的な補正を行った結果は、おおむね飛行結果と一致している。両者の差は電子密度に換算して最大2倍程度である。今後電波反射解析の3次元コードの開発を進め、更に精度よい検証を行う予定である。

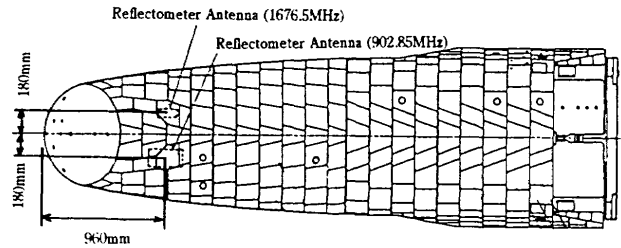


図16 リフレクタの搭載位置

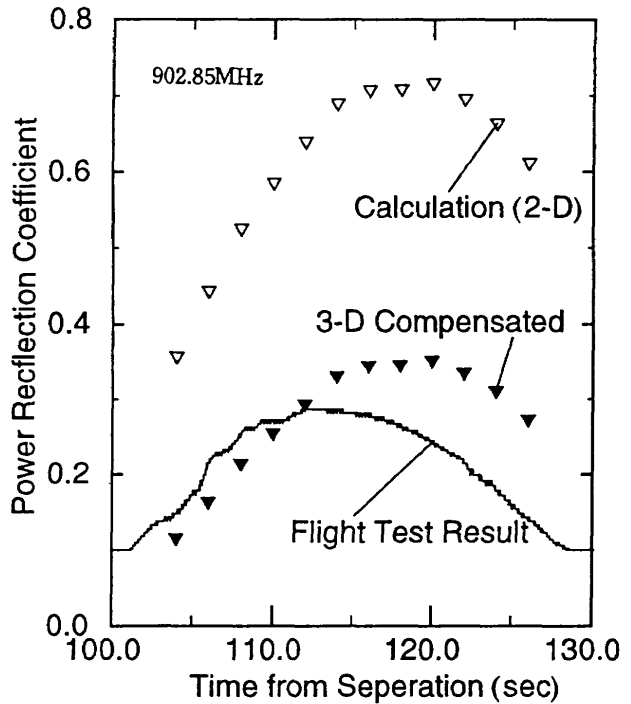


図17 リフレクタにより計測した電波反射強度の時間履歴

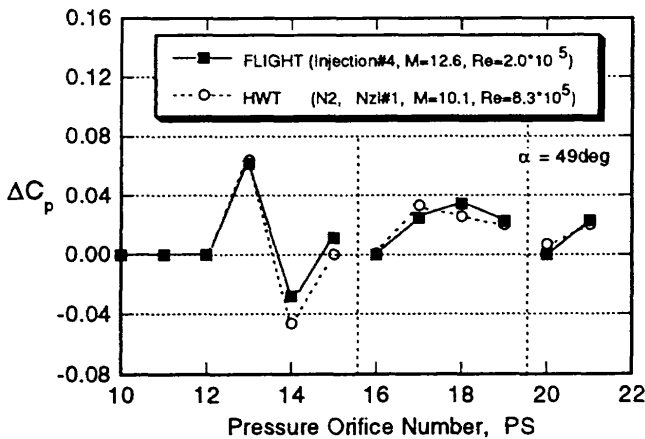


図14 RCS干渉による表面圧力係数の変化 (M=12.6)

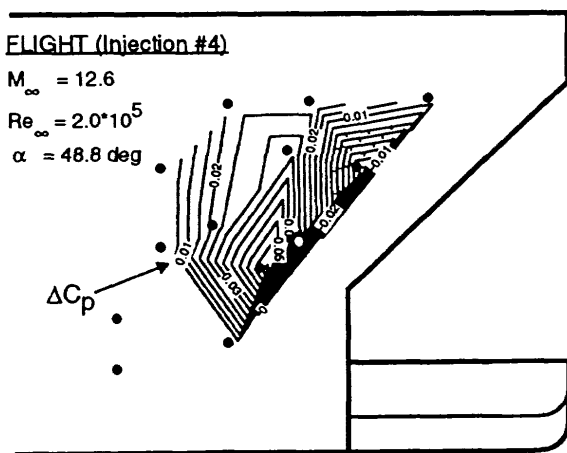


図15 RCS干渉による表面圧力係数変化量の等高線図 (M=12.6)

4. あとがき

HYFLEXで取得した空力関連の計測データとその現在(1996年7月)における解析状況について述べた。多くの貴重な飛行データが取得されており、現状はそれらを一通り眺め、予測値との簡単な比較を終えたという段階である。今後、飛行結果と予測値の差異等の解釈を十分に行ない、その成果を今後開発されるHOPE-XやHOPEの設計に反映して行きたいと考えている。

なお、今回紹介した内容は、NAL/NASDAにより構成されたHOPE研究共同チームHYFLEXサブグループのメンバーによるものである。

文 献

- 1) Shirouzu, M., Watanabe, S., and Suzuki, H. : A Quick Report of the Hypersonic Flight Experiment, HYFLEX, 20th ISTS Paper 96-f-09, May 1996.
- 2) 滝沢実, 鈴木広一, 森戸俊樹 : HYFLEX の航法系および実飛行経路について, HYFLEX/HOPE シンポジウム講演前刷集, 1996年7月.
- 3) Griffith, B.J., Maus, J.R., and Majors, B.M. : Addressing the Hypersonic Simulation Problem, J. Spacecraft, Vol. 24, No. 4, July-August 1987.
- 4) 渡辺重哉, 石本真二 : HYFLEX の空力特性評価, HYFLEX/HOPE シンポジウム講演前刷集, 1996年7月.
- 5) 藤井啓介 : HYFLEX 飛行における空力加熱計測について, HYFLEX/HOPE シンポジウム講演前刷集, 1996年7月.
- 6) 高木亮治, 滝沢実 : HYFLEX における ADS 計測, HYFLEX/HOPE シンポジウム講演前刷集, 1996年7月.
- 7) 渡辺重哉, 高木亮治 : HYFLEX における RCS ガスジェット干渉実験, HYFLEX/HOPE シンポジウム講演前刷集, 1996年7月.
- 8) 伊藤健, 高木亮治, 寺岡謙 : リフレクトメータによる機体まわりのプラズマ電子密度測定, HYFLEX/HOPE シンポジウム講演前刷集, 1996年7月.

極超音速飛行実験 (HYFLEX) における CFD 解析

高木亮治*、伊藤 健*

CFD Analysis for Hypersonic Flight Experiment (HYFLEX)

by

Ryoji Takaki and Takeshi Ito

National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

In HYFLEX, reflectmeter measurements were performed to research the blackout phenomena under hypersonic or re-entry flight. Reflection intensity and phase of radio wave were measured by reflectmeter. Flight data analysis is composed of two steps. First is to calculate a distribution of electron number density around the vehicle by using a CFD code including the real gas effects. Second is to make the radio wave reflection analysis with CFD results. By using this radio wave reflection analysis, we can get reflection intensity and phase of radio wave and compare these results with the flight data.

In this paper, we show the outline of the reflectmeter measurement in HYFLEX. Also the CFD code, including the real gas effects is described. Calculation results, especially free electron density distributions along the flight trajectory are presented. In some points on the flight trajectory, we calculated reflection intensity and compared with the flight data. Some results of the calculations which change thermal model; 2-temperature model and 1-temperature model or surface condition; fully catalytic surface and non catalytic surface, are also presented.

1 はじめに

1996年2月12日、宇宙開発事業団種子島宇宙センター大崎射点から打ち上げられたJ-1ロケット試験機1号機により極超音速飛行実験(HYFLEX)が行なわれた。実験機は高度107kmでロケットの2段目から分離され、そのまま滑空し各種計測を行ないながら小笠原諸島の父島北東海域に無事着水した。不幸にも機体浮遊中にライザが破断し機体は水没したが殆どのデータはテレメトリを通じて取得できた。HYFLEXにおいては実験計測系として以下の諸項目が計測された。

- 機体表面圧力計測
- ヒンジモーメント (エレボン) 計測
- 機体構造歪計測
- 電波反射強度計測
- 空力加熱推算用温度計測
- 熱・構造系評価用温度計測
- ADS 用圧力計測
- RCS 干渉データ取得用圧力計測

これら取得されたデータの解析を行う際に CFD による解析が必要なものがある。そのうちの1つが電波反射強度計測である。

HYFLEXではリフレクトメータを用いてブラックアウトと呼ばれる機体まわりに生じる気体の電離現象を測定した[1]。機体上に搭載した2つのホーン型アンテナより周波数900MHz、1.6GHzの電波をそれぞれ放射し、それら放射した電波が機体まわりのプラズマ層で反射される反射波の強さ(反射強度)を測定した。更に周波数900MHzの電波に関しては反射波の位相も測定した。

これら測定された反射強度(電波反射率)、位相の解析を行うためには2段階の手順を踏む。まず実在気体効果を含むCFD解析により機体まわりのプラズマ電子密度を求める。次に計算で求められた密度分布を持った自由電子すなわちプラズマ粒子の電磁場中での運動を、電磁場を記述するマクスウェル方程式およびプラズマ粒子の運動方程式を支配方程式とし、これらを数値的に解くことにより電波反射率を求める。こうして求めた電波反射率を実験データと比較する事で、実在気体CFDおよび電磁場におけるプラズマ粒子の運動シミュレーションを統合したブラックアウト予測手法の検証を行うことができる。本報告では電波反射強度計測のデータ解析、つまりブラックアウトの再現シミュレーションについてその手法及び検証結果について報告する。

2 電波反射強度計測

HYFLEXでは飛行時に機体周りで生じる気体の電離現象を機上に搭載したリフレクトメータを用いて測定した。機体上から放射された電波は、アンテナ前方に、放射した電波の周波数に対応する密度以上のプラズマ電子密度層が存在すれば反射されることになる。その反射波の反射強度及び位相を測定することでプラズマ電子密度およびプラズマ電子密度層の厚さがわかる。飛行前解析による電子密度予測及び機体搭載時の寸法、搭載位置等の制約により周波数 $902.85MHz$ 、 $1.6765GHz$ の電波を使用して反射強度を測定することになった[2]。また周波数 $902.85MHz$ の電波に関しては反射波の位相も測定した。飛行前予測では $2GHz \sim 4GHz$ 程度の周波数が必要と考えられたが主にアンテナの大きさの制限により上記の様な理想とする周波数よりは高めの周波数となった。このため相対的に電子密度の高い位置にアンテナを搭載することが必要となったが、電子密度の高い淀み点近傍は高温に曝される等環境条件が厳しいためそれを避けてC/Cノーズキャップのすぐ後方、機首先端から $960mm$ 、機体中心面から横方向に $180mm$ の位置にアンテナの中心が来るように搭載した。図1、

2にアンテナの搭載位置を示す。また図3は計測系の回路図である。

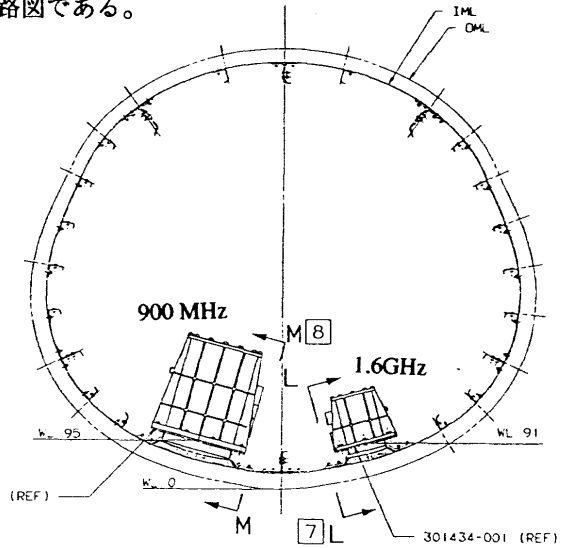


図1: リフレクトメータ用アンテナの搭載位置

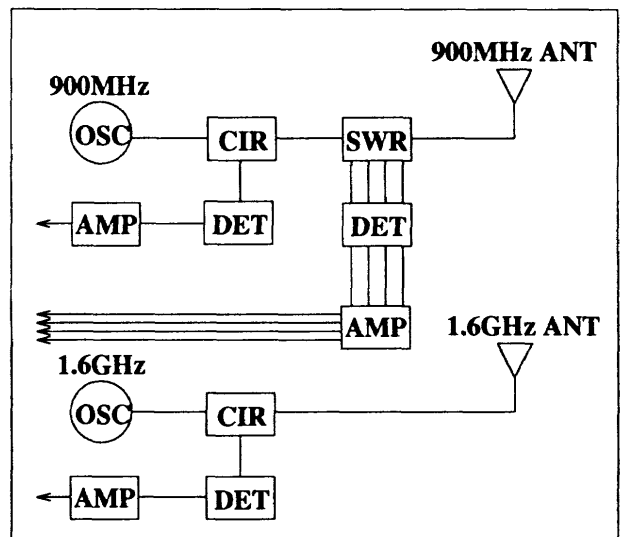


図3: 計測系の回路図

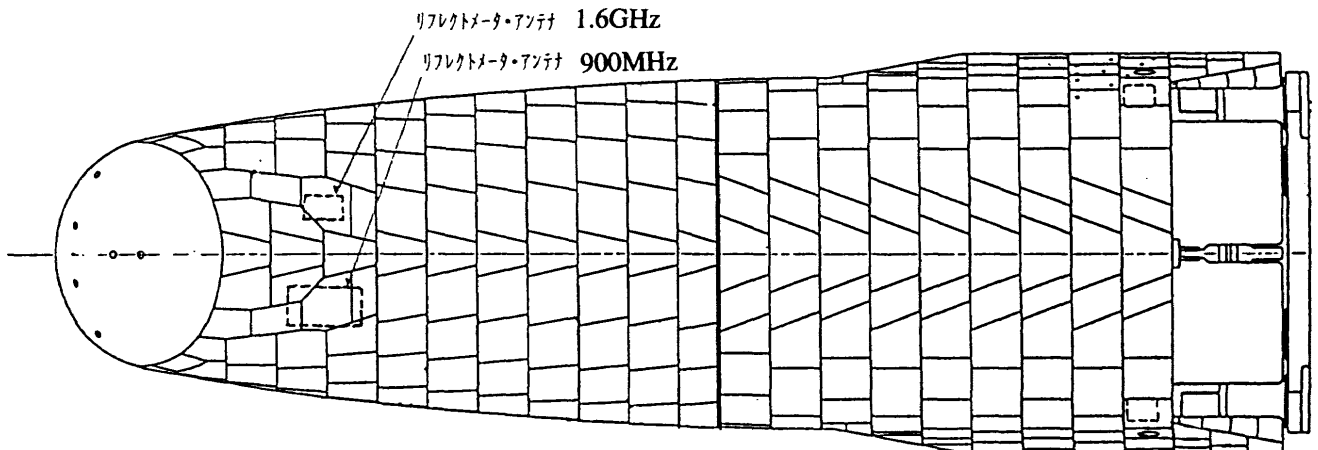


図2: リフレクトメータ用アンテナの搭載位置

3 数値解析手法

3.1 実在気体効果を含む CFD 解析

HYFLEX 飛行時におけるブラックアウト現象を解析する第1段階目として、実在気体効果を考慮した数値シミュレーションを行ない機体まわりのプラズマ電子密度を求めた。その際に以下の仮定・物理モデルを用いて CFD 解析を行なった。

HYFLEX の飛行時には取得されたテレメトリデータより、瞬間的には最大1度、平均的には約0.3度程度の横滑り角を伴って飛行していたことが確認されたが、角度の絶対値が小さく流れ場に与える影響は小さいと考えられるので横滑り角を $\beta = 0$ とみなし、機体対称面に対して対称な流れ場を考え今回のシミュレーションでは機体片舷だけの解析を行なった。

また実在気体効果としては

- 7化学種による有限速度の化学反応モデル [3]
- 振動・電子励起モードを考慮した Park の2温度モデル [4, 5]

を使用した。

これらより支配方程式は3次元完全 Navier-Stokes 方程式に、各化学種の質量保存の式、振動エネルギー保存の式を加えたものになる [6]。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{F}_{Vj}}{\partial x_j} = \mathbf{S} \quad (1)$$

ここで

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ E \\ \rho \gamma_s \\ e_V \end{pmatrix}, \mathbf{F}_j = \begin{pmatrix} \rho u_j \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ (E + p) u_j \\ \rho \gamma_s u_j \\ e_V u_j \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{w}_s \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{Vj} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{ij} \\ \tau_{ij} u_i - \rho \sum_s h_{s,D_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} - \eta \frac{\partial T}{\partial x_j} - (\eta_v + \eta_e) \frac{\partial T_V}{\partial x_j} \\ -\rho D_s \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \\ -\rho \sum_s h_{V,s} D_s \frac{\partial y_s}{\partial x_j} - (\eta_v + \eta_e) \frac{\partial T_V}{\partial x_j} \end{pmatrix},$$

$$E = e + \frac{1}{2} \rho u_j^2,$$

$$e = \sum_s \rho \gamma_s (\epsilon_{t,r,s} + \epsilon_{v,s} + \epsilon_{e,s})$$

$$e_V = \sum_s \rho \gamma_s (\epsilon_{v,s} + \epsilon_{e,s}) + \rho \gamma_e \epsilon_{t,r,e},$$

$$p = \sum_{s \neq e} \rho \gamma_s \bar{R} T + \rho \gamma_e \bar{R} T_V,$$

$$\tau_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right),$$

$$y_s = \frac{\rho \gamma_s}{\sum_r \rho \gamma_r},$$

$$\beta = -p_e \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \sum_{s=mol} \rho_s \frac{(\epsilon_{v,s}^* - \epsilon_{v,s})}{< \tau_s >} + 2\rho_e \frac{3}{2} \bar{R} (T - T_V) \sum_s \frac{V_{e,s}}{M_s} + \sum_{s=mol} \dot{w}_s \hat{D}_s.$$

記号の説明等に関しては [6] を参照のこと。

これらの支配方程式の離散化を以下の手法で行なった [7, 6]。まず有限体積法を用いてメトリックの計算を行なった。対流項については Osher-Chakravarthy による高精度 TVD スキームを用いて離散化し、粘性項に関しては一般的な2次精度中心差分を用いて離散化を行なった。

時間積分には LU-SGS 法 [8] を用い局所時間刻法を併用して定常状態を得るまで時間積分を行なった。なお、右辺のソース項の積分に関しては Point Implicit 法を用いて時間積分を行なっている。

NWT-Fortran を用いてデータ、手続き分割型の並列化を行った。その際3次元のそれぞれの方向を分割して PE を割り当てる、PE の多次元配列 (3次元分割) を利用した。3次元以上の多次元分割を利用すると現在の NWT のシステム上、計算速度、並列効果といった観点からはあまり良い結果は得られないが、大規模な計算を行う際にはこの様な並列化が必要となる。図4に3次元分割の概念図を示す。

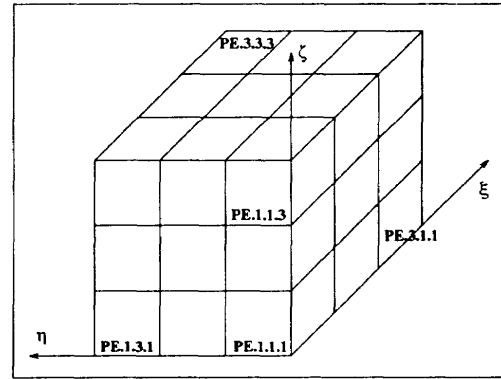


図4: 3次元分割の概念図

次に NWT-FORTRAN を用いた PE の3次元分割による並列化の記述例を以下に示す。まず初めに PE の3次元分割を processor 文で宣言し、それぞれの方向での分割を index partition 文で定義する。次に各配列を分割し、それぞれ global、local 宣言を行なう。最後にプログラム中の do ループ手続きを spread do 文を用いて分割する。また左辺の implicit operator 部に LU-SGS 法を用いているためこの部分に関しては収束性を犠牲にして、領域分割を行ないその中だけで反転を行なっている。この用に左辺の implicit operator の領域分割を併用することでデータ分割方向の変更を行なう必要がないため spread move 文を用いた大規模なデータ転送は特殊な境界条件を除けば必要ない。

```

!xocl processor pe(3,3,3)
      dimension QG(mx,my,mz),QL(mx,my,mz)
!xocl index partition ipxg=(proc=pe.1,index=1,mx)
!xocl index partition ipyg=(proc=pe.2,index=1,my)
!xocl index partition ipzg=(proc=pe.3,index=1,mz)
!xocl index partition ipxl=(proc=pe.1, &
!xocl      index=1,mx,overlap=(2,2))
!xocl index partition ipyl=(proc=pe.2, &
!xocl      index=1,my,overlap=(2,2))
!xocl index partition ipzl=(proc=pe.3, &
!xocl      index=1,mz,overlap=(2,2))
!xocl global QG(/ipxg,/ipyg,/ipzg)
!xocl local QL(/ipxl,/ipyl,/ipzl)
      equivalence (QG,QL)
      :
      :
!xocl parallel region
      :
!xocl spread do /ipzg
      do 100 k=1,kmax
!xocl spread do /ipyg
      do 120 j=1,jmax
!xocl spread do /ipxg
      do 140 i=1,imax
          QL(i,j,k) = QL(i,j,k)+...
      140 continue
!xocl end spread
      120 continue
!xocl end spread
      100 continue
!xocl end spread
      :
!xocl spread move /ipzg,/ipyg,/ipxg
      do 200 k=1,kmax
      do 200 j=1,jmax
      do 200 i=1,imax
          QL(i,j,k) = QG(imax-i,jmax-j,kmax-k)
      200 continue
!xocl end spread (id1)
!xocl movewait (id1)
      :
!xocl overlapfix (QL) (id2)
!xocl movewait (id2)
      :

```

3.2 電波反射の数値解析

HYFLEX 飛行前予測ではプラズマ層 (自由電子の層) の厚さがリフレクタの電波の波長 (10cm~30cm) に比較して薄い (1.0cm~1.5cm) ためプラズマ密度 (自由電子密度) がカットオフ周波数以上になっても電波がプラズマ層中に染み込む現象により全反射しないことが想定される。そのため電波反射解析 [2] を行ない、電波反射率とプラズマ密度の関係を求めるため、プラズマ粒子の電磁場での運動を解析した。支配方程式はマクスウェル方程式とプラズマ粒子の運動方程式である。また HYFLEX の飛行データ解析に先立ちデータ解析法検証実験 [9] 及びその実験データによる解析手法の検証を行なった [2]。

4 計算結果

今回の計算で使用した格子の格子点数は $81 \times 61 \times 65$ の計 32 万点である。電子密度が濃くなるのは淀み点近傍に限られること及び、リフレクタのアンテナ付近の流れ場に後胴が与える影響は小さいと考えられるため計算格子は HYFLEX の前胴部だけとした。図 5 に計算に用いた格子を示す。HYFLEX 表面での最小格子幅は鉛直方向に 1.0(mm) となっている。

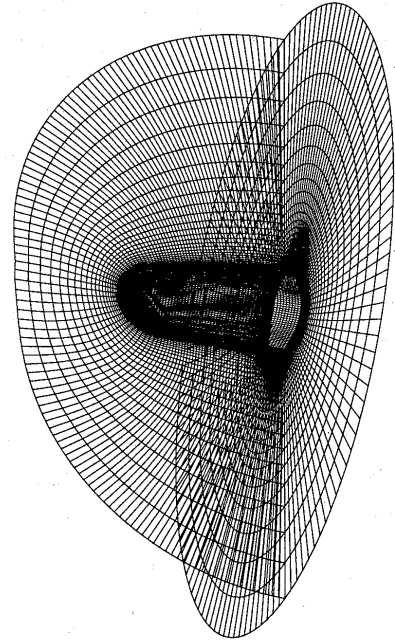


図 5: 計算格子 (HYFLEX 前胴周り)

また計算は航技研の NWT 上で 18 台 ($2 \times 2 \times 3$) の PE を用いて行った。

計算は飛行軌道に沿って HYFLEX 分離後 104 秒後から 126 秒後まで 2 秒間隔で行なった。機体表面の条件としては等温壁、非触媒性を仮定している。

図 6 に電子密度分布の時間履歴を示す。この図では HYFLEX に搭載されたりフレクタのアンテナ中心位置 (機体先端より 945(mm)) における電子密度分布である。

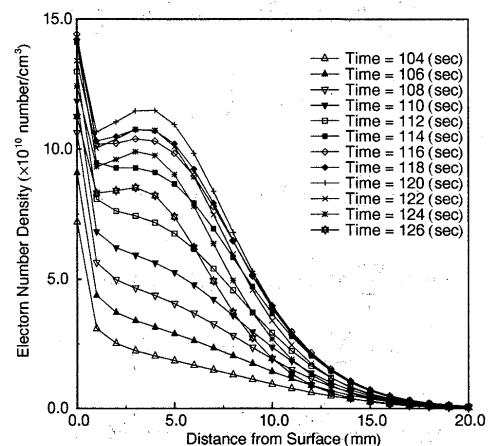


図 6: 電子密度分布履歴

図6で電子密度分布が壁に置いて1格子で急激に変化(増加)しているのが観測できる。この原因を解析するために他の位置における電子密度分布を調べた。図7に分離後120秒後におけるアンテナ中心位置(機体先端より945(mm))と淀み点近傍(機体先端より146(mm))における電子密度分布を示す。

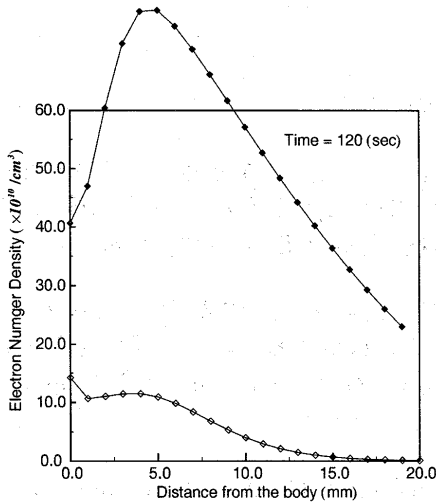


図7：電子密度分布(分離後120秒後)

これによると淀み点近傍の電子密度分布では壁付近における電子密度の急激な増加は現われていない。このことより単純に境界条件の影響だけとは考えられない。次に格子の解像度の影響を調べるため、標準で使用した格子よりも細かい格子を用いた計算も行った。細かい格子における最小格子幅は0.2(mm)であり表面付近では標準格子に対して5倍程度細かくなっている。それぞれの格子によるアンテナ中心位置での電子密度分布を図8に示す。

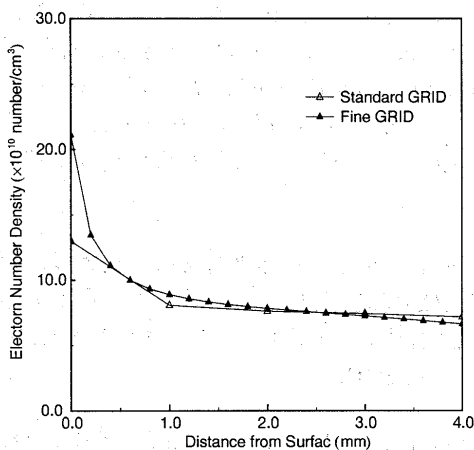


図8：格子の粗さによる電子密度分布の差

これによると電子密度は壁近傍で急激な変化ではあるが滑らかな分布をなしていることが分る。このことより壁での電子密度の急激な分布は計算手法が原因だけではなく何らかの物理的原因も考えられる。分布形状からすると非常に薄い層の存在が考えられるが、今回の計算だけでは断定できない。また細かい格子では壁における電子密度が標準の格子のものより大きくなっている。これは主に格子の解像度の影響だと考えられる。

図9に機体表面での触媒性の違いによる電子密度分布の差を示す。分離後112秒後、116秒後、120秒後の条件で機体表面を完全触媒及び非完全触媒として計算を行なった。

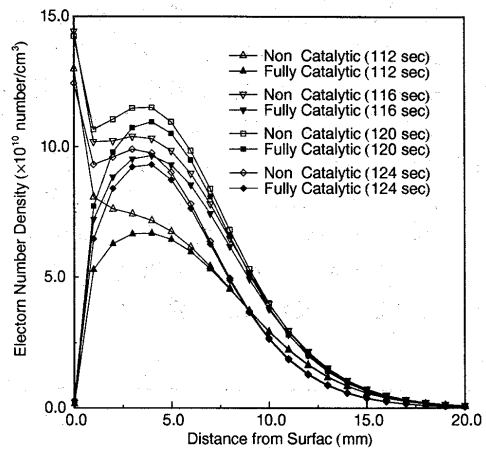


図9：表面の触媒性による電子密度分布の差

これによると機体表面から約5mm以内の領域で分布に大きな違いが見られるがその外ではほとんど分布形状に違いは見られない。完全触媒壁では非完全触媒壁と比較して最大値が小さくなっており反射率も下がると予想される。機体表面は有限の触媒性を持つと考えられるので実際の分布はこの両者の間になると考えられる。

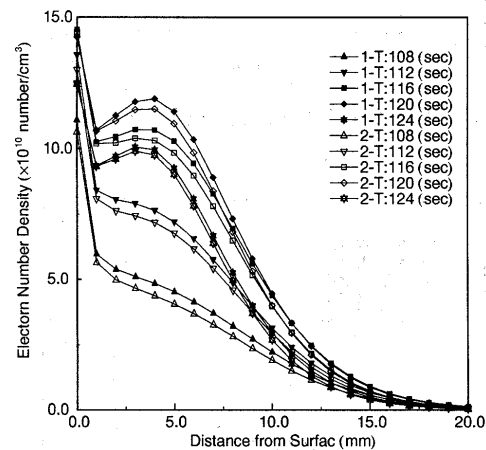


図10：温度モデルによる電子密度分布の差

図10に2温度モデル、1温度モデルによるそれぞれの電子密度分布を示す。いずれの場合も2温度モデルの方が1温度モデルに比べて電子密度が低く、その差は高度が高い程大きい。これは高度が高い程非平衡効果が強く2温度モデルの振動温度が並進温度より低くなり電離の主役となる酸素原子、窒素原子をつくり出す酸素分子、窒素分子の解離反応が進み難くなるためである。ただHYFLEXでは実在気体効果、非平衡効果が強く現われるような飛行軌道を設定していないため2温度モデルと1温度モデルとでは大きな違いは見られない。

図11、12に電波反射強度の時間履歴をそれぞれの周波数毎に示す。実線で示したのが飛行実験のデータ、その他マークで示したのが数値解析の結果である。な

お電波反射強度解析に関しては2次元解析に3次元修正 [2] を施した疑似3次元解析の結果である。図中で2-T,1-Tはそれぞれ2温度モデル、1温度モデルの結果を示し、NC,FCは完全非触媒壁、完全触媒壁の結果、NG,FGは標準格子、細かい格子による結果をそれぞれ示している。解析結果は飛行実験データと良く一致している。各種モデルの違いが反射強度に与える影響ではやはり触媒性による反射強度の違いが一番顕著である。触媒性の影響で壁付近の電子密度が下がりそのため反射強度も下がっている。また電子密度の分布のところでも触れたが2温度モデル、1温度モデルの差はほとんどないことがわかる。ただ時間方向にピーク的位置が約5秒程ずれている。この原因に関しては今のところ不明であり今後検討が必要である。

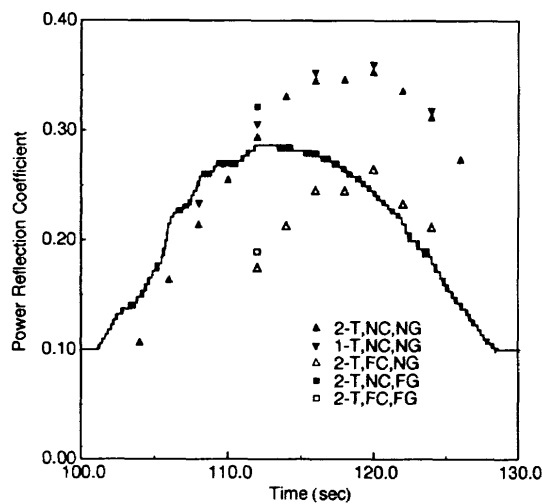


図 11 : 電波反射強度の時間履歴 (902.85MHz)

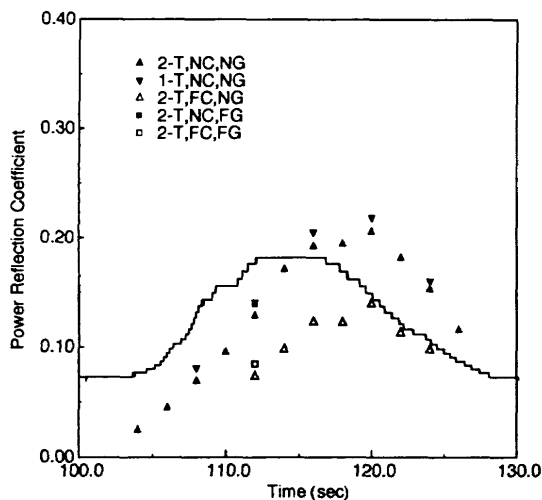


図 12 : 電波反射強度の時間履歴 (1.6765GHz)

5 おわりに

HYFLEXにおける電波反射強度計測の概要及び解析手法について紹介した。今回の実験のように飛行実験

で間接的ではあるが電子密度を計測したことは非常に貴重であり、実在気体効果を含んだCFDの検証には大変有益なデータであると考えられる。電波反射強度に関しては実験と計算で良い一致を見た。しかしながら壁付近での電子密度の分布に関する問題、時間方向のピーク的位置のずれなど今後検討を必要とする問題が発生した。

参考文献

- [1] 伊藤 健、高木 亮治、寺岡 謙. : 極超音速飛行実験 (HYFLEX) におけるプラズマ密度計測. 第37回宇宙科学技術連合講演会講演集, 1993.
- [2] 伊藤 健、高木 亮治、寺岡 謙. : リフレクトメータによる機体まわりのプラズマ電子密度測定. HYFLEX/HOPE-Symposium 講演集, pp. 155-161, 1996.
- [3] R.N. Gupta P.A. Gnoffo and J.L. Shinn. : Conservation Equations and Physical Models for Hypersonic Air Flows in Thermal and Chemical Nonequilibrium. *NASA TP-2867*, 1989.
- [4] C. Park. : Assessment of Two-temperature Kinetic Model for Dissociating and Weakly-Ionizing Nitrogen. *AIAA Paper 86-1247*, 1986.
- [5] C. Park and S. Yoon. : A Fully-Coupled Implicit Method for Thermo-Chemical Nonequilibrium Air at Sub-Orbital Flight Speeds. *AIAA Paper 89-1974*, 1989.
- [6] R. Takaki and Y. Wada. : Numerical Simulation of High Enthalpy Flow - High Enthalpy Flow Workshop -. In *Proceedings of 13th NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics - High Enthalpy Flow Workshop - NAL SP-29*, pp. 171-177, 1996.
- [7] 高木亮治. : 極超音速非平衡流れの数値解析. 第12回航空機計算空気力学シンポジウム論文集特別企画/極超音速流のCFDワークショップ NAL SP-26, pp. 61-66, 1994.
- [8] S. Yoon and A. Jameson. : An LU-SSOR Scheme for the Euler and Navier-Stokes Equations. *AIAA Paper 87-0600*, 1987.
- [9] 伊藤 健、寺岡 謙、中村 良治. : HYFLEX搭載リフレクトメータに関する地上基礎試験. 日本航空宇宙学会第26期年会講演会講演集, pp. 156-157, 1994.

再突入飛行体まわりの空力加熱の CFD解析と実験

山本行光（航技研）

CFD Analysis and Experiment of Aerothermodynamic Heating around Re-entry Vehicle

by

Yukimitsu YAMAMOTO

National Aerospace Laboratory

Abstract

Recent comparisons of hypersonic CFD analysis with hypersonic wind tunnel experiments, including NAL M10 HWT ONERA S4MA HWT, Calspan's shock tunnel and Caltech T-5 high enthalpy shock tunnel, are introduced. Also, hypersonic re-entry flight analysis, such as OREX and HYFLEX are made. Through these studies, aerothermodynamic heating characteristics of re-entry vehicle are investigated in detail.

1. はじめに

再突入飛行体まわりの極超音速飛行時の空力加熱は、マージンの少ない領域での再突入飛行体の最適な空力設計において、その飛行の成立性をも左右する重要な研究要素の一つである。このため空力加熱の正確な評価法の確立は、実験的にも理論的にも重要な課題であり、航技研では、これまでに数多くの極超音速風洞試験、及び対応CFD解析を実施し、空力加熱解析の精度の検討を行ってきた¹⁾。この間にも完全気体レベルの極超音速風洞試験では、航技研の赤外線カメラによる温度測定を利用した空力加熱評価手法の精度が、風洞の大型化とともに、大幅に向上し²⁾、また衝撃風洞では米国のカルSPAN社の薄膜ゲージによる空力加熱試験が、HOPEの熱空力特性評価において、ここ数年来実施され³⁾、実験精度も大きく向上した。

一方、実在気体空力加熱の試験として、ドイツDLRのHEG、米国カルテック T-5等の高エンタルピ衝撃風洞⁴⁾、さらにはフランスのオーク加熱型衝撃風洞F4によるHYFLEX模型の空力加熱試験も行われている⁵⁾。また我国では軌道再突入実験OREX、極超音速飛行実験HYFLEXが成功し、実飛行データが得られている^{7)・8)}。このようにここ4、5年の間に、実験環境が大きく変化し、完全気体、

及び実在気体レベルでの利用可能な空力加熱測定データが豊富に供されるようになった。本報告では、上記のうちのいくつかについて、最近実施されたCFD解析計算結果の比較検証例について紹介し、その検討結果について報告し、今後の課題について考察したい。

2. 解析と比較検証

(1) HOPE簡易模型赤外線温度計測による空力加熱試験対応解析

航技研マッハ数10の大型極超音速風洞システムを用いて、赤外線温度測定法により、HOPE簡易形状模型の空力加熱試験を実施している。形状は図1に見られるように胴体に主翼後退角 5.5° のダブルデルタ形態の翼が取り付けられており、キック位置から外側の主翼は一定の翼断面形が用いられている。模型長は480mmである。計算はマッハ数10.05、総温1110K、総圧3MPaの条件で行われた。図2に胴体中心線及び後部断面における迎角 20° での比較結果を示す。定量的にも良好な一致が得られているが、頭部よどみ点空力加熱は実験値がやや計算値を上回る。なお、計算値のよどみ点空力加熱は 0.215MW/m^2 で、よどみ点ノーズ曲率半径と同一の球の半径を仮定したFay-Riddelleの推算値は0.2

05MW/m²である。現在、主翼前縁に沿う空力加熱分布については、IRカメラの解像度、スリットレスポンス特性、熱伝導効果を含めた誤差評価を行っている⁹⁾。

また、同様な極超風試により平板模型の空力加熱試験がONERAと共同して行われている。図3はCFD解析による迎角35°での平板に沿う等圧力線図、及び風上側表面空力加熱分布を示す。大迎角では衝撃波干渉もタイプVIと異なって複雑となり、空力加熱のピークも局所的に極めて高くなっている。この衝撃波パターンは実験的にも確認され、現在、詳細な比較を進めている。

(2) HOPE極超音速風試、及び高エンタルピー衝撃風試対応解析

ONERA極超風試

HOPE06形状についてONERA S4MAマッハ数10極超風洞を使用して、赤外線温度測定システムによる空力加熱試験が行われた。風上側胴体中心線上に沿う空力加熱分布の比較を図4(a)にまた主翼平面形ダブルデルタ翼キック位置に近い断面での分布比較を図4(b)に示す。IR計測による実験値は、計算値よりも低くあらわれているのが特徴である。

カルスパン衝撃風試

カルスパン衝撃風試が、HOPE06形状について行われた。この実験では図5(a)に示される断面において薄膜熱伝達ゲージによる空力加熱分布が比較された。マッハ数は5.44、迎角は35°である。計算による分布結果を図5(b)に示す。現在、実験データは規定により公表できないが、実験はほぼ、CFD計算結果に一致する。

T-5 高エンタルピー衝撃風洞

ノーズ半径16mmの半球円柱胴体と主翼を模擬した後退角55°、前縁曲率半径12mm斜め円柱から構成される簡易形状模型とHOPE06形状模型についてT-5高エンタルピー衝撃風試が実施された。対応計算は一温度モデルによる実在気体NSコードを使用し、非触媒、完全触媒の2条件の計算を行った。ここでは、試験の中でも最も高いエンタルピー条件での計算結果について示す。流れの条件は表1に示す。

	密度 (kg/m ³)	温度 (K)	流速 (m/s)	定みエンタルピー (MJ/kg)
簡易形状 (迎角0°)	0.00776	2459	5542	21.75
HOPE06 (迎角35°)	0.00841	2292	5428	20.72

表 1

空力加熱分布の計算結果を図6に示す。図は各断面における加熱の最高値をプロットしたものである。空力加熱計算にあたっては300Kの等温壁条件を仮定している。触媒効果による空力加熱の上昇は両形状とも頭部のよどみ点領域に現れる。主翼前縁に沿う分布では、簡易形状模型、翼つけねの再圧縮部で触媒壁効果が現れるが、HOPE06形状ではほぼ同一の分布となりその差が認められない。実験値は上記と同様、規定により公表できないが、簡易形状模型については、ほぼ一致する結果が得られた。大迎角のHOPE06形状については実験値は主翼前縁の広範囲にわたり高い空力加熱を示すが、計算は主翼外側においてのみ高いピークを示す。主翼の胴体よりの部分を除いては、定量的にも良好な一致が得られた。

(3) OREX、HYFLEX実飛行解析

OREX

OREXについてはCFD-FEMカップリング解析により、再突入飛行中の耐熱材表面温度時間変化の解析はほぼ完了し¹⁰⁾、飛行結果と良好な一致が得られた。この表面温度データをを使用して、VSL法との比較が行われている¹¹⁾。よどみ点空力加熱の飛行時間に伴う変化を図7に示す。7化学種24反応モデルによるNSコードでは非触媒性を仮定しているため、飛行解析結果よりもよどみ点空力加熱が低くあらわれている。これに対しVSL法では有限触媒性の影響を取り入れたため、より厳密なよどみ点空力加熱の変化を模擬している。今後、実飛行解析では耐熱材の触媒効果の影響を見積もることが重要である。

HYFLEX

HYFLEXについては表面温度計測データが図8に示される位置で取得された。CFD解析は、完全及び実在気体解析を10秒間隔の飛行軌道に沿い、分離後時刻50秒、高度93kmから200秒、高度37kmまでの計算を実施した。

よどみ点空力加熱の飛行時刻による変化を図9に示す。完全気体計算値は、ほぼ Detra Kemp Riddelle らの理論値に一致している。これに対して実在気体では、最高空力加熱が生じる130秒前後で、加熱が4割ほど減少する。フィン外側の番号42番での空力加熱の時間変化による比較を図10に示す。ほぼ一致した傾向を見せるが、飛行結果は130秒以降でもなお加熱が上昇し続けている。これは乱流遷移が主な原因と考えられる。他の計測点でも同様な傾向をとる。図11に、FEM解析によるHYFLEX耐熱材表面の飛行軌道に沿った温度変化を示す。よどみ点での最高値は1400K程度となり、飛行計測値とほぼ一致する。

3. まとめ

現在進められている実飛行実験を含む種々の空力加熱計測結果と対応CFD解析結果との比較検討を行った。その結果、空力加熱評価に関してはなお各種計測法によるデータの誤差、異なる風洞間での対応風試、及びワークショップ等を含めたCFD解析を実施して、より信頼性のあるデータを提供できるようにすることが重要と考えられる。また実飛行解析では、乱流遷移、及び表面触媒性の同定の問題が今後残された課題となろう。

参考文献

- 1) 山本行光「超高速飛行体の空力加熱：CFDと風洞試験」第10回航空機計算空気力学シンポジウム論文集、NAL SP-19、1992年12月
- 2) 吉沢昭、井上安敏、山本行光、駒徹郎「IRサーモグラフィによる空力加熱分布の定量測定」第34回飛行機シンポジウム講演集 1996年10月
- 3) HOPE06形状カルスパン衝撃風試資料、三菱重工株式会社
- 4) 「06HOPE高エンタルピー衝撃風洞試験(その1)成果報告書」平成7年6月川崎重工株式会社
- 5) 「06HOPE高エンタルピー衝撃風洞試験(その2)成果報告書」平成7年11月川崎重工株式会社
- 6) 穂積弘一「ONERA F-4 HYFLEX高エンタルピー風試資料」私信
- 7) NAL/NASDA HOPE研究共同チーム HOPE/OREXワークショップ講演論文集 航技研特別資料 SP-24 1994年9月

- 8) 航空宇宙技術研究所/宇宙開発事業団 HYFLEX/HOPE-Symposium 講演前刷集 1996年7月
- 9) NAL/NASDA共同研究「空力加熱測定法の研究」成果報告書 1996年6月
- 10) Yukimitsu Yamamoto "Recent Comparisons of Aerothermodynamic Results by CFD and FEM Coupling Analysis with OREX Flight Experiment" 第13回航空機計算空気力学シンポジウム論文集、特別企画「高エンタルピー流れ企画セッション及びワークショップ」航技研特別資料 SP-29、1996年1月
- 11) R. N. Gupta, J. N. Moss and J. M. Price "Assessment of Thermochemical Nonequilibrium and Slip Effects for Orbital Reentry Experiment(OREX)" AIAA Paper 96-1859, June, 1996

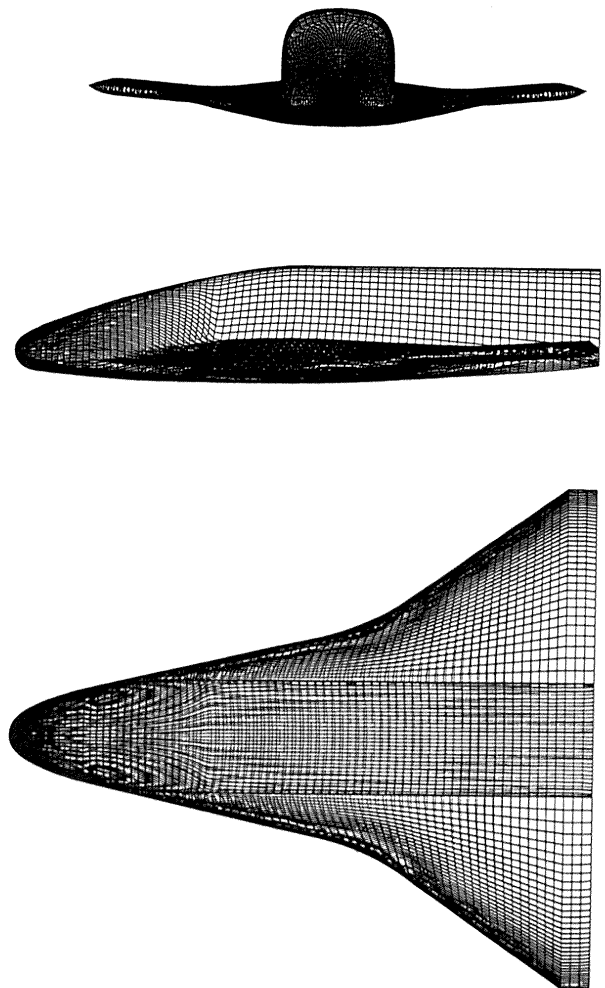


図1 NAL極超風試HOPE簡易形状模型表面格子

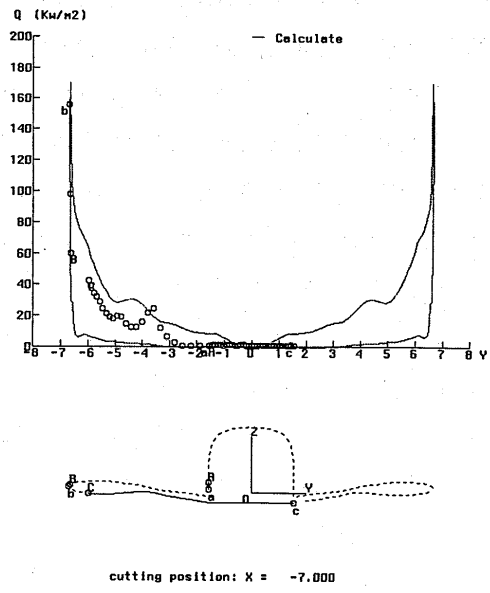
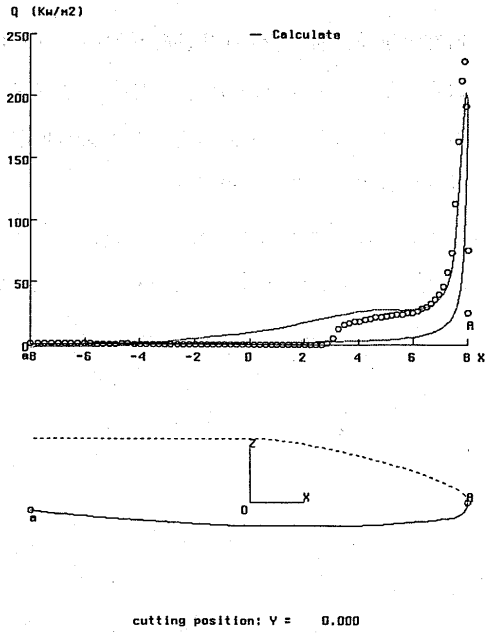


図2 赤外線温度計測システムによる空力加熱断面分布の比較 ($M_\infty=10.0, \alpha=20^\circ$)

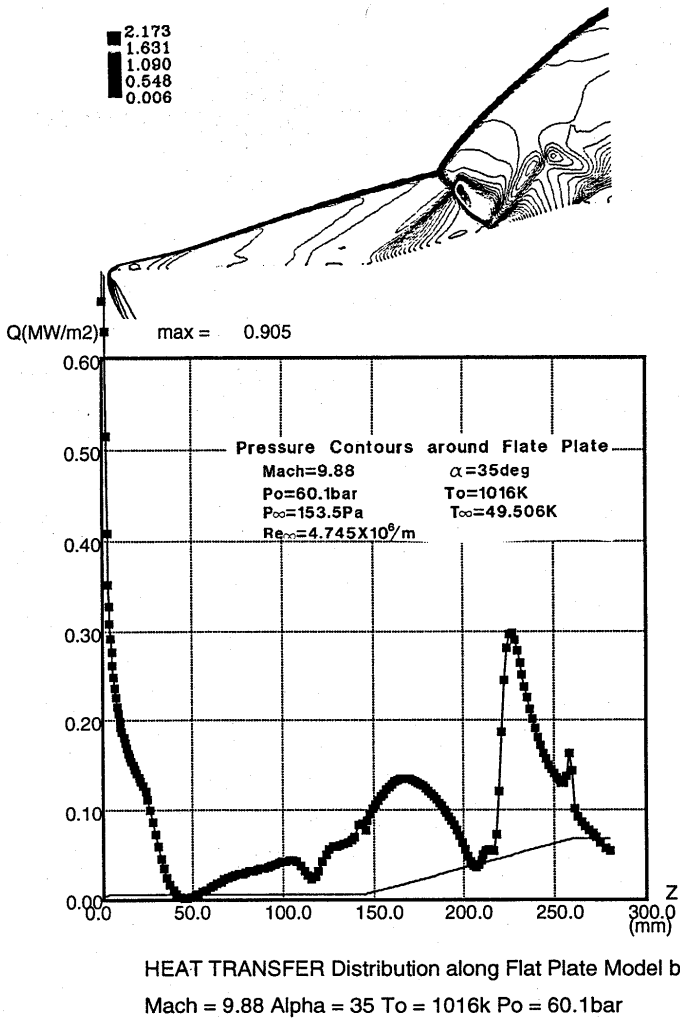
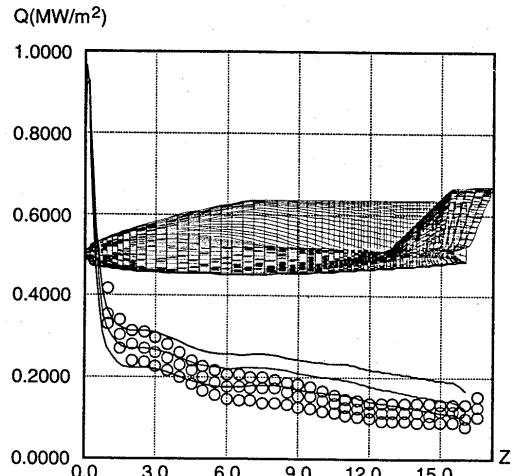
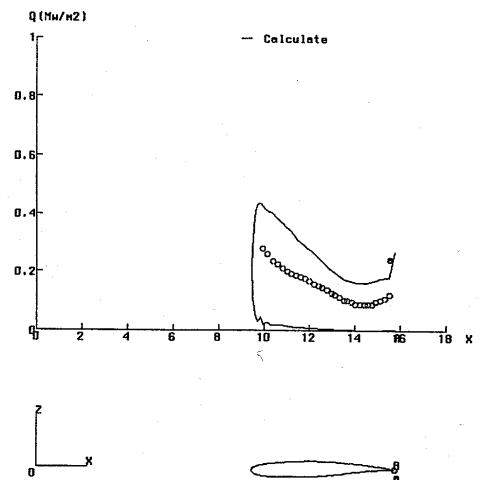


図3 N A L 極超風試対応平板模型空力加熱分布と圧力線図のCFD結果 ($M_\infty=10.0, \alpha=35^\circ$)

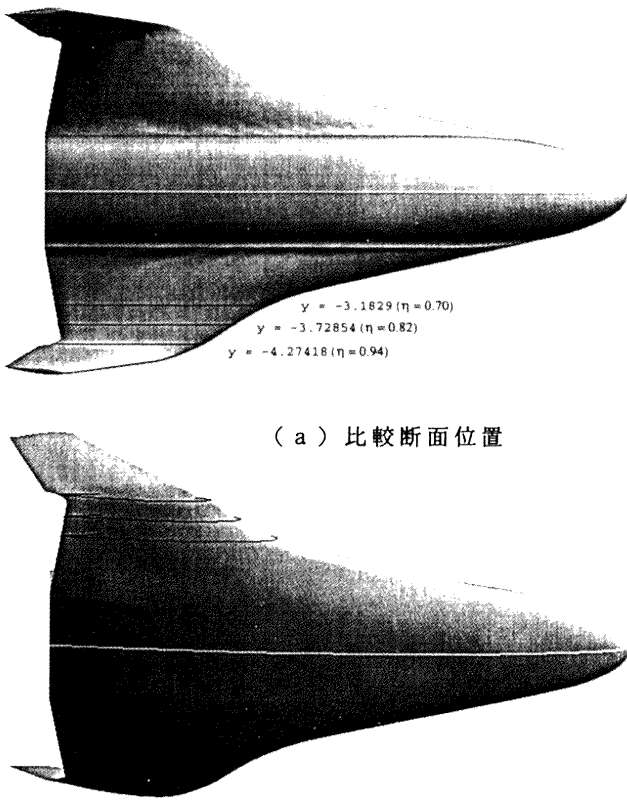
— hopeone1040 Numerical ○ hopeone1040 Experiment
 — hopeone1030 Numerical ○ hopeone1035 Experiment
 ○ hopeone1030 Experiment



(a) 胴体中心線
 図4 HOPE 06 形状 ONERA S4MA 極超IR風試空力加熱分布比較 ($M_\infty=10.0$)

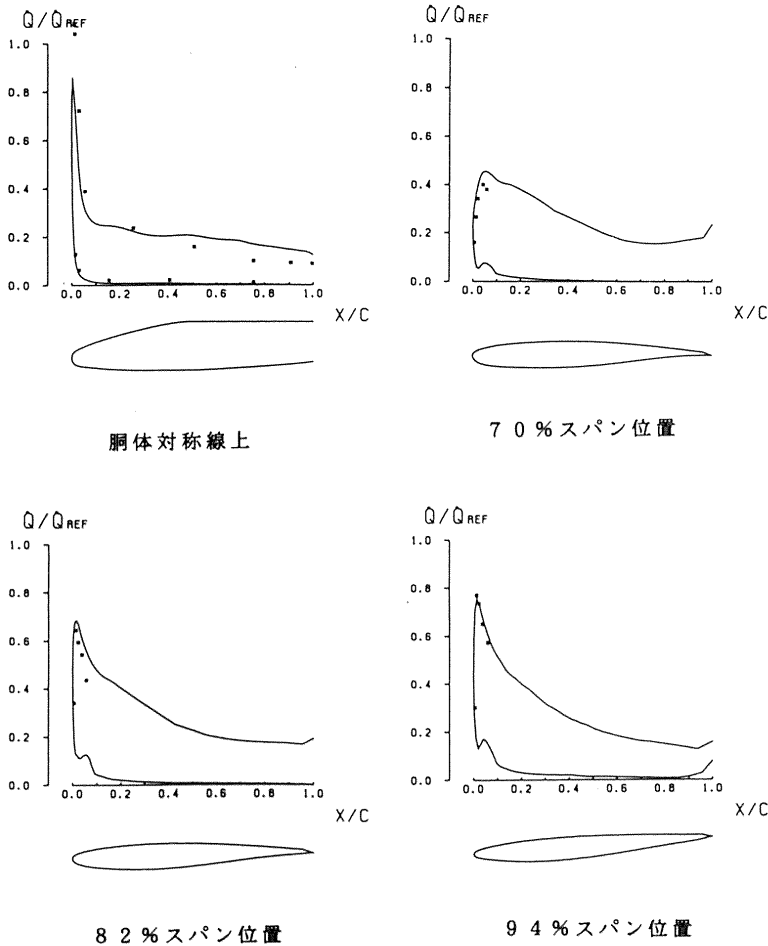


(b) 中心から3.05m離れた主翼断面位置

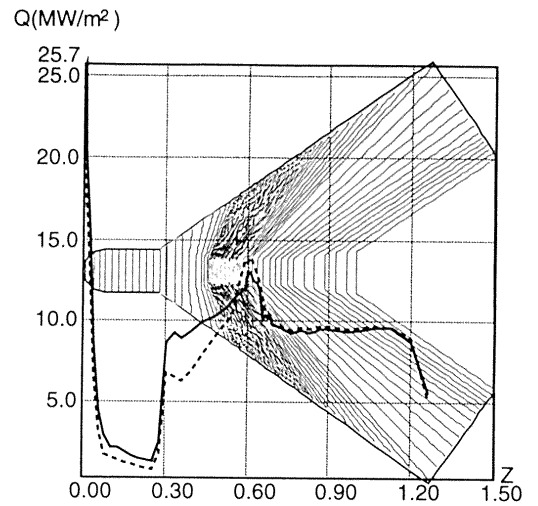


(a) 比較断面位置

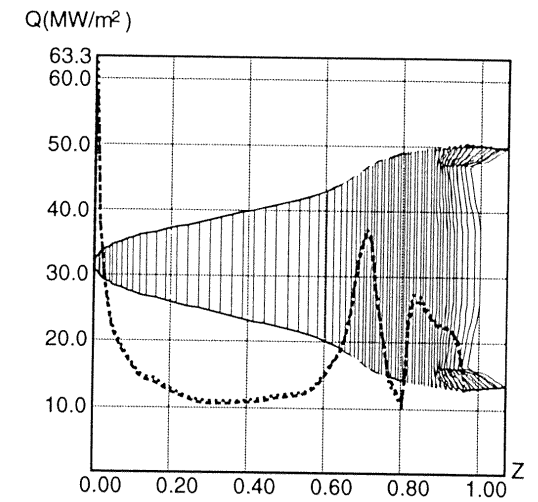
図5 カルスパン衝撃風洞条件
対応CFD計算空力加熱分布



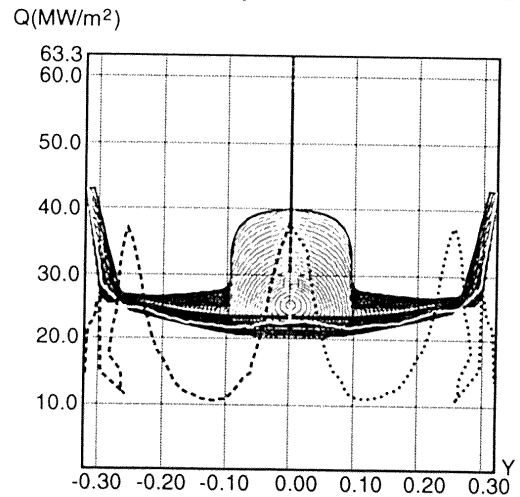
(b) 断面空力加熱分布



a) 簡易形状



..... Catalytic --- Non-Catalytic



b) HOPE 06 形状

図6 T-5 高エンタルピー衝撃風洞試対応
CFD計算断面内最大空力加熱分布

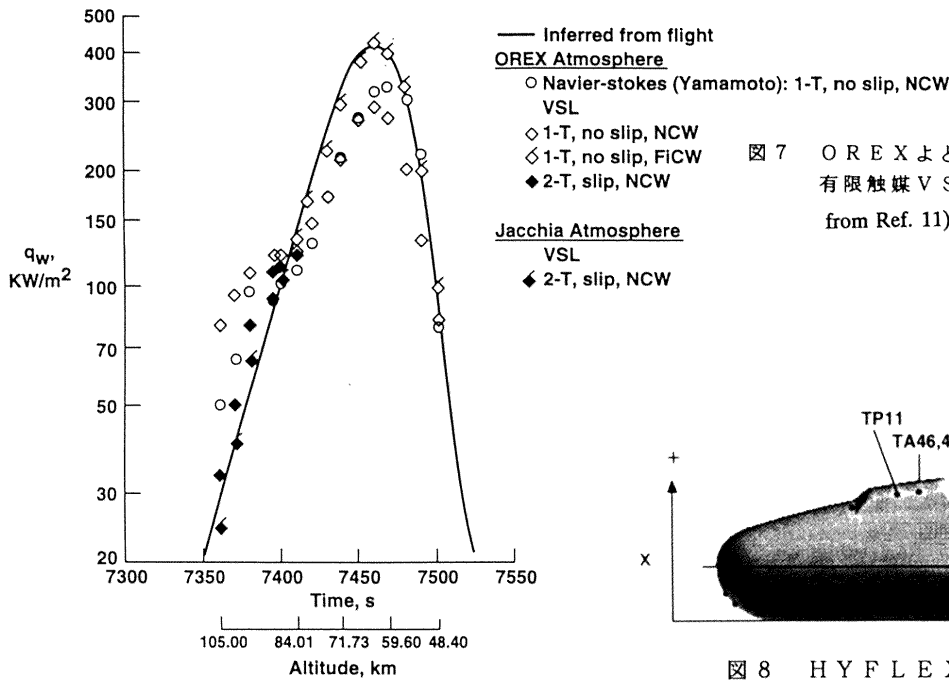


図 7 OREX よどみ点空力加熱の飛行時間に伴う変化；有限触媒 V S L 法との比較 from Ref. 11)

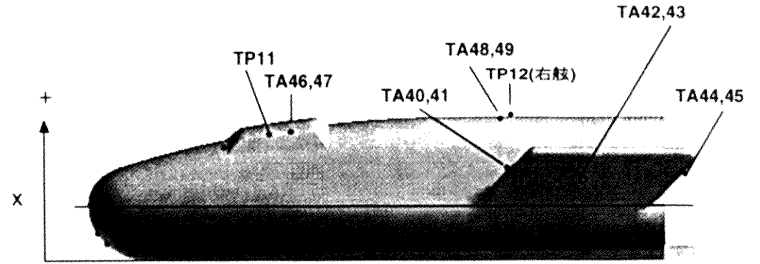


図 8 HYFLEX 飛行実験 表面温度計測位置

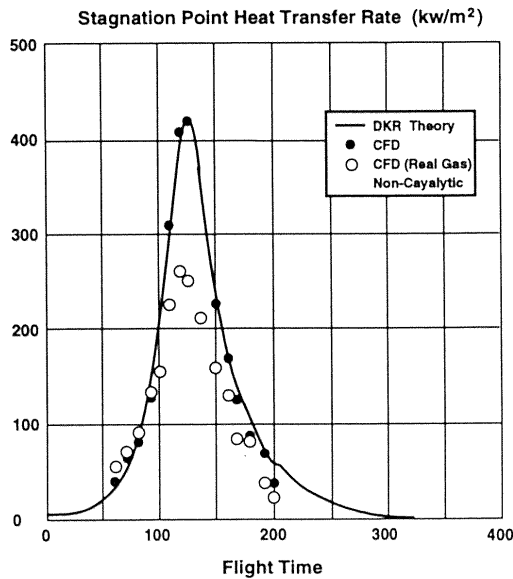


図 9 HYFLEX 飛行軌道に沿った完全及び実在気体よどみ点空力加熱 C F D 計算値

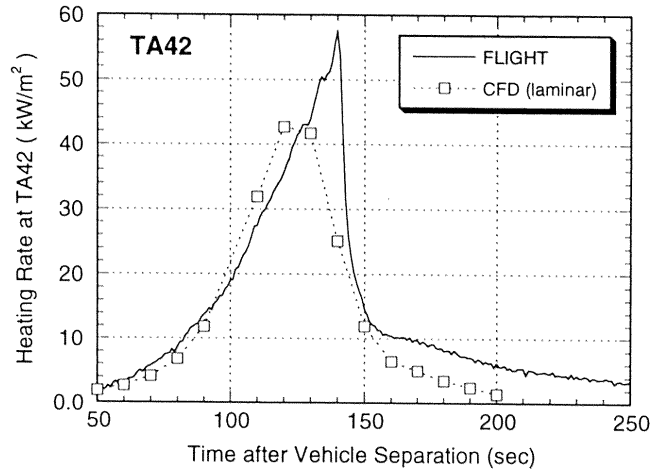


図 1 0 HYFLEX フィン外側表面計測点番号 4 2 での空力加熱の C F D 解析と飛行実験値の比較

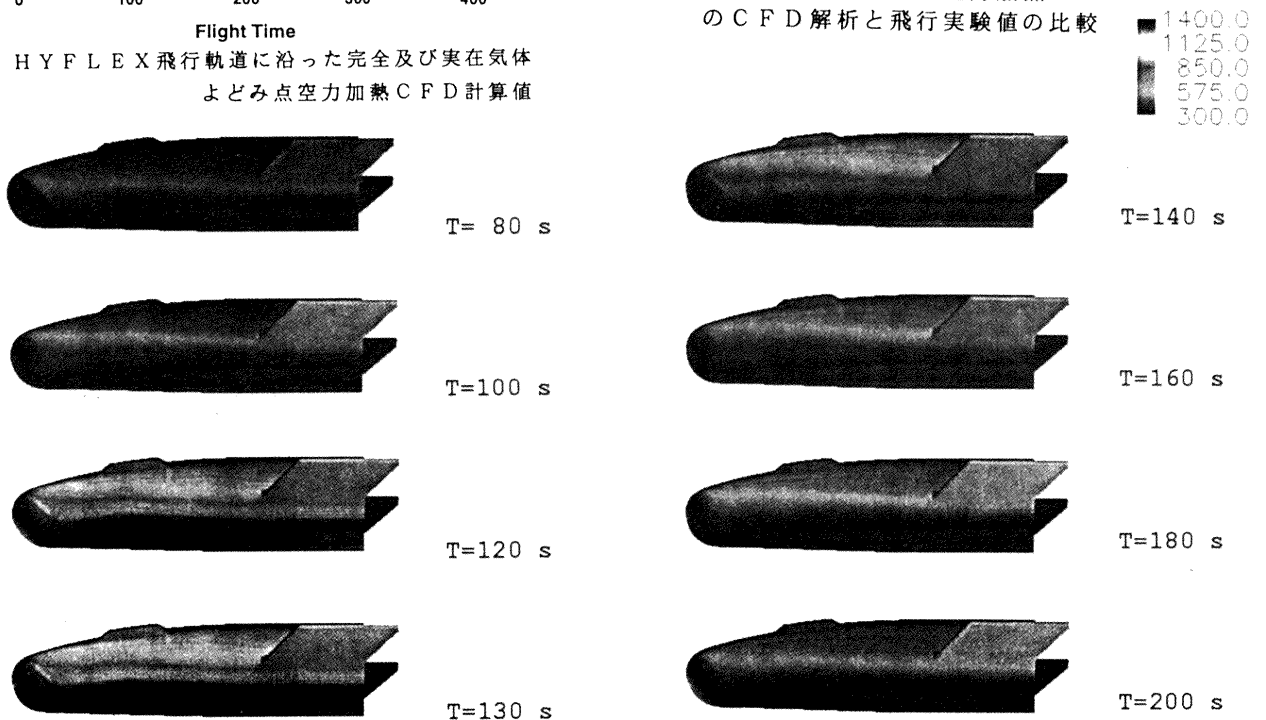


図 1 1 三次元 F E M 解析による HYFLEX 耐熱材表面温度変化

高エンタルピー流れワークショップまとめ

山本行光 (航技研)

保阪陽子、斉藤亜希子 (三向ソフトウェア開発)

Summary of High Enthalpy Flow Workshop

by

Yukimitsu YAMAMOTO

National Aerospace Laboratory

and

Yoko HOSAKA, Akiko SAITO

Sanko Software Ltd.

Abstract

In the perspective of Japanese space projects, the knowledge of high enthalpy and high Mach number flow, occurring during the atmospheric reentry of space vehicles, has regained recently considerable interest. The need to support aerodynamic design of space vehicles under the environments where experiment is very difficult and costly, has driven the use of numerical simulation. Hence, high enthalpy flow workshop was held at NAL in June, 1995 for axisymmetric flow problems. This paper summarizes the computational results of OREX real gas flow problem and discusses the detailed comparison of each numerical results.

1. はじめに

平成7年度6月に行われた第13回航空機計算空気力学シンポジウム特別企画「高エンタルピー流企画セッション及びワークショップ」¹⁾の成果をさらに有意義なものとするため、ワークショップ各応募者から計算結果のデジタルデータの提供を受けた。また本企画の後にも、平成7年11月に第1回米国-ヨーロッパ高速流のデータベース・ワークショップにおいて、OREX課題に対する幾つかの計算結果の寄与^{2), 3)}が得られた。さらにその後DSMC法及びVSL法によるOREX実飛行解析⁴⁾もなされた。今回はこれらを統合して、OREXの課題に関するより厳密な比較検討を実証し、詳細な結果のレビューを行ったので報告する。

2. 高エンタルピー流れワークショップ

OREX課題計算のまとめ

OREXの課題設定を図1及び表1に示す。今回はOREX課題に関する実在気体非触媒ケース、及び完全気体ケースについての計算結果の比較検討を実施した。デジタルデータは航技

研 山本行光、同、高木亮治氏、日産自動車 関野展弘氏、三菱電機 黒滝卓司氏、名古屋大学 村上桂一氏、同、中森一郎氏から提供していただいた。また東北大学 長友英夫氏からもデータを提供していただいたが、データが読み込めなかったため割愛した。なお、上記提供者の所属は平成7年6月現在でのワークショップ参加当時のものである。なお今回の空力加熱分布に関する比較では、熱伝導係数を以下に示すように統一した値を使用した。

壁面上での粘性係数 μ_w

$$\mu_w = C \cdot (T_{wall}/273.0)^{1.5} \cdot (1.0 + 110.0/273.0) / (T_{wall}/273.0 + 110.0/273.0)$$

$$C = 17.1126 \times 10^{-6}$$

壁面上での熱伝導率係数

$$K_w = \mu_w \cdot (1.4/0.4) \cdot R/Pr$$

$$R = 287.0$$

ガス定数

$$Pr = 0.72$$

プラントル数

従って、空力加熱分布の比較は各計算に用いられるそれぞれの物性値モデルとは異なるため物体表面近傍の温度勾配の比較を示しているとみなされる点に注意を要する。

Problem II-1 OREX 高々度非触媒ケース

等温度線図の比較を図2に示す。温度ケースは一様流の温度 T_∞ (186.9K) で無次元化されている。図で中央部の空白の領域は、無次元化温度でスケールの上限を上回っていることを示す。よどみ点流線に沿う並進、回転の温度分布は図3に示される。温度の最高値は20000~25000Kで、分布は相似であるが衝撃波層の厚みがそれぞれの計算結果によって異なるため、最高温度のあらわれる位置がずれている。同じく、よどみ点流線に沿う窒素分子 (N_2)、酸素原子 (O)、酸化窒素 (NO) の質量分率の分布を図4に示す。窒素分子 (N_2) は物体表面に近づくにつれ徐々に減少していくが、表面近傍の最低となる位置及びその値は異なる。酸素原子 (O) は酸素分子が解離するため徐々に増加し、表面近傍で一様流の酸素分子の質量分率に近づいていくが、それぞれの計算結果において増加の傾向が異なる。酸化窒素 (NO) の分布は各計算とも違いが大きい。OREX表面に沿う空力加熱(温度勾配)分布は、図5に示される。各計算とも大きな開きを見せる。逆に表面圧力分布は一次量であるため、図6に見られるように各計算結果とも非常に一致する。なお分布の横軸はOREX半径方向の高さをm単位で示したものである。よどみ点流線に沿う温度分布を図7に示す。図は表面から0.2mmまでの温度分布を拡大したもので、温度勾配の分散が、空力加熱の値に大きく寄与していくことが判明する。もちろん真の空力加熱は各計算によって用いられる熱伝導係数等の物性値によっても異なってくるので、断定的な結論は避けたい。

Problem II-2 OREX 中高度、非触媒ケース

よどみ点流線に沿う並進・回転の温度分布を図8に示す。高々度のケースに比較して、最高温度の値、及び位置のずれはあるものの、分布形状はおおむね良好である。窒素分子及び酸素原子の質量分率も図9に示されるように良く一致する。但し、表面に沿う温度勾配の分布は、図10に見られるように、なお大きくずれている。図11の表面圧力分布は高高度ケースと比較してさらに良く一致するようになる。表面近傍よどみ点流線

に沿う温度分布は図12に見られるように傾きが異なるため、真の空力加熱計算にも大きく影響する。

Problem II-3 OREX 中高度、完全気体ケース

表面に沿う圧力及び温度勾配・分布を図13、図14に示す。圧力についてはほぼ一致するが、温度勾配については、空力加熱計算に用いられる熱伝導係数等、物性値の値の差は小さくなると考えられるにも関わらず、温度勾配分布の差は大きい。

3. OREX飛行実験のVSL、DSMC法との比較

ワークショップで得られた結果の比較をより有意義なものとするため、ナビエ・ストークスコードとは異なる希薄気体DSMC法、及びVSL法との比較を行った⁴⁾。高々度OREX飛行条件でのDSMC法と著者らのNSコードの比較結果を図15~17に示す。図15は等マッハ線図の比較、図16はよどみ点流線に沿う並進・回転温度分布、図17はよどみ点流線に沿う各化学種の質量分布の比較である。ほぼ良好な一致が得られた。但し、温度分布については最高値は若干異なる。3つの異なる高度でのOREX表面空力加熱分布のDSMC、VSL法との比較を図18に示す。VSL法では高々度におけるSlip効果や、低高度での触媒性の影響を考慮している。高度93km及び84kmの空力加熱分布はおおむね良好な一致を示すものの、高度60km付近ではNSコードがVSLコードに比べて、空力加熱を高く見積もっている。なお、よどみ点上の空力加熱の飛行推定値は黒丸で示されている。非触媒計算の値よりも高くなるのは有限触媒性の影響と考えられる。

4. まとめ

高エンタルピー流れワークショップで得られたOREXの計算結果をデジタルデータとしてまとめ、より厳密な比較を行った。表面圧力分布については良好な一致を示すものの、空力加熱分布の指標である表面近傍の温度勾配については各計算結果に大きな差がでてくる。またよどみ点流線に沿う温度分布、質量分率も非平衡性の高まる高々度領域では違いが大きくなる。

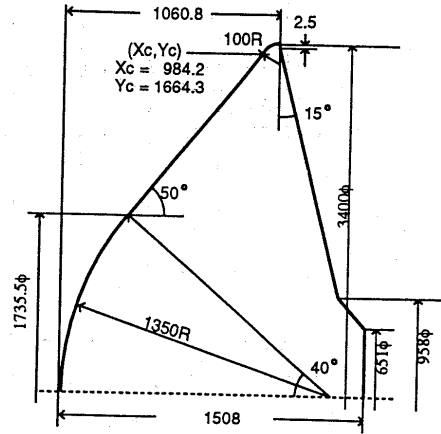
一方、DSMC法やVSL法との比較では、著者らのNSコード計算結果とおおむね良好な一致が得られた。他のNS計算結果との比較は紙面の都合上割愛するが、NSコード以外の計算法による解析も、今後実在気体解析を進める上で非常に有効な手段として取り上げられよう。

今回はOREXの課題を中心に報告したがOREXの計算結

果を提供していただいた方々はもちろんのこと「高エンタルピー流れワークショップ」の他の課題についてもデータを提供していただいた方々にも深く感謝する。今後航技研資料として報告してゆきたい。

参考文献

- 1) 第13回航空機計算空気力学シンポジウム論文集特別企画「高エンタルピー流れ企画セッション及びワークショップ」航空宇宙技術研究所特別資料SP-29、1996年1月
- 2) 高木亮治「OREX課題に対するナビエ・ストークスコードによる計算」第1回米国-ヨーロッパ高速流に関するデータ・ベースワークショップ米国ヒューストン大学 1995年 11月、私信
- 3) J. N. Moss, J. M. Price and G. Bird "DSMC Calculations for OREX Flowfields T12-95.1 Condition" First US-European High Speed Flow Field Database Workshop, University of Houston, USA Nov. 6-9, 1995, Private Communication.
- 4) R. N. Gupta, J. N. Moss and J. M. Price "Assessment of Thermochemical Nonequilibrium and slip Effects for Orbital Reentry Experiment (OREX)" AIAA Paper 96-1859, June, 1996



OREX Configuration(Unit:mm)

図1 OREX形状寸法

	U_∞	T_∞	P_∞	T_{wall}
II.1	7450m/s	186.9K	0.169N/m ²	540K
II.2	5562m/s	248.1K	23.60N/m ²	1519K
II.5	5562m/s	248.1K	23.60N/m ²	1519K

- II.1 LamInar Non-equilibrium, Non Catalytic
- II.2 LamInar Non-equilibrium, Non Catalytic
- II.5 Laminar Non React

表 1

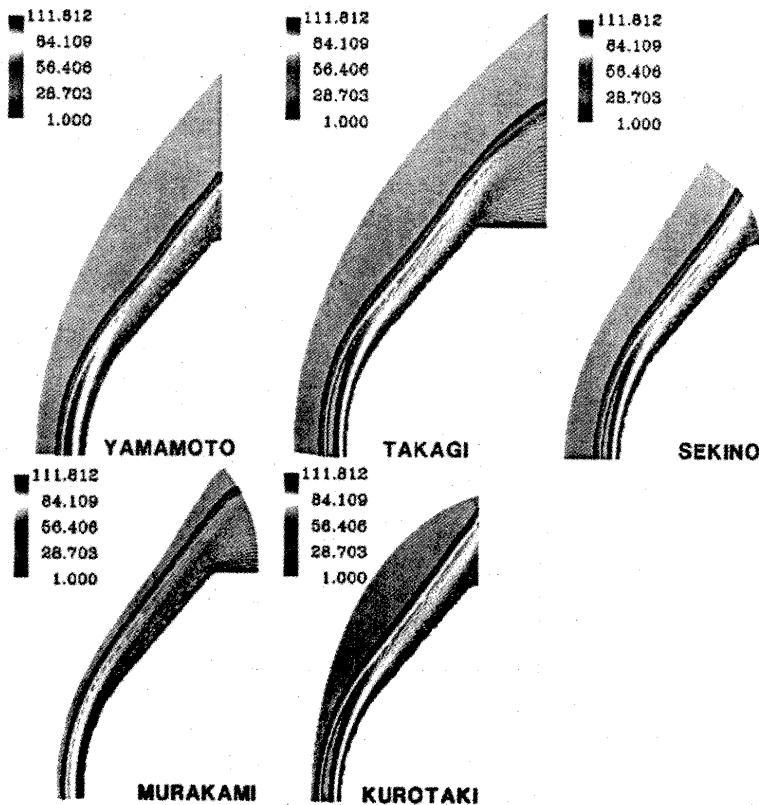


図2 OREX高々度飛行条件 等温度線図

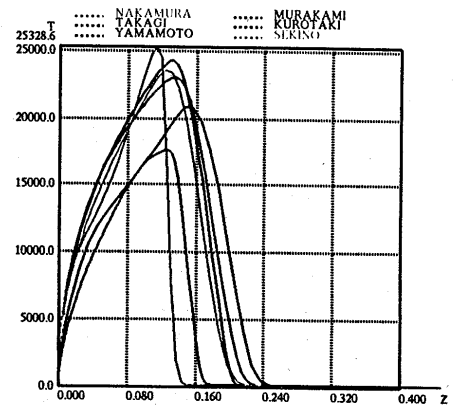
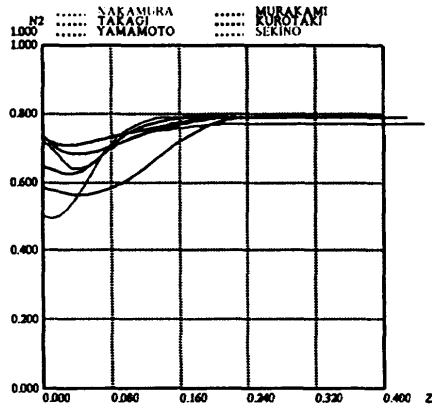
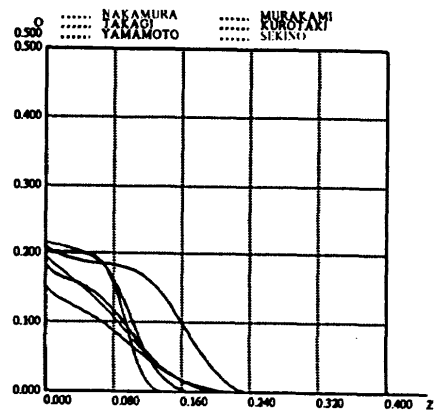


図3 OREX 課題II-1よどみ点流線に沿う並進・回転温度分布

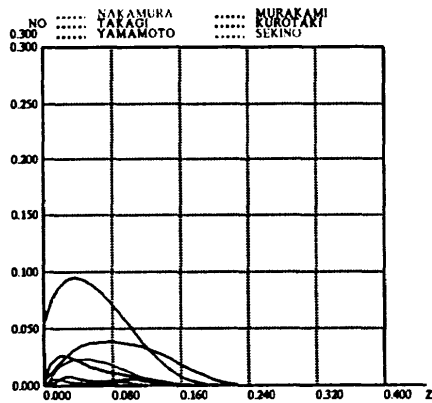


(a) 窒素分子 (N₂)



(b) 酸素原子 (O)

図4 OREX 課題II-1 よどみ点流線に沿う質量分率分布



(c) 酸化窒素 (NO)

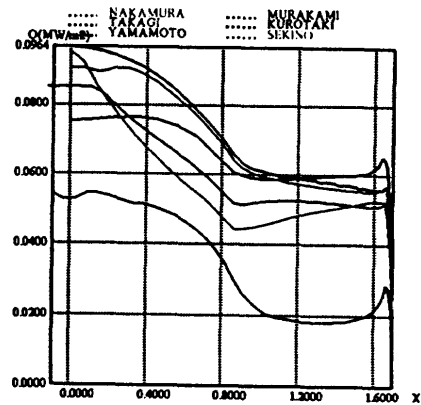


図5 OREX 課題II-1

表面空力加熱分布 (熱伝導係数統一値仮定)

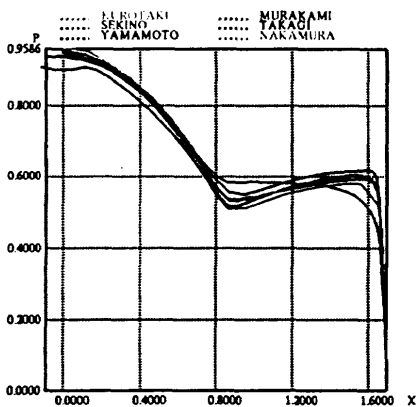


図6 OREX 課題II-1
表面圧力分布

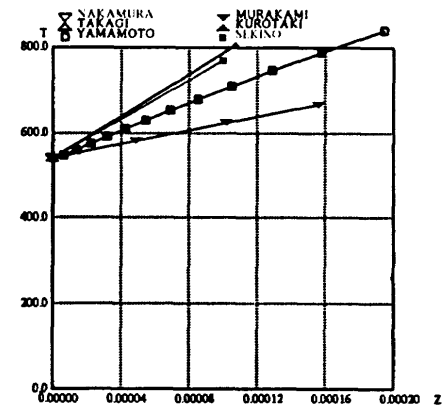


図7 OREX 課題II-1

よどみ点流線に沿う表面近傍並進・回転温度分布

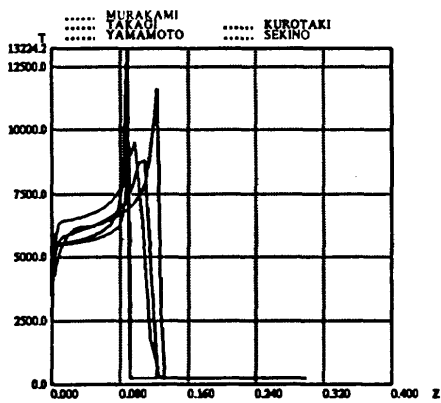
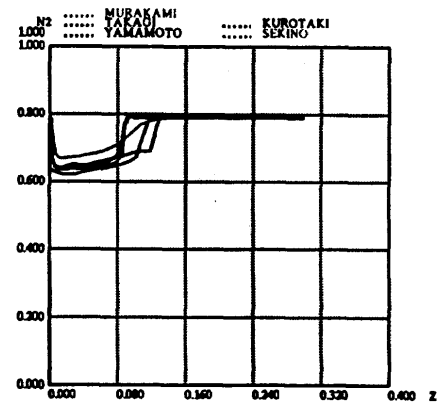


図8 OREX 課題II-2
よどみ点流線に沿う並進・回転温度分布



(a) 窒素分子 (N₂)

図9 OREX 課題II-2
よどみ点流線に沿う質量分率分布

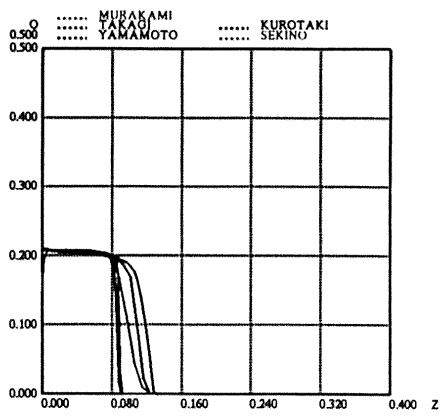


図9 OREX 課題II-2 (b) 酸素原子(O)よどみ点流線に沿う質量分率分布

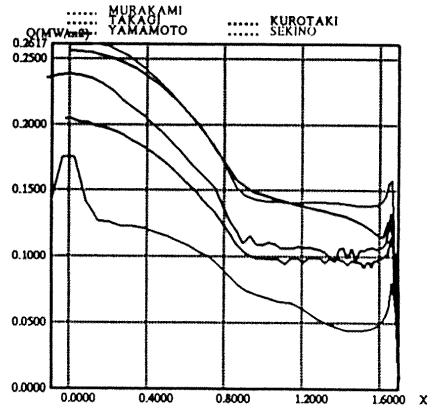


図10 OREX 課題II-2 表面に沿う空力加熱分布(熱伝導係数統一値仮定)

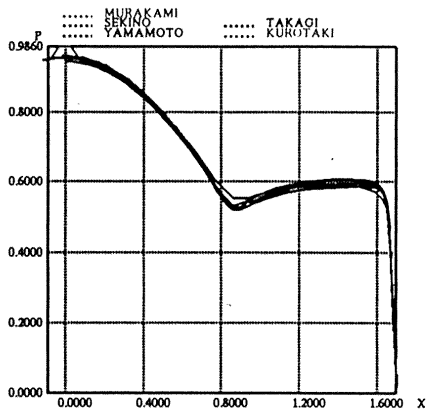


図11 OREX 課題II-2 表面圧力分布

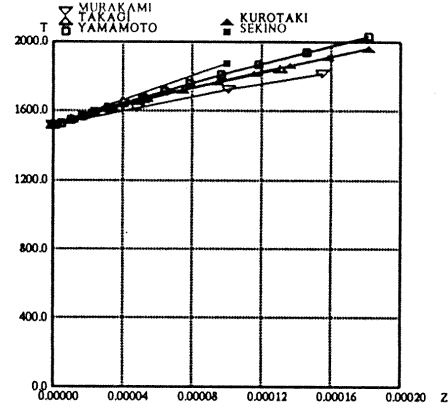


図12 OREX 課題II-2 よどみ点流線に沿う表面近傍並進・回転温度分布

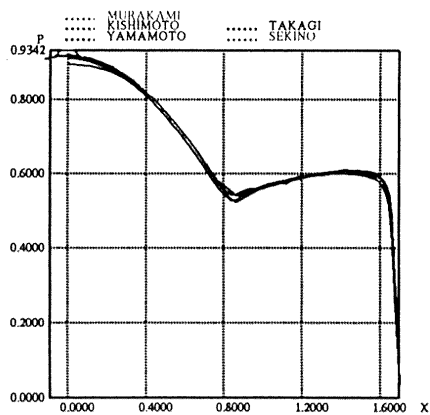


図13 OREX 課題II-5 表面圧力分布

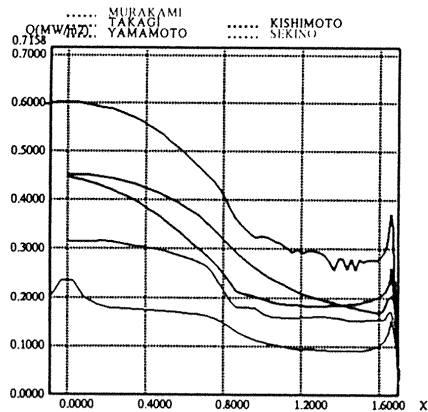


図14 OREX 課題II-5 表面に沿う空力加熱分布(熱伝導係数統一値仮定)

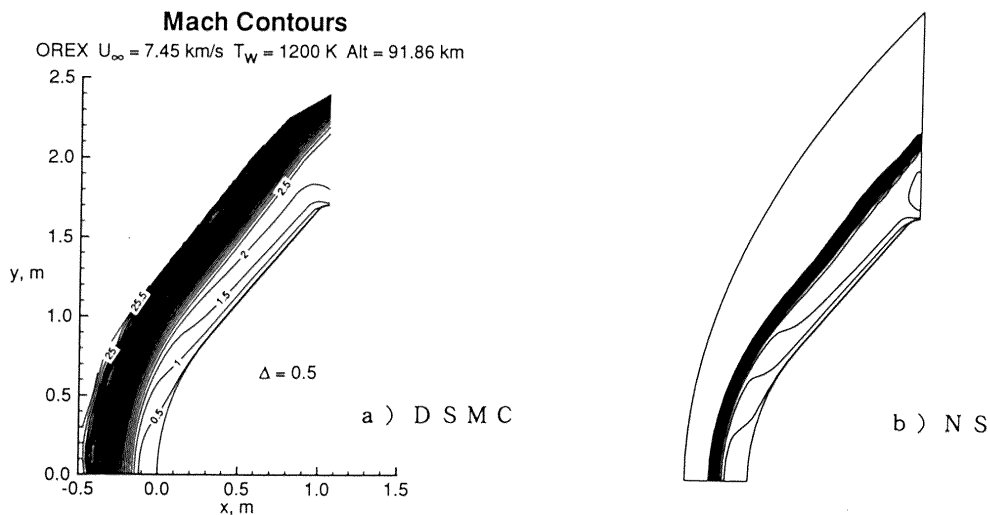


図15 OREX 高々度飛行条件等マッハ線図 DSMC法とNSコード計算結果の比較

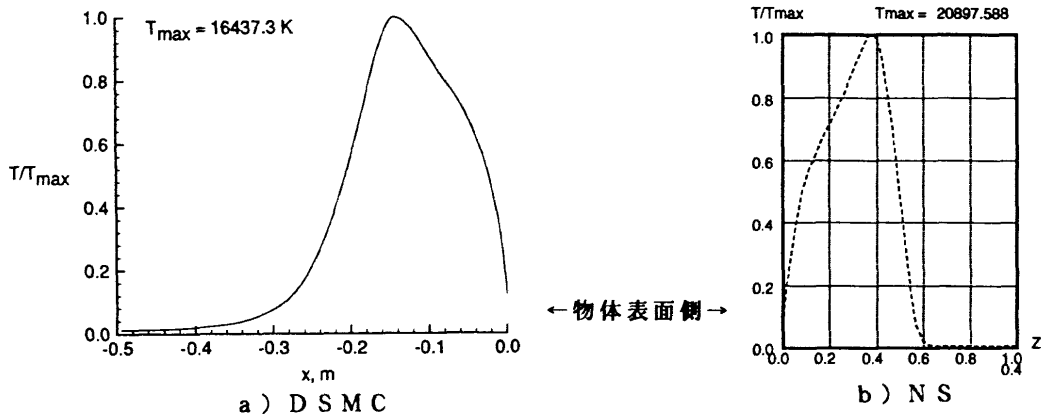


図 16 OREX 高々度飛行条件 よどみ点流線に沿う並進・回転温度分布
DSMC 法と NS コード計算結果の比較

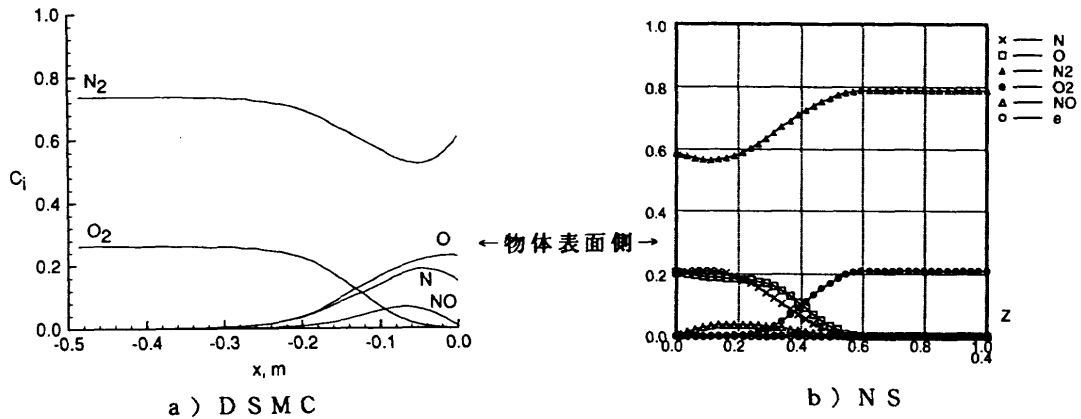
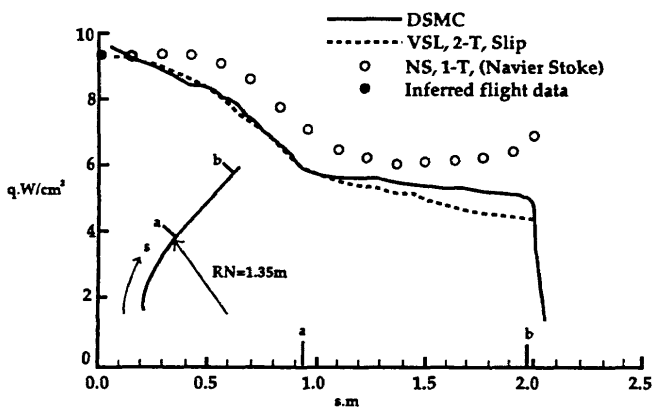
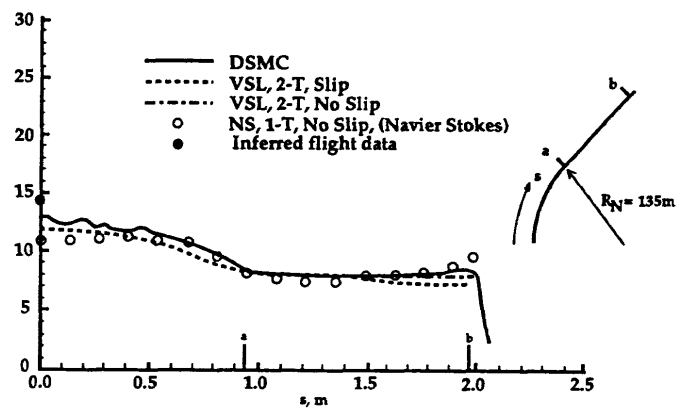


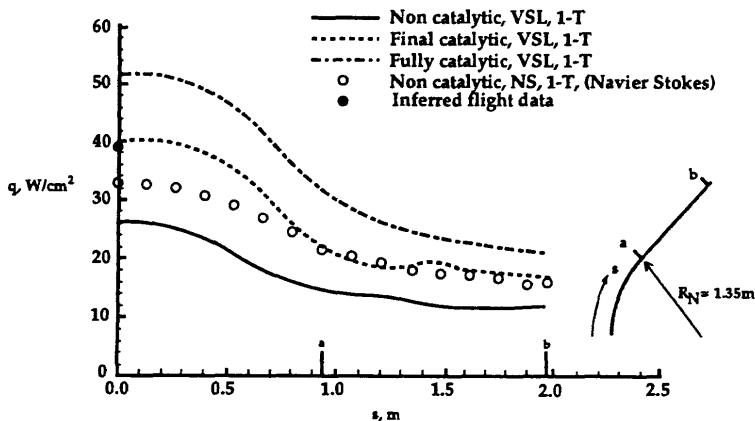
図 17 OREX 高々度飛行条件 よどみ点流線に沿う質量分率分布
DSMC 法と NS コード計算結果の比較 $U_\infty = 7.45 \text{ km/s}$ $T_w = 1200 \text{ K}$ $\text{Alt} = 91.86 \text{ km}$



(a) Alt = 92.82km ($Kn_\infty = 0.0086$)



(b) Alt = 84.01km ($Kn_\infty = 0.0016$)



(c) Alt = 59.60km ($Kn_\infty = 7.35 \times 10^{-3}$)

図 18 OREX 表面空力加熱分布の
DSMC、VSL 法との比較
from Ref. 4)

実在気体効果をともなう極超音速流解析の検証

岸本 琢司*¹, 花光 明*¹, 尾藤 日出夫*²

Validation of the Computation of Hypersonic Flow with Real Gas Effects

by

Takuji KISHIMOTO*¹, Akira HANAMITSU*¹, Hideo BITO*²

ABSTRACT

The validation of the computation of hypersonic flow with real gas effects, that is assumed to be chemical equilibrium, have been carried out by the comparison with the HEG (High Enthalpy Shock Tunnel in Göttingen) shock tunnel test data. Our flow analysis system uses a structured multi-block grid, and is based on finite volume TVD upwind scheme with the curve fitting to estimate chemical equilibrium real gas effects. Calculations were done to the flows around a sphere and the simple wing-body model respectively.

The numerical results of the flow around a sphere showed very good agreement with the shock tunnel test data in the view of heat flux at a stagnation point. The results of the simple wing-body model were qualitatively improved by taking account of real gas effects with respect to the location and value of peak heat flux by shock-shock interaction, compared with frozen flow results.

1. はじめに

宇宙往還技術試験機HOPE-Xの開発が本格化する中で、空力設計においてもいくつかの克服すべき課題が明らかになってきており、その中の1つとして、大気圏再突入時の空力加熱が挙げられる。この問題は、我が国ではいまだ未経験の分野でありデータの蓄積が非常に少ないため、最近ではH-IIロケットを利用してOREX(軌道再突入実験), HYFLEX(極超音速飛行実験)等の試験を実施し、データの蓄積を図っている。しかしこのような飛行試験は、非常に有益なデータが得られるものの、容易に行えるものではなく、他の方法によるデータ収集が期待される。そこで現在我々は、従来の航空機設計と同様に、風洞試験および

CFDにより必要な設計データを得ている。

風洞試験に関しては、開発の進展とともに実在気体効果を含んだ空力加熱データの必要性が高まっていることから、近年我々も実在気体効果をともなうような高エンタルピ条件下での衝撃風洞試験もいくつか行なっている^(1, 2)。しかし、このような実在気体効果をともなう風洞試験が可能になったとはいっても、一様流条件の同定法やデータの再現性等になお課題を抱えており、必ずしも十分に信頼性の高い設計データが得られているわけではない。

一方CFDは、風洞試験と比べて、解離、電離等の化学反応の影響を(少なくとも計算上は)容易に取り入れることができるという利点を持っている。しかしそのためには、様々な仮定を含んだ物理モデルを数多く導入する必要があるため、CFDが設計ツールとして用いられるには、従来にもま

*1 川崎重工業(株) 航空宇宙事業本部

*2 宇宙開発事業団

して十分な検証がなされている必要がある。

以上のような状況に対して、我々は、ドイツ DLR (Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V.) が所有する高エンタルピー風洞 HEG (High Enthalpy Shock Tunnel in Göttingen)⁽³⁾ で実施した試験結果⁽²⁾ との比較を通じて、これまでに開発してきた極超音速流 Navier-Stokes 解析システム⁽⁴⁾ の検証を行なったので、その概略について以下に報告する。

2. 解析手法

(1) 解析システムの概要⁽⁴⁾

今回の解析で用いた解析システムは、これまでに我々が開発してきた構造格子に対応した理想気体および化学平衡流用三次元 Navier-Stokes 解析システムである。

解析に用いられる計算格子は、複雑形状に容易に対応できるマルチブロック型構造格子で、Transfinite Interpolation を利用して代数的に生成される⁽⁵⁾。

解析コードについては、薄層近似を施した Navier-Stokes 方程式を有限体積法にもとづく TVD 風上差分法により離散化している。この際、各セル内の特性変数の分布に対して微分可能リミッタを用いた MUSCL 法を適用することにより、空間方向の高次精度化を行なっている (空間二次精度)。対流項流束は AUSMDV 法⁽⁶⁾ を用いて求め、さらに Hänel の流束分離法⁽⁷⁾ を組み合わせた Shock Fix 法⁽⁶⁾ により、鈍頭物体まわりの極超音速流解析に特有の数値的不安定現象である「カーバンクル現象」の発生を抑えている。また、粘性項は中心差分により評価し、時間積分は Gauss-Seidel 緩和法による陰解法を採用している。なお今回の解析では、層流を仮定しており、乱流モデルは使用していない。

以上の理想気体/平衡流に共通の手法に加えて、平衡流の解析では Srinivasan らによる Curve Fit 法^(8,9) を用いて、化学平衡の下での熱力学的特性量 (比熱比, 音速, 温度) および輸送係数 (粘性係数, 熱伝導係数) を求めている。

(2) 各種気体の取り扱い

今回の解析では、理想気体および平衡流に加えて、凍結流についての解析も実施した。そこでここでは、これら3種の気体の解析上の取り扱いに

ついて簡単に説明する。

まず、2つの無次元パラメータ γ_p , γ_c を次式のようにそれぞれ定義する。

$$\gamma_p = \frac{h}{\varepsilon}, \quad \gamma_c = \frac{\rho c^2}{p}$$

$$\left[\begin{array}{l} h : \text{エンタルピー, } \varepsilon : \text{内部エネルギー,} \\ \rho : \text{密度, } c : \text{音速, } p : \text{圧力} \end{array} \right]$$

この定義から明らかなように、 γ_p は理想気体における比熱比と等価であり、この値を用いると状態方程式は、気体の種類によらず、

$$p = (\gamma_p - 1) \rho \varepsilon$$

と表すことができる。

我々の解析では、上記2つの無次元パラメータ γ_p , γ_c の取り扱いを変えることにより、3種の気体を区別している。すなわち、理想気体では γ_p , γ_c の値は等しく、この2つの値は一樣流および各格子点において固定されている (空気の場合同様 $\gamma_p = \gamma_c = 1.4$)。一方凍結流では、一樣流でのこれら2つのパラメータの値は密度と内部エネルギーの関数として Curve Fit により定義され⁽⁸⁾、各格子点での値はこの一樣流の値に固定される。ただし、これら以外の熱力学的特性量および輸送係数は理想気体の場合と同様の取り扱いをしている。さらに平衡流では、一樣流に加えて、各格子点においても γ_p と γ_c は Curve Fit により定義される。

なお、Curve Fit により定義された γ_p および γ_c は、理想気体の場合と異なり、必ずしも等しい値をとるわけではない (表1参照)。

3. 供試体

今回の解析の対象としたのは、我々が HEG で実施した衝撃風洞試験⁽²⁾ で用いた模型のうち、比較的単純な形状の球および翼胴模型である。

球模型は、直径が40mmで、模型表面での触媒性の影響を調べるために、同軸 (完全触媒性) および薄膜 (非触媒性) の2種の熱電対がそれぞれよどみ点から20° 間隔で装着されている。

翼胴模型 (図1) は、直径32mmの半球および円柱からなる胴体、直径24mmの半円柱前縁および平板からなる主翼をそれぞれ模擬する形状により構成されている。主翼の前縁後退角は、左舷側が60°、右舷側が55°である。またセンサーとしては、胴体ノーズおよび主翼前縁線上にそれぞれ同軸熱電対が装着されている。

4. 解析条件 (表1)

今回の解析の条件は、我々が実施した HEG 衝撃風洞試験⁽²⁾ に対応したものである。この試験で用いられた条件は3つあり、それぞれ高エンタルピ/低密度 (条件A), 高エンタルピ/高密度 (条件B), 低エンタルピ/高密度 (条件C) のように特徴づけられる。HEG では、これらの一様流条件は、リザーバでの圧力やパーマネントプローブと呼ばれる常時風路内に設置されている直径20mmの球のよども点加熱率等を用いて、化学平衡を仮定したFay & Riddell の関係式から逆算することにより求めている。

なお、表1中の理想気体に対応する解析条件は、全エンタルピ、密度、流速は変わらないものとして、 γ_p 、 γ_c をそれぞれ1.4 としたときに得られる値である。

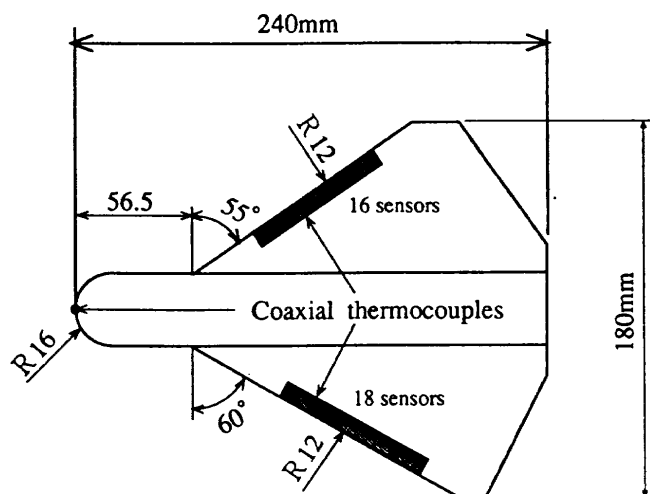


図1. 翼胴模型概略図

表1. HEG 高エンタルピ衝撃風洞試験一様流条件

	条件 A	条件 B	条件 C
全エンタルピ (MJ/kg)	18.086	21.263	14.319
一様流速度 (m/s)	5880.8	6297.4	5185.3
マッハ数	10.726 (10.434)	8.880 (8.314)	9.053 (8.763)
密度 (kg/m ³)	1.95×10^{-3}	3.17×10^{-3}	5.44×10^{-3}
圧力 (kPa)	0.430 (0.442)	1.210 (1.299)	1.320 (1.360)
温度 (K)	764.2 (790.4)	1328.8 (1427.7)	839.0 (871.2)
比熱比 (γ_p)	1.389 (1.400)	1.365 (1.400)	1.386 (1.400)
γ_c	1.360 (1.400)	1.317 (1.400)	1.352 (1.400)
壁温度 (K)	300.0		

(注) () 内の値は、理想気体に対応する条件を示す。

5. 解析結果

(1) 球まわりの解析

球模型まわりの解析では、理想気体、凍結流、平衡流について解析を実施した。用いた計算格子は、球の周方向に61点、半径方向に81点の格子点をとっている。

球表面での加熱率分布 (図3) をみると、どの条件においても、平衡流解析の結果は、よども点加熱率に関して衝撃風洞試験結果 (同軸熱電対で計測された完全触媒性データ) と非常に良い一致を示していることがわかる。HEG の一様流条件が平衡を仮定したFay & Riddell の関係をもとに決

定されていることを考え合わせると、この平衡流解析結果と風洞試験結果との良好な一致は、少なくとも基本的な部分では、我々の解析システムが妥当であることを示しているものと思われる。

また実在気体効果が加熱率に与える影響について考えてみると、一様流条件の違いによらず、平衡流の加熱率が最も大きく、凍結流、理想気体の順に加熱率が小さくなっていることがわかる(図3)。これは、平衡流では物体表面近傍で流れの温度が下がるにつれて発熱反応である再結合反応が起こることにより、衝撃波背後での温度は最も低い(図4)にもかかわらず、他の2種の気体に比べて物体表面近傍での温度勾配が逆に大きくなるためである。

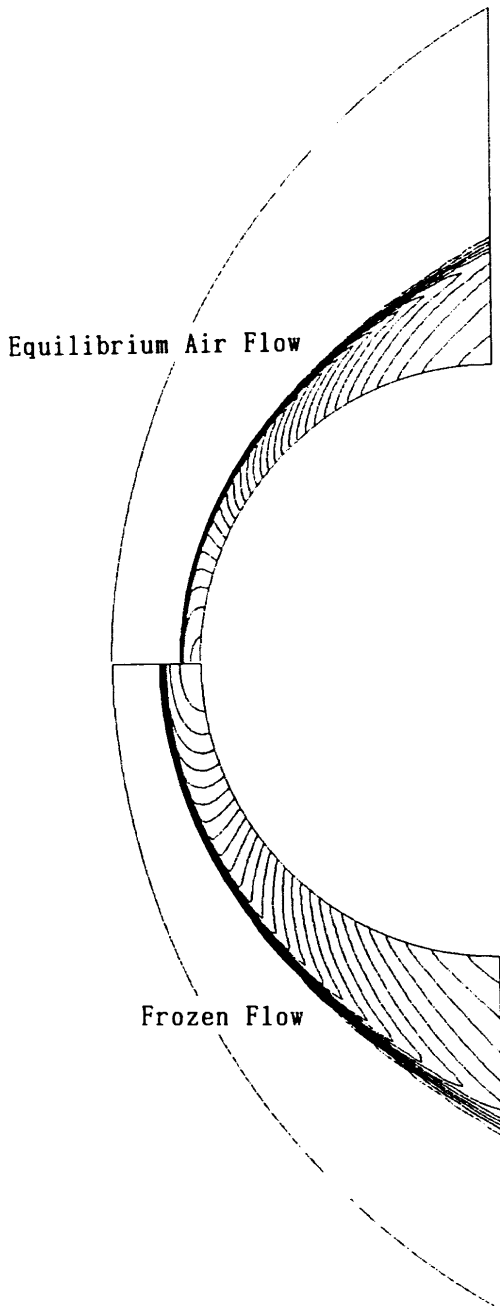
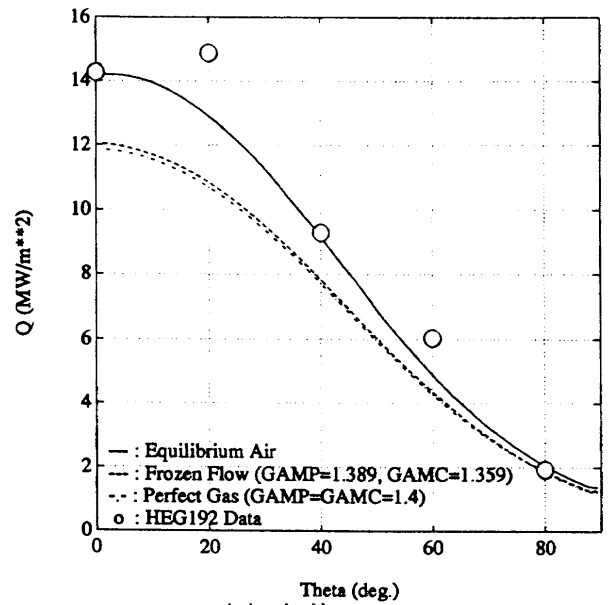
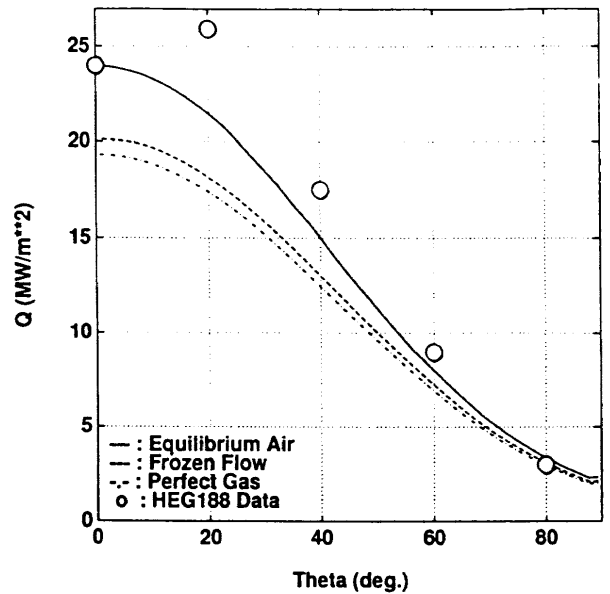


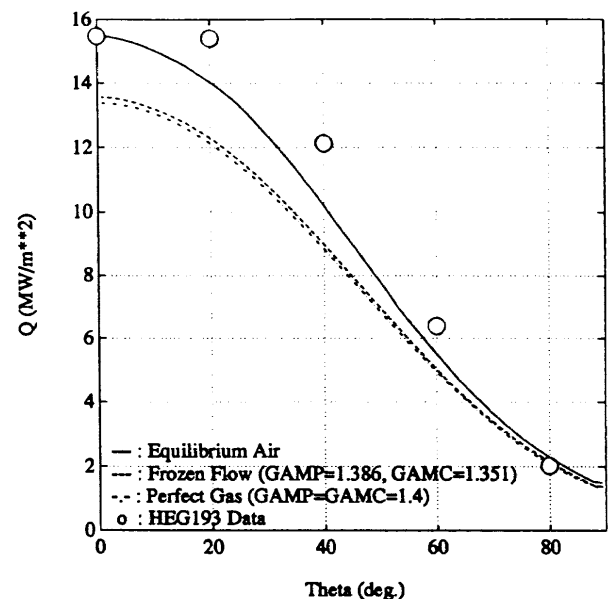
図2. 球まわりの等圧線図(条件A)



(1) 条件A



(2) 条件B



(3) 条件C

図3. 球表面での加熱率分布

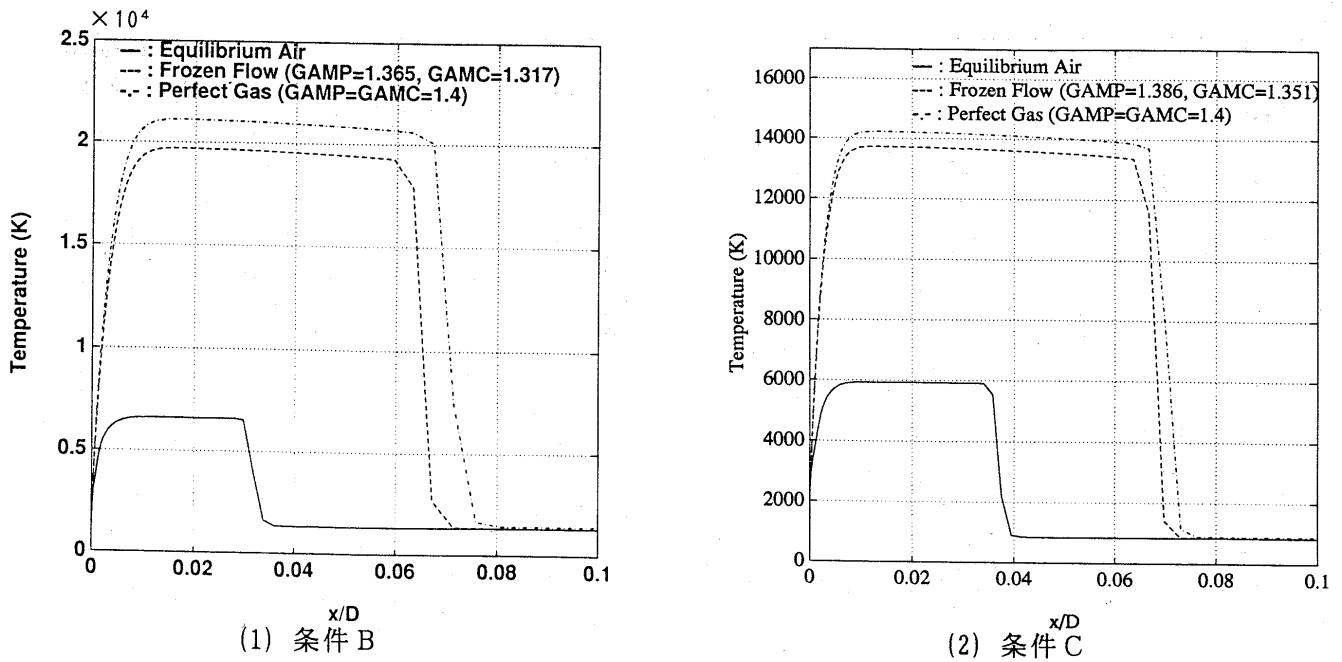


図4. 球よどみ点流線上での温度分布

(2) 翼胴模型まわりの解析

翼胴模型については、後退角 55° の右舷側のみに対して、条件Cでの凍結流および平衡流の解析を実施した。用いた計算格子(図5)は、主流方向に111点、翼スパン方向に121点、胴体周方向に51点の合計684,981点をとっている。

翼前縁での加熱率分布(図7)をみると、平衡流の解析結果は、凍結流の場合に比べて、ノーズからの衝撃波の入射(衝撃波干渉)の位置が内翼側に移動し、またそこでの加熱率のピーク値も大きくなっている。この変化により、CFDと衝撃風洞試験との対応は、凍結流の結果から改善されて

いることがわかる。

しかし衝撃波干渉位置から外翼側では、解析により得られた加熱率は、風洞試験結果との差異が大きくなっている(図7)。これは、ここで現れている衝撃波干渉がType VIであると予想されることから、その場合の特徴である衝撃波干渉部から発生する膨張波や剪断層を捕らえるには、今回の計算格子ではスパン方向の格子点の分布が十分ではなかったためと考えられる。ただし、風洞試験結果についても不確定要素がいくつか考えられるので、今後は解析、風洞試験の両面についての詳細な検討が必要であろう。

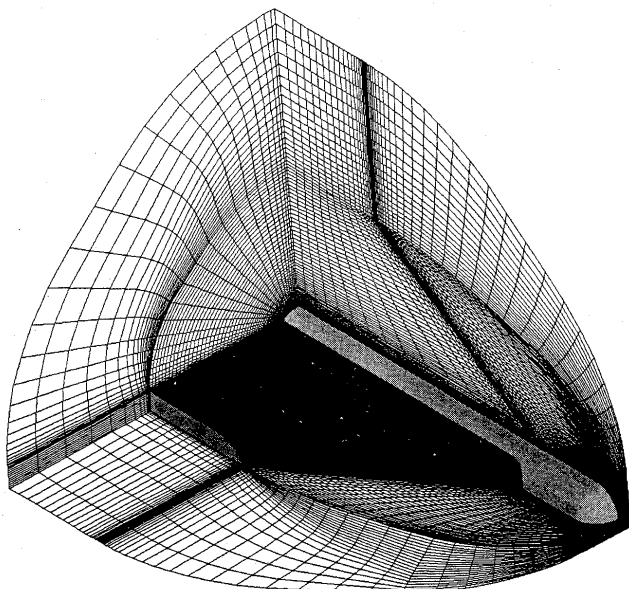


図5. 翼胴模型まわりの計算格子

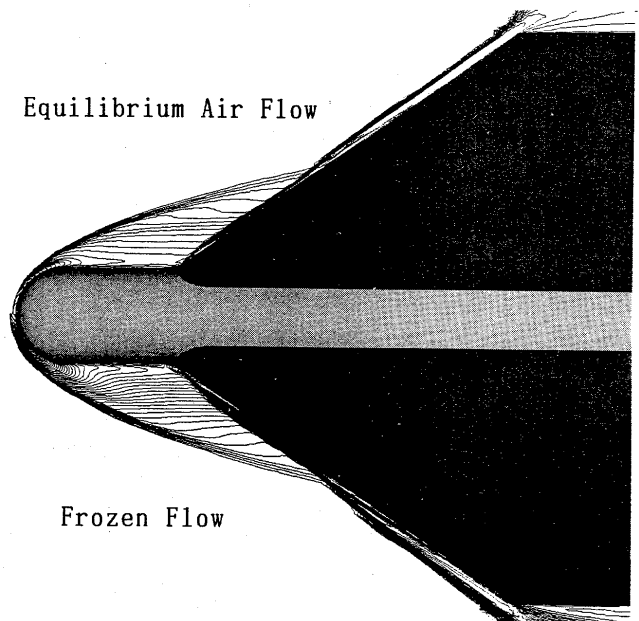


図6. 翼胴模型まわりの等温度線図(条件C)

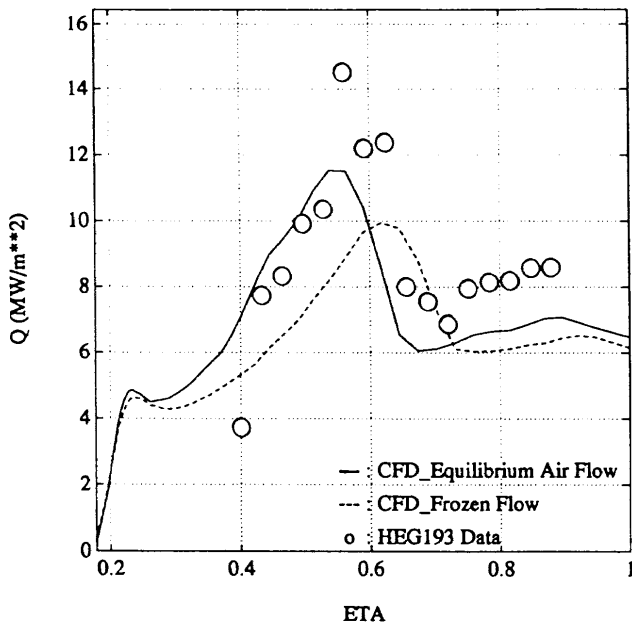


図7. 翼胴模型翼前縁での加熱率分布 (条件C)

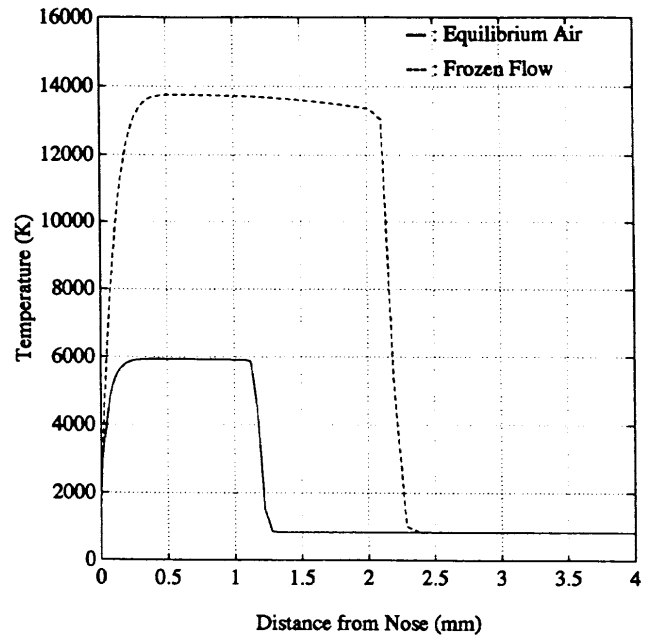


図8. 翼胴模型ノーズよどみ点流線上の温度分布 (条件C)

6. まとめ

以上のように、球および翼胴模型まわりの極超音速流解析を実施し、HEG 衝撃風洞試験結果と比較することにより、我々が開発してきた解析システムの検証を行なった。その結果、我々の解析システムが、少なくとも基本的な部分においては、妥当であることが確認できた。

しかし、HOPE-Xの空力加熱特性に大きな影響を与える衝撃波干渉とそれともなう膨張波および剪断層の入射/反射等の複雑な現象を正確に捕えるためには、必ずしも十分とはいえ、解析と風洞試験の両面から詳細な検討を加えていくことが、我々にとっての今後の重要な課題である。

参考文献

- (1) 尾藤日出夫, 花光明, 大垣正信, 濱田義洋, 「高エンタルピー衝撃風洞試験について」, 第25回流体力学講演会講演集, 1993.
- (2) Hanamitsu, A., Kishimoto, T., and Bito, H., "High Enthalpy Flow Computation and Experiment around the Simple Body", Proceedings of the 13th NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics, NAL SP-29, 1996.
- (3) Eitelberg, G., McIntyre, T. J., and Beck, W. H., "The High Enthalpy Shock Tunnel in Göttingen", AIAA Paper 92-3942, 1992.
- (4) Kishimoto, T., and Kaneko, S., "Hypersonic Flow Analysis around OREX and Hyperboloid Flare", Proceedings of the 13th NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics, NAL SP-29, 1996.
- (5) Sawada, K., and Takanashi, S., "A Numerical Investigation on Wing/Nacelle Interferences of USB Configuration", AIAA Paper 87-0455, 1987.
- (6) Wada, Y., and Liou, M.-S., "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities", AIAA Paper 94-0083, 1994.
- (7) Hänel, D., and Schwane, R., "An Implicit Flux-Vector Splitting for the Computation of Viscous Hypersonic Flow", AIAA Paper 89-0274, 1989.
- (8) Srinivasan, S., Tannehill, J. C., and Weilmuenster, K. J., "Simplified Curve Fits for the Thermodynamic Properties of Equilibrium Air", ISU-ERI-Ames-86401, ERI Project 1626, CFD 15, 1986.
- (9) Srinivasan, S., and Tannehill, J. C., "Simplified Curve Fits for the Transport Properties of the Equilibrium Air", NASA CR-178411, 1987.

VSL法を用いたOREX周りの非平衡流解析

大山 健一 *

Simulation of Nonequilibrium Flow around OREX Using VSL Method

by

Ken-ichi Ohyama

ABSTRACT

Viscous shock layer(VSL) method which is able to simulate nonequilibrium flows on catalytic walls was developed. In this study we estimated the effect of the wall catalycity on the surface heat transfer through the comparison between the results of the nonequilibrium flow simulation around OREX and its flight data.

1. はじめに

現在研究開発の行われている宇宙往還機の再突入極超音速飛行時における機体表面空力加熱率を高精度に予測することは、機体設計上必須である。これまで各種極超音速風試や平衡流解析が行われているが、実機極超音速飛行条件下での非平衡効果を含めた高エンタルピ流空力特性についての本格的な研究は未だ十分には行われていない。そのうちでも壁面触媒効果は空力加熱現象に非常に大きな影響を与えることが知られている¹⁾。そこで本研究では非平衡化学反応を考慮した極超音速空力／空力加熱解析手法を開発し、軌道再突入実験機(OREX)の飛行実験データと解析結果との比較を通じて壁面触媒特性の推定を試みた。

2. 解析手法

支配方程式には、多成分非平衡流に対する軸対

称Viscous Shock Layer方程式²⁾を用いた。また、解析気体は $N_2, O_2, N, O, NO, NO^+, e^-$ の7種7反応モデル及び O_2, O の2種2反応モデル²⁾とした。

境界条件は、衝撃波直後では化学種の濃度を一様流と同じ値としその他の状態量はRankine-Hugoniotの関係から決定される。壁面上では滑り無し条件、壁温はOREX飛行データより得られた壁面温度、化学種の濃度は壁面触媒効果を表す以下の式³⁾で決定される。

$$(\rho_i)_w k_{wi} = - \left[\rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial y} \right]_w$$

ここで k_{wi} は化学種 i の触媒再結合速度定数、 D_i は拡散係数、 c_i は化学種 i の質量濃度、 ρ は密度を表す。

3. 解析結果

平成6年2月にH-II ロケット1号機で打ち上げられた軌道再突入実験機 (OREX) には温度計測センサの他に圧力センサ、静電プローブ等が装着されている。これらのセンサの配置を図4.1に示す。C/Cキャップ部における表面空力加熱率の値の推定は、C/Cキャップ内面の温度センサから得られた温度時間履歴データをもとに行なわれた。そのプロセスを図4.2に示す。

図4.3にOREXの淀み点における空力加熱率を飛行経路上の各点で解析した結果と飛行データの比較を示す。解析は、壁面の境界条件を完全触媒壁条件($kw=\infty$)あるいは完全非触媒壁条件($kw=0$)として行った。高度100km付近から45km付近の間で壁面状態の違いによる差がはっきりと現われている。特に空力加熱率が最大となる高度64km付近では壁面の触媒性の影響が顕著に現われており、触媒性の定量的評価が非常に重要であることがわかる。また混合気体モデルを2種モデルからより実際の状態に近い7種モデルへとすることで空力加熱率が9%程度低い値となることもわかる。

図4.4は高度64kmにおけるOREX機体表面上の空力加熱率分布を示したものである。飛行結果はやはり完全触媒壁と完全非触媒壁の間にある。空力加熱率が淀み点から離れるにしたがって減少していく様子が定性的に捕えられており、OREXのような鈍頭物体形状に対して本解析法は淀み点以外の領域に対しても有効であると言える。

図4.5は高度92kmと高度64kmでの淀み流線における衝撃層内部の温度分布である。高度64kmでは境界層をはっきりと確認することができるが、高度92kmでは境界層と外部流の区別がつきにくい。図4.6は高度92kmでの淀み流線における衝

撃層内部の酸素原子の質量分率の分布である。図は非平衡流解析結果から得られた酸素原子の分布と非平衡流解析結果の温度における平衡状態の酸素原子の分布を示す。平衡状態の原子の量と非平衡状態の原子の量はかなり違っており、この比較から流れが非常に強い非平衡流であることがわかる。

ここで飛行試験データより壁面の触媒性についての定量的評価を行うことを試みる。図4.7は高度64kmでの淀み点における空力加熱率を壁面の触媒率を変化させながら解析した結果である。高度64kmにおける飛行試験結果の加熱率は 412.8kw/m^2 であることから解析結果で同じ加熱率となる触媒率($kw=480.5\text{cm/sec}$)がこの流れ条件、壁の状態における触媒率と推定される。このような解析を飛行経路上の各点で行った結果を図4.8に示す。類似の耐熱材料を使用したスペースシャトルでの触媒率推定結果¹⁾とも比較的近く今回の触媒率の推定結果は概ね妥当であると思われる。飛行試験データの計測精度の問題や使用した化学モデルや解析手法によっても触媒率推定結果は変わり得るとの報告⁴⁾もあるが、今後同様の手法を用いて触媒率の推定を行うことにより非平衡効果について高精度に解析を行うことができる。

4. まとめ

極超音速非平衡流の空力/空力加熱率特性を高精度に解析するため壁面触媒効果を考慮した非平衡流解析手法を開発した。

この解析手法を用いてOREX周りの流れ場を解析し、飛行データと比較することにより解析モデルの妥当性及び壁面触媒性の影響を定量的に把握した。

参考文献

- 1) D.A.Stewart, J.V.Rakich and M.J.Lanfranco, "Catalytic Surface Effects Experiment on the Space Shuttle," AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics: Thermophysics of Atmospheric Entry, Vol.82,1982, pp.248-272.
- 2) E.W.Miner and C.H.Lewis, "Hypersonic Ionizing Air Viscous Shock-Layer Flows over Nonanalytic Blunt Bodies," NASA CR-2550,1975.
- 3) Carl D. Scott, "Wall Catalytic Recombination and Boundary Conditions in Nonequilibrium Hypersonic Flows with Applications," Advances in Hypersonics, Vol. 2, 1992, pp.176-250.
- 4) P.C.Ting and W.C.Rochelle, "Comparion of Viscous Shock Layer and Boundary Layer Reentry Heating Techniques for Orbiter Nose Cap," AIAA-86-1350,1986.

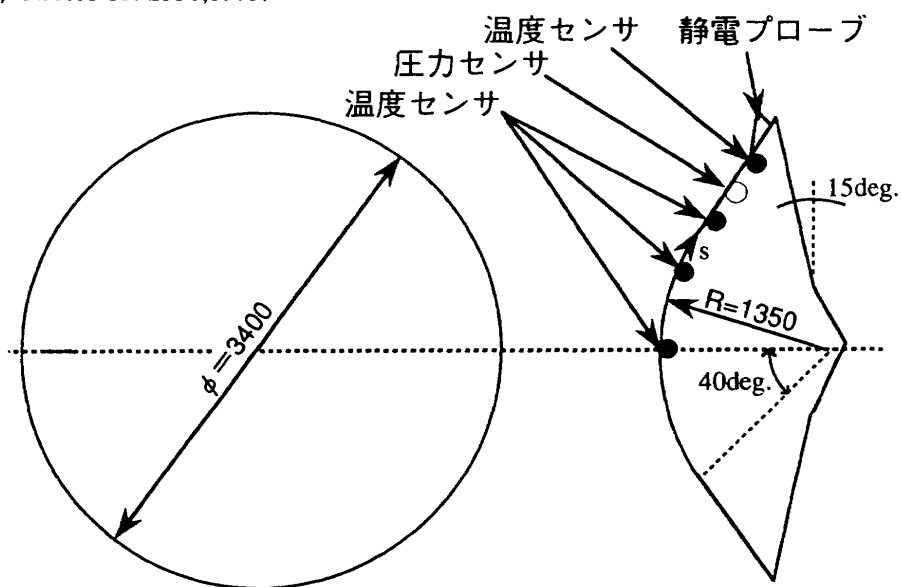


図4.1 OREX形状及びセンサ位置

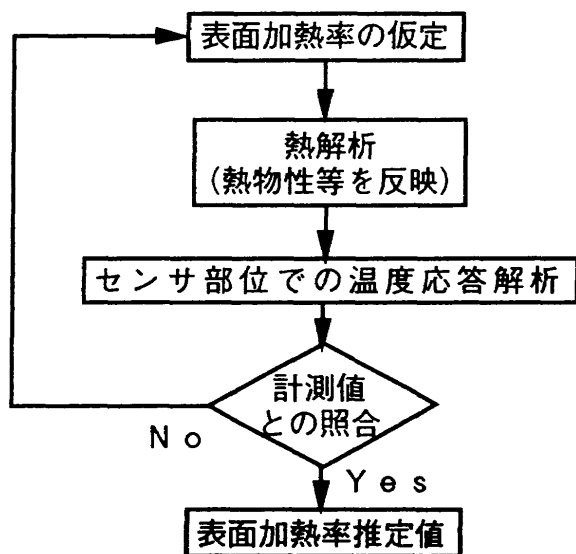


図4.2 空力加熱率の推定プロセス

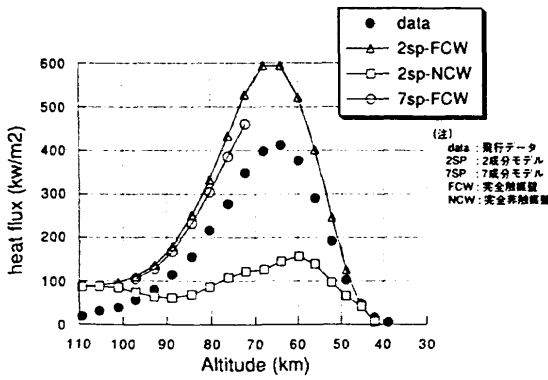


図 4.3 淀み点空力加熱率の飛行データと解析結果の比較

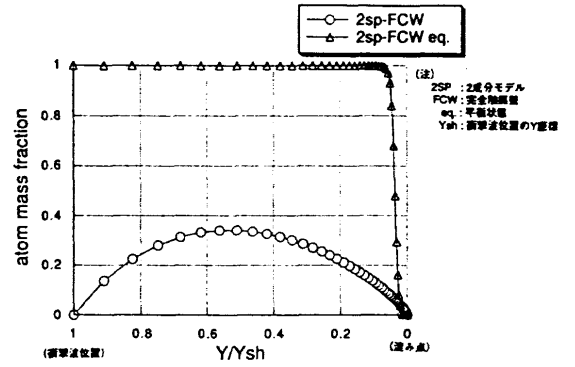


図 4.6 淀み流線上の酸素原子質量分率と平衡状態での質量分率 (高度 92km)

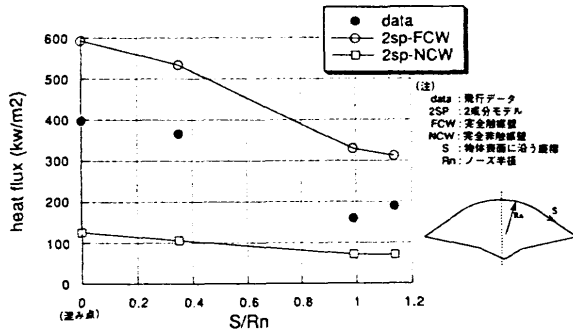


図 4.4 機体表面上の空力加熱率

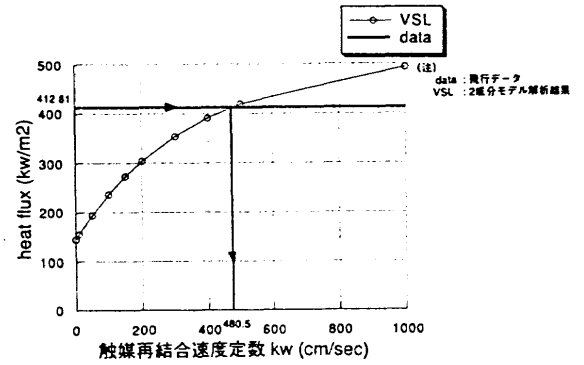


図 4.7 淀み点触媒率の推定法

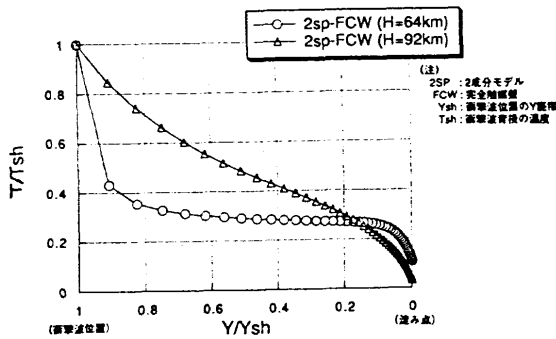


図 4.5 淀み流線上の温度分布 (高度64kmと高度92km)

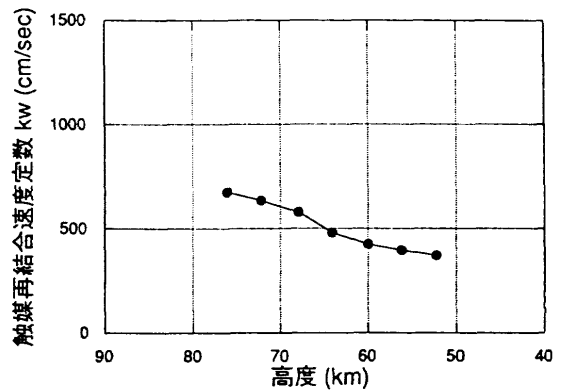


図 4.8 淀み点触媒率の推定結果

再突入物体周りの極超音速非平衡流れに及ぼす壁面触媒性の影響について

黒滝卓司*

Effects of Wall Catalysis on the Non-equilibrium Hypersonic Flow around Reentry Vehicle

by

Takuji Kurotaki

Kamakura Works, Mitsubishi Electric Corporation

ABSTRACT

Effects of surface catalysis on the non-equilibrium hypersonic flow around reentry vehicle are discussed by solving Navier-Stokes equations considering non-equilibrium effects.

Axisymmetric full Navier-Stokes equations which have chemically and thermally non-equilibrium effects are considered by using Park's two-temperature model and the vibrational relaxation model from the SSH theory. For the time integration, an efficient numerical algorithm of an implicit finite difference method is used, which consists of the combination of LU-SGS scheme and the implicit diagonal method for a source Jacobian matrix. For convective terms, AUSMDV scheme generalized into the non-equilibrium flow case is applied.

Effects of catalytic efficiency on aerodynamic heating rates at the wall around OREX are examined in detail. Numerical analyses are performed at several flight altitudes and compared with flight data. Catalytic efficiency of material at the stagnation point is estimated and it is clear that it shows good agreement with data of similar materials of another vehicles such as Space Shuttle.

1. はじめに

大気圏再突入時に飛行物体の受ける空力加熱の問題は、将来実用化されるであろう宇宙往還型の飛行体の設計上非常に重要な問題であり、各種の風洞試験データ及びいくつかの実フライトデータが蓄積されつつある。しかし、実在気体効果を含む飛行時の現象をこれらの実験的手段に頼ることは、コストあるいは技術的な観点から見ると非常に困難であり、今後かなりの予測精度が数値解析に求められるようになると思われる。

実在気体効果を含む流れの解析の際には、壁面における化学的現象を記述する何らかの境界条件を与えることが必要となるが、通常非触媒壁あるいは触媒壁等の極端なケースを考へることが多い。ところが、実際のフライトでは、OREXの例^[1]に示すように、非常に非触媒壁に近い C/C 材等を使用した機体の場合でも、淀み点熱流束は両者の間にあり、有限触媒効果を考慮しなければならない。

本研究では、昨年度の本シンポにおいて企画されたワークショップ^[2]の延長として、課題の一つであった OREX を例にとり、極超音速非平衡流れに及ぼす壁面触媒性の影響を考察するとともに、解析値とフライトデータを用いて使用された材料の有限触媒性を推定することを試みる。なお、本研究は、航空宇宙技術研究所との共同研究の一環として行ったものである。

2. 基礎方程式及びスキーム

基礎方程式系として、軸対称の Full ナビエ-ストークス方程式を考へる。気体モデルとして7成分24反応空気モデル (O₂, N₂, O, N, NO, NO⁺, e⁻) を用い、e⁻を除く各化学種に連続の方程式を適用する。また、解離反応速度に及ぼす分子振動緩和の影響を入れるため Park の2温度モデル^[3]を用い、並進・回転及び振動・電子励起エネルギーモードはそれぞれ平衡状態にあるとする(代表温度をそれぞれ T, T_v

で表わす)。また、流れは定常とし、層流境界層のみを考へる。

これらの仮定のもとに、基礎方程式はデカルト座標系で以下のように表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(E - E_v) + \frac{\partial}{\partial y}(F - F_v) + \alpha H = S + \alpha H_v \quad (1)$$

ここに、

$$\alpha = \begin{cases} 0 & : 2 \text{次元} \\ 1 & : \text{軸対称} \end{cases}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho v \\ E_t \\ E_{vib} + E_e \\ \rho s \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \\ u(E_{vib} + E_e) \\ \rho su \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \\ v(E_{vib} + E_e) \\ \rho sv \end{bmatrix} \quad (2)$$

E_v, F_v : 粘性項マトリックス

S : ソース項マトリックス

H, H_v : 軸対称時の対流項及び粘性項マトリックス追加項

ρ : 密度、 u, v : 速度、 p : 圧力

E_t : 単位体積当たり全エネルギー

E_{vib}, E_e : 単位体積当たり振動、電子エネルギー

添字 s : 気体種 (O₂, N₂, O, N, NO, NO⁺); 1 ~ 6

である。化学反応速度定数は Park によって提唱されたモデル、輸送係数は kinetic theory を基礎にして構築したものをを用いた^{[3], [4]}。また、振動・電子エネルギー方程式のソース項に現れる分子振動緩和時間のモデル化には、SSH理論^{[5], [6]}を使用した。通常用いられている Landau-Teller 型のモデルでは、並進温度が約8,000K 以上において分子振動緩和時間を過小評価してしまうことが知られているが、SSH理論ではこれを避けることができる。

基礎方程式 (1) は無次元化された後、一般座標系に変換されて解かれるが、本解析では陰的差分法を用いて定式化

* 三菱電機 (株) 鎌倉製作所

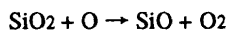
を行い、時間積分には並列計算に適した LU-SGS スキームを用いた^[7]。ただし、非平衡流の場合には、左辺の反転すべき係数マトリックスにソース項マトリックス S のヤコビアンが含まれる。これは一般に密なマトリックスとなるため、反転には緩和法等の反復法を必要とする。この非効率性を避けるため、ソース項のヤコビアンを対角行列で近似する Diagonal Implicit 法を組み合わせている^[8]。また、対流項の評価に関しては、AUSMDVスキーム^[9]を非平衡流に拡張したものを用いた。ただし、カーバンクル現象を避けるため、衝撃波付近では、Hanel のFVSスキームに切り替えている^[9]。

3. 境界条件

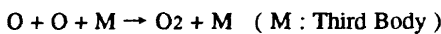
本解析では、壁面境界条件として、壁面に直交する方向での圧力勾配を 0、速度及び温度に関してはすべり無しを仮定し、さらに振動・電子励起温度も壁温 T_w に等しいとした。ただし壁温に関しては、実際のフライトでは、使用されている材料の物性値や厚さに応じて異なる値をとっていると考えられるが、詳細な分布データが未知であるため、個々のフライトデータからの淀み点における推定値を一様分布させた。

今回注目すべき壁面における有限触媒性であるが、前提条件として、O 及び N 原子の再結合のみを考慮し、NO, NO⁺, e⁻ は非触媒であると仮定した。今回の解析範囲では、NO⁺, e⁻ の壁面付近の質量分率は非常に小さく、事実上空力加熱率には影響しないこと、及び NO 分子の壁面での反応の過程が明確でないことがその理由である。

一般に壁面に衝突する解離した原子が再結合する過程は非常に複雑であり、C/C材の場合、大別して、



のような一次反応と



で表わされるような二次反応が存在する。さらに、両者の反応の割合も壁面上における密度等の気体の状態によって変化することが知られている^[3]。本解析では、これらの現象を直接モデル化する代わりに、壁面から平均自由行程のオーダーだけ離れた面における、解離原子の拡散による質量流束と壁面で消費される質量のバランスを考える。この場合、壁面境界条件は次式で表わされる。

$$-k_s \rho_s = -\rho D_s \frac{\partial c_s}{\partial \eta} \quad (3)$$

ただし、 k_s は catalytic velocity、 D は拡散係数、 c は質量分率、 η は壁面垂直方向座標、添字 s は化学種を表わす。さらに catalytic velocity は、catalytic efficiency γ を用いて、次式で表わされる。

$$k_s = \gamma \sqrt{k T_w / (2\pi m_s)} \quad (4)$$

ここに、 k はボルツマン定数、 T_w は壁面温度、 m は原子質量である。 γ は、壁面に衝突する質量流束が壁面における触媒反応で消費される割合を示し、 $\gamma = 0$ の時は非触媒壁に、 $\gamma = 1$ の時は衝突する解離原子がすべて再結合する、いわゆる触媒壁に対応する。catalytic efficiency γ は、一次反応系の

場合には壁面温度の関数となり、壁面における密度にはよらないことが知られている^[3]。また、本来 γ は O, N 原子それぞれに別々に定義すべきものであるが、本解析では同一と仮定した。

(3) 式より、O, O₂, N, N₂ に対する境界条件は、

$$\begin{aligned} -k_{O_2} \rho_{O_2} &= -\rho D_{O_2} \frac{\partial c_{O_2}}{\partial \eta}, & +k_{O_2} \rho_{O_2} &= -\rho D_{O_2} \frac{\partial c_{O_2}}{\partial \eta}, \\ -k_{N_2} \rho_{N_2} &= -\rho D_{N_2} \frac{\partial c_{N_2}}{\partial \eta}, & +k_{N_2} \rho_{N_2} &= -\rho D_{N_2} \frac{\partial c_{N_2}}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (5)$$

で記述することができ、これらを空間2次精度で離散化した定式化を用いる。具体的には、1時間ステップ前(添字 n で表わす)の密度等の物理量と新しく求められた壁面圧力を用いて、気体の状態方程式から、まず壁面における密度が算出される。

$$\rho_w^{(n+1)} = \frac{3 \left[p_w^{(n+1)} + \frac{2}{3} \bar{R} T_w \Delta \eta \sum_{s=O, O_2, N, N_2} \frac{A_s^{(n)}}{M_s} \right]}{\left[\frac{4}{\rho_{j=2}^{(n)}} \sum_{s,j=2} \frac{\rho_{s,j=2}^{(n)}}{M_s} - \frac{1}{\rho_{j=3}^{(n)}} \sum_{s,j=3} \frac{\rho_{s,j=3}^{(n)}}{M_s} \right] \bar{R} T_w} \quad (6)$$

O, O₂, N, N₂ に対する密度は、(6)式を用いて、

$$\rho_{s,w}^{(n+1)} = \frac{1}{3} \left[4 \rho_{s,j=2}^{(n)} \frac{\rho_w^{(n+1)}}{\rho_{j=2}^{(n)}} - \rho_{s,j=3}^{(n)} \frac{\rho_w^{(n+1)}}{\rho_{j=3}^{(n)}} - 2 \Delta \eta A_s^{(n)} \right] \quad (7)$$

から求められる。ただし、(6),(7)式において、 \bar{R} は普遍気体定数、 $\Delta \eta$ は壁面での η 方向格子間隔、添字 w は壁面、 j は η 方向格子インデックスを表わし、

$$\begin{aligned} A_{O_2} &= + \frac{k_O \rho_{O_2,w}}{D_{O_2}}, & A_{O_2} &= - \frac{k_O \rho_{O_2,w}}{D_{O_2}}, \\ A_{N_2} &= + \frac{k_N \rho_{N_2,w}}{D_{N_2}}, & A_{N_2} &= - \frac{k_N \rho_{N_2,w}}{D_{N_2}} \end{aligned}$$

である。これらのアルゴリズムを解析コードの壁面境界条件に組み込み、最終的に定常解を求める。

なお、流れの流出条件としては、流出面より1格子以上流側の物理量を0次外挿で与えた。

4. 解析結果及び考察

解析範囲として、OREX のフライトケースのうち、淀み点空力加熱率のピーク時を含む高度 75.81, 67.66, 63.60, 59.60 km の計4ケースを考え、それぞれのケースに対して、catalytic efficiency γ をパラメータ ($\gamma = 0, 0.005, 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$ 及びフライトデータからの γ の推定に必要な値)として、8ないし9個の計算を実施した。公表されているフライト時の諸量を表4.1に示す^[10]。壁面付近のセルレイノルズ数は、予備的な解析を行って決定し、高度 75.81, 67.66 km のケースでは1、残りのケースでは2とした。また、解析には81×81の格子を用いた。

フライト時の淀み点空力加熱率の履歴と、非触媒壁 ($\gamma = 0$) 及び触媒壁 ($\gamma = 1.0$) を仮定した時の解析結果を図4.1に示す。フライト時の値は、非触媒壁と触媒壁を仮定した値の間にあり、さらにこの仮定値の幅がフライト値そのものと同オーダーであることを考えると、壁面の有限触媒性の重要性が理解できる。

壁面の触媒性の影響を調べる前に、まず高度による流れ場の違いを、特に一様流の希薄性の違いに起因する非平衡性に着目して概観することにする。図 4.2 に、並進・回転温度分布と振動・電子温度分布を示す。この範囲内ではマッハ数の変化が比較的小さいため、物体前方の離脱衝撃波位置はほとんど変化しない。また、温度分布も単にコンター図を比較しただけでは、絶対値の違いはわかるものの、それぞれの高度における流れ場の特徴を把握することは難しい。

そこで、それぞれの高度における淀み点流線上の温度分布を比較してみる。図 4.3 からわかるように、高度が高いケースでは、衝撃層における並進・回転温度と振動・電子温度の差が大きく、強い熱的非平衡性が現われており、逆に低高度のケース（高度59.60 km）では、衝撃層内ではほとんど熱的平衡状態にあることがわかる

さらに化学的非平衡性の違いをみるために、非触媒壁ケースを仮定した場合の O, N 原子の淀み点流線上分布を図 4.4 に示す。O 原子は全ケースにおいて衝撃層内において完全に解離し、境界層内においても再結合せず、いわゆる化学的非平衡性が現われている。しかし、N 原子の場合を見ると、高度によって衝撃層内の解離の割合が異なり、かつ境界層内の再結合の様子も異なっており、高度が低くなるにつれて化学的非平衡性が弱くなる。従って、解析範囲内において流れを強いて分類すれば、高度の大きいケースは、熱的にも化学的にも非平衡性の強い流れ、高度の小さいケースは、熱的にはほぼ平衡だが、化学的には非平衡な流れと考えることができる。

次に、壁面における触媒性の淀み点空力加熱率への影響

を図 4.5 に示す。横軸に catalytic efficiency γ を取り、縦軸にトータルな空力加熱率 q_w の他に、伝導、拡散による寄与及びフライトデータを並記した。いずれの高度の場合においても非触媒条件 ($\gamma = 0$) 近傍の変化が特に大きく、 10^3 オーダーのわずかな変化に対して敏感に応答する。これは、主として拡散による熱流束変化によるためである。また、catalytic efficiency が 0.1 程度になると空力加熱率はほぼ一定値に達する。

各々のケースについて、それぞれの非触媒条件 ($\gamma=0$) での空力加熱率で規格化したものが図 4.6 である。各高度を通じて、catalytic efficiency の変化に対する空力加熱率の変化の傾向はほぼ同一である。しかし高度の高いケースの方が、catalytic efficiency が増加するにつれて空力加熱率の増加する割合が大きい。図 4.3 からわかるように高度 75.81 km のケースでは、壁面における解離原子の割合が大きく、非触媒条件時に約56% に達しているのに対し、高度 59.60 km のケースでは約 27% 程度である。従って、高度の高い方が、壁面の触媒反応によって再結合すべき解離原子が多く存在していることにその原因があるものと思われる。

図 4.7 は、高度 63.60 km のケースにおける、O, N 原子の壁面付近の淀み点流線上分布を、catalytic efficiency γ をパラメータとして比較したものである。catalytic efficiency が増加するに従い、壁面上に存在する解離原子が再結合のために消費される割合が増えるため、質量分率は減少していく。catalytic efficiency が 0.1 程度になるともはや壁面上には再結合すべき解離原子はほとんど存在しなくなり、これ以上 catalytic efficiency が増えても空力加熱率はこれ以上増加しないことが理解できる。

表 4.1 OREX フライト時条件

フライト時間 t (sec)	高度 H (km)	速度 U _∞ (m/sec)	温度 T _∞ (K)	圧力 P _∞ (N/m ²)	淀み点 壁面温度 T _w (K)	マッハ数 M _∞
7431.5	75.81	7245.7	206.82	2.1717	928	25.04
7451.5	67.66	6720.3	225.99	7.892	1251	22.22
7461.5	63.60	6223.4	237.14	14.02	1413	20.09
7471.5	59.60	5561.6	248.12	23.60	1519	17.55

上：並進・回転温度分布
下：振動・電子励起温度分布

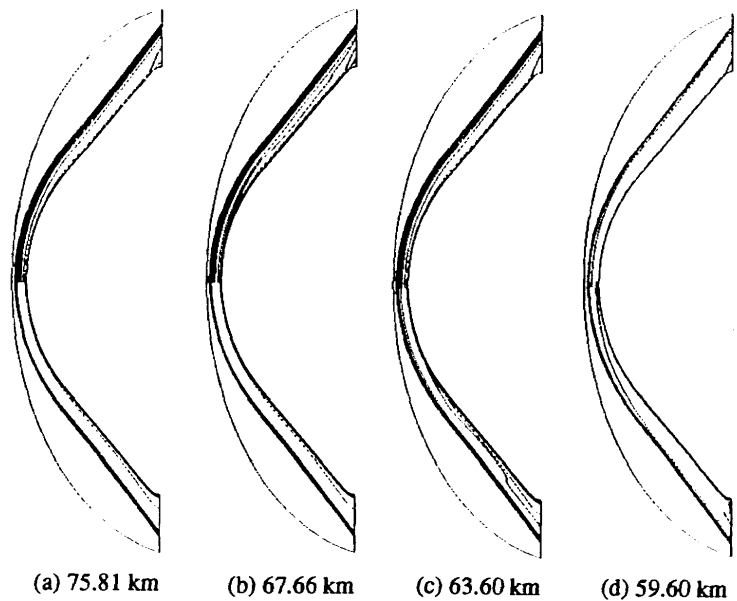


図 4.2 各高度における流れ場（非触媒壁）

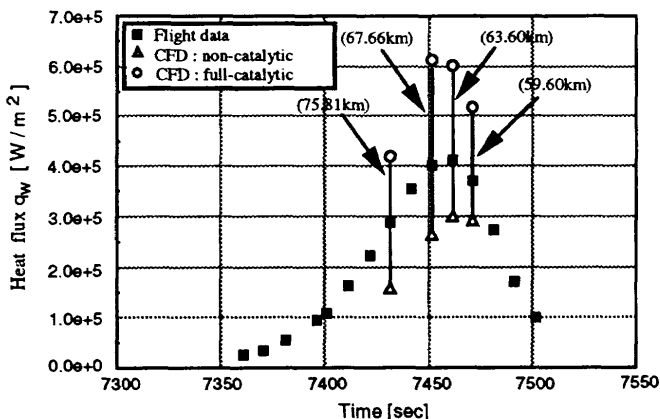


図 4.1 OREX 淀み点空力加熱率フライトデータ及びCFD 解析値

以上の議論では、主として淀み点における空力加熱率に対する影響について考察を加えてきたが、OREX の機体表面全体のcatalytic efficiency による空力加熱率に対する影響を高度 59.60 km の場合について図 4.8 に示す。横軸は機体中心線に垂直に周方向に取った座標である。一般に、淀み点付近において強い非平衡性を示す流れも、後方に進むにつれ徐々に平衡状態に近づいて解離原子の再結合が進む。従って、壁面の触媒性の影響は後方に行くにつれ小さくなると予想される。しかし、OREX 程度の比較的小型なカプセル形状では、解離原子の再結合が起こり始める前の状態、すなわち frozen な状態のまま気体は通り過ぎてしまい、結局、非触媒条件では解離原子の割合はほとんど同じに保たれる。そのため、解析した高度範囲の中で最も一様流密度が大きく、後方において平衡状態に近づきやすいと予想される低高度のケースでも、図 4.8 で見られるように、いままで見てきた淀み点付近の傾向が機体全体に対してはほぼあてはまる。

解析値とフライトデータを用いて推定した材料のcatalytic efficiency γ の推定値を図 4.8 に示す。この推定値は、図 4.5 において、解析から得られた γ に対する淀み点空力加熱率の曲線と、フライトデータからの測定値との交点から求められる。図 4.9 には、他の同様な材料に関するデータも並記した^[11]。この中で、Scott 及び Kolodziej & Stewart によるデータは地上での試験であり、Zoby, Guputa & Simmonds によるデータはスペースシャトルのフライトデータからの推定値である。これらのデータと今回の推定値を比較する

と、オーダー的には概ね良い一致を見ており、フライトデータの測定値と解析値両者の精度が妥当であることが実証されたと考えられる。今後、予測計算に使用するモデルの精度向上のため、他のフライトデータ及び種々の手法を用いた同様な解析結果の蓄積が待たれる。また、フライト実験とは独立した地上における材料実験によるデータの取得も、今後重要になってくるものと思われる。

5. 結論

高度変化による再突入物体周りにおける極超音速流れ場の非平衡性の変化を、OREXを例にとり、解析により明らかにした。

壁面における有限触媒性を示すパラメータとしてcatalytic efficiency γ を導入し、空力加熱率に及ぼす影響を考察した。その結果、(1) 流れ場の非平衡性の強弱にかかわらず、 $\gamma = 0.1$ 程度で淀み点空力加熱率はほぼ一定値に達する。(2) 空力加熱自体の増加の程度は、壁面付近の解離原子の割合、従って、流れ場の非平衡性と強い相関があることが明らかとなった。

解析値とフライトデータより、catalytic efficiency γ を推定した。推定値は、既存のデータと比較して、材料そのものは異なるが、オーダー的には概ね良く一致していることが確認された。今後、他のフライトデータ及び種々の手法を用いた同様な解析結果の蓄積が待たれる。また、フライト実験とは独立した地上における材料実験によるデータの取得も、今後重要になってくるものと思われる。

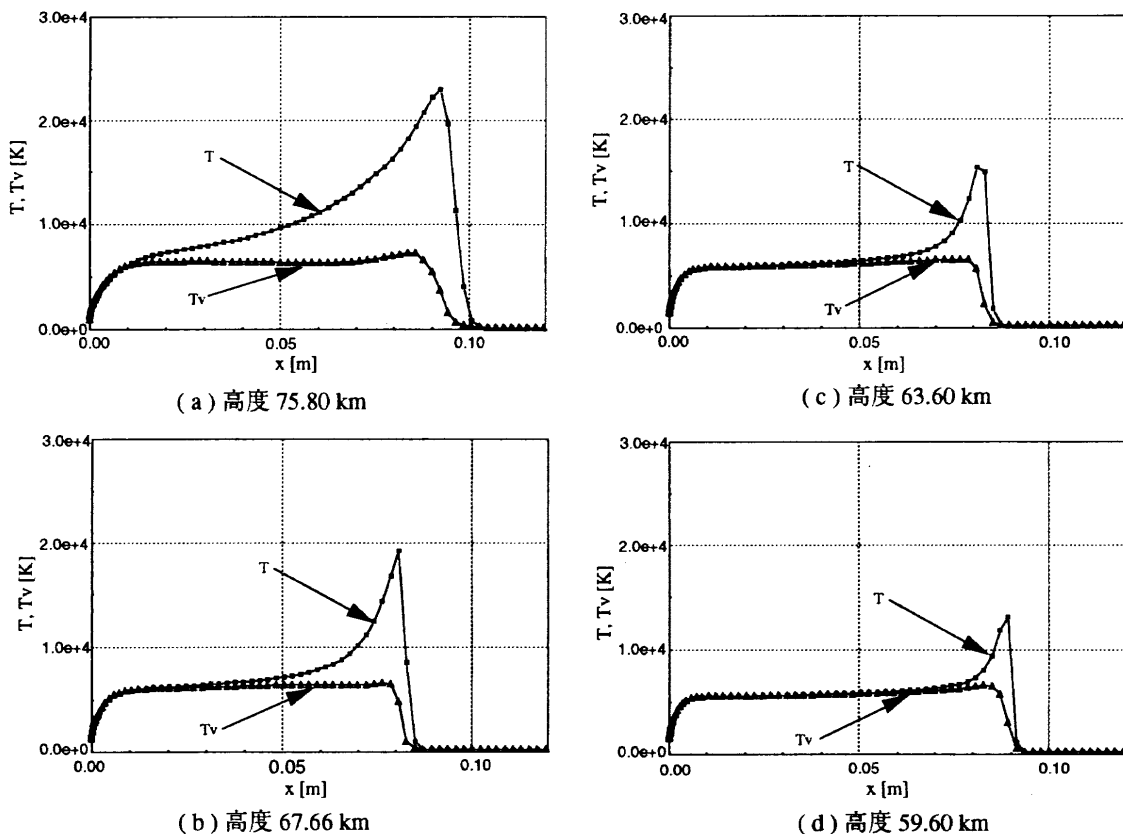
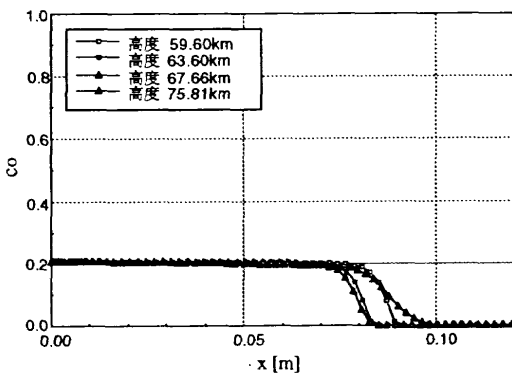


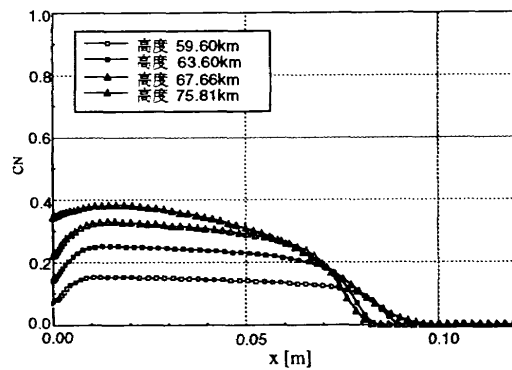
図 4.3 淀み点流線上温度分布 (非触媒壁)

参考文献

- [1] Gupta, R.N., Moss, J.N. and Price, J.M., "Assessment of Thermochemical Nonequilibrium and Slip Effects for Orbital Reentry Experiment (OREX)", AIAA Paper 96 1859, 1996.
- [2] Kurotaki, T., "Numerical Analysis of Thermochemical Nonequilibrium Hypersonic Flow", NAL SP-29, pp.114-121, 1996.
- [3] Park, C., Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1990.
- [4] Gnoffo, P.A., Gupta, R.N. and Shinn, J.L., "Conservation Equations and Physical Models for Hypersonic Air Flows in Thermal and Chemical Nonequilibrium", NASA TP-2867, 1989.
- [5] Schwartz, R.N., Slawsky, Z.I. and Herzfeld, R.N. "Calculation of Vibrational Relaxation Times in Gases", J. Chem. Phys., 20, PP. 1591-1599, 1954.
- [6] Thivet, F., Perrin, M.Y. and Candel, S., "A Unified Nonequilibrium Model for Hypersonic Flows", Phys. Fluids, A3, pp. 2799-2812, 1991.
- [7] Yoon, S. and Kwak, D., "Implicit Methods for the Navier-Stokes Equations", Computational Technology for Flight Vehicles, Vol. I, pp.535-547, 1990.
- [8] Eberhardt, S. and Imaly, S., "A Diagonal Implicit Scheme for Computing Flows with Finite-Rate Chemistry", AIAA Paper 90-1577, 1990.
- [9] Wada, Y. and Liou, M.-S., "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities", AIAA Paper 94-0083, 1994.
- [10] NAL SP-29, 1996.
- [11] Gupta, R.N., "Stagnation Flowfield Analysis for an Aeroassisted Vehicle", Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 30, pp. 14-21, 1993.

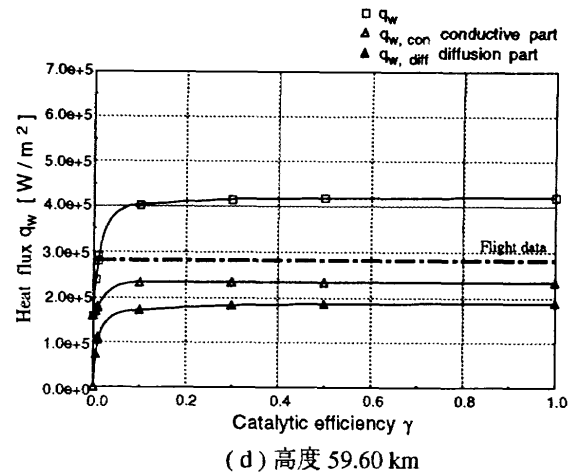


(a) O原子質量分率

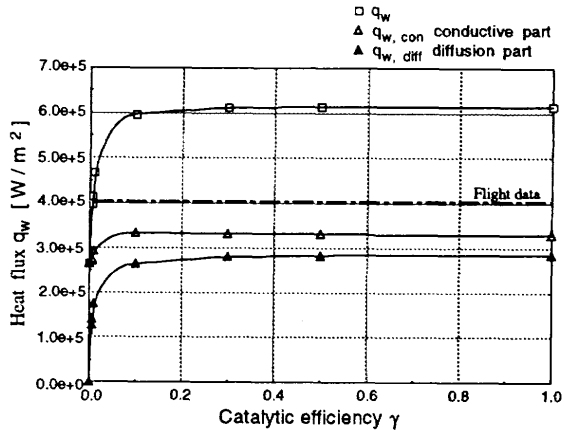


(b) N原子質量分率

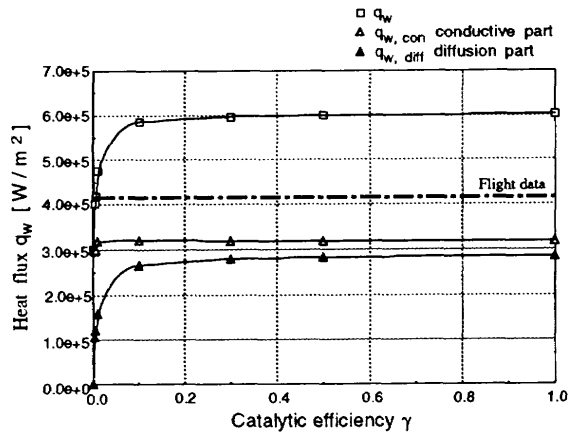
図 4.4 淀み点流線上解離原子質量分率 (非触媒壁)



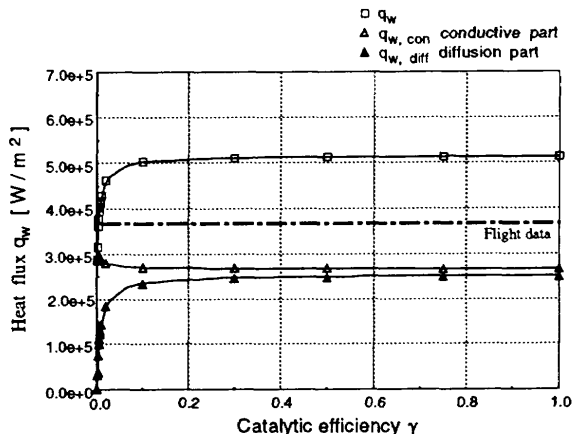
(d) 高度 59.60 km



(b) 高度 67.66 km



(c) 高度 63.60 km



(a) 高度 75.80 km

図 4.5 Catalytic Efficiency γ の淀み点空力加熱率に与える影響

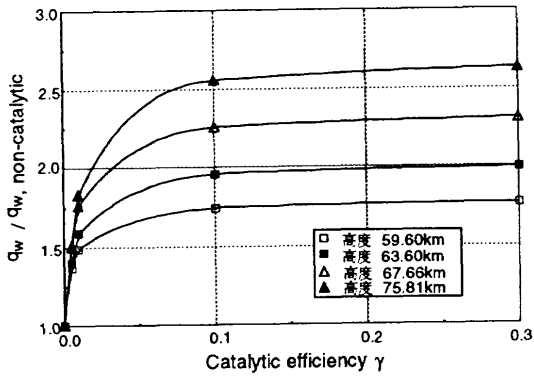


図 4.6 高度変化による壁面触媒性の影響の比較

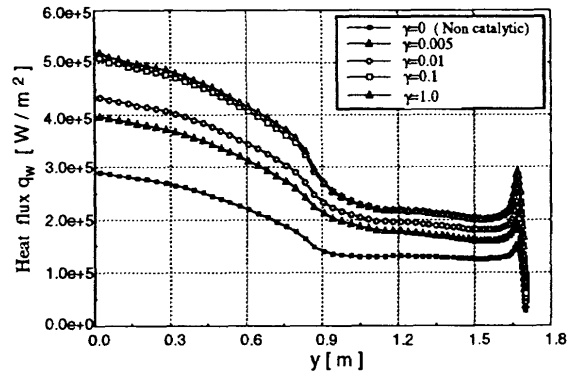
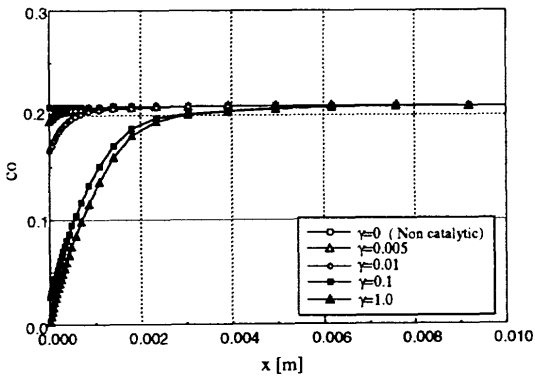
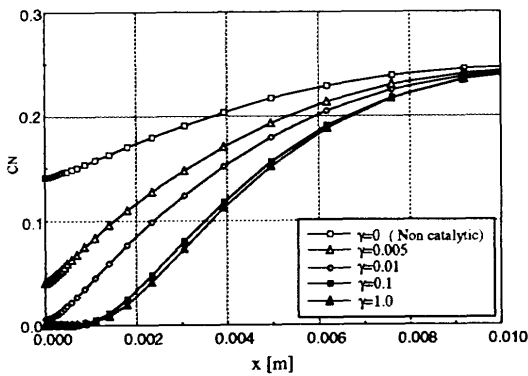


図 4.8 壁面触媒性の空力加熱率分布に与える影響 (高度59.60 km)



(a) O 原子質量分率



(b) N 原子質量分率

図 4.7 淀み点流線上解離原子質量分率 (高度 63.60 km)

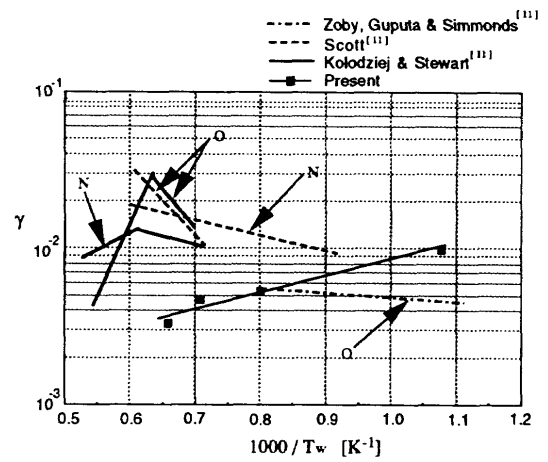


図 4.9 Catalytic Efficiency γ 推定値及び他の値との比較

再突入機周りの流れと空力加熱率の数値計算

嶋田 徹* 関野展弘*

Numerical Simulations of Flows around Re-entry Vehicle and Evaluation of Heating Rate

by

Toru SHIMADA* and Nobuhiro SEKINO*

ABSTRACT

A program for solving thermo-chemically non-equilibrium flow around re-entry bodies is developed using a flux-splitting scheme to re-calculate some problems presented in the previous High Enthalpy Flow Workshop. The major objective of the re-calculation is to clarify the reason for an anomaly encountered with the precursor program. The anomaly is that, in some cases, non-catalytic-wall heat flux exceeds full-catalytic-wall heat flux. In this paper description on a new flux-splitting scheme and some preliminary results are given.

1. はじめに

筆者等はこれまでの極超音速流のCFDワークショップ¹及び高エンタルピー流れのワークショップ²に参加して次のような印象を受けた。全般的に言えば、理想気体の計算結果は参加者の間で答えに大差は無い一方、所謂「実在気体効果」を入れると、参加者の間で答えがかなりばらつく。この原因は特定し難いが、化学熱力学モデル、空間精度、収束の程度、計算手法、境界条件の扱い方等の相違が関係していると思われる。また意図したモデルをプログラムが正しく反映しているかという問題(以下、プログラム実装の正しさと呼ぶ)があると推察される。熱的・化学的非平衡流れの場合、解析解と比較するのが困難なため、少々厄介な問題である。次に、筆者ら自身の計算を顧みると主にはDLR-HEG 衝撃風洞条件での球のケースで触媒壁の熱流束に疑問がある。具体的には、非触媒壁条件の熱流束が完全触媒壁条件の結果を上回るという矛盾が現れている³。拡散流束の評価法や再結合反応速度のモデルを調べる必要があると思われるが、プログラム実装の正しさについても確信を持つまでには至っていない。従って、先ずプログラム実装の正しさを確認し、その後、数学モデルの影響を調査するのが良いと思われる。

本報告では新たに作成したプログラムを用いて、前回のワークショップにあった課題を再計算した結果を報告する。新しいプログラムは基本的に前回と同じくGnoffo等によって整理された数学モデル⁴に基づく。前回³、前々回⁵との大きな相違は、対流項数値流束の評価方法である。前のプログラムはHarten-Yee法を使用している。但しカーブクル現象を抑える目的で線形波にも数値粘性を付加している⁵。本報告では弊社でAUSM-DV-EFと名付けて1994年から使用しているスキーム(未発表)を多成分系に拡張して使用する。AUSM-DV-EFスキームは気体論的な流束分離スキーム: Equilibrium Flux Method⁶に対してAUSM-DV⁷の設計思想を適用し、安定でかつ境界層を精度良く計算できるようにしたスキームである。またプログラム作成の過程では極力2つのプログラムの独立性を重視す

る。このようにして開発した両プログラムの結果を比較することにより両者の実装の正しさを検査する。

2. 基礎方程式

ここでは軸対称を仮定し、保存方程式を (x, r) 平面内の境界 σ で囲まれる2次元検査体積 S について次のように表す。

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S W_i dS + \oint_{\sigma} (F_{ij} - F_{Vj}) n_j d\sigma = \iint_S H_i dS \quad (1)$$

ここで、 W_i は保存量ベクトルの i 成分、 F_{ij} は j 方向の対流項流束ベクトルの i 成分を表す。同様に F_V は拡散、粘性及び熱伝導による流束(以下、粘性項流束と呼ぶ)、 H は化学反応による質量生成項や軸対称性から導かれる項、並びに振動並進エネルギー緩和等を含むソース項ベクトルである。また n_j は σ の外向き法線ベクトルの成分を表す。

化学種としてN, O, N₂, O₂, NO, N⁺, O⁺, N₂⁺, O₂⁺, NO⁺, e⁻の計11種を扱い、並進-回転温度 T と振動-電気温度 T_V を考慮したParkの2温度モデルを用いると、式(1)は質量11個、運動量2個、エネルギー2個の計15成分の保存式となる。各々の項は次のように表される。

$$W = r[\rho_1 \quad \dots \quad \rho_{11} \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho e_V \quad \rho E]^T \quad (2)$$

$$F = r \begin{bmatrix} \rho_1 u & \dots & \rho_{11} u & \rho u^2 + p & \rho uv & \rho e_V u & \rho Hu \\ \rho_1 v & \dots & \rho_{11} v & \rho vu & \rho v^2 + p & \rho e_V v & \rho Hv \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

$$F_V = r \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1r} \\ \vdots & \vdots \\ d_{11x} & d_{11r} \\ \tau_{xx} & \tau_{xr} \\ \tau_{rx} & \tau_{rr} \\ q_{Vx}^{(c)} + q_{Vx}^{(d)} & q_{Vr}^{(c)} + q_{Vr}^{(d)} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{rx} + q_x^{(c)} + q_x^{(d)} & u\tau_{xr} + v\tau_{rr} + q_r^{(c)} + q_r^{(d)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

* 日産自動車(株) 宇宙航空事業部,
Aerospace Division, Nissan Motor Co., Ltd.

$$H = r \left[\dot{w}_1 \quad \dots \quad \dot{w}_{11} \quad 0 \quad \frac{p}{r} - \frac{\tau_{00}}{r} \quad \Delta E^{(v)} + \Delta E^{(e)} \quad 0 \right]^T \quad (5)$$

ここで、 ρ_s : s-化学種の密度、 (u, v) : 速度、 e_v : 混合気体単位質量当たりの振動-電気エネルギー、 H : 全エンタルピーである。混合気体の密度は次式で定義される。

$$\rho = \sum_{s=1}^{11} \rho_s \quad (6)$$

化学反応モデルには Park のモデルを用いる。このモデルには、解離反応、電離反応、交換反応合わせて21種43反応が含まれる。モデルは吸熱反応を正反応として記述し、正反応の速度定数は Arrhenius 型の式によって表される。このとき、解離反応に対しては反応を制御する温度として並進-回転温度と振動-電気温度の幾何平均を用いる。一方逆反応のレートは並進-回転温度で正反応の速度定数と平衡定数から評価する。

拡散としては、圧力拡散や熱拡散は考慮せず、濃度拡散と電場による拡散のみを考慮する。電場による拡散は ambipolar 拡散近似を用いる。拡散流束の表式としてここでは Gnoffo 等⁴による次式を用いる。

$$d_{s,j} = \rho D_s \frac{\partial y_s}{\partial x^j} \quad (7)$$

粘性応力と熱流束は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^k} + \frac{v}{r} \right) \delta^{ij} \\ \tau_{00} &= -\frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u^k}{\partial x^k} - 2 \frac{v}{r} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$q_{v,x^j}^{(c)} = (\eta_v + \eta_e) \frac{\partial T_v}{\partial x^j}, \quad q_{v,x^j}^{(d)} = \rho \sum_{s=1}^{11} h_{v,s} D_s \frac{\partial y_s}{\partial x^j} \quad (9)$$

$$q_{x^j}^{(c)} = q_{v,x^j}^{(c)} + (\eta_i + \eta_r) \frac{\partial T}{\partial x^j}, \quad q_{x^j}^{(d)} = \rho \sum_{s=1}^{11} h_s D_s \frac{\partial y_s}{\partial x^j} \quad (10)$$

これらの式中の輸送係数は2温度モデルに拡張された Yos の公式によって評価する。固体壁での熱流束は式(11)で、非触媒壁のとき $\alpha = 0$ 、完全触媒壁のとき $\alpha = 1$ として計算する。

$$\dot{q} = (\eta_r + \eta_e) \frac{\partial T}{\partial n} + (\eta_v + \eta_e) \frac{\partial T_v}{\partial n} + \alpha \rho \sum_{s=1}^{11} h_s D_s \frac{\partial y_s}{\partial n} \quad (11)$$

n は壁の法線方向の座標である。壁で $T = T_v = T_{wall}$ で場所、時間によらず一定とする。

式(12)の右辺第1項は振動-並進エネルギー緩和の Landau-Teller モデルである。

$$\Delta E^{(v)} = \sum_{s=mol} \left[\rho_s \frac{e_{v,s}^* - e_{v,s}}{\langle \tau_s \rangle} + \dot{w}_s \hat{D}_s \right] \quad (12)$$

振動緩和時間は Millikan-White の式と Park の collision

limit の修正を付加して評価する。また化学反応に伴う振動エネルギーの生成消滅については、選択的解離の効果を考慮して $\hat{D}_s = 0.3 \tilde{D}_s$ で評価する。電子並進や励起エネルギーのソース項は次式で表される。

$$\Delta E^{(e)} = -p_e \nabla \cdot \bar{u} + 3\rho_e \bar{R} (T - T_v) \sum_{s=1}^{10} \frac{v_{cs}}{M_s} - \sum_{s=6}^{10} \dot{n}_{e,s} \hat{I}_s \quad (13)$$

ここで \bar{R} : 普遍気体定数、 M_s : 分子量、 v_{cs} : 電子と重粒子の有効衝突頻度、 $\dot{n}_{e,s}$: 電子衝突によるイオン化レート、 \hat{I}_s : 第1イオン化エネルギーである。混合気体の振動-電気エネルギーは式(14)のように質量分率の重み平均で表す。

$$e_v(T_v) = \sum_{s=1}^{11} \frac{\rho_s e_{v,s}(T_v)}{\rho} \quad (14)$$

T_v での個々の化学種の振動-電気エネルギー $e_{v,s}(T_v)$ は式(15)で評価する。ここでは並進と回転モードは完全に励起していると仮定して、これらのモードの比熱は温度によらず一定と考えている。熱平衡の場合のエンタルピー $h_s^*(T_v)$ は多項式近似によって計算する。その値から並進-回転分と生成エンタルピー $h_{s,0}$ を引き去ることにより $e_{v,s}(T_v)$ は評価される。振動電気温度 T_v は式(14)から求める。

$$\begin{aligned} e_{v,s}(T_v) &= h_{v,s}(T_v) \\ &= h_s^*(T_v) - \frac{5+\zeta}{2} \frac{\bar{R}}{M_s} (T_v - T_{ref}) - h_{s,0} : \text{重粒子} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\bar{R}}{M_e} (T_v - T_{ref}) : \text{電子} \end{aligned} \quad (15)$$

全エネルギーは平均流の運動エネルギー、振動-電気エネルギー及び並進回転エネルギーの和として式(16)で定義される。並進回転温度はこの式から計算される。

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \sum_{s=1}^{11} \left[\frac{\rho_s}{\rho} \{ e_{tr,s}(T) + e_{s,0} \} \right] + e_v(T_v) \\ e_{tr,s}(T) &= \frac{3+\zeta}{2} \frac{\bar{R}}{M_s} (T - T_{ref}) : \text{重粒子} \\ &= 0 : \text{電子} \end{aligned} \quad (16)$$

3. 数値解析法

空間を有限体積法により離散化する。保存量はセルの体積平均量としてセル中央で記憶する。セル界面における対流項数値流束は、minmod 制限関数を用いて単調性を保存しながら原始物理量を一次外挿し、それらより評価する。粘性項流束は両側のセル体積平均量を使って中心差分的に評価する。ソース項はセル体積平均量を使って計算する。対流項数値流束は以下に述べる AUSM-DV-EF スキーム (AUSM-DV for Equilibrium Flux method) によって計算する。収束解を求めるための時間積分法として LU-SGS (Lower-Upper Symmetric Gauss Seidel) 法を point-implicit 法と組み合わせて使用する。

3.1 AUSM-DV-EF スキーム

本スキームは Pullin の EFM (Equilibrium Flux Method)⁶ と、Wada-Liou の AUSM-DV (Advection Upstream Splitting Method, mixture of flux-Difference biased scheme and flux-Vector biased scheme) スキーム⁷ に基づいている。EFM の数値流束は、分子の速度分布関数が非粘性極限でマクスウェル平衡分布 f_0 になることを利用して、式(17)から導かれる。EFM は流束分離法に分類できる。但し AUSM 等で一般に用いられる van Leer の分離法とは異なる特徴を持っている。それは分離の方法が気体論に基づいていること、超音速領域においても風下側の寄与があること、数値粘性が高次まで微分可能であること等である。

$$f_{1/2} = f^+(Q_L) - f^-(Q_R)$$

$$f^+(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u' Q(u', v', w') f_0(\bar{u}') du' dv' dw'$$

$$f^-(Q) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^0 u' Q(u', v', w') f_0(\bar{u}') du' dv' dw' \quad (17)$$

$$f_0(\bar{u}') = \frac{2RT}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\bar{u}' - \bar{U}_0)^2}{2RT}\right]$$

但し、ここで $\bar{u}' = (u', v', w')$ は分子速度、 \bar{U}_0 が主流速度(平均分子速度)である。

以下に 1 次元の場合について述べる。ここで、

$$Q = \rho, \quad \rho u', \quad \frac{1}{2} \rho \bar{u}'^2 + \varepsilon$$

である。ε は分子の内部モードのエネルギーである。式(17)を具体的に計算して式(18)を得る。u は主流速度を表す。

$$2f^\pm = \pm E_f^\pm \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{bmatrix} + E_x \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H - c^2/2\gamma \end{bmatrix}$$

$$E_f^\pm \equiv 1 \pm \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{u}{c}\right) \quad (18)$$

$$E_x \equiv \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \frac{p}{c} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \frac{u^2}{c^2}\right)$$

ここで erf(x) は誤差関数：

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi \quad (19)$$

γ は比熱比、c は音速を表す。静止した接触不連続： $\rho_L \neq \rho_R, p_L = p_R = p, u_L = u_R = 0$ を考え、式(18)に代入すると、

$$2f^\pm = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \begin{bmatrix} p/c \\ 0 \\ \frac{\gamma+1}{2\gamma(\gamma-1)} pc \end{bmatrix}$$

従って EFM の数値流束は式(17)より

$$f_{1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} p \begin{bmatrix} 1/c_L - 1/c_R \\ 0 \\ \frac{\gamma+1}{2\gamma(\gamma-1)} (c_L - c_R) \end{bmatrix}$$

となり、質量流束とエネルギー流束が一般に 0 にならない。これが過剰な数値粘性の正体であるので、 c_L と c_R を共通音速 c_m で置き換えて強制的に数値粘性をゼロにする。このようにすると、動く接触不連続の場合も同様に数値粘性は入らない。共通音速は例えば式(20)によって計算する。

$$c_m = \max(c_L, c_R) \quad (20)$$

このようにして作った数値流束を整理すると次のような V 型スキームが得られる。

$$f_{V1/2} = \begin{bmatrix} \rho_L u_L^* + \rho_R u_R^- \\ \rho_L u_L u_L^* + \rho_R u_R u_R^- \\ \rho_L H_L u_L^* + \rho_R H_R u_R^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} + g$$

$$g = -\frac{c_m^2}{4\gamma} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{E}_x(u_L, p_L) - \tilde{E}_x(u_R, p_R) \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで速度の分離は式(22)で、

$$u_L^* = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{E}_f^+(u_L) u_L + \tilde{E}_x(u_L, p_L) / \rho_L \right\}$$

$$u_R^- = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{E}_f^-(u_R) u_R + \tilde{E}_x(u_R, p_R) / \rho_R \right\} \quad (22)$$

また、圧力の分離は式(23)で与えられる。

$$p_{1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{E}_f^+(u_L) p_L + \tilde{E}_f^-(u_R) p_R \right\} \quad (23)$$

但し、

$$\tilde{E}_f^\pm(u) \equiv 1 \pm \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}} \frac{u}{c_m}\right)$$

$$\tilde{E}_x(u, p) \equiv \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \frac{p}{c_m} \exp\left(-\frac{\gamma}{2} \frac{u^2}{c_m^2}\right) \quad (24)$$

である。

式(21)中の g は非線形波においてエネルギー流束に対して作用する項である。速度分離を表す式(22)と比較して判るように、この項は数値粘性を抑制する働きがある。強い衝撃波の衝突や、強い膨張流の計算で g の効果が現れるが、解の本質を変える程ではないので、より安定性を高めるために本計算では $g = 0$ とし て用いた。

次に、D 型スキームは式(25)で表される。

$$f_{D1/2} = \frac{f_V^{(1)} + |f_V^{(1)}|}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ u_L \\ H_L \end{bmatrix} + \frac{f_V^{(1)} - |f_V^{(1)}|}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ u_R \\ H_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

DV型スキームはD型スキームとV型スキームの運動量流束を合成して得られる。その方法は Wada 等に従って式(26)で与える。

$$f_{DV1/2}^{(2)} = \left(\frac{1}{2} + s\right) f_V^{(2)} + \left(\frac{1}{2} - s\right) f_D^{(2)} \tag{26}$$

$$s = \frac{1}{2} \min \left(1, K \frac{|p_R - p_L|}{\min(p_L, p_R)} \right)$$

また AUSM-DV と同様の方法で shock fix を行う。但し、AUSM-DV ではペアとなる散逸的なスキームとして Hänel スキームを用いているが、ここでは式(21)のV型スキーム自身を用いる。

3.2 多成分系への拡張

AUSM-DV-EF スキームは多成分系に単純に拡張することができる。ここで用いたスキームは以下に述べる若干の修正を除けば、形式的には式(20)-(26)で表される。まず混合気体の音速を対流項流束ベクトルの保存量ベクトルに対するヤコビアン行列の固有値の表式から式(27)で定義する。

$$c^2 = (1 + \beta) \frac{p}{\rho} \tag{27}$$

$$\beta = \frac{\partial p}{\partial \rho E} = \frac{\bar{R}}{\rho C_{v, tr}} \sum_{s=1}^{10} \frac{\rho_s}{M_s}$$

また混合気体の有効比熱比を、

$$\gamma = 1 + \beta \tag{28}$$

によって定義する。前節の議論により接触不連続での数値粘性を除去する目的で、共通音速 c_m に加えて共通比熱比 γ_m を導入する。ここでは γ_m は c_m を与える側の値を用いる。

多成分系のスキームで式(20)-(26)から書き換わる式だけ抜き出して式(29)-(31)に示す。

$$f_{V1/2} = \begin{bmatrix} \rho_{sL} u_L^+ + \rho_{sR} u_R^- \\ \rho_L u_L u_L^+ + \rho_R u_R u_R^- \\ \rho_L e_{VL} u_L^+ + \rho_R e_{VR} u_R^- \\ \rho_L H_L u_L^+ + \rho_R H_R u_R^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\tilde{E}_r^+(u) \equiv 1 \pm \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\gamma_m}{2}} \frac{u}{c_m} \right) \tag{30}$$

$$\tilde{E}_s(u, p) \equiv \sqrt{\frac{2\gamma_m}{\pi}} \frac{p}{c_m} \exp \left(-\frac{\gamma_m}{2} \frac{u^2}{c_m^2} \right)$$

$$f_{DV1/2} = \frac{f_V^{mass} + |f_V^{mass}|}{2} \begin{bmatrix} f_V^{(s)} / f_V^{mass} \\ u_L \\ e_{VL} \\ H_L \end{bmatrix} + \frac{f_V^{mass} - |f_V^{mass}|}{2} \begin{bmatrix} f_V^{(s)} / f_V^{mass} \\ u_R \\ e_{VR} \\ H_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{1/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

ここで、 $f_V^{mass} = \sum_{s=1}^{11} f_V^{(s)}$ である。

図1に円錐周りの1次元自己相似流を Roe スキーム、EFM スキーム、AUSM-DV-EF スキームを用いて解析した結果を示す。AUSM-DV-EF では EFM の欠陥が改善され Roe の解に一致することが見て取れる。

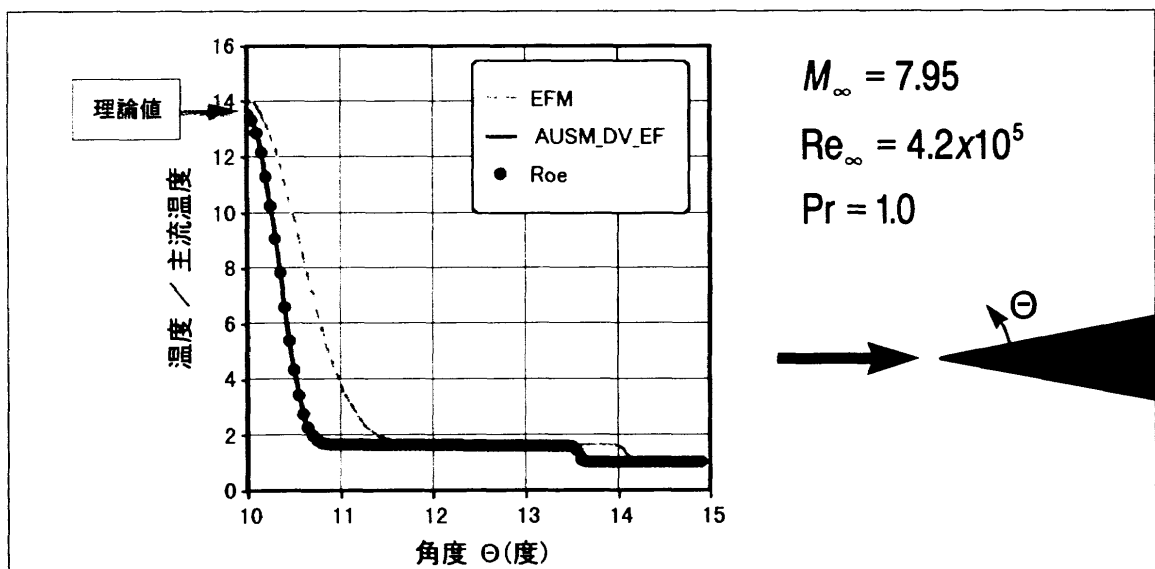


図 1 円錐周りの1次元自己相似流の解の比較

4. 計算結果

第13回航空機計算空気力学シンポジウムの高エンタルピー流れワークショップの課題から2ケース取り上げた。

4.1. 球の周りの極超音速流れ

この例はDLR HEG 衝撃風洞試験の条件で計算するものである。図2に供試体の形状・寸法を示す。計算は風上側だけ行う。表Iに主流条件を示す。固体壁条件として非触媒壁と完全触媒壁を考慮した。完全触媒壁では壁の温度での平衡組成を与えるものとした。図3に前回と今回の計算結果と実験値を示す。

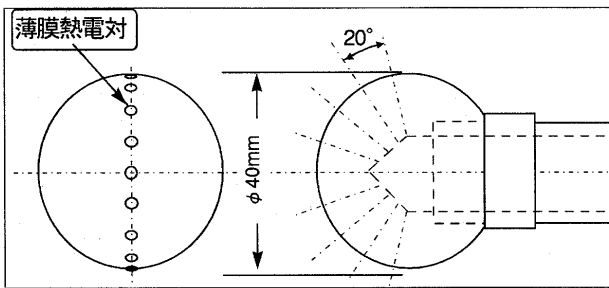


図2 供試体形状

表 I 主流条件

Case	V_∞ (m/s)	T_∞ (K)	ρ_∞ (kg/m ³)	T_{wall} (K)	固体壁条件
I-3	6180	934	0.0034	300	非触媒壁
I-4	"	"	"	"	完全触媒壁

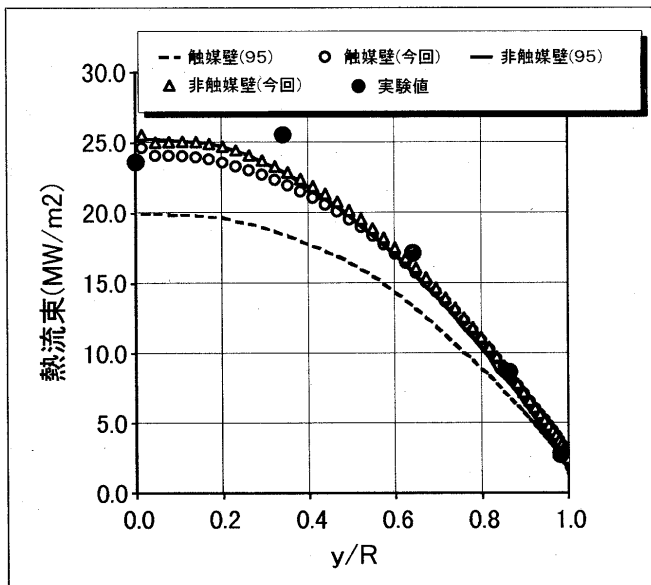


図3 球の表面熱流束の比較

4.2. OREX

この例はOREX(Orbital Re-Entry Experiment)実験機の実飛行条件で計算するものである。図4に供試体の形状・寸法を示す。計算は風上側だけ行う。表IIに主流条件を示す。固体壁条件として非触媒壁と完全触媒壁を考慮した。完全触媒壁では壁の温度での平衡組成を与えるものとした。図5に前回と今回の計算結果と実測値を示す。

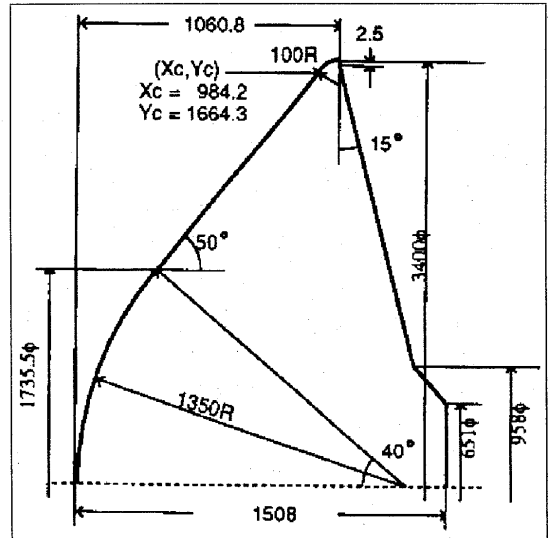


図4 OREXの形状と寸法

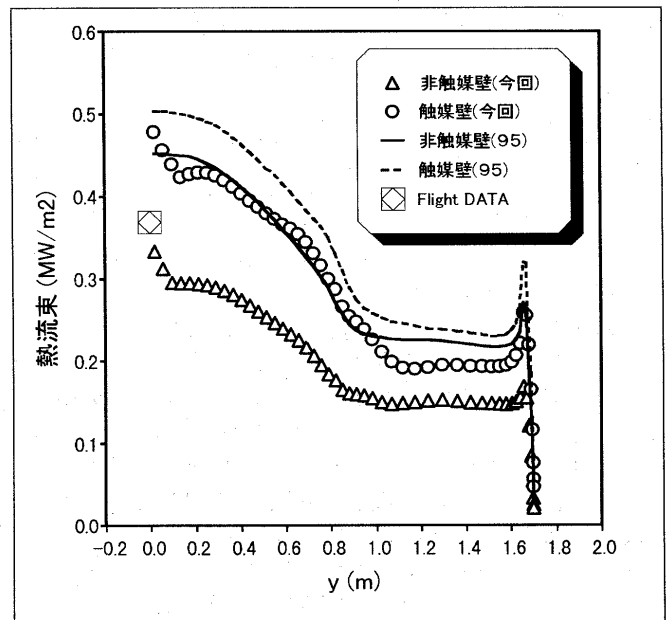


図5 OREXの表面熱流束の比較

表 II 主流条件

Case	V_∞ (m/s)	T_∞ (K)	p_∞ (Pa)	T_{wall} (K)	固体壁条件
II-2	5562	248.1	23.60	1519	非触媒壁
II-3	"	"	"	"	完全触媒壁

5. 考察

OREXの熱流束を前回の計算結果と比較した場合、今回の計算値は非触媒壁と完全触媒壁ともに前回の値より低い値を示している。特に非触媒壁における相違が顕著である。実測値との比較では、今回の値は前回に比べより良い一致を示している。今回の計算結果には軸($y=0$)付近に明らかなエラーが見られる。これは軸付近における v/y 等の評価誤差に関係すると思われる。前回の結果はこの誤差を除去する処理がなされている。

球のケースを前回の計算結果と比較した場合、非触媒壁の熱流束は両者で一致し、完全触媒壁の結果は今回の計算結果が前回の値に比べて大きく、非触媒の結果と大差無い。従って今回の結果は非触媒、完全触媒とも実験値と良好な一致を示している。但し、量的な差はあるとは言え、今回においても前回と同様に完全触媒壁の熱流束が非触媒壁の熱流束に比べて低くなるという定性的な矛盾が生じている。

今回と前回の計算結果に差が出た理由は現状でははっきりしないが、一つの可能性として、前回の計算でカーバンクルを取る目的で投入した数値粘性が影響していることが考えられる。

以上のように前回の結果や実測値と比較して、AUSM-DV-EFスキームが良好に動作することは概ね確認され、両プログラムのプログラム実装の正しさを確認する目的もほぼ達成したと考える。しかしながら依然、完全触媒壁において定性的な矛盾が生じている。これが数学モデルに起因する可能性を無視できないため、今後は拡散流束の評価方法をはじめ、再結合反応の速度定数、完全触媒壁の境界条件等を見直す必要があると考える。

6. まとめ

多成分系に対するAUSM-DV-EFスキームを構成し、これを用いて再突入機周りの熱的・化学的非平衡流れを解析するプログラムを作成した。このプログラムを用いて、前の高エンタルピー流れワークショップの課題を再計算し、前の計算結果及び実測値と今回の計算値を比較した。実測値との比較では今回の計算は前に比べさらに良い一致を示した。これによりAUSM-DV-EFスキームが良好に動作することは概ね確認され、両プログラムの実装の正しさもより信憑性が高まった。しかし、DLR-HEG衝撃風洞気流条件での球の表面熱流束は、定量的には改善されたものの、依然定性的な矛盾を残した。これにはプログラム実装の問題より数学モデルに起因する問題を無視できないと思われる。今後は拡散流束の評価方法等を再検討する予定である。

参考文献

¹ 第12回航空機計算空気力学シンポジウム論文集特別企画／極超音速流のCFDワークショップ、航技研特別資料SP-26, 1994年12月

² 第13回航空機計算空気力学シンポジウム論文集特別企画高エンタルピー流れ企画セッション及びワークショップ、航技研特別資料SP-29, 1996年1月

³ Sekino, N., Shimada, T., Tamura, N., "Numerical Simulations of High Enthalpy Flow," 航空宇宙技術研究所特別資料 29号、第13回航空機計算空気力学シンポジウム論文集、164-170 (1996)

⁴ Gnoffo, P.A., Gupta, R.N., and Shinn, J.L., "Conservation Equations and Physical Models for Hypersonic Air Flows in Thermal and Chemical Nonequilibrium," NASA Technical Paper 2867, 1989.

⁵ Sekino, N. and Shimada, T., "Numerical Simulation of Hypersonic Flow," 航空宇宙技術研究所特別資料 26号、第12回航空機計算空気力学シンポジウム論文集、13-18 (1994)

⁶ Pullin, D.I., "Direct Simulation Methods for Compressible Inviscid Ideal-Gas Flow," *Journal of Computational Physics*, **34**, 231-244 (1980).

⁷ Wada, Y. and Liou, M.-S., "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities," AIAA 94-0083, 32nd Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Jan. 1994.

相互干渉を考慮した多翼系の逆問題解法

松島紀佐¹, 高梨 進², 岩宮敏幸²

An Inverse Design Method for Multiple Wing Systems with Interaction

by

Kisa Matsushima¹, Susumu Takanashi², Toshiyuki Iwamiya²

ABSTRACT

An inverse design method that treats multiple wings (or multi components of a wing) is examined from the viewpoint of the effect of interaction among wings on a designed section shape. This new method has been devised recently by the authors on the basis of Takanashi's integral equation method. It takes into consideration the mutual interaction among wings to provide section shapes of wings which realize a specified surface pressure distribution.. This method works well on several preliminary design problems. It is found that both of aerodynamic mutual interaction and the correlation between the geometrical change of a certain wing and that of the others should be considered for efficient and accurate design.

1) はじめに

航空機の空力設計において、圧力分布を指定して翼などの航空機要素の形状を決定する逆問題は、重要な研究分野である。逆問題解法は所望の圧力分布を精度良く実現するといった設計問題に対し、少ない計算コストで解を提供する。今日に至るまでいくつかの優れた手法が提案されてきたが^{1,2)}、本論文で取り上げる積分方程式を用いるTakanashi (高梨)の方法^{3,4)}は、世界的に最も広く実用に使われている手法の一つで、柔軟性、低計算コストという優れた特徴を備えている。

ところで、従来の空力設計問題は主に流れ場にある単一の翼を対象としてきたが、多翼素翼や主翼とカナードの多翼系などの相互干渉のある流れを対象にすることで、より実用的な設計が可能であると考えられる。多翼系に対する逆問題解法による設計は、Shigemí (重見)による2次元ポテンシャル流における多翼素翼型に対する研究⁵⁾やMcDonnell-Douglas社における研究⁶⁾があるが、あまり例がないと思われる。我々は、単独翼を対象としてきたTakanashiの逆問題解法を、干渉する複数の翼形状を同時に決定できるように発展させ、設計例題に応用して新手法の精度・応用可能性を試験しつつある⁷⁾。この逆解法は3次元の亜音速・遷音速の粘性および非粘性の各種の流れに対応できる。

今回、手法の試験をかねて、相互干渉の相関の度合

が設計形状に与える影響を測った結果を報告する。

2) 逆問題の基礎方程式

多翼系に発展させた逆問題解法の簡単な概念を述べる。定式化の詳細については文献7)を参照されたい。kmax枚の翼が存在する、一様流のマッハ数 M_∞ の流れ場が微小擾乱方程式で記述出来るとし、その流れ場の微小擾乱速度ポテンシャルを ϕ^1 とする。目標圧力分布を実現する流れ場のポテンシャルを $\phi^T = \phi^1 + \Delta\phi$ としたとき、 $\Delta\phi$ の満たす方程式は(2-1)となる。 $\Delta\phi$ と ΔC_p (目標圧力分布-初期圧力分布)、 Δf (翼断面形状の変化量)は(2-2,3)の関係式で結ばれる。但し、流れ場の気体の比熱比を γ とする。

$$(\Delta\phi)_{xx} + (\Delta\phi)_{yy} + (\Delta\phi)_{zz} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} [(\phi^1)_x + (\Delta\phi)_x]^2 - \frac{1}{2} (\phi^1)_x^2 \right) + \Delta(h.o.t.) \quad (2-1)$$

$$-2 \frac{\beta^2}{K} (\Delta\phi(x, y, c_k \pm 0))_x = \Delta C_p_{k\pm}(x, y/\beta) \quad (k=1, 2, \dots, k \max) \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Delta f_{k\pm}(x, y)) = (\Delta\phi(x, y, c_k \pm 0))_z \quad (k=1, 2, \dots, k \max) \quad (2-3)$$

$$\text{Where } \beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad K = (\gamma + 1)M_\infty^2.$$

また、 C_k は翼 k が配置されている z 座標である。 ± 0 は、翼上面と下面をそれぞれ表わす。摂動量 $\Delta\phi$ が小さいとして各式の高次の項は無視できるとした。

逆問題を解くとは、 ΔC_p を与えて Δf を得ることで

ある。即ち式(2-1)を境界条件(2-2)の下に解き、得られた $\Delta\phi$ を(2-3)の右辺に代入して Δf の微分式を解くわけである。(2-3)の式から Δf を決定するためには Δf に対する拘束条件が必要である。その条件として、翼 k ($k=1,2,\dots,k_{\max}$)後縁の厚みを指定する。

3) 逆問題解法を用いた翼設計の手順

設計法は、目標圧力分布と現在値の差を見ながら、逆問題を反復して解く残差修正法である。任意の初期形状から出発し、翼形状を逐次修正しながら反復を重ねることで目的の形状を得るわけである。以下に、逆問題解法と格子生成や流れ場解析等のCFD手法とを組み合わせて反復を行うため、構築した手順を図1に示す。

- ① 実現したい各翼の目標圧力分布 Cp_k^T を決める。
- ② 翼の初期形状 f_k^0 を定義する。
- ③ 翼回りに格子生成を行う。
- ④ 時間平均Navier-Stokes方程式を基礎式とした流れ場のシミュレーションを行い^④、翼形状 f_k^n に対する圧力分布 Cp_k^n を求める。もし、 $Cp_k^n \neq Cp_k^T$ に収束したとみなせれば、 $f_k = f_k^n$ として反復終了。
- ⑤ $\Delta Cp = Cp_k^T - Cp_k^n$ を入力データとして逆問題を解き修正量 Δf_k を得る。 $f_k^{n+1} = f_k^n + \Delta f_k$ として③に戻る。

4) 適用例と計算結果

相互干渉の設計に与える影響を考察することを目的に、図2に示すような2種の2枚翼システムに対し、同一の圧力分布を目標とした設計を試みる。2枚の翼がある程度の距離をおいて互いに干渉する、2次元な流れ場である。初期形状は前後の翼型とも迎角 0° のNACA0012翼型である。例題1はタンデム、例題2はフラップ付翼を単純化したものとみなすことができる。また、次節では単独翼として設計した場合との比較を行う。文献9)に従い、3次元の逆解法を2次元の流れ解析と組み合わせて翼型の設計を行う。流れ場の条件は $M_\infty = 0.6$, $Re = 10^6$ とする。

例題1 本手法の精度を確認するため、既知の形状で求めた圧力分布を目標圧力分布として与える。図2の上の断面形状に示されたようにおかれた2枚の迎角 2.5° のRAE2822翼型を既知(目標形状)とした。前後の翼の間隔は $\Delta x = 1.0$, $\Delta z = 0.087$ である。

設計の履歴を図3に示す。実線で示された圧力分布が目標値である。前後の各々の翼の Cp 分布と断面形状の変化が示されている。'+','x'印がNavier-Stokesシミュレーションの結果で、'+'が上面の、'x'が下面の Cp 分布を表わしている。左端が初期状態である。対称翼型であるが、2枚の翼が干渉するため、初期揚力は負である(上面より下面の圧力のほうが低い)。特に後方の翼は前方翼の吹き降ろしの効果を強く受けていることがわかる。続いて、1,3,5回目の形状修正後の実現圧力分布と目標圧力分布との対比が示されている。1回の反復後、かなり目標に近い解が得られ、5回の反復で、目標圧力分布をほぼ実現する形状が得られた。図4に目標形状と設計形状をプロットした。実形状とZ方向(翼の厚み方向)に5倍に拡大したものである。非常に良く一致しており、手法の精度の良いことがわかる。図5に、例題2(後に述べる)の結果とともに、初期と設計後の形状変化を示した。本手法によりかなり大胆な形状修正が可能であること・手法の強靱さがわかる。

例題2 前方翼はコード長1.0、後方はコード長0.35の小翼、前後の翼の間隔は $\Delta x = 0.1$, $\Delta z = 0.01$ である。目標圧力分布は例題1と共通である。図6に初期状態と設計後の圧力分布と形状の様子を示す。初期の揚力から、後方翼は前方翼の吹き降ろしの効果を強く受けていることがわかる。5回の反復で設計を終了したが、より良い収束精度を望むなら更に1,2回反復が必要であろう。例題1と2では翼相互の干渉の様子が異なるため、前方翼の後縁の形状、後方翼の厚み・迎角など設計形状も大きく異なっている。(図5、図7の左を参照)

5) 単独翼設計の場合との比較

相互干渉の影響を観るため、単独翼の場合の設計との比較を行う。例題1と同一の目標圧力分布を2枚の単独翼それぞれに与える。図7に、得られた形状(一点鎖線)と設計収束時の実現圧力分布の状況とを示した。翼型形状は複数翼設計例題の結果(破線)と比較対照されている。実形状とz方向に5倍に拡大したものであるが、相互干渉の影響を取り入れる事によって、前方翼の後縁の形状と迎角に違いが生じ、後方翼においては翼厚と迎角が明らかに増大することが認められる。

もちろん、単独翼の逆問題ソルバーを利用した多翼系の設計は不可能ではない。各反復ループにお

いて、各々の翼の設計は単独で行うが、流れ場の解析を系全体で行い、その結果の圧力分布を再び逆問題ソルバーに与えることで、流れ場を介しての相互干渉の影響を取り込む事が出来る。しかし、この相互干渉には、設計することによって起こる、各翼の形状変化が自分以外の翼に与える影響は含まれていない。つまり、ある段階で、後方翼がうまく設計出来たとしても、後方翼の形状変化のため、それまで望ましかった前方翼の圧力分布がこわされる可能性があるわけである。そこで、また反復設計を繰り返すことになるのであるが、必ずしも収束解が得られるとは限らない。ここに、各翼の形状変化の相互作用まで考慮して複数翼の形状を同時に決定する逆問題ソルバーの実用上の必要性が認められる。

6) まとめ

多翼系の流れ場において、翼相互の干渉効果を取り入れた逆問題解法による、複数翼の断面形状の空力設計の実験を行った。同一の目標圧力分布を異なる相互作用を持つ系に与えて空力設計を実施したところ、設計形状に明らかな差異が認められ、相互干渉を考慮することが重要であることが示された。

参考文献

- 1) Laburujere, Th. E. and Slooff, J. W.: Computational Methods for the Aerodynamic Design of Aircraft Components, Annu. Rev. Fluid Mech., **25** (1993), pp. 183-214.
- 2) Dulikravich, G. S.: Shape Inverse Design and Optimization for Three-Dimensional Aerodynamics, AIAA-95-0695, 1995.
- 3) Takanashi, S.: Iterative Three-Dimensional Transonic Wing Design Using Integral Equations, J. Aircraft, Vol.22, No.8, pp. 655-660, 1985.
- 4) Fujii, K. and Takanashi, S.: Aerodynamic Aircraft Design Methods and Their Notable Applications, ICIDES-III, pp.31-45, 1991, and References Therein
- 5) Shigemitsu, M.: A Solution of Inverse Problems for Multi-Element Aerofoils through Application of Panel Method, Trans. Japan Soc. Aero. Space Sciences, Vol. 28, No. 80, 1985.
- 6) Narramore, J.C. and Beaty, T.D.: An Inverse Method for Multielement High-Lift Systems, AIAA paper 75-879, 1975.
- 7) Matsushima, K. and Takanashi, S.: An Inverse Design Method for Transonic Multiple Wing Systems on Integral Equations, AIAA paper 96-2465, 1996.
- 8) Fujii, K. and Obayashi, S.: High Resolution Upwind Scheme for Vortical Flow Simulations, Journal of Aircraft, Vol. 26, No. 12, 1989.
- 9) Hirose, N., Takanashi, S. and Kawai, N.: Transonic Airfoil Design Based on Navier-Stokes Equation to Attain Arbitrarily Specified Pressure Distribution - an Iterative Procedure, AIAA-85-1592, 1985.

残差修正反復法

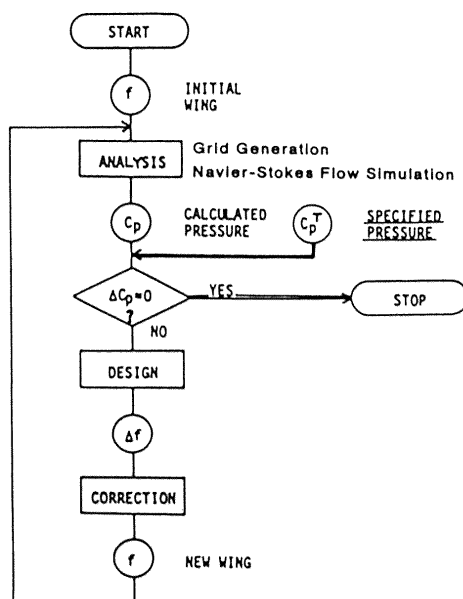
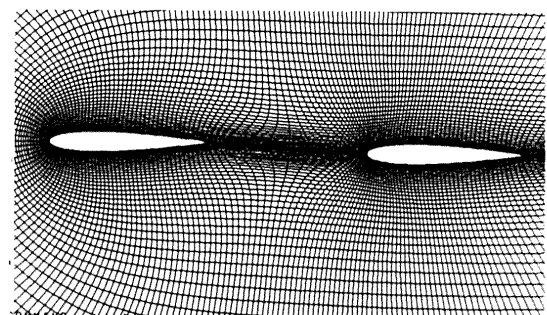
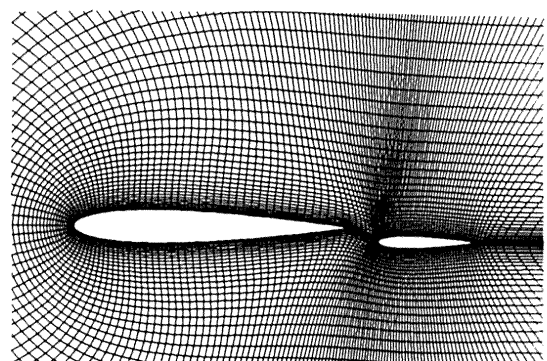


図1 逆問題解法による空力設計の手順



例題1 TANDEMシステム



例題2 FLAP付き翼システム

図2 初期翼断面形状

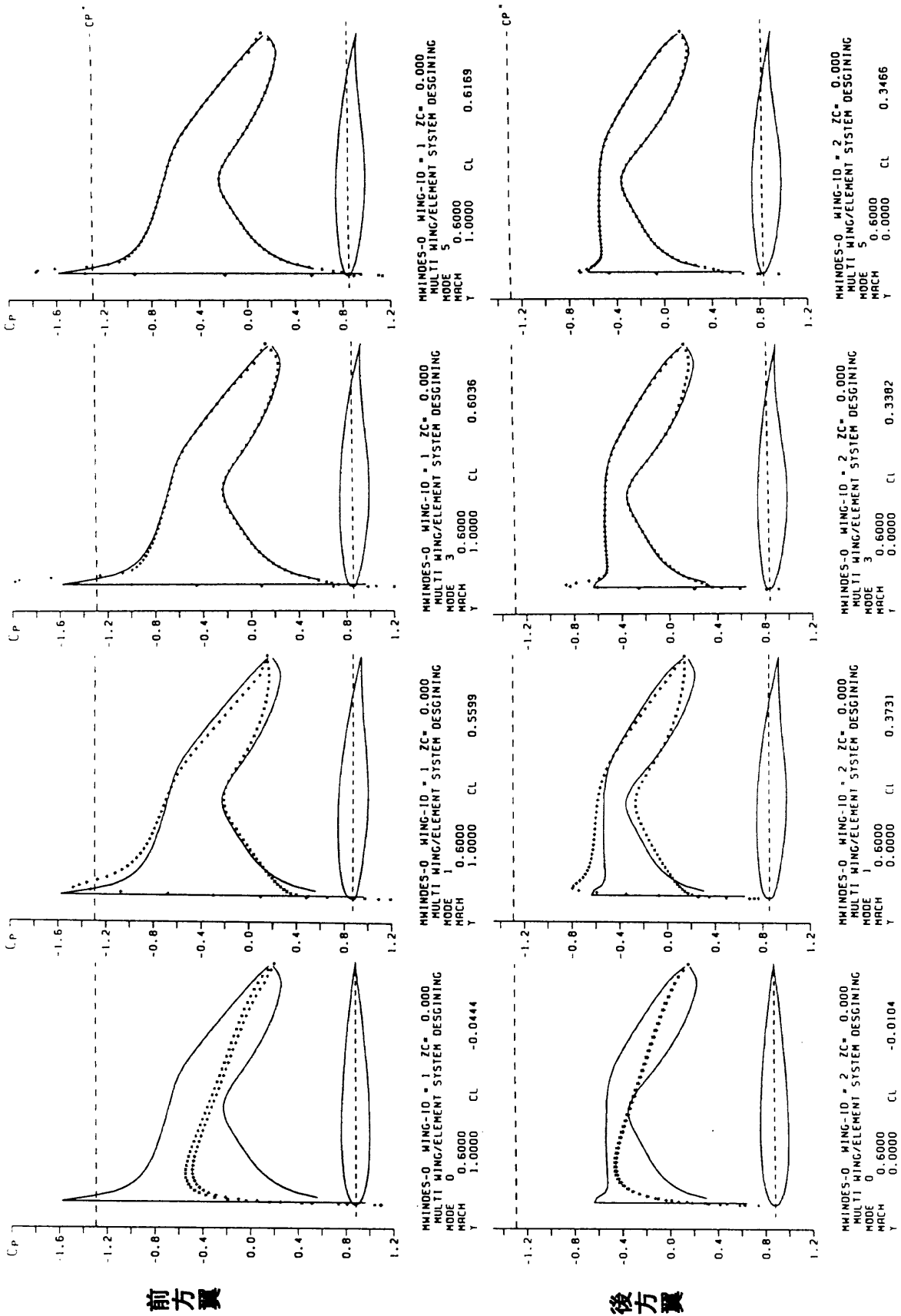


図3 例題1の設計履歴(0, 1, 3, 5反復後の形状と圧力分布)

Mach数=0.60 Re=10⁵; 実線 目標圧力分布
記号(+, X) 実現圧力分布

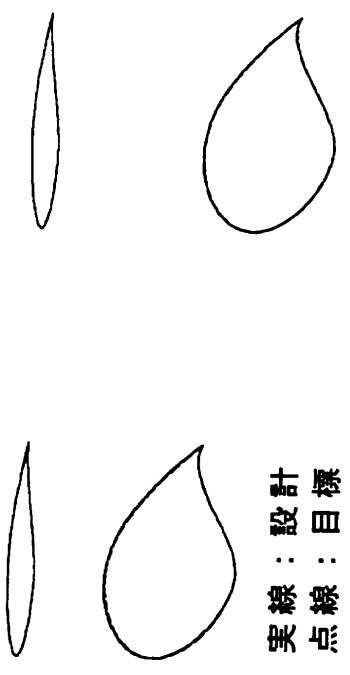


図4 例題1において設計形状と目標形状との比較

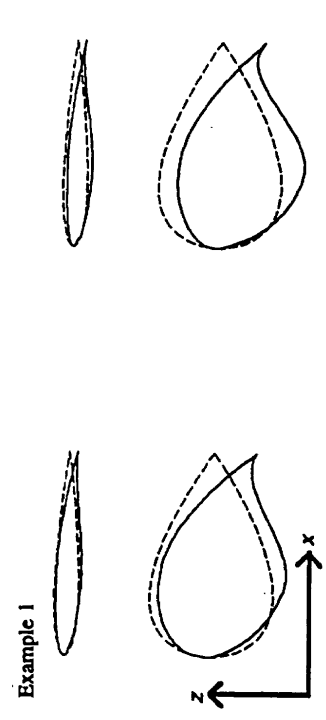


図5 例題1,2において設計形状と初期形状の比較

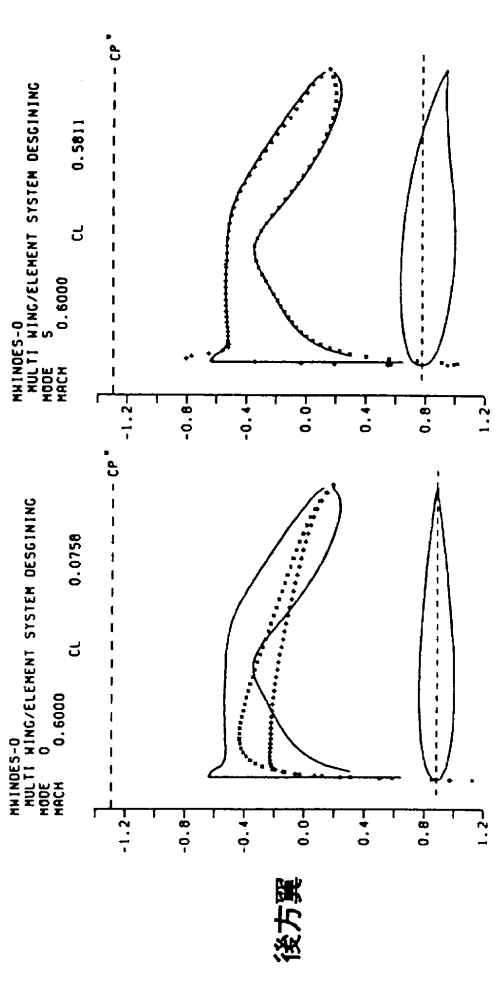
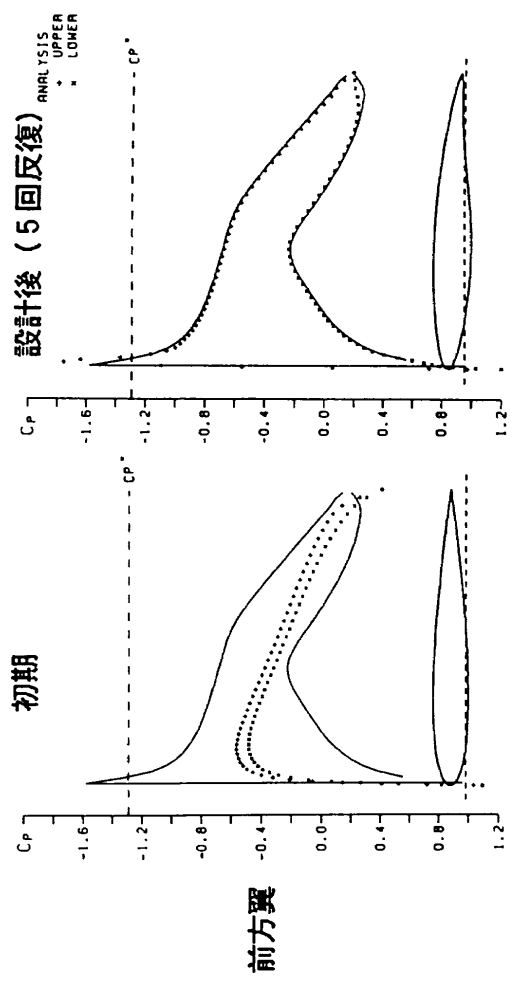


図6 例題2の設計履歴(初期と5回反復後の形状と圧力分布)
Mach数=0.60 Re=10⁶; 実線 目標圧力分布 記号(+, X) 実現圧力分布

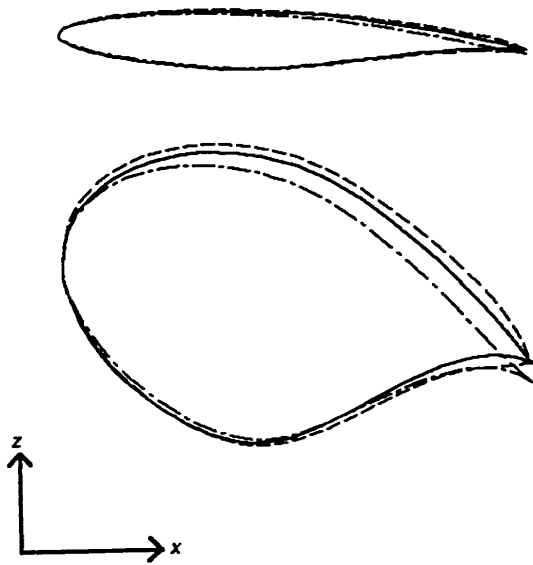
MHINDES-0
MULTI WING/ELEMENT SYSTEM DESIGNING
MODE 5
MACH 0.6000 CL 0.1231

MHINDES-0
MULTI WING/ELEMENT SYSTEM DESIGNING
MODE 5
MACH 0.6000 CL 0.5811

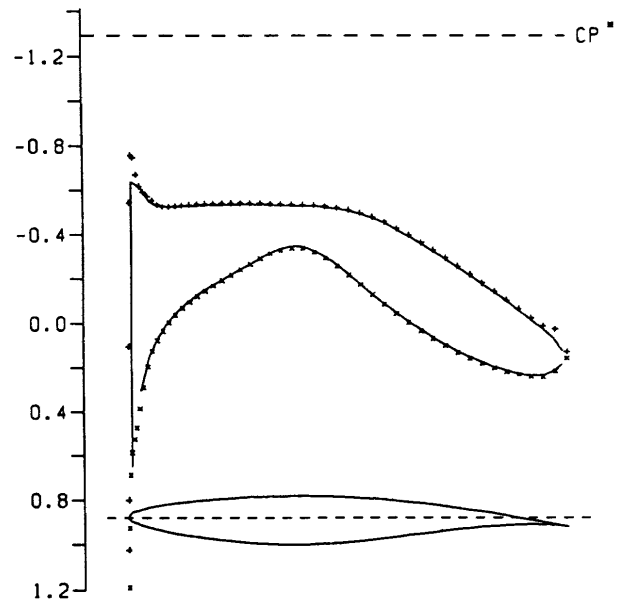
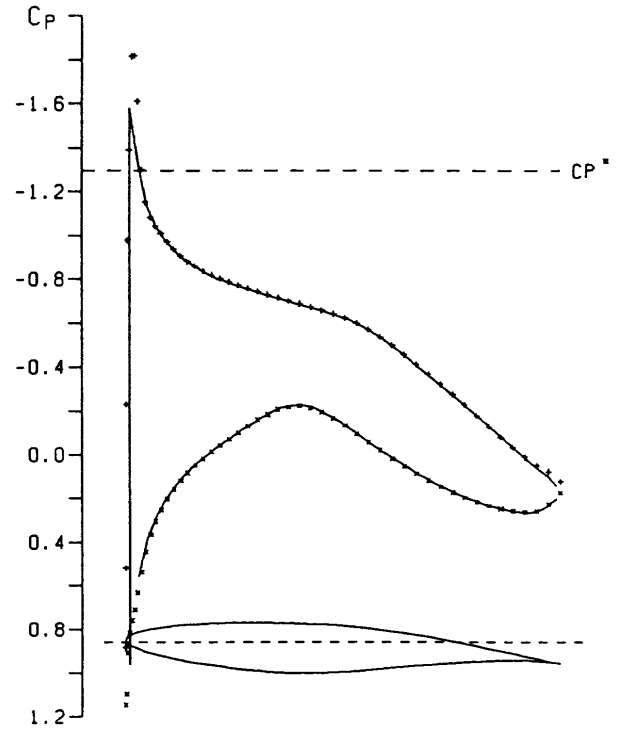
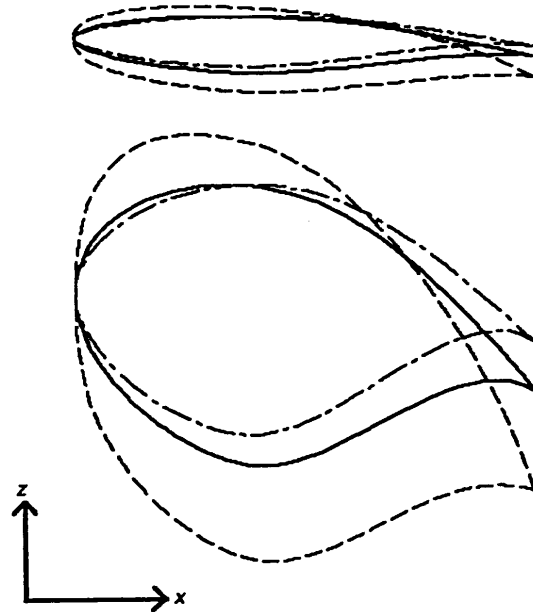
MHINDES-0
MULTI WING/ELEMENT SYSTEM DESIGNING
MODE 0
MACH 0.6000 CL 0.0758

MHINDES-0
MULTI WING/ELEMENT SYSTEM DESIGNING
MODE 0
MACH 0.6000 CL -0.0361 CD

前方翼



後方翼



WINDES-22
SINGLE WING DESINGING PROCESS 1
MODE 5
MACH 0.6000

設計後の形状比較

実線：TANDEMシステム

点線：FLAP付き翼システム

一点鎖線：単独翼

単独翼設計の際の収束状況

図7 単独翼設計との比較

ナビアストークス解法をベースにした超音速翼型の逆解法

神谷信彦（名大工）、玉置秀海（本田技研）、廣瀬直喜、石田洋治（航技研）

ON AN INVERSE PROBLEM FOR A SUPERSONIC AIRFOILS BASED ON NAVIER-STOKES APPROXIMATION

by NOBUHIKO KAMIYA, HIDEMI TAMAKI, NAOKI HIROSE, YOJI ISHIDA

ABSTRACT

Takanashi's iterative residual-correction method is applied to the design of supersonic airfoils. Airfoil geometry correction is obtained by use of inverse solutions calculated from the differences between the computed and the prescribed pressure distributions. Inverse solutions are obtained by Prandtl-Meyer function or linearized theory. The pressure distributions are obtained numerically by the code NSFOIL, where Navier-Stokes approximations are used. Some examples of the calculations are presented.

1. まえがき

これまで超音速翼の設計法はいろいろあるが^{1),2),3),4)}、殆んどが線形理論を用いてワープを設計するもので、翼の厚みを設計するものではない。前縁での剥離発生を防ぐためには、翼の厚みも含めて設計するほうが望ましい。特に層流制御には剥離を防ぐことが重要である。ここでは、前縁が丸い場合を含めて、翼面上の圧力分布を与えて超音速翼型を設計する方法を報告する。本研究の目的の第1は、3次元超音速翼のNS近似の精度での設計法を確立する準備段階として、2次元翼型についていろいろな問題点を解決することにある。従って、3次元翼への拡張に考慮を払った。第2は航技研で計画している2次元超音速層流制御実験の翼型設計のツールの開発にある。

2. 設計法

本設計法は、指定された圧力分布を実現するような超音速翼型を求めるものである。与えられた翼の超音速翼型解析により求めた圧力分布と目標圧力分布との差である圧力残差から逆解法により翼修正量を求める、残差修正反復法⁵⁾に基づいている。

2.1 フローチャート

本設計法のフローチャートを図1に示す。設計手

順は、まず設計者の望む目標圧力分布 C_{PS} を与える。次に初期翼座標 f を与えて解析部に送り、 C_p 分布を得る。初期翼は任意の形状を与えて良い。この値 C_p と目標圧力分布 C_{PS} との残差 $\Delta C_p = C_{PS} - C_p$ を逆問題コードを用いた設計部に送り、翼修正量 Δf を求める。後縁が閉じているためには、後縁での翼修正量 $\Delta f(TE) = 0$ である必要があるが、解は一般にこの条件を満たさず、 $\Delta f(TE) \neq 0$ となる。後縁の閉じた翼形状を見つけるために初期翼の厚み比を変更するループ Changed Thickness を設計部に組み込んだ。初期翼の厚み比と $\Delta f(TE)$ は、ほぼ直線的に変化するので、内挿または外挿を用いることにより初期翼の正しい厚み比を決定するのは容易である。 $\Delta f(TE) = 0$ となったら新しい翼形状 $f = f + \Delta f$ を再び初期翼として、 $\Delta C_p \approx 0$ となるまで同じ手順を繰り返す。

本手法における設計の精度は解析部に依存する。したがって、設計部は出来るだけ簡単かつ正確な Δf が導ける数理モデルを考え、定式化することが望ましい。なぜなら解析部に Navier-Stokes 解析コードを用いれば、一回の解析時間にはかなりのCPU時間が必要であり、これを反復使用することにより全体にかかる計算時間は飛躍的に増大するので、設計部にかかる計算時間及び反復回数をなるべく少なくする必要があるからである。

2.2 解析部

解析部には、航空宇宙技術研究所の2次元翼型解析汎用コード NSFOIL⁶⁾と、翼型メッシュ形成汎用コード AFMESH⁷⁾を使用した。NSFOILは2次元時間平均 Navier-Stokes 方程式を IAF法を用いて解く遷音速翼型解析プログラムで、乱流モデルとして Baldwin-Lomax の代数乱流モデルを取り入れている。これは遷音速解析用に開発されたものであるが、マッハ数2程度ならば超音速翼型解析にも使用可能である。AFMESHは遷音速翼型のための格子形成プログラムである。

2.3 設計部

設計部は前縁付近の亜音速部分を除いた超音速領域で修正を加えている。

2.3.1 設計部1

翼面上の超音速領域は膨張波のみであって、衝撃波からの反射等は考えないと仮定し、Prandtl-Meyer の膨張波の式から以下の2階の常微分方程式が導かれる。

$$\frac{d^2 \Delta f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 f_s(x)}{dx^2} - \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{M_s^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2} \frac{1}{M_s} \frac{dM_s}{dx} + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{1}{M} \frac{dM}{dx}$$
(1)

を、 $M, M_s > 1$ である $x = x_{start}$ から、

$$\Delta f(x_{start}) = 0, \quad \frac{d\Delta f(x_{start})}{dx} = 0$$
(2)

という初期条件のもとに解 Δf を求める。数値解法にはルンゲクッタ法を用いた。(2)の第2の初期条件は、 $x = x_{start}$ において修正翼形状が滑らかであるための条件である。

2.3.2 設計部2

超音速線形理論を用いて定式化を行う。すると以下の一階の常微分方程式を得る。

$$\Delta C_p = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{d\Delta f(x)}{dx}$$
(3)

を、上記と同様に $x = x_{start}$ から、

$$\Delta f(x_{start}) = 0$$
(4)

という初期条件のもとに同じくルンゲクッタ法を用いて解く。

設計部は、式(1)、(3)に示されるように極めて簡単なもので、名大大型計算機センターのM-1800を利用して、図形処理も含めて、CPU時間は殆ど意識しない程度である。

3. 設計例

設計条件は一様流マッハ数 $M_\infty = 2.0$ 、初期翼には NACA0005 を用いた。また、後縁閉じの条件として修正翼 f_s の後縁の厚みについて、

$$0 \leq f_s(TE) \leq 0.0002$$
(5)

という条件を課した。

翼の修正を開始する点 $x = x_{start}$ は局所マッハ数が1を超える格子点の x 座標として決めた。線形理論による設計で翼の曲率が大きい場合、計算が発散してしまうことがあるので、その場合は x_{start} を少し後縁方向に移動して修正を行った。

本論文では目標圧力分布は、指定された迎角を持つ目標翼型について NS-FOIL を解いて得たものとした。表1に4種の目標翼型、迎角を示す。例えば設計例2では、対称翼 NACA64A006 の迎角 2° の場合の圧力分布を目標圧力分布とする。目標圧力分布が与えられると、図1のフローチャートに従って計算を行う。このフローチャートで、後縁を閉じさせる迄を一つの設計ステップと考える。1ステップ中に後縁を閉じさせるために行った厚み修正反復回数を表1に示す。

それぞれの目標圧力分布について、Prandtl-Meyer 関数による設計と線形理論による設計を両方行った。

3.1 目標圧力分布1

NACA64A006 を迎角 0° で NS-FOIL で解いたものを目標圧力分布とした。

3.1.1 Prandtl-Meyer 関数による設計

3設計ステップで合計10回の厚み修正を加えた。設計を開始する点 x_{start} は翼弦長の0.3%からすなわち、 $x_{start} = 0.003$ として行った。図2で各ステップごとの翼型と圧力分布を目標翼と比

較する。なお、翼型はわかり易いように厚み方向に10倍に拡大してある。圧力分布、翼形状ともに良好な収束翼が得られている。

3.1.2 線形理論による設計

x_{start} は同じく0.003である。目標翼との比較図を図3に示す。1ステップ目でかなり目標翼に近づいたが、2ステップ目ではむしろ目標翼から遠ざかっている。この後さらに5ステップまで修正を行ったが、結局これ以上収束することはなかった。

3.2 目標圧力分布2

NACA64A006を迎角 2.0° でNS-FOILで解いたものを目標圧力分布とした。初期翼NACA0005の圧力分布も、迎角 2.0° のものである。各ステップでの入力翼の圧力分布は迎角 2.0° で計算している。

3.2.1 Prandtl-Meyer 関数による設計

3ステップ、合計14回の修正を加えた。 x_{start} は0.003である。計算結果を図4に示す。修正反復回数は迎角が 0.0° の場合に比べ若干増えているが、良好な収束翼が得られた。

3.2.2 線形理論による設計

x_{start} は0.005である。目標翼との比較図を図5に示す。迎角無しの場合と同様、2ステップ目以降はステップが進につれ、むしろ目標翼との差は大きくなっている。この後さらに修正を続けたが、修正ステップ1での修正翼がもっとも目標翼に近かった。

3.3 目標圧力分布3

非対称翼の設計例である。層流翼の1種であるGarabedian-Korn翼の厚みを、6%程度に薄くした翼の圧力分布をNS-FOILで求めたものを目標圧力分布とした。迎角は 0.0° である。

3.3.1 Prandtl-Meyer 関数による設計

結果を図6に示す。3ステップ、合計20回の修正を行った。 x_{start} は0.005である。対称翼の設計に比べ後縁が閉じた翼を得るのにより多くの反復計算を要した。ステップが進むにつれて収束性が必ずしも向上せず、3ステップの修正

では十分に収束していない。

3.3.2 線形理論による設計

目標翼との比較図を図7に示す。 x_{start} は0.005である。対称翼の設計例と異なり、ステップが進むにつれ徐々にではあるが目標翼に近づいており、3ステップでかなり収束している。

3.4 目標圧力分布4

設計例3と同じ翼で、迎角 2.0° での圧力分布を目標圧力分布とした設計例である。

3.4.1 Prandtl-Meyer 関数による設計

結果を図8に示す。 x_{start} は0.003である。迎角無しの場合に比べ2ステップ目以降での反復回数が多い。

3.4.2 線形理論による設計

目標翼との比較図を図9に示す。 x_{start} は0.003である。3ステップで目標翼との差はPrandtl-Meyer関数の場合より良い。

3.5 考察

Prandtl-Meyer関数による設計部は特に対称翼の設計においては迎角の有無に拘らず良好な収束性を示した。逆に非対称翼の設計では後縁が閉じた修正翼を得るのにかなりの反復修正を要し、また、対称翼と比べると収束性が落ちる。Navier-Stokes解析にかかる計算時間を考えると、もっと少ない反復回数で後縁の閉じた翼を得る改良が必要である。

一方、線形理論による設計部は対称翼の設計では修正が進むにつれ、むしろ目標翼から遠ざかるという奇妙な現象を呈した。非対称翼の設計ではPrandtl-Meyer関数の設計部に比べ、少ない反復回数で後縁の閉じた翼がえられ収束性も良好であった。線形理論による設計部は2次元でうまくゆけば3次元への拡張が期待できる。今回良好な結果を得られたことで、超音速での3次元翼の設計に道が開けたと言える。

一方上記の第2ステップ以降のすべての設計例において、NS-FOILによる解析結果は目標圧力分布に非常に近い。これは、目標圧力分布を持った翼を設計出来たということであり、少なくともNavier-Stokes近似の精度では目標を達成したとも言える。また、目標翼と僅かではある

が異なる設計翼と目標翼の圧力分布が一致しているということは、極く僅かな圧力分布の相違が翼型の可成りの相違をもたらすこと、あるいは、同じ圧力分布を持つ翼は唯一ではないことを示している。このことは、圧力分布が殆ど同じでも、例えば揚抗比が可成り異なることがあり得ることを意味しており、翼型の最適化が必ずしも容易ではないことを示唆している。

本設計法は設計翼の圧力分布が目標圧力分布と殆ど一致したこと、設計翼の翼型が目標翼とほぼ一致したことの2点で、超音速翼型設計法として実用的なものであると思われる。

4. 結論

(1)超音速において Navier-Stokes 解析コードを直接組み込んだ、“残差修正反復法”による翼型設計法を確立した。

(2)実在する翼を設計目標とした検証では、収束性、反復回数ともに実用上問題ないレベルであった。

(3)得られる解の精度は解析部に依存するので、解析コードの精度を上げることで、設計部を変えることなく設計精度を高めることができる。

(4)超音速線形理論を用いた設計部で2次元において良好な結果が得られたので、3次元への拡張が期待できる。

文献

1. Warren a. Tucker, A Method for the Design of Sweptback Wings Warped to Produce Specified Flight Characteristics at Supersonic Speeds, NACA Report 1226, 1955.
2. M.J.Mann and H.W.Carlson, Aerodynamic Design Supersonic Cruise Wings with a Calibrated Linearized Theory, J. Aircraft, vol.31, No.1, 1989.
3. Kenneth.B.Walkley and Gregory E. Smith, Application of a Full Potential Method to Supersonic Aircraft Design and Analysis, J. Aircraft vol.26, No1, 1989.
4. 吉田憲司、葉山憲司、SST 主翼 Warp 形状の効果について、第 28 回飛行機シンポジウム講演集、1990
5. 高梨 進、三次元遷音速翼の理論的設計法、航技研報告 TR830、1984。
6. 河合伸坦、廣瀬直喜、“高レイノルズ数遷音速流翼型解析プログラム NSFOIL の開発”、航空宇宙技術研究所報告、TR-816、1984.
7. 航空宇宙技術研究所汎用コード NSFOIL 使用手引書、航空宇宙技術研究所、1987.

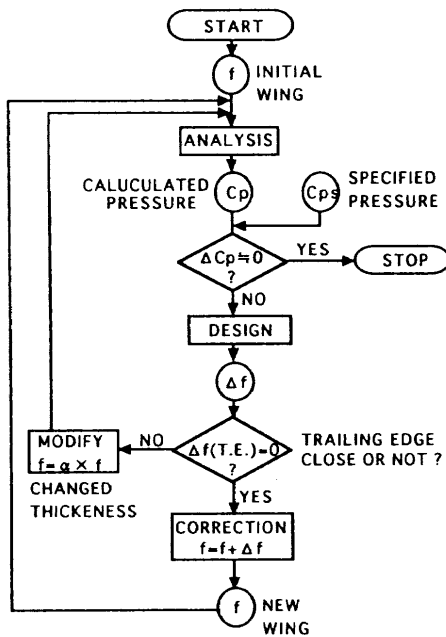


図1 設計法のフローチャート

翼番号	使用設計理論		P-M			線形理論		
	設計ステップ		1	2	3	1	2	3
	目標翼型	迎角						
1	NACA64A006 (対称翼)	0	5	4	1	2	3	3
2	NACA64A006 (対称翼)	2	5	4	5	1	2	3
3	変更KORN翼 (非対称翼)	0	11	6	3	3	4	4
4	変更KORN翼 (非対称翼)	2	7	8	6	3	4	4

表1 目標翼型と各設計ステップごとの厚み修正反復回数

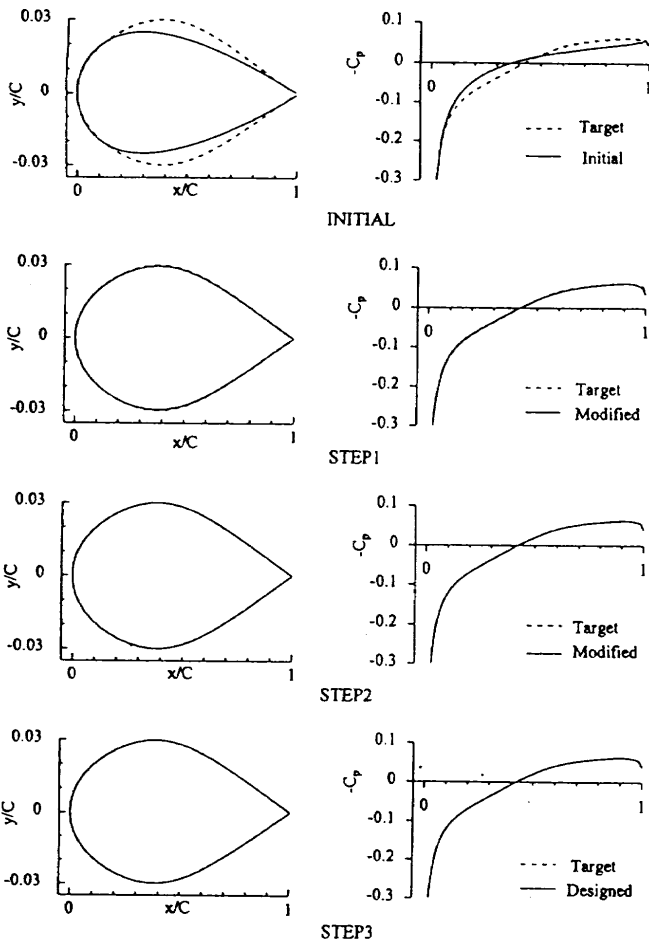


図2 Prandtl-Meyer 関数による設計 (対称翼、迎角 0.0)

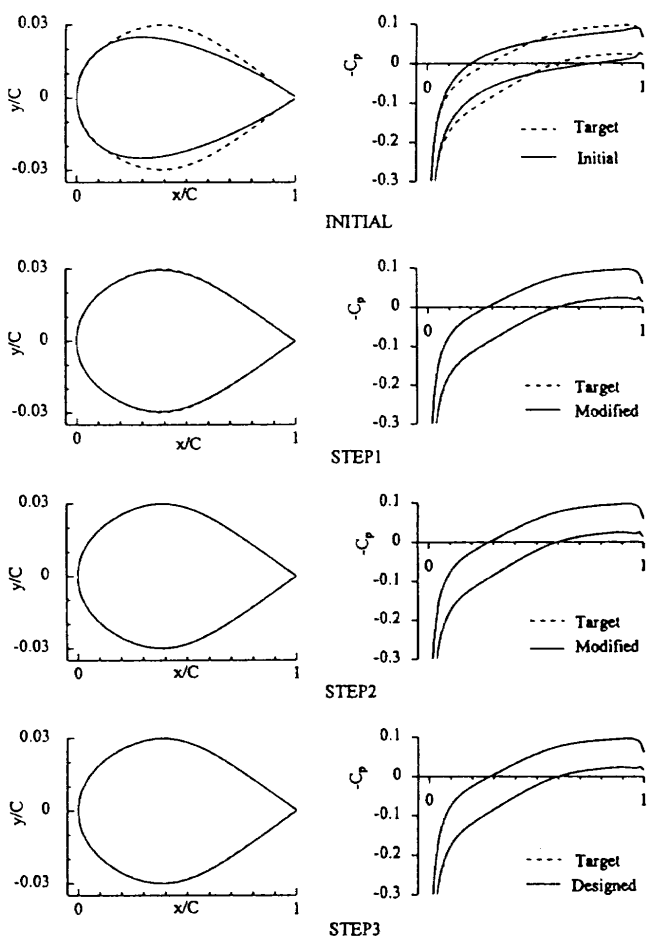


図4 Prandtl-Meyer 関数による設計 (対称翼、迎角 2.0)

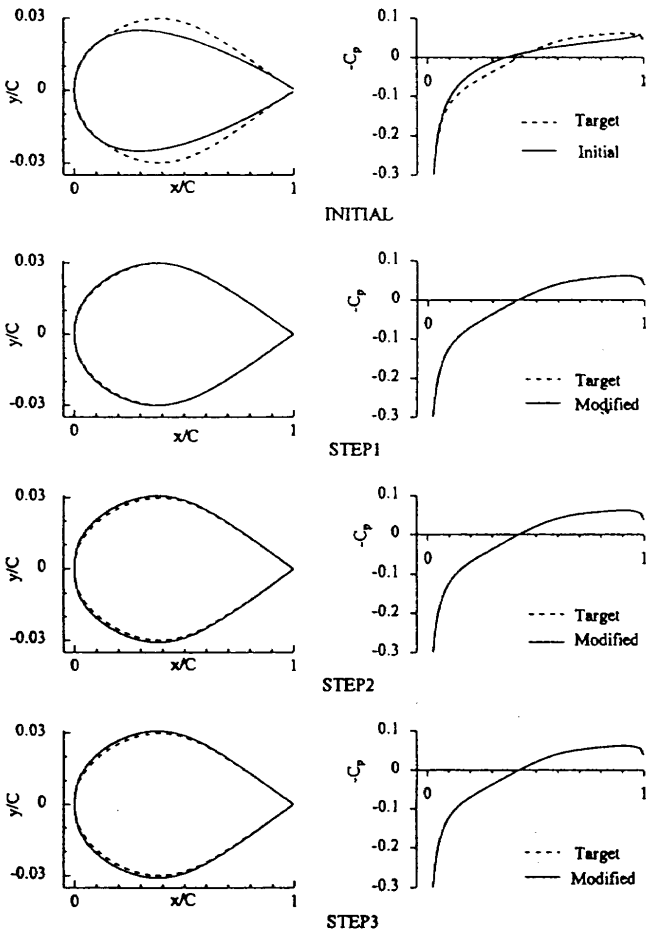


図3 線形理論による設計 (対称翼、迎角 0.0)

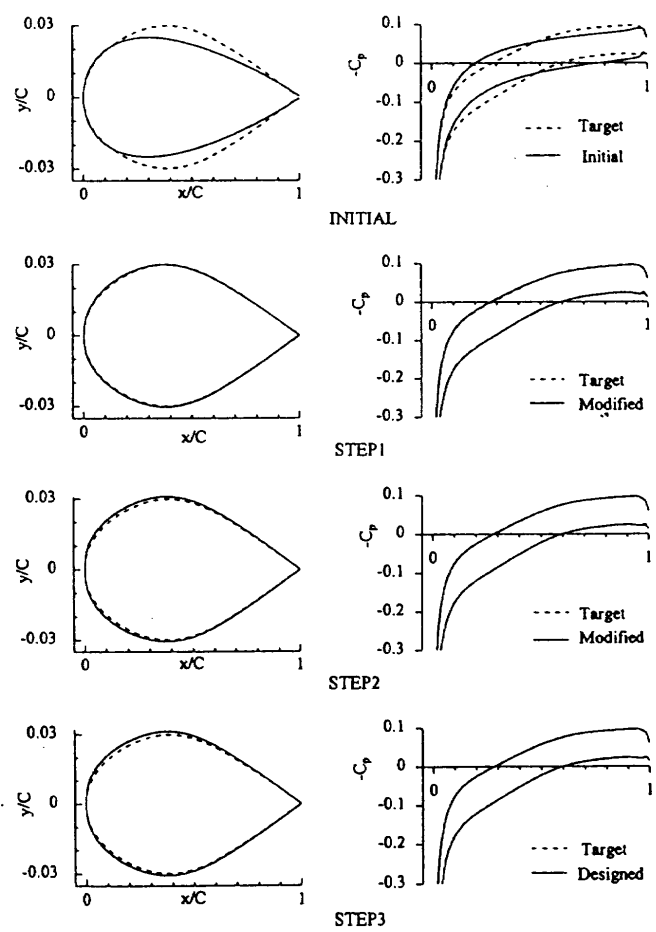


図5 線形理論による設計 (対称翼、迎角 2.0)

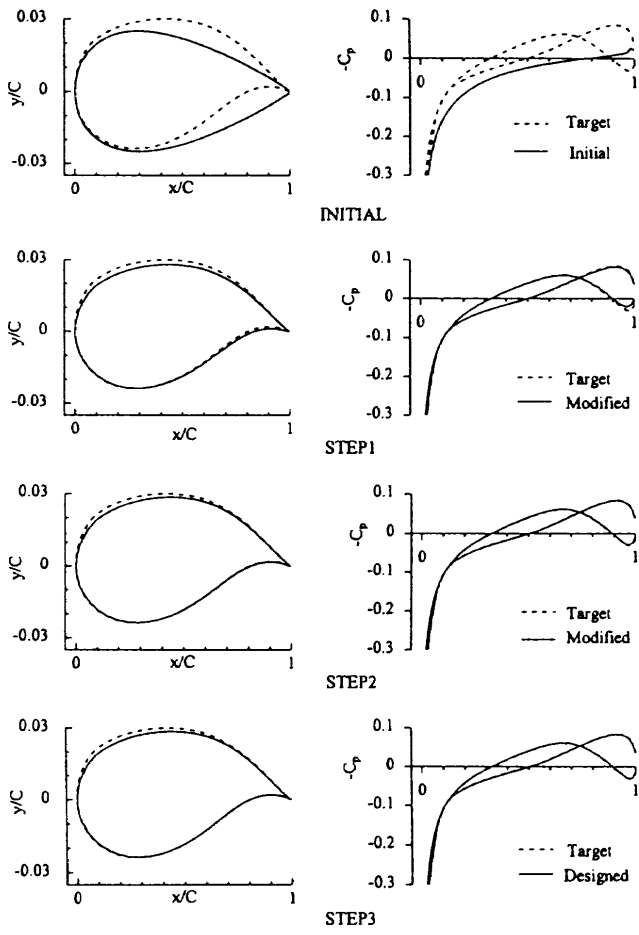


図6 Prandtl-Meyer 関数による設計 (非対称翼、迎角 0.0)

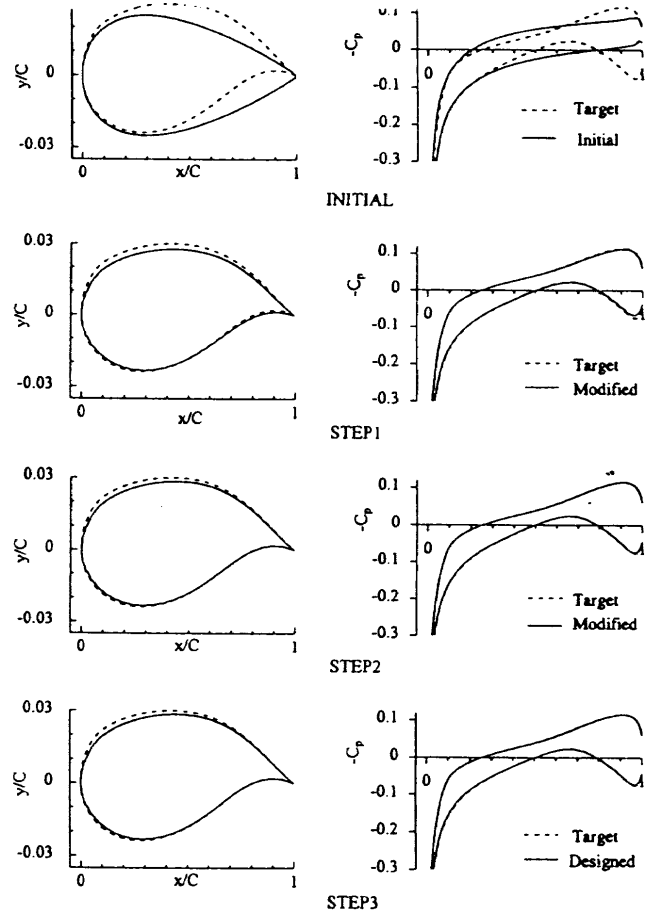


図8 Prandtl-Meyer 関数による設計 (非対称翼、迎角 2.0)

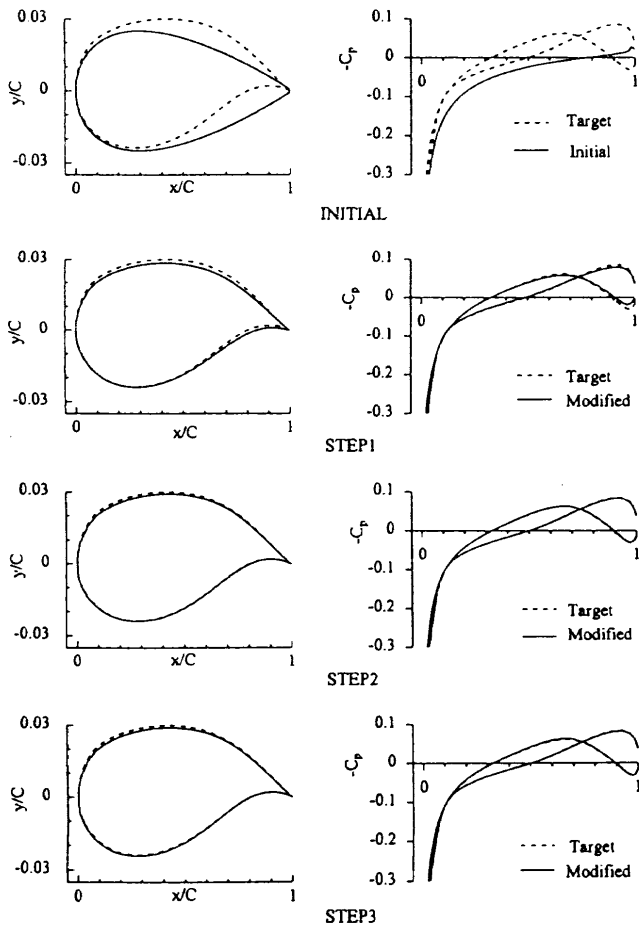


図7 線形理論による設計 (非対称翼、迎角 0.0)

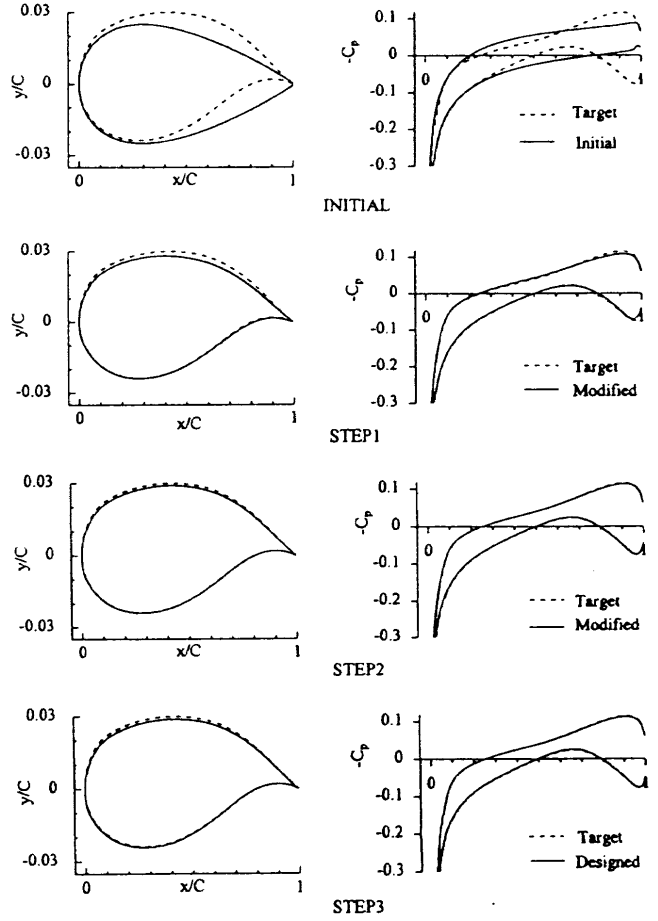


図9 線形理論による設計 (非対称翼、迎角 2.0)

低アスペクト比翼の逆問題解法について

神谷信彦（名大工）、服部恵介（三菱重工）、高梨 進、廣瀬直喜（航技研）

ON AN INVERSE PROBLEM FOR A LOW ASPECT RATIO WING

by NOBUHIKO KAMIYA, KEISUKE HATTORI, SUSUMU TAKANASHI, NAOKI HIROSE

ABSTRACT

Takanashi's method for calculating wing geometry having prescribed pressure distributions at transonic speeds is useful for wings of large aspect ratio. The calculations by this method, however, sometimes diverge for wings of low aspect ratio. In this paper this method is modified to be able to apply to the wings of low aspect ratio. Examples of the calculations are presented.

1. まえがき

遷音速において翼表面の圧力分布を指定して、それを実現する翼の形状を求める高梨¹⁾の方法は、アスペクト比の大きな翼についてはその有効性は確認され、広く使用されている。しかし、アスペクト比の小さな翼の場合には発散してしまう。ここでは、翼面のパネルへの分割法の変更、翼形状のスパン方向の平滑化の導入により、低アスペクト比翼の設計が出来るように改良した。

2. 翼設計手法

残差修正法の設計手順を図1に示す。まず、適当な翼の初期形状 f を仮定し、既存の流れの解析コードからなる解析部で f の圧力分布 C_p を求める。次に、この C_p と目標圧力分布 C_{pt} との差 ΔC_p を算出し、この ΔC_p から設計部で翼形状の修正量 Δf を求め、 f を修正する。得られた新しい翼形状 $f + \Delta f$ を再び解析部に入力し、これらの操作を $\Delta C_p \approx 0$ となる翼形状が得られるまで繰り返す。

残差修正反復法では、解の精度は解析部

の解析コードの精度に依存しており、解析コードを最新のコードに置き換えることによって容易に解の精度の向上を図ることが出来る利点を持つ。解析部は実験でもよい。本報告では、解析部として、完全ポテンシャル流の解析コードである FLO27²⁾ を用いる。設計部としては Takanashi の手法を改良して用いる。

3. 翼平面形

図2に翼平面形を示す。アスペクト比 1.6、テーパー比 0.25 で、後退角 60° である。

4. 設計条件

設計条件を表1に示す。設計された翼の各断面が RAE2822 翼型の厚みを 0.5 倍した翼型と一致すれば、設計は成功したと判断することが出来る。そのため、以下ではこの RAE2822 翼型の厚みを 0.5 倍にした翼型を目標翼型と表記する。

5. 従来の Takanashi の手法による設計結果
設計を 4 回、反復した結果を図3に示す。

翼型は厚み方向を5倍に拡大している。50% semi-span 付近の断面においては、圧力分布、翼型の目標への良い一致が得られる。翼端、翼根においては翼型が目標より異常に厚くなり、また、前縁半径も異常に大きくなる。これらは更に設計を繰り返しても改善しなかった。圧力分布はすべての断面で目標と良く一致した。

翼の38%コード位置の正面図を図4に示す。厚み方向は2倍に拡大している。翼根近傍では目標翼と比較して、厚い断面と薄い断面が交互に現われている。

図3、4から次の問題点が挙げられる。

問題点：

- (1)翼端で目標への収束が悪い。
- (2)翼根付近で翼形状がスパン方向に“波打つ”。

翼根付近で“波打ち”が発散するため、4回以上設計を反復することは出来なかった。

6. 設計手法の改良と設計結果

(1)パネル分割法の変更

図5(a)のような翼面のパネル分割を採用しているTakanashiの方法では、翼端部分で翼を過大に評価することになる。そこで本報告では、パネル分割を図5(b)のように変更することを試みる。パネルの翼弦方向x翼幅方向の分割数は(a)の場合が30x11、(b)の場合が30x10である。この変更によって翼端、翼根位置で圧力分布を指定することは出来なくなる。しかし、その近傍では圧力分布を指定することが出来るので、実用上問題ないと判断した。翼端と翼根の翼断面の形状は、その隣接2断面から線型に外挿することによって得ることが出来る。

計算結果を図6に示す。翼端において翼型が全体的に少し上方へ平行移動しているが、厚みの異常が解消され、目標への一致は図3に比べ著しく改善されている。翼根においては目標への一致が図3に比べ若干

改善されたものの、厚みの異常と翼幅方向の波打ちが見られる。波打ちは、更に設計を繰り返すと悪化する。圧力分布は図3と同様に目標への良い一致が得られる。

(2)翼形状のスパン方向の平滑化

翼形状のスパン方向の“波打ち”抑えるため、次のように、翼形状をスパン方向に平滑化する。

$$f_{i,j}^{(new)} = f_{i,j} + \frac{\varepsilon}{4}(f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1})$$

本論文では $\varepsilon=1.0$ とした。翼形状のスパン方向の平滑化を導入した設計手順のフローチャートを図7に示す。

設計を6回、反復した結果を図8に示す。翼型は厚み方向を5倍に拡大している。翼の38%コード位置の正面図を図9に示す。厚み方向は2倍に拡大している。設計結果より、翼端の目標への一致性が向上し、翼根付近の翼形状のスパン方向の“波打ち”がほぼ解消したことが分る。

7. 任意圧力分布指定の例

翼の各断面がRAE2822翼型である翼を初期翼形状とし、目標圧力分布として、25% semi-span 位置から95% semi-span 位置まで初期翼の25% semi-span 位置における圧力分布を指定した場合の設計を行った。設定圧力分布どうりになれば、翼面上の等圧線は各断面の等%翼弦線と一致する直線になる筈である。設計結果の翼断面、圧力分布を図10に、等圧線を図11に示す。等圧線は、相当な領域にわたって後退角が等%翼弦の後退角と一致した直線になっていることが分かる。

8. 結論

- (1)アスペクト比の小さい翼の設計に旧来のTakanashiの手法をそのまま用いると、翼端、翼根付近で問題があることが確認された。
- (2)パネル分割法を変更することによって、

翼端で目標への収束が悪いという問題が解消された。

- (3) 翼形状をスパン方向に平滑化することによって、翼根付近で設計された翼形状がスパン方向に“波打つ”という問題が解消された。
- (4) 以上により Takanashi の手法を基にした

方法で、アスペクト比の小さい翼の設計が行えるようになった。

参考文献

- 1) S. Takanashi, "Iterative Three Dimensional Transonic Wing Design Using Integral Equations" Journal of Aircraft, vol. 22, No. 8, 1985
- 2) Jameson, A. et al. "A Finite Volume Method for Transonic Potential Flow Calculations," AIAA Paper 77-635, 1977

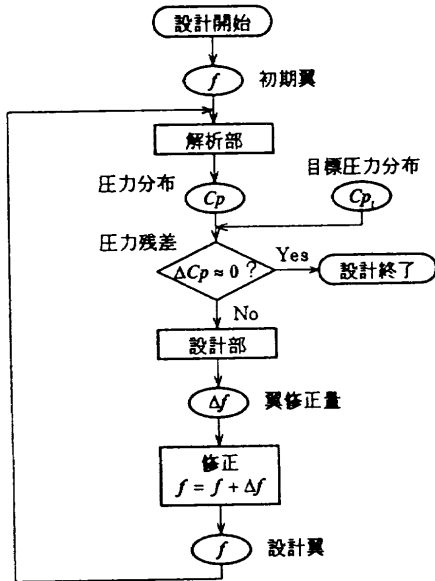


図1 残差修正反復法の設計手順

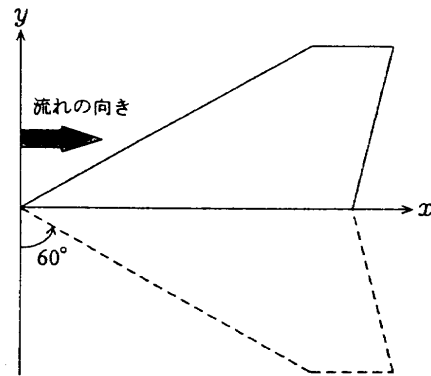


図2 設計翼の平面形

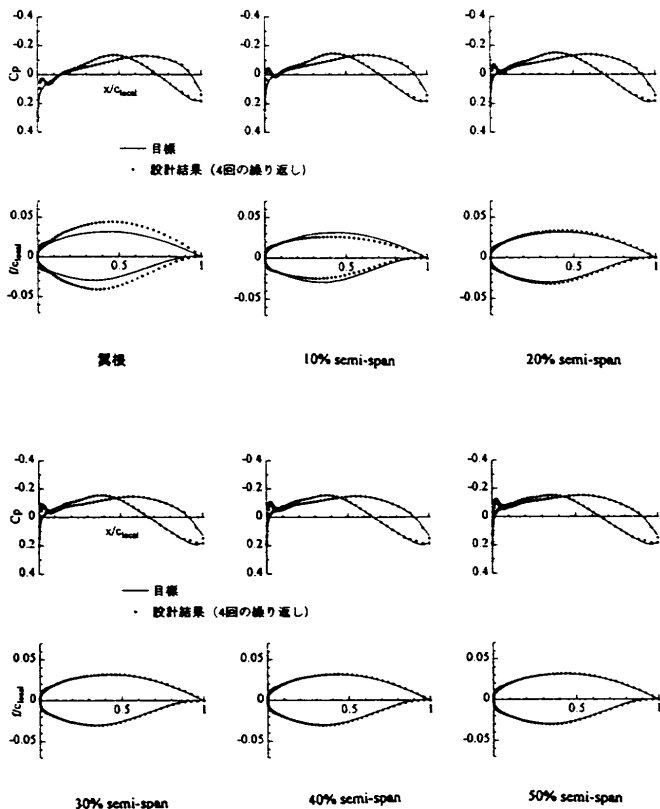


図3 (a) 設計結果 (旧来の方法) その1

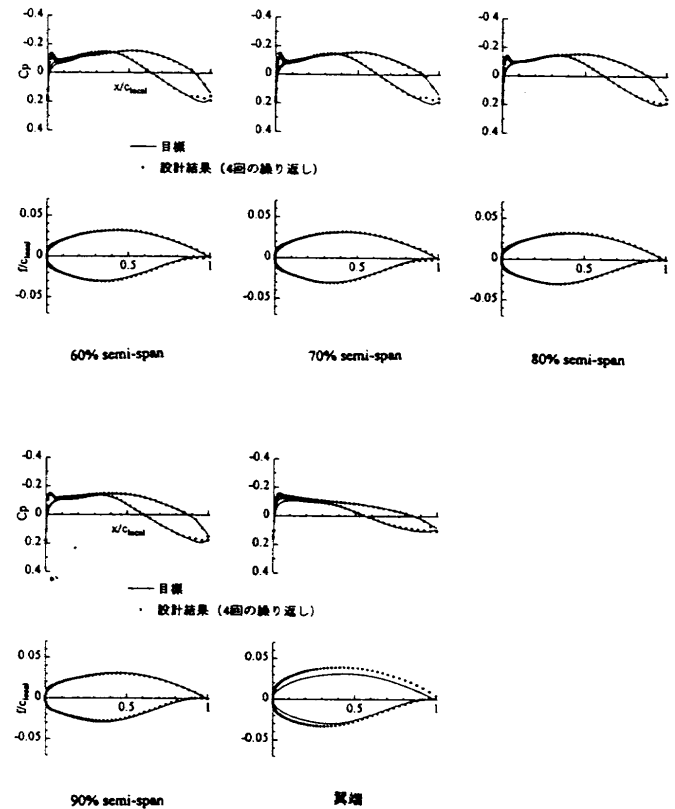


図3 (b) 設計結果 (旧来の方法) その2

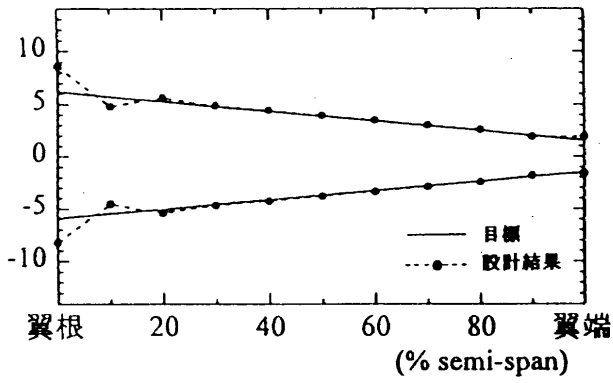
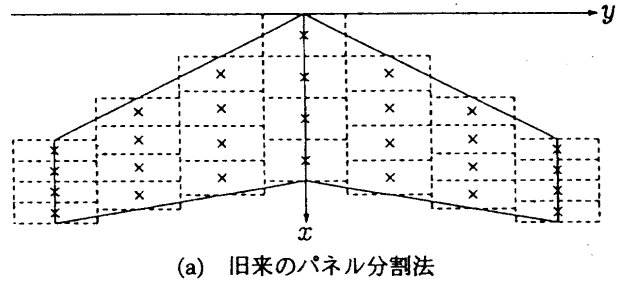
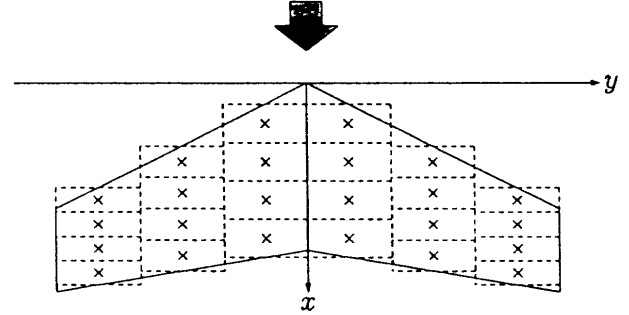


図4 翼の38位置の正面図 (旧来の方法)



(a) 旧来のパネル分割法



(b) 新しいパネル分割法

図5 翼面のパネル分割法の変更

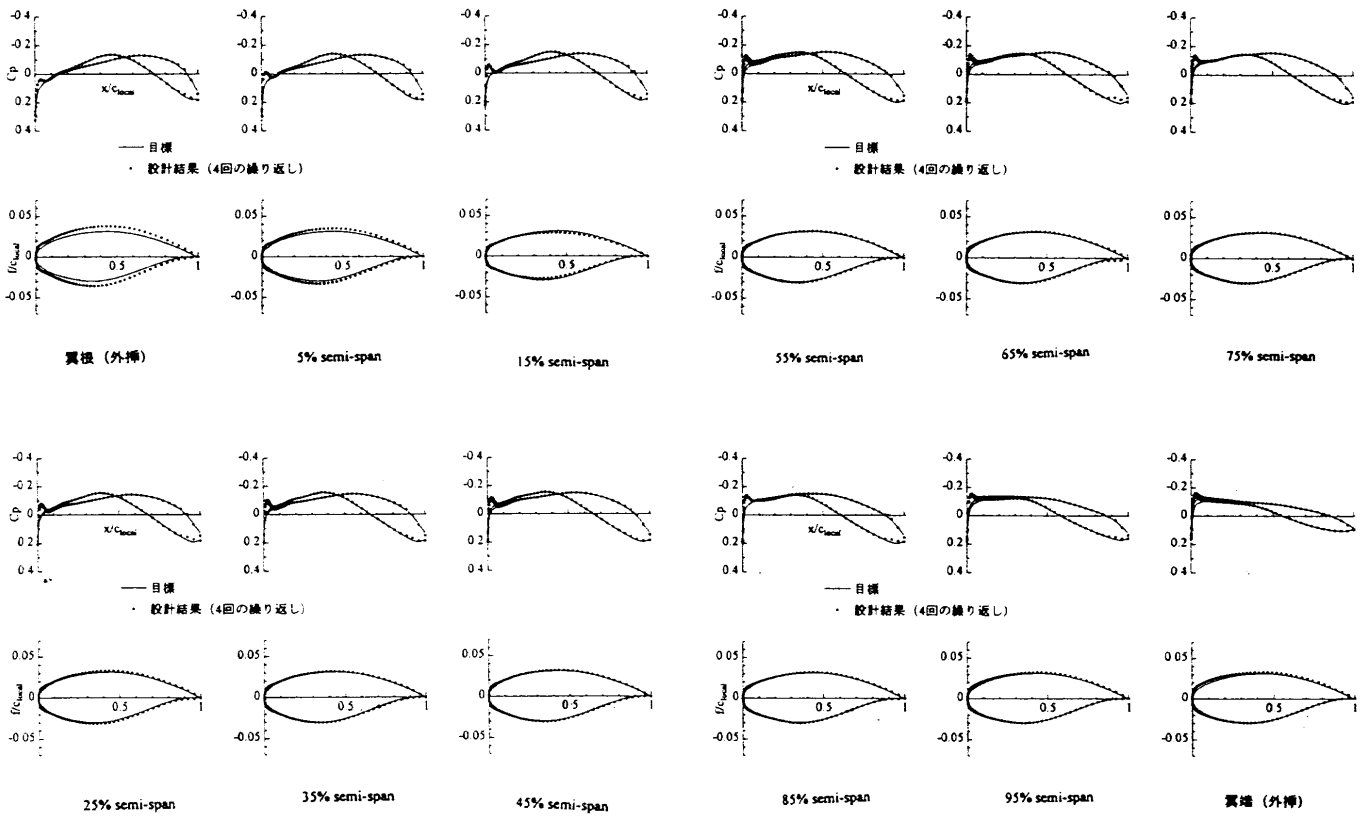


図6(a) 設計結果 (α° 初変更) その1

図6(b) 設計結果 (α° 初変更) その2

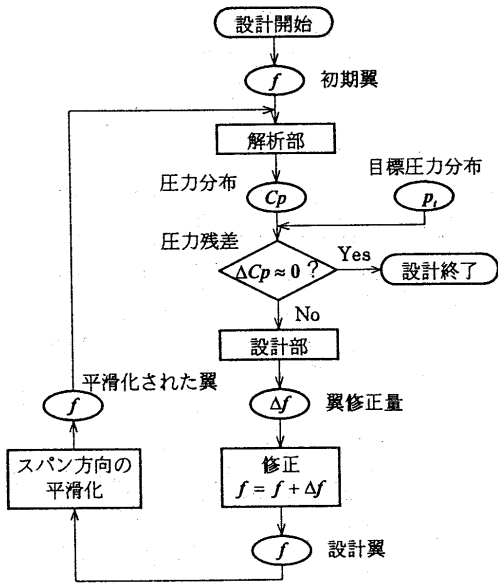


図7 平滑化ルーチンを加えた設計手順

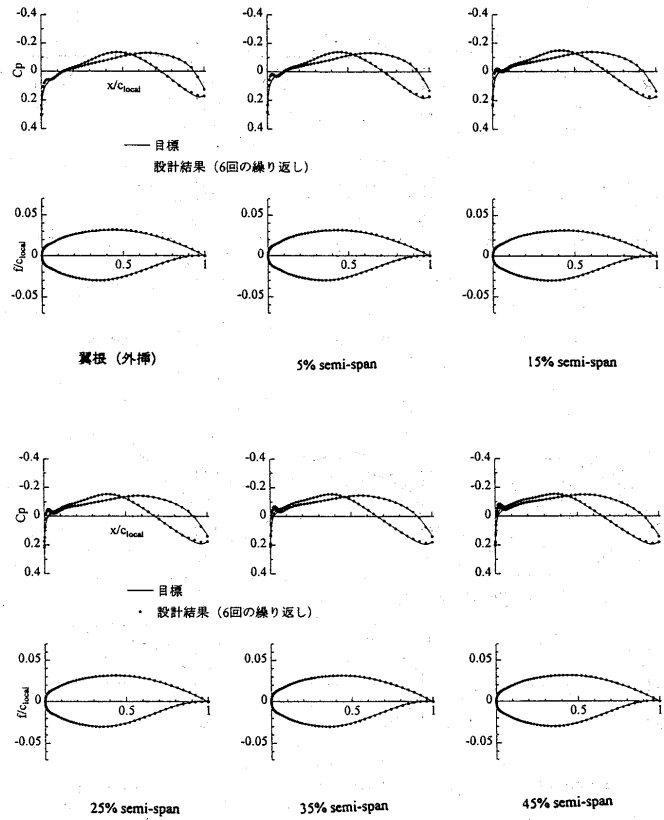


図8(a) 設計結果 (1°初変更+スムージング) その1

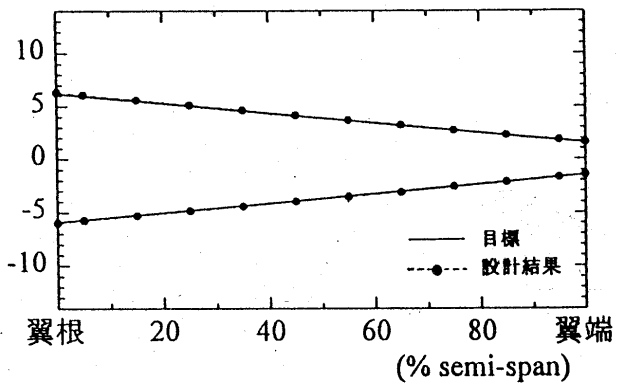


図9 翼の38位置の正面図 (1°初変更+スムージング)

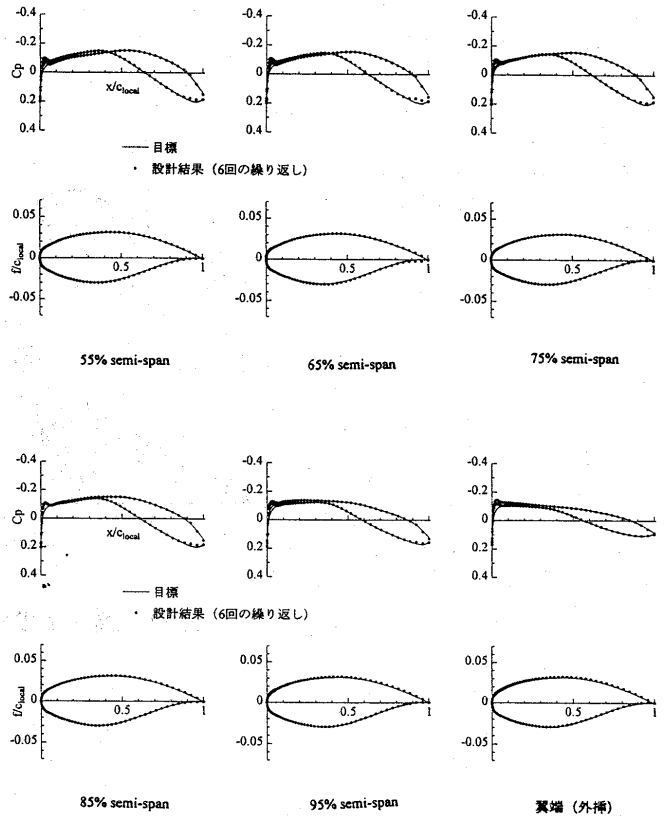


図8(b) 設計結果 (1°初変更+スムージング) その2

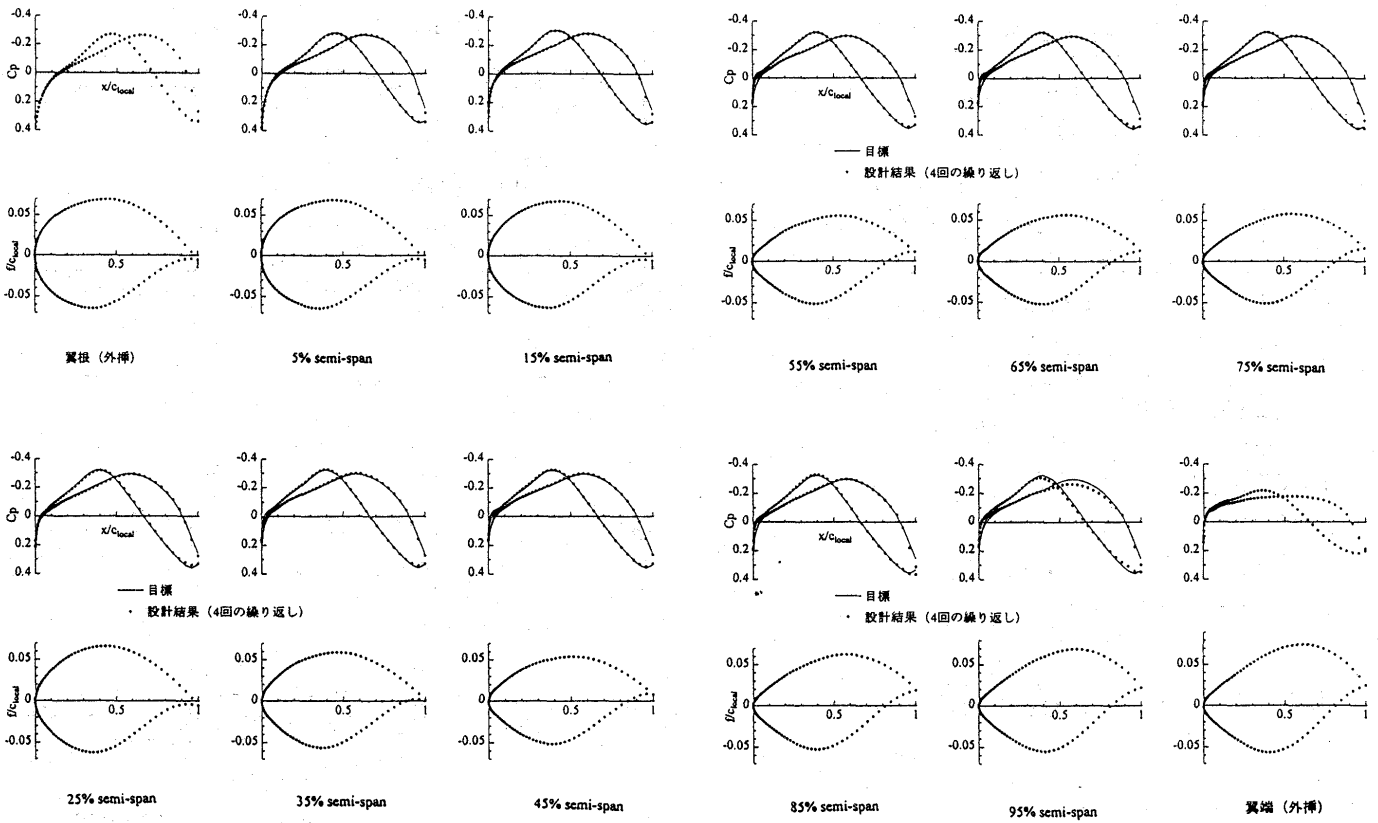


図 10(a) 設計結果 (直線等圧線) その1

図 10(b) 設計結果 (直線等圧線) その2

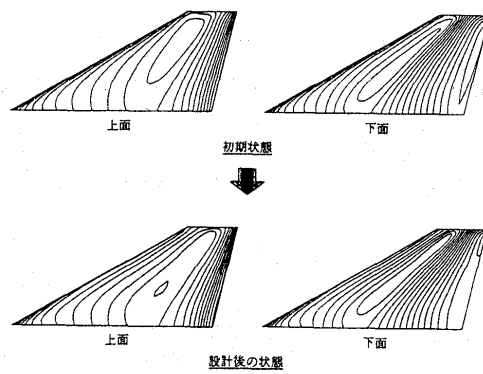


図 11 翼面上の等圧線 (直線等圧線)

三次元翼の空力最適化

大山 聖¹、大林 茂²、中橋 和博³、中村 孝⁴

Three-Dimensional Aerodynamic Optimization

Akira Oyama, Shigeru Obayashi, Kazuhiro Nakahashi and Takashi Nakamura

Abstract

A Genetic Algorithm(GA) has been applied to optimize a wing aerodynamic shape for generic subsonic transport aircraft using Navier-Stokes computations. Conventional optimization schemes are not suitable for aerodynamic optimization problems as they fall into a local optimum. Since a GA searches multi-directionally, the resulting aerodynamic optimization algorithm finds a global optimum. Moreover, as the algorithm itself is very simple and thus very robust. However, a GA needs enormous computational time. Previous study indicates that 2-D optimization of airfoil shape with GA and Navier-Stokes calculation needs several hundred CPU time on CRAY C90 single processor. From this study, we realize that 3-D optimization with GA will require unacceptable CPU time even on a supercomputer. Thus, any 3-D optimization of wing shape has never done before with a GA and Navier-Stokes calculation though Navier-Stokes calculation is necessary to evaluate L/D of a wing precisely. In this study, to overcome enormous CPU time necessary for this optimization, 1) Spanwise maximum thickness and twist angle distributions are selected as design variables 2) The multigrid technique is applied to the 3-D Navier-Stokes computation, 3) The computation is parallelized on Numerical Wind Tunnel at National Aerospace Laboratory, which is a parallel vector machine with 166 processing elements. The objective of the present optimization is to maximize L/D of wing shape. To avoid apparent solution of zero thickness wing for low drag in high speed, A structural constraint is considered. In the optimum design obtained from the present GA, the design principles for the wing developed by existing theory and experience are found to be materialized. This indicates feasibility of the present approach for the aerodynamic optimization in advanced computational environments.

1 はじめに

数値解析法は、開発コストの低減や開発期間の短縮を行え、実験的に再現困難な流れのデータを得ることができることなどから近年目覚ましい発展を遂げ、現在では実験とともに設計には欠くことのできないものとなっている。

現在一般的に用いられている数値解析法を用いた設計法は、対象物体周りの格子生成、流れの数値解析、解析結果に基づく最適化の三つの要素から成り立っている。しかしながら、この三つの要素のうち、格子生成、及び最適化の分野は自動化があまりなされておらず、現在の設計の過程では格子生成に多大な労力を必要とし、また、最適化の過程では過去の経験に基づく設計によって行われているのがほとんどであり、設計の効率はよいとは言えない。

そのため、1980年代から格子生成の自動化及び最適化の分野の研究が注目されてきている。格子生成の自動化を実現する方法としては構造格子法に代わる非構造格子法が挙げられる。

最適化に関して、手法自体は古くから存在し、勾配法やランダムサーチ法などが挙げられる。しかしながら、勾配法は目的関数が単峰性である場合には有効な手段であるが、目的関数が複雑な分布である場合には局所解に収束してしまい、大域的な最適解が得られず未知の領域の探索能力が不十分であると言わざるを

えない。逆にランダムサーチ法は未知の探索領域の探索は行われるが、探索によって得られた情報を有効に利用できず、効率のよい最適化の手法とはいえない。そこでこれらの手法に代わるロバストで効率のよい最適化手法の開発が必要とされている。

このような状況のもとで、1970年頃ホランドによって遺伝的アルゴリズム(GA)が提唱された。GAは生物の進化の原理を模倣したアルゴリズムであり、最適化、適応、学習などに用いられる。これを最適化に適用する場合には、設計候補の集団に対し、評価、選択、交配、突然変異を繰り返して設計候補を進化させていくことによって最適解を探索することになる。

この方法は多点探索を行って局所解に収束する可能性が少なく、また、局所勾配を必要としないことから最適化を行う目的関数が不連続であってもよいなどの利点を持つ。未知の領域の探索能力と探索によって得られた情報の有効利用の二つをかね合わせた魅力的なアルゴリズムである。[1][2]

しかしながら、GAは比較的最近になるまで理論的な研究の進展があまり見られず、そのため世間からあまり注目されなかった。しかし1985年にアメリカのカーネギーメロン大学において、第一回の遺伝的アルゴリズムの国際会議が開催された事が契機となりGAは急速に注目されるようになった。

空力形状最適化においては、一般的に設計変数に対

¹ 東北大学工学研究科大学院

² 東北大学工学研究科航空宇宙工学専攻

³ 東北大学工学研究科航空宇宙工学専攻

⁴ 航空宇宙技術研究所

して目的関数は多峰性で複雑な分布を示す。よって、従来の方法によって最適解を得ることは困難であり、GAなどのロバストな最適化手法を空力形状最適化に適用する必要性がある。[3]

しかしながら、GAは評価回数が勾配法などに比べて非常に多い事が知られている。過去に二次元の翼型の最適化がGAを用いて行われたが、スーパーコンピュータ(CRAY C90)を用いてプロセッサあたり数百時間のCPU時間が必要だったことが報告されている[4]。三次元の最適化をGAを用いて行う場合においては数千時間のCPU時間が必要であることが予想される。そのため、三次元翼の空力最適化をGAを用いて行った例はこれまで報告されていない。

そこで本研究では、輸送機の翼の3次元空力形状最適化へのGAの適用を初めて試みる。GAにかかる膨大な計算時間を計算可能な範囲に短縮する為、1) Navier-Stokes 計算法に多重格子法と呼ばれる収束加速法を適用して計算時間を短縮する、2) 166個のベクトルPEからなる航空宇宙技術研究所の数値風洞(NWT)を用い平行計算する、3) 翼形状の表現にエッセンシャルな変数のみを設計変数とする、の三つを行った。これにより、従来は困難とされてきたNavier-Stokes 計算を用いた三次元空力形状最適化をGAを用いて行う。

2 流れ場の支配方程式

t を時間、 \hat{Q} を保存量ベクトル、 $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ は流束ベクトル、 $\hat{E}_v, \hat{F}_v, \hat{G}_v$ は粘性項による流束ベクトル、 (ξ, η, ζ) を一般座標系とする。この時、一般座標系での3次元Navier-Stokes 方程式は

$$\partial_t \hat{Q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} + \partial_\zeta \hat{G} = \text{Re}^{-1} (\partial_\xi \hat{E}_v + \partial_\eta \hat{F}_v + \partial_\zeta \hat{G}_v) \quad (1)$$

Navier-Stokes 方程式の粘性による流束項のうち、物体表面から離れる方向の微分項が物体表面に沿う微分項に比べて大きい為物体表面に沿う微分項を無視することが可能になる(薄層近似)。これにより、式(1)は

$$\partial_t \hat{Q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} + \partial_\zeta \hat{G} = \text{Re}^{-1} \partial_\xi \hat{S}, \quad \hat{S} = \hat{G}_v \quad (2)$$

で表される。ここで簡単の為に1次元オイラー方程式の保存形を考える。この時、支配方程式は

$$Q_t + F_x = 0 \quad (3a)$$

保存量 Q と流束 F は

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e+p)u \end{pmatrix} \quad (3b)$$

ρ は密度、 u は速度、 e は単位体積あたりの全エネルギーである。圧力 p は完全ガスの状態方程式により次式で与えられる。

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho u^2 / 2) \quad (4)$$

流束の計算には修正HLL E法を用いた。

2.1 乱流モデル

無次元化された粘性係数は次式のように層流粘性係数と乱流粘性係数に分けられる。

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{\mu_l}{\mu_\infty} + \frac{\mu_t}{\mu_\infty} \quad (5)$$

ここで層流粘性係数 μ_l は Sutherland の公式を使用する。

$$\frac{\mu_l}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2} \left(\frac{T_\infty + T_0}{T + T_0} \right), \quad T_0 = 110 \text{ [K]} \quad (6)$$

また、 μ_t を求める為に乱流モデルとして Baldwin-Lomax の代数渦粘性モデルを使用する。

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{t,inner} = \rho l^2 |\omega| & y \leq y_{crossover} \\ \mu_{t,outer} = K C_{cp} \rho F_{wake} F_{kleb}(y) & y_{crossover} < y \end{cases} \quad (7)$$

ここで y は壁からの距離で $y_{crossover}$ は $\mu_{t,inner} \geq \mu_{t,outer}$ となる最短の位置、inner、outer はそれぞれ内層と外層を示す。また、

$$l = ky \left[1 - \exp(-y^+ / A^+) \right], \quad y^+ = \frac{\sqrt{\rho_{wall} \tau_{wall}} y}{\mu_{wall}},$$

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2},$$

$$F_{wake} = \min(y_{max} F_{max}, C_{wk} y_{max} u_{diff}^2 / F_{max}),$$

$$F_{kleb}(y) = \left[1 + 5.5 \left(\frac{C_{kleb} y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1},$$

$$u_{diff} = \left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)_{max} - \left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)_{min} \quad (8)$$

u, v, w は速度、 τ_{wall} は壁面でのせん断応力を表し、 F_{max}, y_{max} は次の関数の最大値とその時の壁からの距離である。

$$F(y) = y |\omega| \left[1 - \exp(-y^+ / A^+) \right] \quad (9)$$

係数は次のように与える。

$$A^+ = 26, \quad k = 0.4, \quad C_{cp} = 1.6, \quad C_{kleb} = 0.3, \quad C_{wk} = 1.0, \quad K = 0.0168$$

2.2 修正可微分リミッター

高次精度の数値流束は隣り合う要素の保存量を高次の補間法によって要素接面に補間して得られる。例えば、補間された圧力は次式で与えられる。

$$p_{L_{i+2}} = \left[1 + \frac{\phi}{4} \{ (1-k)\nabla + (1+k)\Delta \} \right] p_i \quad (10a)$$

$$p_{R_{i+2}} = \left[1 - \frac{\phi}{4} \{ (1+k)\nabla + (1-k)\Delta \} \right] p_{i+1} \quad (10b)$$

ここで、 ∇ と Δ はそれぞれ、前進及び後退差分オペレータである。一次元や直交座標系の場合には、 $k=1/3$ とすることにより3次精度の補間が得られる。通常可微分リミッター ϕ は滑らかな領域でも若干の振動を起こす。また、後述の多重格子法を使用して Navier-Stokes 計算を行う場合には解が収束しない。よって可微分リミッター(differentiable limiter)を修正した修正可微分リミッターを用いる。修正可微分リミッターは次式で与えられる。

$$\tilde{\phi}(p_i) = \frac{3\nabla p_i \cdot \Delta p_i}{2(\Delta p_i - \nabla p_i)^2 + 3\nabla p_i \cdot \Delta p_i + \epsilon_i^2} \quad (11)$$

本研究では $\epsilon_i^2 = \max(3.0|\nabla \xi_i^{-3}, 10^{-12})$ とした。 ξ は一般座標系を表す。

2.3 LU-SGS 陰解法

流束ベクトルを線形化し高次の項を省略することにより、非因子陰解法が得られる。

$$[I + \Delta t(\partial_x A)]\Delta Q = -h(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \quad (12a)$$

$$A = \partial F / \partial Q, \quad (12b)$$

$$h = \Delta t / \Delta x \quad (12c)$$

ここで I は単位行列を表す。LU 因数分解及び対称 Gauss-Seidel 緩和法を組み合わせることにより LU-SGS 陰解法が得られる。

$$[I + h\{\chi \rho(A)_i I - A_{i-1}^+\}] [I + h\chi \rho(A)_i I]^{-1} \quad (13a)$$

$$[I + h\{\chi \rho(A)_i I + A_{i+1}^-\}] \Delta Q = -h(F_{i+1/2} - F_{i-1/2})$$

$\rho(A)$ は A のスペクトル半径を示す。

$$A^\pm = \frac{1}{2} \{A \pm \chi \rho(A) I\} \quad (13b)$$

一般的に χ は 1.01 である。これの三次元への拡張も同様である。この手法は 2 因子法なので、次のように書き直すことができる。

FORWARD SWEEP:

$$\Delta Q_i^+ = [-h(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) + hA^+ \Delta Q_{i-1}^+] / (1 + h\chi \rho(A)_i) \quad (14a)$$

BACKWARD SWEEP:

$$\Delta Q_i^- = \Delta Q_i^+ - hA^- \Delta Q_{i+1}^- / (1 + h\chi \rho(A)_i) \quad (14b)$$

ここで、 $1 + h\chi \rho(A)_i$ はスカラー量である。よって、ブロック行列反転を必要としない。

3 多重格子法

一般に偏微分方程式を Navier-Stokes 法などのように細かいグリッド上で時間発展させていく解法では、高周波の誤差は早く減衰するのに対して低周波の誤差はなかなか減衰しない。そのため、計算を効率よく行って計算時間を短縮するためには低周波の誤差も同時に減衰させる必要がある。この問題を解決するために、多重格子法は、細かいグリッドとともに粗いグリッドを用いる。それにより低周波の誤差も高周波の誤差として扱う事ができ、様々な周波数の誤差を同時に減衰していくことが可能となる。また、粗い格子の上では要素体積が大きくなることで、クーラン数によって制限されている時間発展の幅を大きくとることができることや、後述のように粗い格子での計算時間は少ないことから、多重格子法は定常解への収束を加速するのに有効な手段である。

始めに細かいグリッドで時間発展させた後、保存変数は次の式を用いて一つ粗いグリッドに制限補間される。

$$Q_{2h}^{(0)} = \sum S_h Q_h / S_{2h} \quad (15)$$

ここで添え字 h は格子幅 h のグリッド、 $2h$ は格子幅 $2h$ のグリッドを示す。一つ粗いグリッドは格子幅 h から一つおきに格子を取り除くことにより生成したので、格子幅 $2h$ のグリッドと表現する。 Q は保存量変数、 S は要素体積を表し、和は粗いグリッドの一つの要素を構成する細かいグリッド要素全体を示す。この制限補間により各グリッド間で保存則が守られる。残差修正項を次のように定義した時、

$$P_{2h} = \sum R_h(Q_h) - R_{2h}(Q_{2h}^{(0)}) \quad (16)$$

粗いグリッドの残差は

$$R_{2h} = R_{2h}(Q_{2h}) + P_{2h} \quad (17)$$

となる。残差修正項はグリッド間の誤差の修正と、粗いグリッド上の解を細かいグリッドに依存させる為のものである。同様にして、さらに粗いグリッドの残差は式(18)のように定義される。

$$R_{4h} = R_{4h}(Q_{4h}) + P_{4h} \quad (18a)$$

$$P_{4h} = \sum R_{2h} - R_{4h}(Q_{4h}^{(0)}) \quad (18b)$$

最後に、それぞれのグリッドで計算された修正値 V をそれより一つ細かいグリッドに線形補間する。つまり、 $4h$ グリッドから移された修正値と $2h$ グリッドで計算された修正値によって得られた Q_{2h} の最終的な値を Q_{2h}^c とすると、

$$Q_h^c = Q_h + I_{2h}^h V_{2h} \quad (19a)$$

$$V_{2h} = Q_{2h}^c - Q_{2h}^{(0)} \quad (19b)$$

Q_h は h グリッドの $2h$ グリッドに移る前の値であり、 I は線形補間オペレータである。

本研究では FAS(Full Approximation Scheme) [5]~[8]を採用した。グリッド間の移動方法に関してはさまざまな方法が利用されているが、ここでは V サイクルを採用する(図1)。細かいグリッドの他に二つの粗いグリッドを用い、1 サイクルの間にそれぞれのグリッドで 2 回ずつ、合わせて 6 回の時間発展を行っている。

これを細かい格子上での通常的时间発展法と比較すると、1 サイクルあたりの全計算量は

$$1 + \frac{2}{8} + \frac{2}{64} + 1 < 2.3 \quad (\text{三次元})$$

でしかない(時間発展は大きな時間幅を用いてしかも 6 回行われている)。本研究では翼の評価にかかる計算時間を短縮するために陽解法ではなく、より効率のよい LU-SGS 陰解法に多重格子法を適用する。

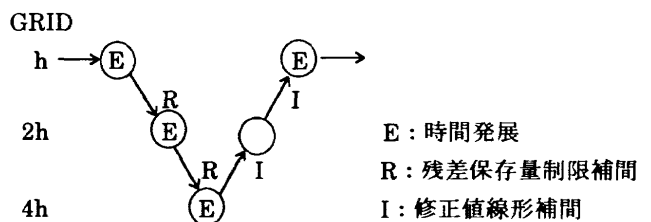


図1 Vサイクル

4 遺伝的アルゴリズム

生物は生存競争を行って、環境によりよく適した個体が生き残る。生存できた個体は交叉を行い子孫を生産し、世代交代を繰り返しながらその生息する環境により適応するように種として進化をおこなう。この一連の過程が自然淘汰と呼ばれるものである。遺伝的アルゴリズムはダーウィンによって発表された進化論をもとに、ホランドが提唱したアルゴリズムである。つまり、この生物界の進化の過程を工学に適用し、最適化などに用いるわけである。

GAはある個体群を使って、多点探索を行うアルゴリズムである。フローチャートを図2に示す。進化には自然界に特有な交配と突然変異のオペレータを用いており、勾配法のように局所的な勾配は必要としない。そのため、目的関数が不連続であったり、微分不可能な場合にも適用できる。

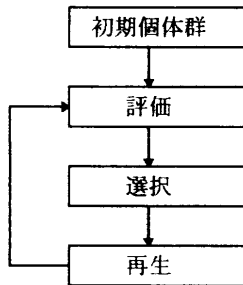


図2 遺伝的アルゴリズムのフローチャート

選択の方法としては、一般にルーレット選択がよく使われているが、本研究ではストカスティックユニバーサルサンプリングを用いている。ルーレット選択は個体群の中に特に優れた個体が存在した場合にはその個体が選ばれる確率が高くなり、個体群の多様性が失われ局所解に収束してしまう可能性がある。ストカスティックユニバーサルサンプリングはルーレット選択と同様に各個体は適応度に比例した確率で生存できるのであるが、特に優れた個体が存在した場合でも適応度の低い個体も親として選択され、個体群の多様性が保たれる。

再生は交叉と突然変異によって構成される。選択された親の遺伝子を組み替えることによって次の世代の子供を生産する事を交叉と呼ぶ。本研究では交叉の方法として多点交叉を用いている。これは遺伝子の数が少ない為である。

突然変異は交叉だけでは生成できない子を生成して個体群の多様性を維持する働きをする。本研究では、進化を促進させるため、10パーセントの確率で発生するようにし、±1以内の変化が遺伝子に加えられるようにした。

個体を選択し、交差や突然変異を用いて再生産を行う過程は確率的であるため、優れた個体が個体群の中にあっても最後に得られる世代にその個体が残っていない可能性がある。そのためエリート戦略を用い、各世代の集団の中で一位と二位の個体を次の世代に保存している。これにより個体群の中の最大の適応度を持つ個体の適応度は単調増加する。

個体群サイズは、多様性を保つ、あるいは初期世代

の個体群の中に超個体が存在したときに起こる初期収束を避けるために大きくとるべきである。ここでは計算時間とのバランスから個体群サイズは64とした。

5 設計問題の定式化

5.1 設計変数

翼形状の表現方法として、最大翼厚比およびねじり角の翼幅方向分布を決定する五つの制御点を設計変数に選ぶ。スパン方向の最大翼厚分布及びねじり角分布は翼の性能を決定する上で重要な要素である。普通GAでは遺伝子は二進数であることが多いが、ここでは最大翼厚比は0.05から0.20、ねじり角は-5から10度の実数とした。この五つの制御点を二次のB-Splineで結ぶことにより、実際の最大翼厚比およびねじり角の翼幅方向分布を得る[9]。また、最大翼厚比やねじり角が翼幅方向にうねる翼は実用的ではないため、設計変数が翼根から翼端にかけて単調に減少するように、遺伝子の並べ替えを行っている。三次元翼の各翼型断面のキャンパーはNACAの5字番号翼型で与える。キャンパーラインを示す前3桁は230に固定している。後2桁は最大翼厚比を示しており、これは各個体の遺伝子によって決定される。翼の平面形は典型的な輸送用飛行機の翼平面形を用いた。[10]

5.2 翼の空気力学的評価

空気力学的評価関数には前に述べた流れ場の数値解法によって得られた翼の揚抗比をとり、揚抗比の最大化を行う。計算条件はレイノルズ数 10^7 、自由流マッハ数0.6、迎角 0° とした。

5.3 翼の構造力学的評価

構造力学的な制限を考えずに翼揚抗比最大化を行うと、翼は抗力を減らすため翼厚をゼロにする方向に進化していくと思われる。しかしながら、翼厚のない翼は揚力によって発生する曲げモーメントに耐えられない事は明らかであり、こうして得られた最適解は実用的ではない。このため、最大翼厚に対して最小限の値(制限最大揚抗比)を与える必要がある。本研究では制限最大翼厚比を求める為、翼を単純なボックスと考える(図3)。このとき、翼断面の断面二次モーメントは

$$I = \frac{1}{2} t l d^3 \quad (20)$$

で与えられる。ここで、 t は板厚、 l は翼弦長、 d は翼厚である。

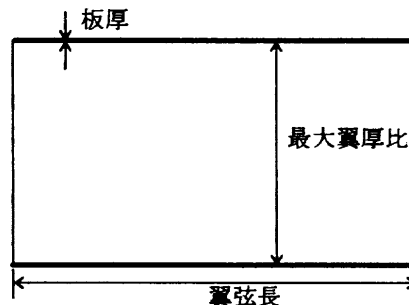


図3 翼断面のボックス構造

数値計算によって各スパン位置 k での翼表面に働く空気力、すなわち揚力分布 W_k が得られる。これらを各スパン位置にかかる集中荷重の和と考えると、曲

げモーメントは次式で与えられる。

$$M_k = \sum_i W_i (y_k - y_{f_i}) \quad (21)$$

ここで、和はいまモーメントを求めたいスパン位置から翼端にかけての和を表し、 M_k はスパン位置 k での曲げモーメント、 y_k はスパン方向の座標、 y_{f_i} は集中荷重のスパン方向座標である。

ここでは材料として代表的なA I合金材 2024-T351を使用すると仮定する。許容応力 σ_0 は板厚6.35~12.6 mmのとき、39[ksi]である。翼が曲げモーメントに耐える為には

$$\frac{l}{y} > \frac{M}{\sigma_0} \quad (22)$$

を満たさなくてはならない。これにより、制限最大翼厚比 d_{lim} が与えられる。[11]

5.4 評価関数

これらをもとに、評価関数は次式で与えられる。

$$Fitness = \frac{C_l}{C_d}(Penalty), \quad (23)$$

$$(Penalty) = \exp[100 \times \min((t/c)_k - d_{min_k})]$$

6 結果

まず始めに、翼の平面形と四つのスパン位置での最適化された翼型を図4に示す。キंकが翼の中央に二箇所与えられている。図5は今回のGAの収束履歴である。本研究では設計変数が少ないため50世代で最適解が得られた。1世代当りの計算時間はほぼ50分であったので、最終的な最適解を得られるのに必要な時間はおよそ40時間である。次に最適化された最大翼厚比とねじり角の翼幅方向分布を図6、図7に示す。最大の制限最大翼厚比は翼のキंकのところに存在している。最適化された最大翼厚比は制限最大翼厚比をキंक部分でわずかに上回るように分布している。これにより、制限関数が機能して翼厚が不必要に薄くなることを制限していることが分かる。図7からはよく知られている翼端のねじり下げが行われている事が分かる。実験により、ねじり下げが5度を超えると誘導抵抗が急増することが知られているが[12]、最適化された翼はこの条件を満足している。

図8に翼幅方向揚力分布を示す。実線が放物型曲線、丸点が最適化された翼の揚力分布である。理論的に、構造的な制限を加えた場合は揚力が放物型の分布のとき誘導抵抗が最小となる事が知られている[13]。図から得られた最適翼の揚力分布は放物型になっており、誘導抵抗が最小化されるように翼の最適化がなされたことが分かる。図9に見られるように、最適化された翼上面の等圧線はスパン方向にほぼ平行に連なっており、流れ場は近似的に2次元となっている。

以上のことから、このアルゴリズムで得られた翼は存在する理論や実験結果から導かれた設計方針を満足しており、従来の設計法においても、最適な翼になっていることが示された。

7 結論

Navier-Stokes 解法を用いたGAによる3次元翼の最適化が行われた。NWTを用いた翼の評価のパラレ

ル化、Navier-Stokes 計算への多重格子法の適用、スパン方向の最大翼厚比分布及びねじり角分布を設計変数として選択すること、によってNavier-Stokes 解法を用いた3次元翼の最適化が可能となった。得られた最適翼は既存の設計方針や実験結果と一致し、GAを用いた3次元翼の空力最適化の有効性が確かめられた。

GAは、勾配法が設計変数の数に比例して計算量も増加していくのに対して、計算量が増大せず、また、目的関数に微分可能性を必要としない。今後、扱う最適化問題が複雑になっていくにつれてGAは最適化の手法として主流となっていくであろう。さらにコンピュータ環境が発展し、NWTでしかできないような計算をワークステーションなどで行えるようになれば、その能力をいかに発揮できるであろう。

参考文献

- (1) Goldberg, D. E., "Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Jan. 1989
- (2) 坂和正敏、田中雅博、遺伝的アルゴリズム、朝倉書店、1995
- (3) S. Obayashi and T. Tsukahara, "Comparison of Optimization Algorithms for Aerodynamic Shape Design," AIAA 96-2394
- (4) K. Yamamoto and O. Inoue, "Applications of Genetic Algorithm to Aerodynamic Shape Optimization", AIAA 95-1650
- (5) Brant, A., "Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems," Mathematics of Computation, vol.31 no.138, April 1977
- (6) Anderson, W. K., Thomas, J. L. and Whitfield, D. L., "Multigrid Acceleration of the Flux-Split Euler Equations," AIAA Journal, vol.26, June 1988
- (7) Yoon, S., Chang, L. and Kwak, D., "Multigrid Convergence of an Implicit Symmetric Relaxation Scheme," AIAA 93-3357, 1993
- (8) Edwards, J. R., "Development of an Upwind Relaxation Multigrid Method for Computing Three-Dimensional, Viscous Internal Flows," AIAA 95-0208, 1995
- (9) 佐藤義雄、実習グラフィックス、アスキーレーシングシステム②実習コース、アスキー出版、1988
- (10) Jacob, P. F., "Experimental Trim Drag Values and Flow-Field Measurements for a wide-Body Transport Model With Conventional and Supercritical Wings," NASA TP 2071, 1982
- (11) J. Case, A.H. Chilver, and C. T. F. Ross, "Strength of Materials & Structures with an Introduction to Finite Element Methods", Edward Arnold, London, 3rd edn., 1993
- (12) E. Torenbeek, "Synthesis of Subsonic Airplane Design", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1982
- (13) Robert T. Jones : 『翼理論』、日刊工業新聞社

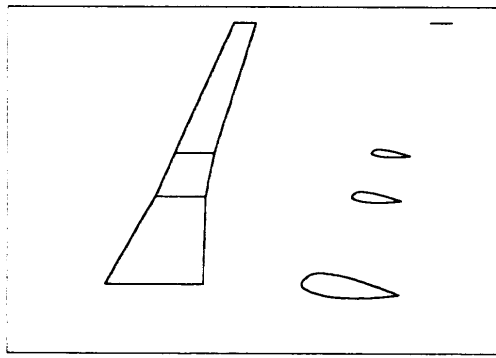


図4 最適化された翼形状

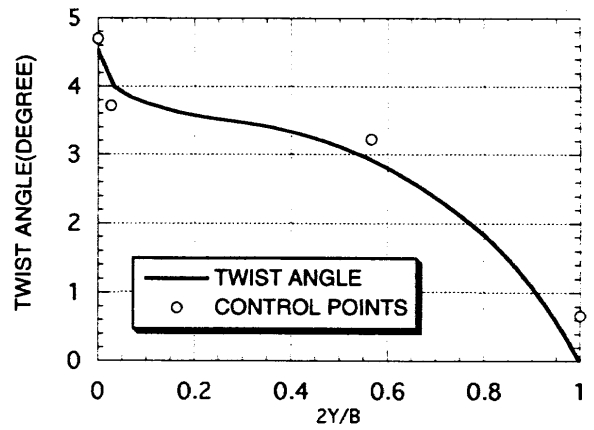


図7 翼幅方向ねじり角分布

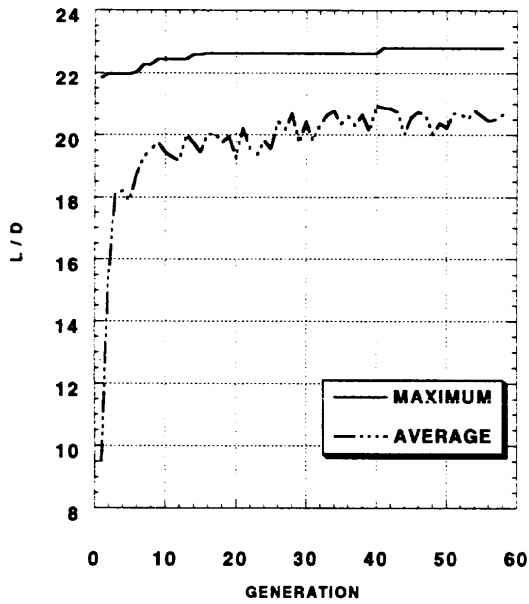


図5 最適化収束履歴

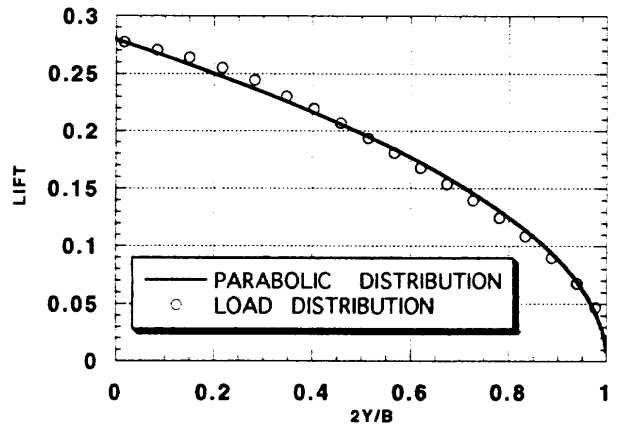


図8 翼幅方向揚力分布

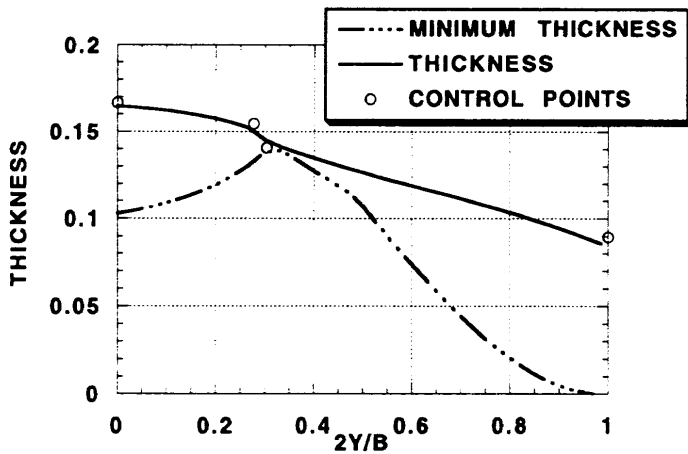


図6 翼幅方向最大翼厚分布

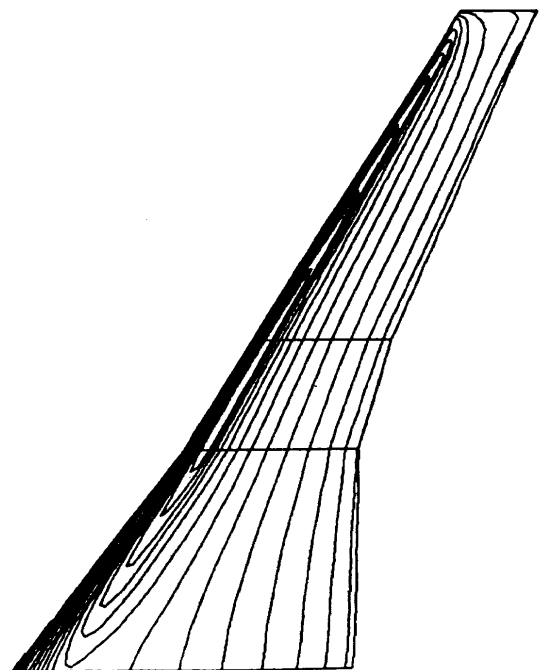


図9 最適化された翼上面の等圧線図

構造的制限を考慮した翼平面形状の最適化

山口 義博¹、 大林 茂²、 中橋 和博³

Optimization of Wing Planform with Structural Constrains

Yoshihiro Yamaguchi , Shigeru Obayashi, Kazuhiro Nakahashi

ABSTRACT

In the field of aerospace engineering, the aircraft design process can be divided into three stages: conceptual, preliminary and detail designs. The conceptual design is the first stage to decide a direction of design from mission requirements. In this process, the initial sizing of the aircraft is estimated from existing database and empirical methods. Since there are various demands for aerodynamics, structures, fuel, payload, and so on, a multiobjective optimization is necessary for the design. Therefore, in this paper, an optimization method is investigated to design wing planforms for this stage.

In this work, three objectives are considered for wing planform optimization: aerodynamic performance, wing weight and fuel tank volume. Aerodynamic performance is evaluated by CFD analysis. Wing weight and fuel tank volume are estimated by empirical formulae. To simplify the problem, only the leading-edge sweep angle and two chord lengths at the midspan and wingtip are used as design variables. The leading edge of the wing is kept straight. Thus, a tapered wing with a trailing-edge kink will be designed.

As an optimizer, Genetic Algorithm (GA) is employed here. GA simulates evolution by selection. Because GA can find a more global optimum, it is expected to perform better than the conventional gradient-based methods. Major drawback of GA is that it requires a large number of function evaluations. Thus, FLO-22 code based on the full potential equation is used because of its efficiency instead of Euler or Navier-Stokes solver. Planform optimization problems are considered for typical subsonic aircraft. The design results show the feasibility of the present approach for the initial sizing with optimization.

記号

- k_{n0} : 結合部等の重み係数
- k_{λ} : テーパー比による係数
- k_e : ナセルとエンジンによる曲げモーメントの係数
- k_{uc} : エンジンの上積み、下積みによる補正值
- k_{sr} : フラッターへの補正值
- k_b : 翼取り付け状態による補正值
- W_{des} : 航空機設計重量
- n_{ult} : 最大荷重倍数
- W_w : 翼重量
- W_{wbasic} : 翼基本重量
- W_G : 機体グロス重量
- W_{to} : 航空機離陸重量
- W_F : 燃料重量
- V_t : 燃料タンク容量
- b_{ref} : 参考翼幅
- b_s : 構造翼幅
- k_w : 装備重量に比例した係数
- S : 翼面積
- t_r : 最大翼厚
- b : 翼幅
- c : 翼弦長
- λ : テーパー比
- τ : $(t/c)_r / (t/c)_s$
- AR : アスペクト比
- Λ : スイープ角
- V_D : 設計速度
- M_C : 設計巡航マッハ数
- $C_{L\alpha}$: 揚力傾斜

§ 1 緒言

航空機設計では、先ず使用目的、ペイロード、速度、航続距離などの計画要求を立てた後に、概念設計、基本設計、詳細設計の3つの計画作業が行われる。その中で概念設計では、計画要求にあったコストと性能の最適な形態を決定しなければならない。しかしながら様々なパラメータがあり、かつ設計が進むに連れ様々な問題が出てくるため流動的な問題となる。概念設計の過程は図1のようになる[1]。

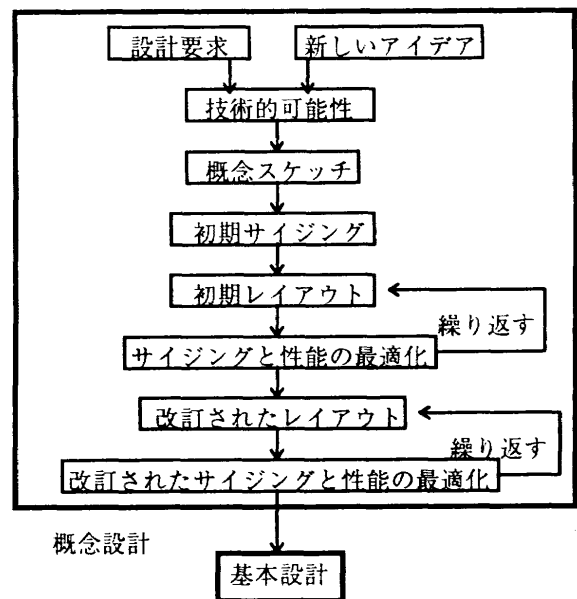


図1. 概念設計の過程

先ほど挙げた設計要求や、将来の技術レベルを推定した技術的可能性より、概念スケッチを行う。概念スケッチをもとに初期サイジングを行うが、初期サイジングでは空力

¹ 東北大学大学院
² 東北大学工学部機械航空工学科
³ 東北大学工学部機械航空工学科

や重量の推定を既存の飛行機との比較により行う。これに基づき、レイアウトで様々な装置を配置した三面図を描く。次にレイアウトをもとに空力や重量特性の解析を行い、それらを最適化して基本設計へと段階は移る。

この一連の過程の中で、本研究では概念設計の早い段階に行われる概念スケッチと初期サイジングに注目し、次の段階であるレイアウトに上手く方向性を与えるための、翼平面形状の最適設計を行った。

初期サイジングは安全性及び経済性の面から多くを経験的なデータに依存しがちである。しかしながら、航空機設計におけるこの段階での最適化は、次のレイアウトの方向性を決める重要な段階であり、構造力学的な面だけでなく、燃料消費率の減少、製造コストの減少等の材料力学的、空力的かつ経済的な総合的な最適化の必要性がある。そこで、本研究では空力的計算に基づき、設計要求をみたく簡略化した構造的な制限を考慮した三次元翼平面形状の最適化を、経験的な手法を用いることなく行った。

翼平面形状の最適化の研究はこれまでもおこなわれてきている[2][3][4]。しかしながら、空力的な問題と構造的な問題において相反する問題となり、かつ一般的に非線形問題となるため、最終的な最適形状が得られにくい。そのため、各要求に対する評価方法ならびに最適化手法に対し、何らかの工夫が必要となる。そこで、本研究においては、評価方法はより単純化し、空力的には誘導抵抗を減少、翼重量は減少、燃料重量は増大させるように評価関数を構築し、最適化手法に対しては非線形形で、不連続な評価関数の分布に対してはロバスタなアルゴリズムを用いた。

最適化手法としては、本研究のように複雑な設計条件を持つ問題に対しても柔軟に対応できる遺伝的アルゴリズム(GA)[6][7]を用いた。GAは生物の進化にヒントを得た最適化アルゴリズムであり、20世紀になってHollandにより導入された比較的新しい最適化手法である。生物の進化(選択淘汰、突然変異)をもとにしており、各個体に対して、様々な環境下及び複雑な要素が絡み合う環境下において適応度の高い個体を生成することができる。実際のアルゴリズム上では計算時間がかかるという欠点はあるものの、最適解を大域的に探索でき局所解に収束しにくいという特長をもつ。

本研究は流体解析にFLO-22を用いた。完全ポテンシャル方程式による解析をおこなうことで、EulerやNavier-Stokes方程式を解くよりも流体解析に対する負担を小さくすることによって、GAの欠点である長い計算時間を短縮している。

§ 2. 構造的制限

初期サイジングにおいては、翼型、翼面荷重、推力重量比、エンジンサイズ等の数多くのパラメータがある。しかし、本研究では、設計要求として与えられる飛行速度、飛行高度、航空機設計重量などをもとに、翼のTaper比、Sweep角度をパラメータとした翼平面形状を設計し、翼の重量、及び燃料タンク容量の概算を行った。それら翼重量等の概算は統計的データに基づいているため、機体サイズ、航空機の用途により、必ずしも定量的に一致しない。そのため、定性的な計算であるが、本研究のアプローチの有効性を示すために以下のような概算法を用いた。

1. 翼重量の概算

翼重量の概算においては、構造的な要素である曲げモーメントや、フラッター、荷重倍数等の影響も考慮した経験的かつ平均的な翼重量の概算法を用いた[5]。なお、ここで示す単位はFPSR系単位である。

翼の基本重量

最適化した翼の重量は、高揚力装置やブレーキ等の装備がつかない翼の基本重量 W_{basic} に対して行った。

$$W_{basic} = const. \times k_{n_0} k_{\lambda} k_r k_{uc} k_{st} \left\{ k_b n_{ult} (W_{des} - 0.8W_w) \right\}^{0.55} \times b^{1.675} (t/c)^{-0.45} (\cos \Lambda_{1/2})^{-1.325} \quad (1)$$

ここで、constは 8.94×10^{-4} 結合部等の重みペナルティとして、

$$k_{n_0} = 1 + \sqrt{\frac{b_{ref}}{b_s}} \quad (2)$$

b_{ref} は参考翼幅で6.25 ft、 b_s は構造翼幅で図1に示す半翼弦長に沿った翼幅である。

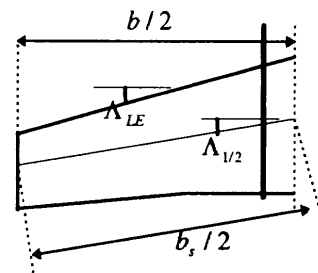


図2. 形状定義

テーパ比による翼重量への影響については、

$$k_{\lambda} = (1 + \lambda)^{0.4} \quad (3)$$

とする。

ナセルやエンジン数による曲げモーメントの補正値は k_r で、片方の翼に対しエンジン数が0の時は1.0、1基積みめるときは0.95、2基積みめるときは0.9となる。

また、それらエンジンが翼の上と下に積んでいるかで、補正値 k_{uc} はそれぞれ1.0、0.95となる。

翼のフラッターに対する剛性のため余分な荷重による補正が亜音速飛行機に対して与えられ、その補正値 k_{st} は、エンジンが0及び1基のときは、

$$k_{st} = 1 + 150 \times 10^{-5} \frac{(b \cos \Lambda_{LE})^3}{W_{des}} \left| \frac{V_D / 100}{(t/c)_r} \right|^2 \cos \Lambda_{1/2} \quad (4)$$

エンジンが2基のときは1となる。

翼に支柱がある場合の補正を k_b で行い、翼が片持ちはり場合は1とする。

ultimate load factor n_{ult} は、limit load factorの1.5倍でgust load factorよりも大きな値となる。load factor n は突風速度によって決められ、

$$n = 1 + K_G C_L \frac{1}{2} \rho_0 w_E V_E \frac{S}{W} \quad (5)$$

ここで、 K_G は突風緩和係数で、翼面荷重と飛行高度に依存する値であるが、ここでは、簡略化して次式で近似する。

$$K_G = 0.8 - \frac{1.6}{(W_{des} / S)^{3/4}} \quad \text{for } W_{des} / S > 16$$

$$K_G = 0.3 \times (W_{des} / S)^{1/4} \quad \text{for } W_{des} / S \leq 16 \quad (6)$$

C_L は揚力傾斜で、次式により求める。

$$C_{L\alpha} = \frac{2\pi}{2/AR + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \Lambda_{12}} - M_c^2 + (2/AR)^2}} \quad (7)$$

ρ_0 は海面上での空気密度、 w_E は設計突風速度、 V_E は等価空気速度、 W は航空機重量である。

以上航空機の翼の基本重量を示した。次に式中の高揚力装置、スポイラー、ブレーキを考慮した翼全体の重量を表す W_H の概算法を示す。

$$\frac{W_H}{W_G} = k_w b_s^{0.75} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{b_{res}}{b_s}} \right\} n_{wt}^{0.55} \left(\frac{b_s}{l_r} \right)^{0.3} \quad (8)$$

ここで、 k_w は装備重量に関係した値で、軽飛行機 ($W_0 < 12500\text{lb}$) では 1.25×10^{-3} 、輸送機 ($W_0 > 12500\text{lb}$) では 1.79×10^{-3} 、参考翼幅 $b_{ref} = 6.25\text{ft}$ である。

2. 燃料タンク容量の概算

燃料タンク容量は線形に Sweep した翼に対し、

$$V_t = 0.54 \frac{S^2}{b} (t/c)_r \frac{1 + \lambda \sqrt{\tau} + \lambda^2 \tau}{(1 + \lambda)^2} \quad (9)$$

で与える。この概算は非常に粗い計算で、より正確な概算を行うには、構造的なレイアウトをより詳細に考慮する必要がある。

§3. 最適化

1. GA について

遺伝的アルゴリズム (GA) は、生物進化を模倣した最適化アルゴリズムで、1975年に Holland により発表された比較的新しく、現在も発展途中中の最適化アルゴリズムの1つである。適応範囲が広いことから、様々な分野にて研究が行われている。

遺伝的アルゴリズムのもととなっている生物進化論は、ダーウィン進化理論であり、19世紀まで一般的にいわれてきたラマルクの進化論とは異なる。もっと具体的にいえば、ラマルクの進化論は「定向進化論」であり、「生物は環境に適応するように常に進化する、すなわち自己適応しており、その進化が子孫に形質遺伝として伝えられていく」というものである。しかしながら、現在主流となっているダーウィンの進化論は、「自然淘汰による進化」であり、「種は、ある方向性を持って進化するのではなくランダムに変異し、その種のいる環境において適応度の低いものは淘汰され、高いものが子孫を残し、さらに進化することができる。」というものである。

つまり、アルゴリズム上では、子孫を残す際の遺伝子のミスコピーによる突然変異、および、各世代における適応度の低い個体に対する自然淘汰を模倣することになる。

実際の自然環境と同様に、世代数が高くなるにつれ、適応度が低い個体は淘汰されていき、種全体の適応度は高くなっていく。かつ突然変異により局所解への収束及び有限個の個体数による探索範囲の限界に対する問題を解消している。しかしながらアルゴリズム上では、各世代における個体数が少ないときは局所解に収束しやすく、また、個体数が大きすぎる時には計算時間がかかるという欠点を持ち、適当な個体数を選ぶ必要がある。

遺伝的アルゴリズムの基本的な流れを示す。

1. ランダムに初期個体を生成する。
2. 各個体に対し適応度を評価をする。
3. 適応度に応じて2つの個体を選択する。

4. 遺伝子に見立てた個体形状の情報 (設計変数) を交叉し、次の世代の個体を作る。
(決められた個体数を生成する。)
5. 一部個体に対し、突然変異を行う。
(決められた世代数がかかるまで、2~5を繰り返す。)

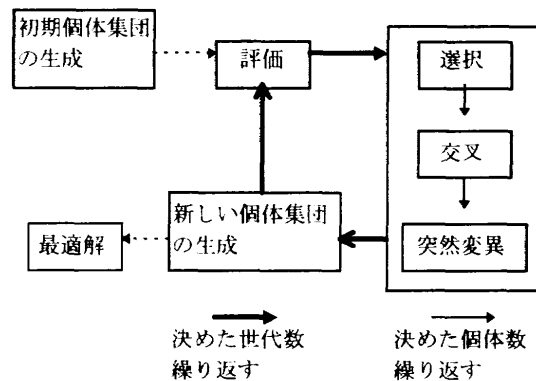


図3. 遺伝的アルゴリズムの流れ

更に、今回用いたGAの詳細について説明する。1. 評価方法について。GAにおいては、評価方法そのものが研究対象となっており、評価変数が増えるほど各変数にかかる重みを考慮せねばならずバランスよく最適化するのは難しくなる。そのため、すべての変数を一つの評価関数に組み込む方法や、変数ごとにそれぞれ分けて評価しランクをつけて次の選択、交叉を行う方法。もしくは変数にこだわらずいくつか初期個体を分け、それぞれの島で進化させた後にすべての個体を合わせる方法など、いろいろな方法が考えられている。その中で、本研究においてはプログラム上最もシンプルで、すべての変数を評価関数に組み込む方法をとった。2. 選択方法はルーレット式選択と呼ばれる適応度に比例して選択される確率が高くなる方法をとった。3. 交叉方法は一点交叉と呼ばれる方法で、遺伝子に見立てた設計変数をランダムに決めたある値で区切り、2つの個体間で足し合わせる方法をとった。尚、設計変数は実数をそのまま用いた。4. 突然変異は各世代において、5%の個体に対して行った。5. 個体数は各世代で100個体とした。この値は経験的に決定した。6. 世代数は50世代とした。この値も経験的なもので、充分収束させることができる世代数である。

2. 評価関数について

空気力学的な評価として Span efficiency Factor (SF) を計算し亜音速中における誘導抵抗を最小化することを基本とした。SFは(10)式に示すようなCL、CD、アスペクト比の関数であり、SFが最大となるときに誘導抵抗が最小となる。一般的に空力の評価は揚抗比で行われることが多いが、本研究での条件において揚抗比の最適化を行うと、翼端での翼弦長がなくなり翼端が尖ってしまう翼平面形状になってしまった。これはおそらく有害抵抗を減少させるため、であろうと思われる。そのため本研究では誘導抵抗に着目した最適化を行った。

$$SF = \frac{C_L^2}{\pi C_D AR} \quad (10)$$

このSFは翼平面形状において設計変数をテーバ比のみ変えた場合、アスペクト比が6から12の間の翼で亜音速飛行においてテーバ比が約0.3前後で最大となる。このとき翼幅方向の揚力分布は楕円分布となり誘導抵抗が最小となることが知られている。実際、本研究で用いた流体解析コ

ードであるFLO-22によりSFとテーパ比の関係を見ることが出来る。図4におけるスイープ角が0度のところがSFとテーパ比のみの関係であり、テーパ比が0.3の付近で最大値を持つことが分かる。ただし、このとき翼幅は一定でテーパ比を変化させたため、アスペクト比は一定ではない。

更に構造的制限を考慮するにあたり、翼重量を低減、燃料タンク容量を増加させるように評価関数を構成した。本来、設計要求により航続距離が与えられるため、航続距離、比燃料消費率に相当する燃料があればよい。しかしながら、評価変数の値を一定値にすることは難しく、本研究においては燃料に対しても最大化を行った。最適化する翼平面形状は比較する意味も含め次の3ケースについて行った。 f は評価関数である。最適化では、すべての評価関数の値(適応度)を高くするようする。

a. 空力のみ最適化

誘導抵抗を最小化させる。

$$f = SF \quad (11)$$

b. 空力と翼重量の最適化

誘導抵抗を最小化、および対数の中に翼重量を分母とすることで翼重量を低減させるような関数を構築した。この関数はケースcと比較するために導入した。

$$f = SF \ln \left(1 + \frac{1}{W_w} \right) \quad (12)$$

c. 空力、翼重量と燃料タンク容量の最適化

基本的な発想としてブレーゲの式を参考にした評価関数を構築した。ブレーゲの式は

$$R = \frac{V L}{c D} \ln \left(1 + \frac{W_f}{W_l} \right) \quad (13)$$

ここで、 V は巡航速度、 c は比燃料消費率、 W_f は燃料重量、 W_l は機体着陸重量である。もともとブレーゲの式は本研究では巡航飛行を条件としたため、 V/c の項は一定とし、空力評価の項の揚抗比をSFで置き換え、機体着陸重量を翼重量で置き換えた。

これにより、空力及び構造的制限に対する総合的な最適化を行った。

$$f = SF \ln \left(1 + \frac{W_f}{W_w} \right) \quad (14)$$

3. 評価関数の分布について

最適化を行う前に評価関数の分布を示す。最適化を行った翼平面形状より設計変数が1つ少ないスイープ角とテーパ比の2つの場合の分布であり、最適化を行った条件での評価関数の分布はもっと複雑なものとなる。

最適値は分布の頂上となるポイントで、図5より、空力的な最適値はスイープ角が0度で、テーパ比が0.2~0.3の間である。また、図4~図7まで共通して言えることだが、スイープ角の影響よりテーパ比の影響が大きい。図6からはテーパ比が小さいときに翼重量は最適値をとる。逆に図7からはテーパ比が大きいときに翼重量は最適値をとる。空力、翼重量、燃料タンク容量のすべてを考慮した総合的な最適値は、ケースcの評価関数を用いた分布を示す図8で、スイープ角は0度、テーパは0.3弱の辺りに最適値を持つことがわかる。

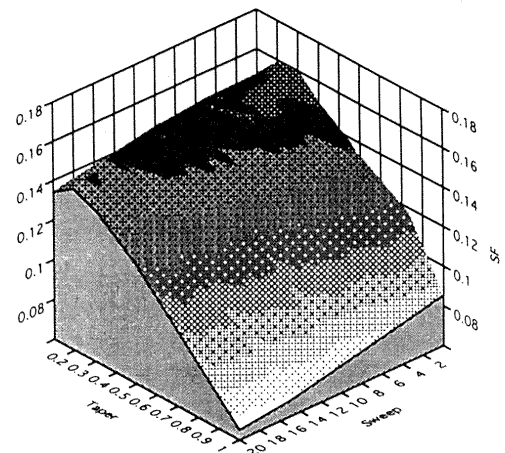


図4. 評価関数の分布(空力)

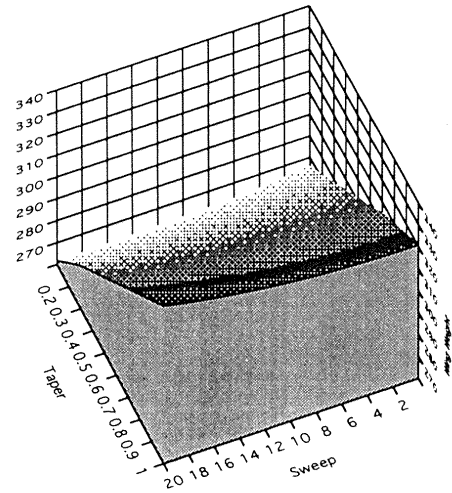


図5. 評価関数の分布(翼重量)

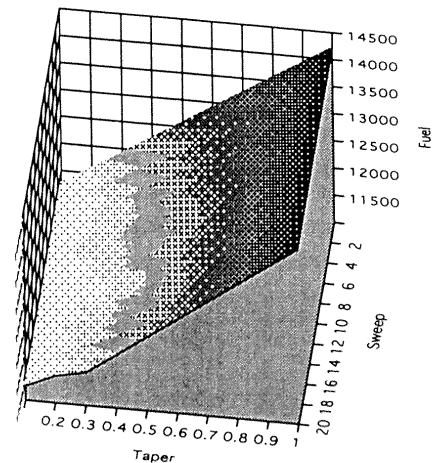


図6. 評価関数の分布(燃料タンク容量)

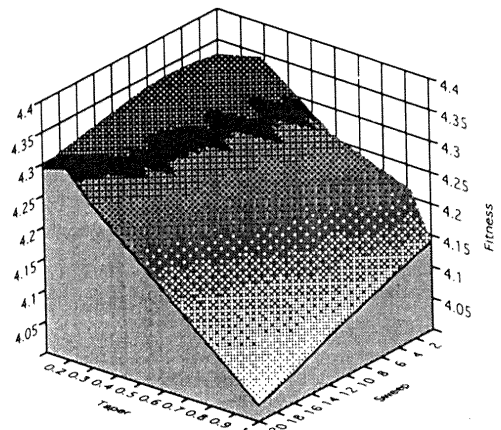


図7. 評価関数の分布(ケースc)

§ 4. 計算モデル

本研究ではビーチエアクラフト社のボナンザA36の諸元をもとに、亜音速流中における巡航飛行状態での翼平面形状最適化を行った。下に諸元の一部を挙げる。

- 乗員 最大6名
 - 全長 27.6 ft
 - 全幅 33.6 ft
 - エンジン数 プロペラ1基
 - 最大離陸重量 3650 lb
 - 燃料総量 80 US gal
- 翼型は詳細なデータが無かったため本研究ではNACA0012を用いた。

§ 5. 設計方法

設計条件は次のようである。

空力解析に対しては、数値流体計算は FLO-22[8]による解法を用いて行った。これにより、普通に Euler 方程式や Navier-Stokes 方程式を解くよりも、計算時間が短縮できる。これにより、空力計算回数が多いため全体の計算時間が長いというGAの欠点を緩和している。また、他の条件として

- マッハ数: $M = 0.3$
- 迎角: $\alpha = 6 \text{ deg}$
- 格子数: $120 \times 20 \times 20$

本研究において、遺伝子に見立てた設計変数としては Sweep angle、Chord length (2カ所) を操作した。

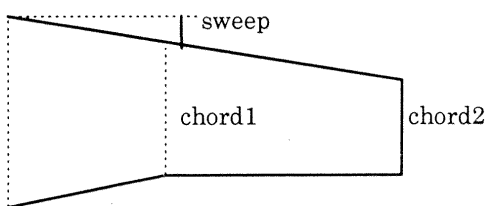


図 8. 設計変数

§ 6. 結果

先に説明した3ケースについての最適化を行った。

ビーチクラフト A36の簡略化した翼形状を図9に、最適化された翼形状を図10~12に、性能を図13に示す。ここで、使用している翼型はNACA0012である。

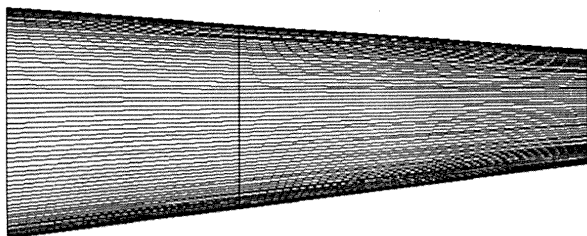


図 9. B. A36

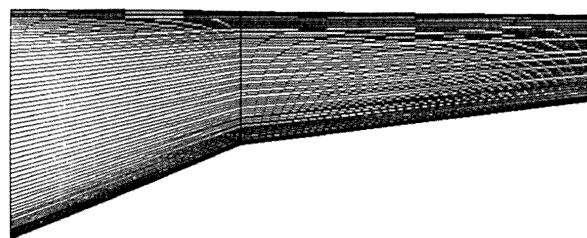


図 10. 最適化された翼平面形状 a

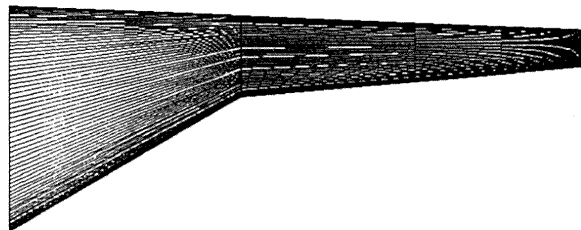


図 11. 最適化された翼平面形状 b

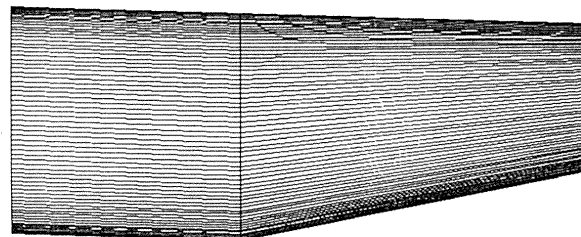


図 12. 最適化された翼平面形状 c

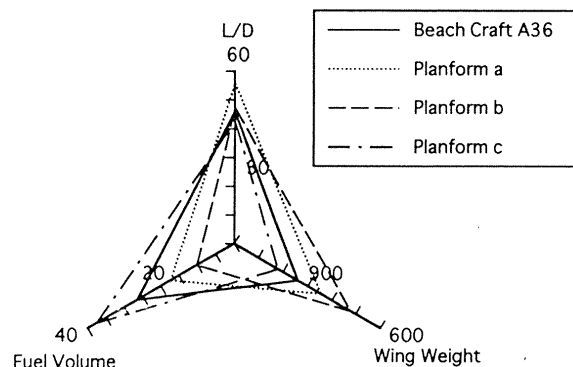


図 13. 各翼平面形状の性能

次に各翼平面形状に対する揚力分布を図14に示す。

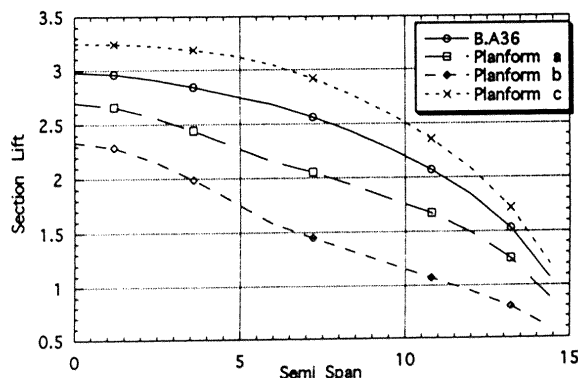


図 14. 各翼平面形状に対する翼幅方向揚力分布

図9に示したように、空力特性のみ最適化した形状aはL/Dが最もよく、そのほかの形状はほぼ同じL/Dを示す。しかしながら、図14の翼幅方向の揚力分布より、形状aの揚力が楕円分布をしているわけではなかった。また、翼弦長が小さい翼平面形状ほど揚力は小さくなっている。空力特性と翼重量を最適化した形状bは最も重量が減少しているが、考慮していない燃料タンク容量は、翼重量とは相反する要求のため小さくなった。空力、翼重量、燃料タンク容量の全てを最適化した形状cでは、燃料タンク容量は増大しているが、それと共に翼重量も増大している。これは、先に述べたように翼重量の減少と燃料タンク容量の減少は相反する要求であり、評価関数の翼重量の項による影響が弱かったものと思われる。評価関数のバランスを上手

くとることによりこの問題は解決できるものと思われる。全体として、各最適化の要求に対し遺伝的アルゴリズムが有効に働いていることが確認できる。

§ 7. 結言

初期サイジングの設計段階における翼重量、燃料タンク容量を考慮した翼平面形状最適化法を構築した。本研究は構造的制限に対して概算の計算を行い、流体解析に対しては、完全ポテンシャル方程式による解法を用いた。最適化アルゴリズムとして用いた GA は、大域解を探索でき複雑な評価関数に対しても対応できるため、設計変数として翼型やねじれ等も考慮し、構造力学的な制限を加えることも可能である。

§ 8. 参考文献

- [1]Daniel P. Raymer, "Aircraft Design: A Conceptual Approach," AIAA Education Series, 1992.
- [2]Sean Wakayama, "Lifting Surface Design using Multidisciplinary Optimization," Ph.D. Dissertation, Stanford Univ, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford, CA, Dec. 1994.
- [3]Sean Wakayama and Ilan Kroo, "Subsonic Wing Planform Design Using Multidisciplinary Optimization," *Journal of Aircraft*, Vol. 32, No. 4, July-August 1995, pp. 746-753.
- [4]B. Grossman, R. T. Haftka, P.-J. Kao, D. M. Polen, M. Rais-Rohani, and J. Sobieszczyanski-Sobieski, "Integrated Aerodynamic-Structural Design of a Transport Wing," *Journal of Aircraft*, Vol. 27, No. 12, pp. 1050-1056.
- [5]Egbert Torenbeek, "Synthesis of Subsonic Airplane Design," Delft University Press, Kluwer Academic Publishers, 1982.
- [6]L. デービス編/嘉数侑昇 他訳, "遺伝的アルゴリズムハンドブック," 森北出版, 1994.
- [7]米沢保雄, "遺伝的アルゴリズム進化理論の情報科学," 森北出版, 1993.
- [8]Antony Jameson and D.A. Caughey, "Numerical Calculation of the Transonic Flow Past a Swept Wing," New York University, 1977.

次世代超音速旅客機の空力設計と CFD による検証

山上 勝彦*¹ 中橋 和博*² 大林 茂*³

Aerodynamic Design and CFD evaluation of a High Speed Commercial Transport

Katsuhiko Yamakami*¹ Kazuhiro Nakahashi*² Sigeru Obayashi*³

At present, the Concorde is the only operating high speed commercial transport(HSCT) in the world. However, it has many economical and environmental problems. From such viewpoints, research programs for next generation HSCT have been carried out by many countries around the world. In developing the next generation HSCT that is more economically feasible, an improvement of the lift-to-drag ratio is the most important key item. The objective of this research is to construct a practical aerodynamic design system for a HSCT with high lift-to-drag ratio. The system is based on the linearized theory method and the supersonic area rule concept. The linearized theory method is applied to optimize the three dimensional wing camber line so as to give the minimum drag due to lift. The supersonic area rule concept is applied to optimize the fuselage configuration so as to give the cross sectional area distribution for the minimum wave drag. The performance of the designed configuration is evaluated by solving the Euler equations on unstructured grid. The comparison of the results between Euler computation and the linealized theory is made and a discussion to obtain more sophisticated design system using CFD is given.

1. 緒言

Concorde は現存する唯一の超音速旅客機 (HSCT) であるが、揚抗比が小さいために巡航距離が短く、また先端衝撃波による急激な圧力上昇により近くで雷が鳴っているほどの騒音が発生するなどの経済的、環境的な問題を抱えている。しかしながら 21 世紀に向けて大型輸送機の高速度による旅行時間の短縮が期待され、このような背景から現在、次世代超音速旅客機を開発する機運が欧米を中心に高まっている。特に NASA では 70 年代から超音速機に関する研究が行われており、多くの研究成果が発表されている。また日本でも、Concorde を超す次世代超音速旅客機の開発計画があり、それに向けた要素研究が行われている^{[1][2]}。

本研究では、超音速巡航時における揚抗比の向上を主目的として、実用的な設計ツールの構築を目指している。一般に超音速機の抗力は、摩擦抗力、衝撃波発生による造波抗力、揚力が発生する事により生じる誘導抗力の 3 つに分けられ、本研究においては後の 2 つの抗力を低減する形状設計を行った。

造波抗力低減に関しては超音速面積法則を用い、胴体の断面積分布の最適化を行った。また誘導抗力低減に関しては線形理論を用い、翼 camber の 3 次元曲面形状 (Warp 形状) の最適化をした。

また CFD を用いて機体形状周りの計算を行い、線形理論により求められる結果と比較し、より高性能な空力設計方法を探る事を目的としている。

2. 設計方法

本研究で構築した設計ルールを図 1 に示す。

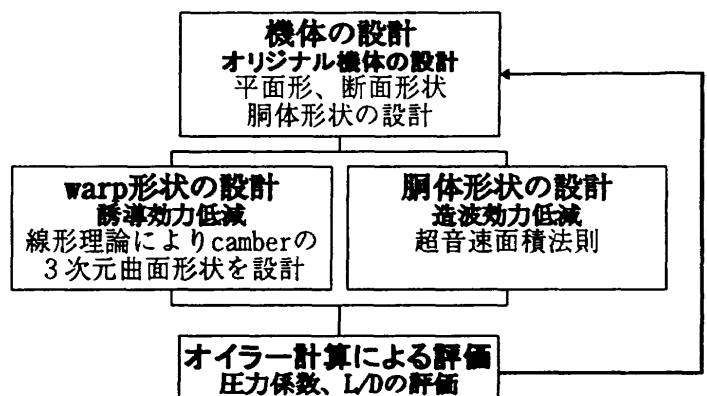


図 1 設計ツール概要

¹ 東北大学 大学院 工学研究科^{2,3} 東北大学 工学部 工学研究科 航空宇宙工学専攻

まずオリジナル機体の設計では、翼の平面形、断面形状および胴体の体積、全長を決定し超音速機体の基本形状を決める。その後、超音速面積法則と線形理論をオリジナル機体に適用し、揚抗比(L/D)の高い機体を設計する。その最適化機体は非構造格子状で3次元オイラー方程式コードを用いて計算され、線形理論との空力係数、ある力分布の比較および機体性能の評価を行う。

2.1 WARP 形状の設計方法

任意の平面形状に与えられた揚力分布を実現する翼 camber 表面の形状は、線形理論¹⁾により求める事ができる。図2に線形理論の簡単な概念を示す。超音速線形理論によると、ある点の流の状態はその点から引かれた前方マッハコーンに囲まれた領域内部からの影響のみにより決定されるので、点(X,Y)の camber 座標は影で示した領域内の揚力を線形的に足しあわせることにより求まる。したがって誘導抗力を低減する理想的な揚力分布を最初に設計する必要がある。

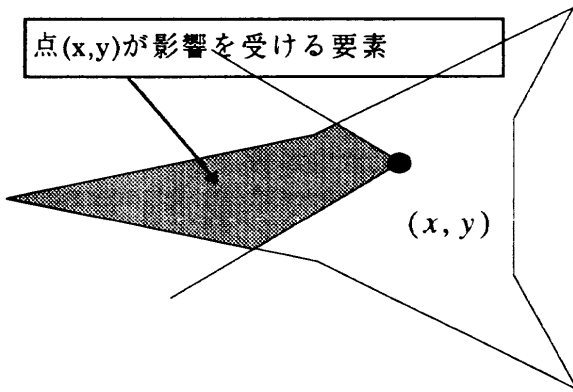


図2 線形理論の概念図

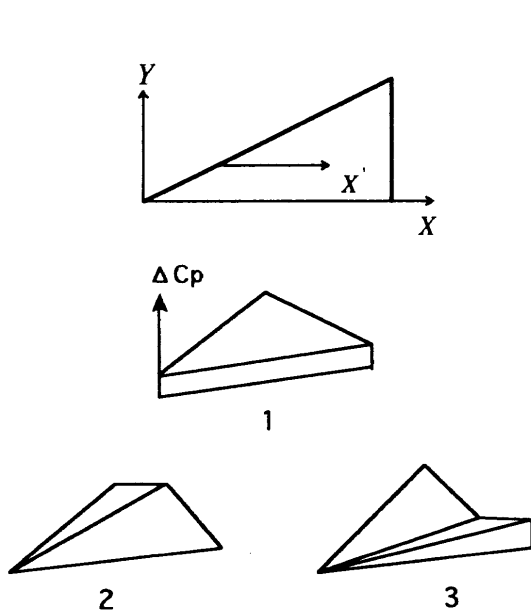


図3 基本揚力分布例

表1 基本揚力分布

C : 流れ方向の局所コード長

S : Root 方向の局所コード長

番号	基本揚力分布
1	一定
2	前縁からの距離 X' に比例
3	Root からの距離 Y' に比例
4	Y ² に比例
5	X ² に比例
6	X'(C-X') に比例
7	X' ² (1.5C-X') に比例
8	2(1+15X'/C) ^{-0.5} に比例
9	(Y/S) ² (Y/S-1) ² に比例
10	(1-Y/S) ^{0.5} に比例

2.1.1 最適揚力分布の設計

揚力分布の設計には、基本揚力分布を数種類重ねあわせ、その重み係数を最適化する方法を用いる。図3および表1に基本揚力分布を示す。

本研究で用いた基本揚力分布は、翼面上すべてにおいて一定、そして流れ方向、スパン方向に線形変化など全部で10種類あり、すべての組み合わせにおいて設計を行い最適な組み合わせを求めた。

最終的な揚力分布は次のような式で表される。

$$\Delta C_p = A_1 \Delta C_{p1} + A_2 \Delta C_{p2} + \dots + A_i \Delta C_{pi} \quad (1)$$

ここで ΔC_p は揚力、 A_i は重み係数である。

このような揚力分布設計法では、それぞれの基本揚力分布にかかる重み係数を最適化する必要があり、次のようなラグランジュ法と呼ばれる連立一次方程式を解ことにより求まる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_L C_{L,1} + \lambda_Z Z_{r,1} + \sum_{i=1}^{i=n} C_{D,1i} A_i &= 0 \\ \lambda_L C_{L,2} + \lambda_Z Z_{r,2} + \sum_{i=1}^{i=n} C_{D,2i} A_i &= 0 \\ \dots \\ \lambda_L C_{L,n} + \lambda_Z Z_{r,n} + \sum_{i=1}^{i=n} C_{D,ni} A_i &= 0 \end{aligned} \right\} (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} C_{L,i} A_i &= C_{L,Des} \\ \sum_{i=1}^{i=n} Z_{r,i} A_i &= Z_r \end{aligned} \right\} (2b)$$

$$(2)$$

ここで λ はラグランジュ係数と呼ばれ、設計揚力係数 $C_{L,Des}$ や局所 camber 座標 Z_r などの制約を与えるために必

要とされる係数である。 $C_{D,ni}$ は二つの基本揚力分布による干渉抗力、 $C_{L,n}$ 、 $Z_{r,n}$ はそれぞれ基本揚力分布による揚力係数と局所 camber 座標である。

上式において(2a)式は誘導抗力を最小にするためのものであり、基本揚力分布の数だけ必要となる。(2b)式は $C_{L,Des}$ 、 Z_r などの制約を与えるために必要となる式で、このほかにも局所揚力分布や、モーメントの制約をいれることも可能である。

図4に揚力分布の設計例を示す。(a)図は基本揚力分布1~3の時、(b)は1~7の時の揚力分布である。

2.1.2 Warp 形状の平滑化

一般にこのようにして求められたWarp形状は、非常に複雑な3次元曲面形状をしており、実際の形状に再現するのは困難である。そこで各断面のねじり分布およびcamberのうねりに修正を加える必要がある。本研究では線形外挿とsmoothingにより修正を加えた。

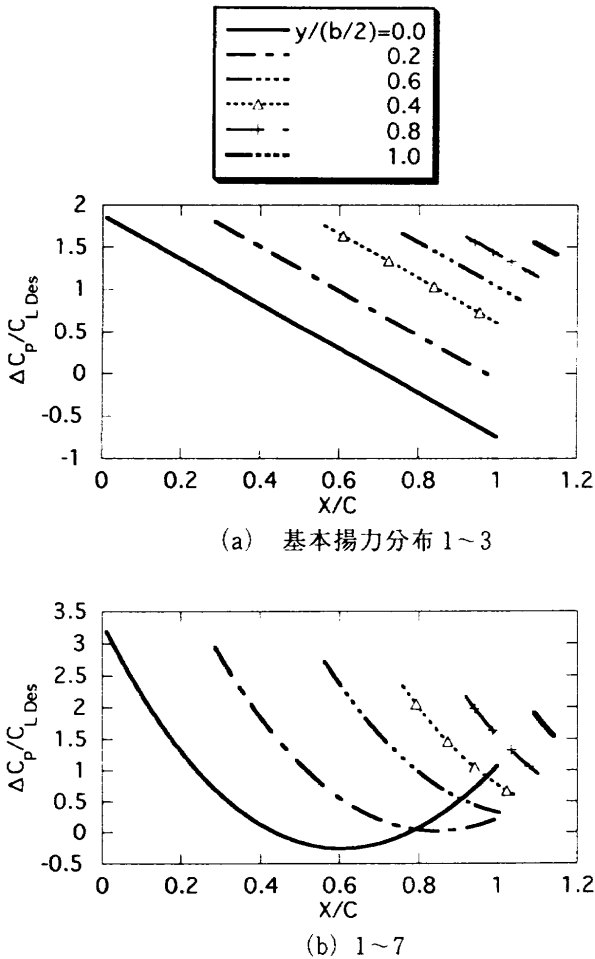


図4 揚力分布設計例

2.1.2 Warp 形状の設計手順

以上よりWarp形状設計手順を図5に示す。

① 与えられた平面形状に基本揚力分布を3~10種類重ねあわせ、その重み係数を最適化し揚力、抗力を評価する。これをすべての基本揚力分布の組み合わせで行い最適揚力分布を決定する。

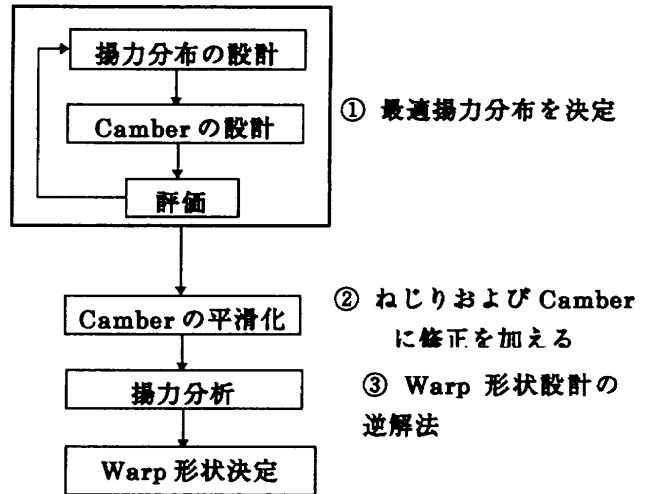


図5 Warp 形状設計手順

- ② 求められた揚力分布から camber を求める。その後、camber のねじりに修正を加え、補えなかった部分に smoothing を施し Warp 形状の平滑化を行う。
- ③ Warp 形状平滑化により当然揚力分布は変化するので、Warp 形状設計の逆解法を用いて、最終的な揚力、抗力を分析する。

2.2 胴体形状の設計

最小造波抗力を与える胴体形状は、超音速面積法則 (Supersonic Area Rule) により求める。細長物体理論によると機体長と体積を指定した時、最小造波抗力が得られる断面積分布は Sears-Haack Body と呼ばれる分布となる。つまり造波抗力を低減するには、機体全体の断面積分布をこの Sears-Haack Body の断面積分布に近づけるように胴体の断面積分布を修正する。このようにして得られた胴体は Area Rule 胴体と呼ばれ、普通胴体の中心付近が少し削り取られたような形状になる。

2.2.1 設計手法

細長物体理論によると造波抗力の一般式は次式で表される。

$$D(\theta) = -\frac{q}{2\pi} \int_0^l \int_0^l S''(x_1; \theta) S''(x_2; \theta) \log|x_1 - x_2| dx_1 dx_2 \quad (3)$$

ここで S は相当断面積と呼ばれるもので、機体軸に対しマッハ角だけ傾けた平面により切り取られる断面積を、主流に垂直な平面に投影したものであり、 θ は機体軸まわりに平面を傾ける角度である。また $S'' = d^2S/dx^2$ 、 q は動圧であり l は機体長で、 $0 \leq x \leq l$ となる。

与えられたマッハ数での造波抗力は上式で θ が $0 \sim 2\pi$ の平均を取る次式で表される。

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(\theta) d\theta \quad (4)$$

また sheppard によると機体の造波抗力は次式で表される^[4]。

$$\frac{D}{q} = \frac{(D_{\text{Wing}} + D\{S_{\text{Body}} + A\} - D\{A\})}{q} \quad (5)$$

ここで D_{Wing} は翼のみの造波抗力、 S_{Body} は胴体の断面積分布である。また A は翼のみの $0 \sim 2\pi$ の平均の断面積分布で、

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{\text{Wing}}(\theta) d\theta \quad (6)$$

となる。ここで S_{wing} は翼の断面積分布である。

(5)式を見てみると右辺第一項と三項は翼のみの断面積分布により求まる。超音速面積法則では翼の断面積分布は変化させずに胴体形状を最適化するので、この項は翼形状、設計マッハ数が変化しない限り変わらない。ゆえに胴体最適化は第二項を用いて行う。Sears-Haack Body の断面積分布を S_{S-H} とすると Area Rule 胴体の断面積分布 $S_{\text{Area-Ruled body}}$ は次式で表される。

$$S_{\text{Body}}(x) + A(x) \rightarrow S_{S-H}(x) \quad (7)$$

$$\therefore S_{\text{Area-Ruled Body}}(x) = S_{S-H}(x) - A(x) \quad (8)$$

上式のように、造波抗力を低減する胴体形状の断面分布は、Sears-Haack Body の断面積分布から翼の断面積を差し引いた値となる。

また Sears-Haack Body の断面積分布は次式で表せる。

$$S_{S-H}(x) = \frac{32}{3} \cdot \kappa \left\{ \xi(1-\xi) \right\}^2 \quad (8)$$

$$\kappa = \frac{4V}{\pi l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad V: \text{体積}$$

2.2.2 胴体形状の設計手順

以上より胴体形状の設計手順を示す。

- ① 設計マッハ数を設定し、翼のみの断面積分布 $A(X)$ を算出する。
- ② 与えられた機体形状から機体長と体積を求め、その条件を満たす Sears-Haack Body の断面積分布 S_{S-H} を求める。
- ③ (8)式により胴体の断面積分布 $S_{\text{Area-Ruled body}}$ を求め Area Rule 胴体を設計する。

2.3 CFD 計算による評価

線形理論との比較および揚力、抗力の検証を行うため CFD 計算を行った。計算には、3次元オイラー方程式を、非構造格子上で解いた。図5は本研究で用いた計算格子である。また計算手法には計算効率のよい空間前進解法を用いた^[5]。

3. 結果

3.1 翼の設計例

3.1.1 設計条件

設計条件を以下に示す。

- ① 平面形には横長比 0.31 アスペクト比 1.7 の図6に示すようなダブルデルタ翼を用いた。
- ② 翼断面には次式で示される形状を用いた。

$$Z = ax\left(1 - \frac{x}{c}\right)\left(1 - b\frac{x}{c}\right) \quad (9)$$

ここで a, b は最大翼厚および最大翼厚位置を決定する変数であり、 c は局所コード長である。本設計において最大翼厚比の平均を約 2.5% とした。

- ③ Warp 形状の設計条件は以下の通りである。

- 設計揚力係数 CL_{Des} 0.1
- 設計マッハ数 2.3
- 基本揚力分布 表1において8番をのぞく9種類

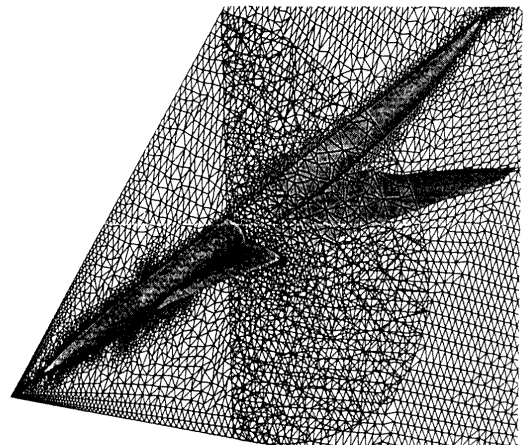


図5 計算格子

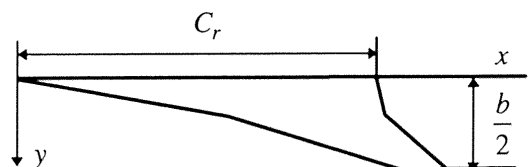


図6 平面形

3.1.2 設計結果

図7に各スパン位置での揚力分布(図7a)および camber の Warp 形状(図7b)を示す。揚力分布は Warp 形状の平滑化を行ったため、少し凸凹した分布となった。図7(b)

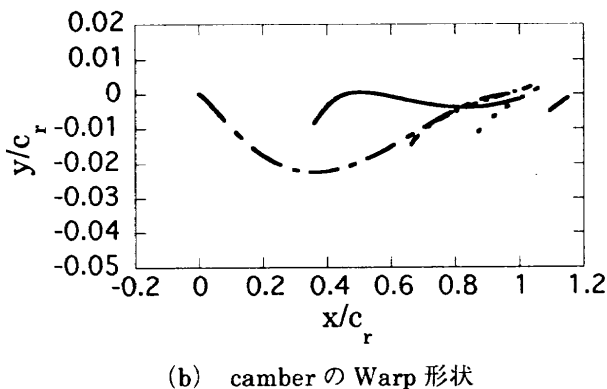
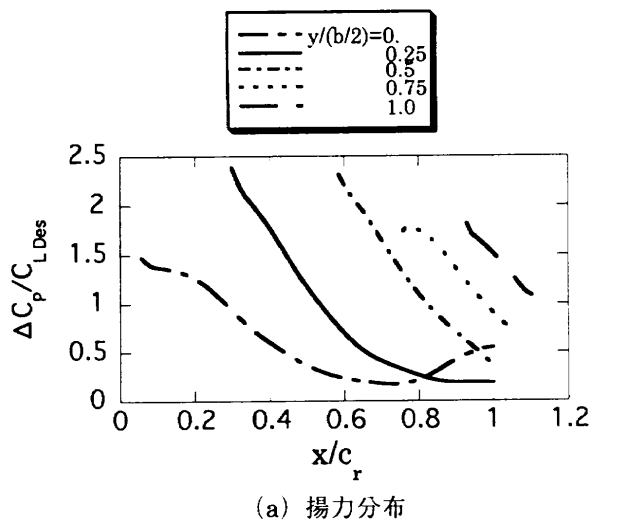


図7 各スパン位置での揚力分布
および Warp 形状

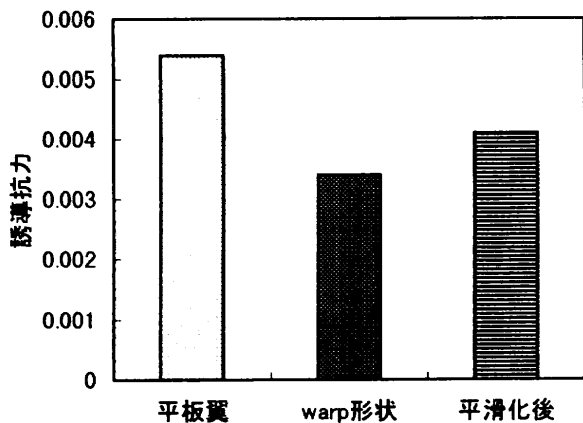


図8 誘導抗力特性($C_L=0.1$)

の Warp 形状の図から root 部分の最大 camber は約 2% ほど下方についており(設計条件として与えた)、また翼端に向かって次第にねじり下がっていく様子が窺える。

図8に平板翼、Warp 形状および Warp 形状平滑化後の誘導抗力特性を示す。すべて $C_L=0.1$ の時の誘導抗力

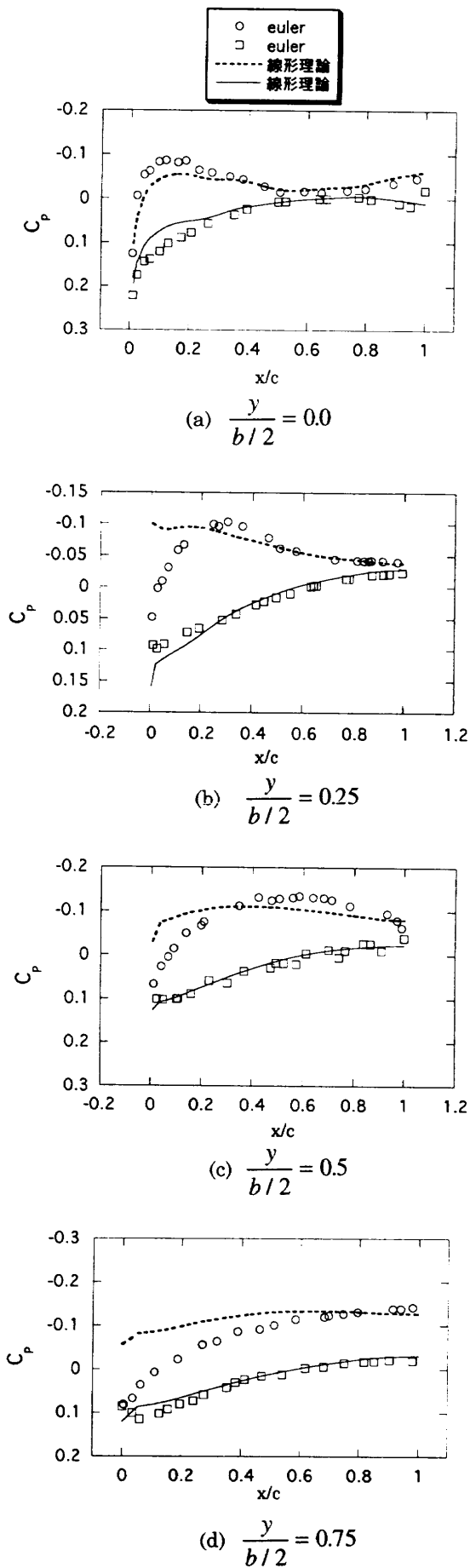


図9 オイラー計算との比較

で、抗力係数はそれぞれ 0.0054, 0.0035, 0.0041 となっており、Warp 形状平滑化後の抗力は、平板翼と比べ約 24% 減少している。

図 9 に線形理論とオイラー計算により求められた翼表面の圧力係数の比較を示す。root 部分では両者は定性的に一致しているが、翼端に行くに従い、両者の違いが顕著に現れる。特に翼上面の前縁付近で大きな違いが見られる。一般に線形理論では翼厚 0 の翼で、翼面上にまったく擾乱がない流れを想定しているため、このような違った結果がられるのは、当然と思われる。

3.2 翼-胴の設計例

3.2.1 設計条件

翼断面形には四階の偏微分方程式を用い、翼-胴の取り付け角は 1.5 度とした。その他平面形および Warp 形状設計条件は 3.1.1 の設計条件と同じである。

3.2.2 設計結果

図 10 に Area Rule 胴体の断面積分布を示す。図から Area Rule 胴体の断面積分布は Sears-Haack Body の断面積分布から翼の断面積を差し引いたものであることが分かる。

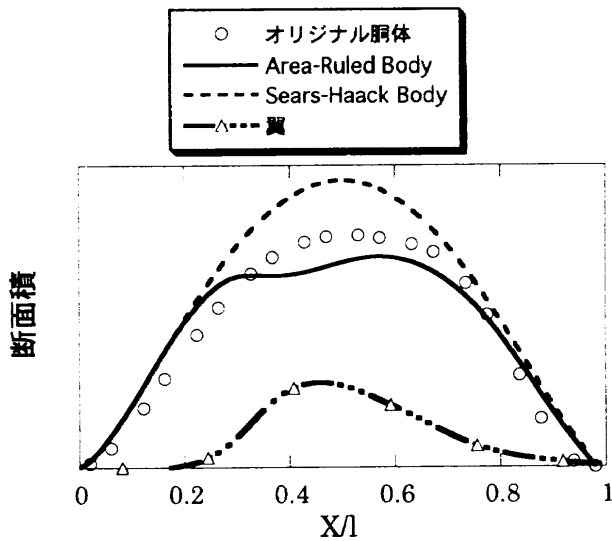
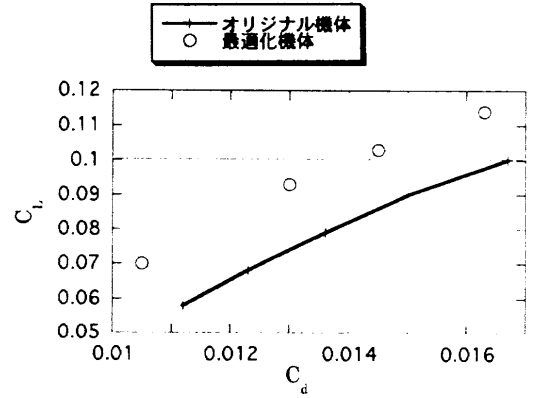
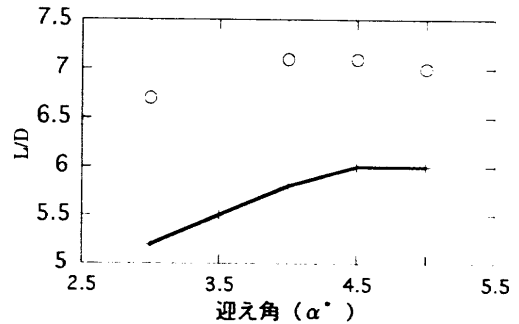


図 10 Area Rule 胴体の断面積分布

図 11 に翼-胴機体のオイラー計算による検証結果を示す。摩擦抗力係数の計算法はさまざまあると思われるが、本研究では推定値として 0.005 を与えた。図(a)は揚力と抗力の関係を示した図であるが、設計揚力係数 $C_{L,Des}=0.1$ の時の抗力はオリジナル機体に比べ最適化機体の方が約 16% 減少している。また図(b)に示す迎え角と揚抗比 L/D の図から L/D の向上が見られ、設計ツールの有効性が確認できる。しかし最適化機体でも L/D が約 7 で Concorde と同程度となり、今後設計ツールに修正もしくはオイラー計算の結果を設計に反映する必要があるであろう。



(a)揚力と抗力の関係



(b)迎え角と揚抗比の関係

図 11 オイラー計算による検証結果

4. 結言

1. 本研究の設計ツールを用いることにより比較的容易に最適化機体を設計することができる。
2. 線形理論とオイラー計算による圧力分布の比較から、両者にはかなり大きな不一致が見られる。
3. 今後より高性能な空力設計を行うためには、オイラー計算の結果を設計に直接反映する、もしくは線形理論、超音速面積法則に修正を加える必要があるであろう。

5. 参考文献

- [1] 吉田憲司: “超音速旅客機の空力設計に関する要素研究について～社内研究成果を例として～”、日本航空宇宙学会誌 42[486]pp.1-13(94)
- [2] “超音速輸送機開発調査 平成5年度成果報告” [日本航空宇宙工業界](93)
- [3] Carlson, Harry W. and Miller, David S.: “Numerical Methods for Design and Analysis of Wings at Supersonic Speeds.” NASA TN D-7713, 1974
- [4] Sheppard, L. M.: “Methods for Determining the Wave Drag of Non-Lifting Wing Body Combinations.” ARC Technical Report R&M No. 3077, 1958.
- [5] Nakahashi, K. and Saitoh, E.: “Space-Marching Method on Unstructured Grid for Supersonic Flows with Embedded Subsonic Regions” AIAA Paper 96-0148, 1996.

NWTにおける3次元ADI並列計算法の性能比較

藤田直行*1 納富昭*2 上野潤一郎*2
 *1航空宇宙技術研究所 *2富士通株式会社

Performance of parallel processing methods for three dimensional ADI on NWT

FUJITA Naoyuki*1 NOUDOMI Akira*2 UENO Junichiro*2
 *1 National Aerospace Laboratory *2 Fujitsu

Performance of several kinds of parallel processing procedure for ADI method is discussed. A 3-dimensional TVD scheme code, which was developed and used for the analysis of a 3-dimensional transonic flow, is parallelized. The attention was paid to a solver for simultaneous linear equations. The solver uses Thomas algorithm which has no parallelism. So the solver is parallelized by Transpose method and Ripple method. The elapsed time is measured. The parallel computer used here is NWT. The maximum number of the processors is 166. In all cases Transpose method shows good performance.

1 はじめに

近年、単一プロセッサの処理能力を超えた、高速・大容量の計算要求等から、並列計算機が開発され、それらを利用する機会が増えている。並列計算機は、機種によりプロセッサ間ネットワーク、プロセッサアーキテクチャ、メモリシステム、メモリシステムのユーザビュー等がまちまちであるため、有効利用を図るためにはその特徴に応じた並列化手法を採用する事が必要である。各方面で自動並列化コンパイラ等の開発が進められているところであるが、現状ではまだプログラマが並列化を意識的に行う必要がある。

本研究は、単一プロセッサのベクトル計算機上で開発・利用されたコードを、後述のtranspose並列処理法(以降transposeと略す)、ripple並列処理法(以降rippleと略す)という2つの手法で並列化した場合の並列化効率を測定し、これら並列化手法の特徴を明らかにするとともに、並列計算機NWT上での最も有効な並列化手法を特定することを目的としている。測定時間の解析結果は並列実行台数の全領域においてtransposeの優位性を示している。

2 TVDSD

今回並列化を行ったコードは通称TVDSDというコードで、ONERA-M6翼周りの3次元遷音速流れをTVDスキーム・IAFを用いて解くものである^{1),2)}。計算格子は単一構造格子である。フローチャートを図1に示す。

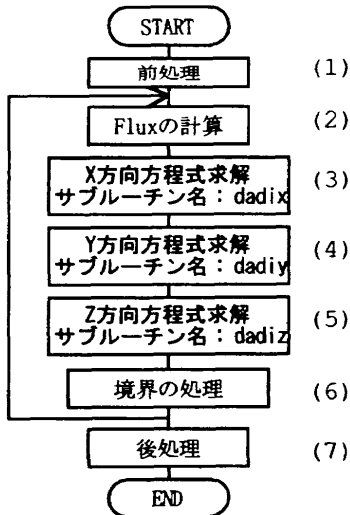


図1 フローチャート

3 数値計算法と並列処理法

並列計算機で計算を行う、つまり、あるひとつのまとまった計算を複数プロセッサで分担して計算を実行する場合、その計算の分担のさせ方には、データ分割により並列実行性を作り出す方法、といった簡便で従来のコードに加える修正が少ないものから、計算法自体を並列実行性がある数値計算法に置き換えてしまう方法、等多くの方法が考えられる。

本コードは元々単一プロセッサのベクトル計算機上で開発・利用されていたものである。単一プロセッサの計算機上で開発されたコードを並列計算機で実行する様変更する際に最も注意すべき点は、計算を複数のプロセッサに分担させる際のデータの依存関係の解析である。図1の中でデータの依存関係があり単純にデータ分割による並列実行性を作り出せないのは(3), (4), (5)の部分である。この部分は連立一次方程式をThomas algorithm[Gaussの消去法]で解いている。Thomas algorithmにはアルゴリズム自体の並列処理性はない。並列処理性のある連立一次方程式解法にはParallel Gauss³⁾、cyclic reduction、transpose、ripple等がある。Parallel Gaussは、Thomas algorithmの中の依存関係にある部分を反復計算で置き換え、方程式の各変数を同時に計算するもの、cyclic reductionは隣接する3方程式を組み合わせ、順次変数消去を行い解を求めるものである。本論文では、紙面の都合などからtranspose、rippleという2つのThomas algorithmの並列処理法の性能比較のみを論じ、他の並列計算法については別の機会に述べることにする。

3.1 transpose

transposeは、ある方向の前進消去を始める前に、依存関係のあるデータを最適にアクセスできる様、メモリ上のデータの再配置を行う。これを3次元ADI法に適用した場合、例えばJ方向の計算を行う部分では事前に配列変数をJ方向のアクセスが最速になるように、並列計算機内のメモリ間で並べ替えを行う(図2)。図9にオリジナルのコード(単一ベクトルプロセッサ用コード)を、図10にNWT-FORTRANでのtransposeのコーディングの一例を示す。オリジナルのコードの前後に、データ再配置を行うコードを付加している。

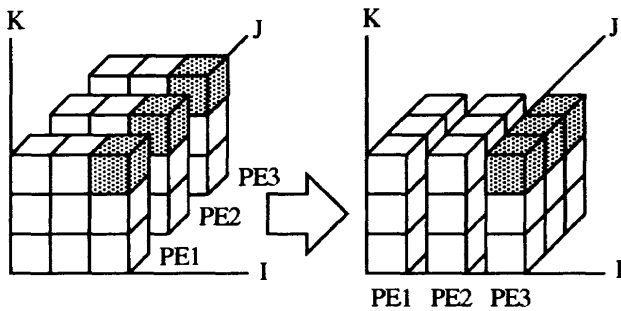


図2 transpose

3.2 ripple

rippleでは、ある方向の前進消去を行う際、必要なデータを他プロセッシングエレメント(以降PEと呼ぶ)が保持した状態にあるとき、各PEは必要なときにその都度他PEから該当データを受け取る(図3)。図11にrippleのコーディング例を示す。依存関係のあるデータの更新状況をPE間で把握するためのフラグの設定部分が付加され、オリジナルコード部分は設定したフラグをチェックし、必要なデータが更新されたら担当部分の計算を行い、次のPEが必要とするデータを送出する様変更されている。

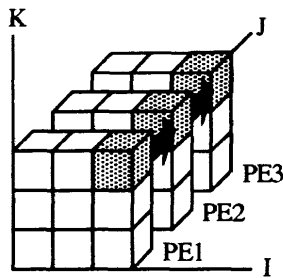


図3 ripple

4 測定条件

高速化のための並列化と大容量化のための並列化の2つの系列の並列化効率を測定した。前者の測定では実行台数を変化させ総格子点数は固定した。後者の測定では、実行台数の変化に合わせて総格子点数も変化した。測定項目は反復計算部分(図1の(2)~(6))50回の経過時間である。表1、表2に大容量化のための並列化に用いた格子を示す。単精度の格子も用意したのは、格子点数を増やしより広範な並列化効率を測定するためである。高速化のための並列化に用いた格子は倍精度で39万点、実行台数は2, 4, 8, 16, 24, 48台、単精度で79万点、実行台数は2, 4, 8, 16, 32, 64台である。

5 並列化

ここではThomas algorithm(図1の(3), (4), (5))の並列化について述べる。例えば(3)の部分は図9の様なDO-loop構造を持つ。

まずはじめにこのプログラムを分散メモリ型並列計算機で実行させるために、配列の分散メモリへの割り付け方法を考える。TVDS Dの場合隣接配列要素へのアクセスが多いため、ブロック分割して分散メモリへ配置する。ブロック分割とは隣接する配列要素が同

一のプロセッサのメモリに配置される分割のことである。サブルーチンdadixは添字Iの方向に依存関係のある連立方程式を解くため、添字Jの方向でブロック分割する。すると、残りの添字Kの方向はベクトル処理をする方向となる。この場合、配列宣言がFFF(I, J, K, L)とされていた場合(添字の順番に注意)、ベクトル長がN3、ベクトル要素へのアクセスパターンがstride付きアクセス、strideが、 $N1 \times N2 / PE$ となる。ここで、PEは実行台数、N1、N2、N3はそれぞれI方向、J方向、K方向の添字の最大値である。ここで、stride付きアクセスとは、ベクトル要素がメモリ上で一定距離をおいて存在するベクトルアクセスを指し、この一定距離をstrideと呼んでいる。transposeの場合、サブルーチンadiyでは配列をI軸で分割し、PEの各メモリに再配置を行っている(図4)。同様に主要DO-loopを並列化した場合のベクトル性能の状況をまとめると表3の様になる。

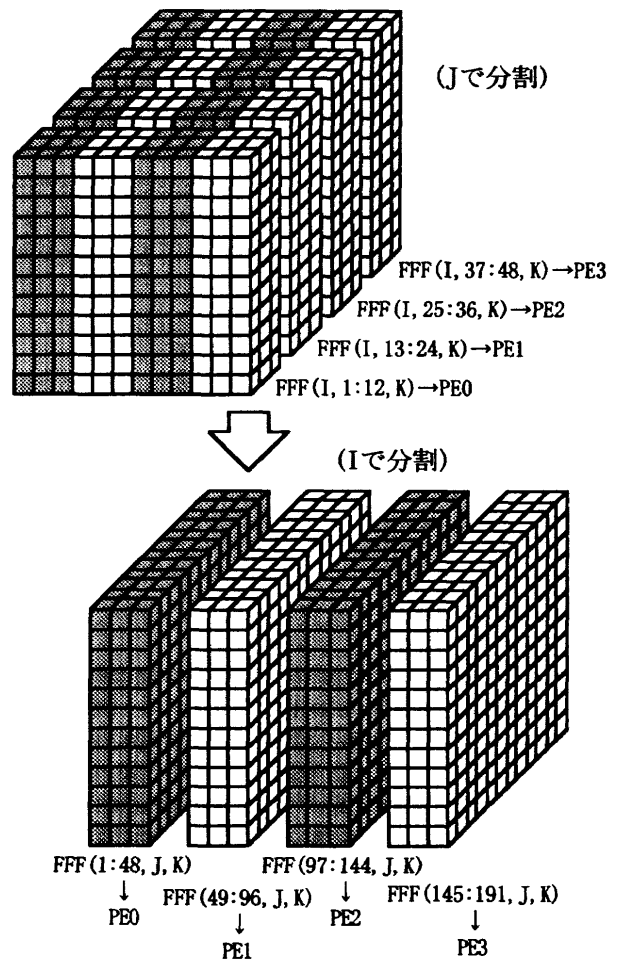


図4 配列の分散メモリへの配置とtranspose (39万点格子、4PEの場合)

6 ベクトル性能とバンクコンフリクト

ここで、あらためて表3のdadiy(4) [Trans]とdadiy(4) [Rippl]を比較すると、そのベクトル性能に差が生じていることが分かる。また、dadix(3)、dadiy(4) [Trans]のストライドが実行台数PEに依存していることが分かる。

今回使用した並列計算機NWTは、PEにベクトル計

算機を持つ並列計算機である。ベクトル長の長短やアクセスパターンの違いにより、計算時間に大きな差が生じる。よって、計算法の比較を行うためにはこれらベクトル性能を一定に保ち経過時間の測定を行うことが必要である。

また、ベクトル計算機はその主記憶アクセス系に高速化の工夫がされている。主記憶へのアクセスのためのバスを複数用意し更にバンクを設け、同時に多数のデータをload/store出来るようになっている。最高のメモリアクセススループットが得られるのは表3のdadiz(5)の場合の様にベクトルのアクセスパターンがblockの場合、すなわち、ベクトルのストライドが1の場合である。また、NWTの場合、ストライドが32の倍数になると最悪のバンクコンフリクトが発生しスループットが最高の場合の1/16に低下する。

そこで、今回の測定においては、これら、ベクトル性能やバンクコンフリクトが並列計算法の性能評価に影響しないよう、次の変更をコードに対して行った。

(1) バンクコンフリクトの影響が実行台数PEに依存しないよう、配列の宣言を改める。(2) transposeコードとrippleコードでベクトル性能が同じになる様、rippleコードでも配列の持ち換えを行う。(1)については従来、

dimension FFF (I, J, K, 5)

と宣言していた配列を

dimension FFF (I, K, 5, J)

とインデックスの順番を入れ替えた。(2)についてはrippleでのdadiy(4)の計算の時、本来は行わなくて良いデータの持ち換え

FFF(I, K, 5, J) ---> FFF(K, 5, J, I)

を行った。これら(1)、(2)の変更で表3に示した主要DO-loopのベクトル性能は表4の様に改善された。

7 測定結果

表5~8および図5、図6に測定結果を示す。表中および以降の式の記号の意味は次の通りである。

- x: 実行台数
- S: 総格子点数
- T: 経過時間
- E: 並列化効率
- c: 1 格子点当たりの計算量
- C: 1 PEの計算能力

本論文では並列化効率Eは次の様に定義した。

$$E = \frac{N_x}{N_2}$$

ここで、 N_x は実行台数xの時の単位時間・単位PE当たりの処理格子点数で、次の様に定義する。

$$N_x = \frac{S}{T \cdot x}$$

大容量化のための並列化について見てみると(図5) transposeは166台の高並列の場合でも80%前後の高効率の並列計算が出来ていることが分かる。一方、rippleについては64台の場合で74%とtransposeと比べて効率が悪いことが分かる。また高並列時メモリオーバが発生してしまった。

高速化のための並列化を見てみると、並列台数の全領域でtransposeの効率がrippleのそれを上回っていることがわかる。さらに、単精度格子と倍精度格子を比較した場合、単精度格子の方が効率が良いことも分かる。

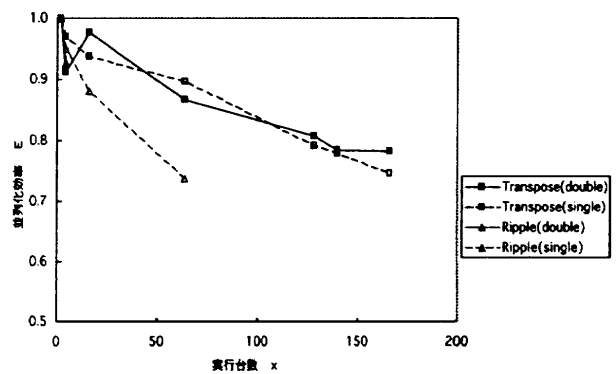


図5 並列化効率(大容量化)

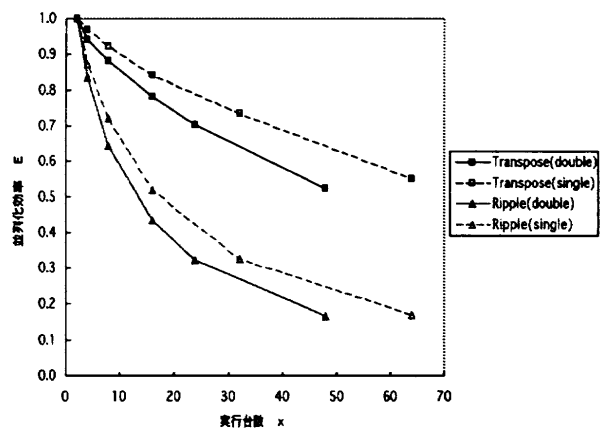


図6 並列化効率(高速化)

8 経過時間に関する考察

transpose、rippleそれぞれの経過時間に関して考える。7にある表記を用いると、総計算量は $c \cdot S$ 、1PE当たりの計算量は $\frac{c \cdot S}{x}$ 等となる。

transposeの場合のデータ持ち換えのためのデータ転送については、

- b: 1 格子点当たりの転送データ量
- B: 1 PEのデータ転送能力

とすると、総転送量は $b \cdot S$ 、1PE当たりの転送量は $\frac{b \cdot S}{x}$ 等となる。すると、transposeでの経過時間は

$$T = \frac{S}{x} \left(\frac{c}{C} + 2\frac{b}{B} \right) \quad (1)$$

となる。さらに、rippleに関して

- c_1 : 1格子点当たりの前進消去の計算量
- c_2 : 1格子点当たりの後退代入の計算量
(よって、 $c = c_1 + c_2$)
- α : 1PE内の前進消去計算量に占める
最小計算量の割合
- β : 1PE内の後退代入計算量に占める
最小計算量の割合

とする。ここで、NWTの場合、1PE内ではベクトル計算を行っているため、上記最小計算量とは1ベクトル要素の計算量となる。この時、rippleの経過時間は次の様に表せる。

$$T = \frac{S}{x} \left(\frac{c}{C} + \frac{(x-1)(\alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_2)}{C} \right) \quad (2)$$

これらには並列化に伴うシステムソフトウェア的・ハードウェア的オーバーヘッドは一切考慮しておらず、並列処理法に関わる要因のみを考慮している。ただし、rippleでの通信時間は転送データ量がtransposeに比べごく少ないため考慮していない。式(1)、(2)を図に表すと、図7、図8の様になる。

大容量化のための並列化は、1PE当たりの格子点数が一定の並列化である。つまり、 $\frac{S}{x} = const.$ となる。ここで $b, B, c, C, \alpha, \beta$ 等は定数であるため、式(1)、(2)は、

$$T = \frac{S}{x} \left(\frac{c}{C} + 2\frac{b}{B} \right) = const. \quad (1)'$$

$$T = \frac{S}{x} \left(\frac{c}{C} + \frac{(x-1)(\alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_2)}{C} \right) = const1. + const2. \times x \quad (2)'$$

となり式(1)'は並列実行台数(または、総格子点数)に依らず経過時間Tが一定になることを、式(2)'は並列実行台数に比例する項を持つ経過時間となることをそれぞれ示している。

一方、高速化のための並列化は、総格子点数が一定、つまり、 $S = const.$ の並列化である。上記と同様に b, B 等は定数であるので、式(1)、(2)は

$$T = \frac{S}{x} \left(\frac{c}{C} + 2\frac{b}{B} \right) = \frac{const.}{x} \quad (1)''$$

$$T = \frac{S}{x} \left(\frac{c}{C} + \frac{(x-1)(\alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_2)}{C} \right) = \frac{const1.}{x} + \frac{x-1}{x} \times const2. \quad (2)''$$

となる。式(1)''は経過時間が実行台数に反比例することを、式(2)''は経過時間がconst2.に漸近する事を示している。

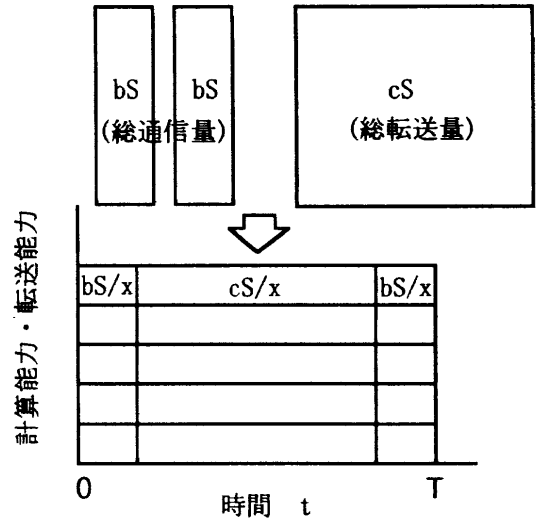


図7 transposeの経過時間

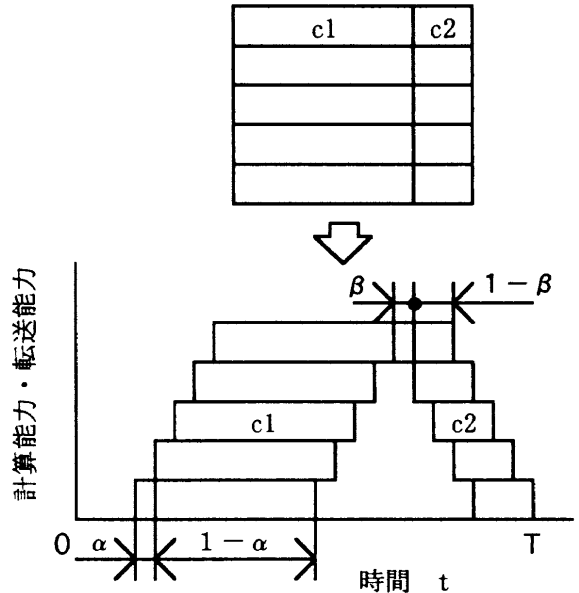


図8 rippleの経過時間

9 まとめと今後の課題

単一ベクトル計算機上で研究用に開発・利用された、ONERA-M6翼周りの3次元遷音速流れをTVDスキーム・IAFを用いて解くコード(TVDS)を、transpose, rippleという並列処理法により、分散記憶型ベクトル並列計算機(NWT)で実行させた場合の、並列処理法の性能比較を経過時間を計測することにより行った。大容量化のための並列化においては、16台程度の低並列時にはtranspose, rippleとも同程度の並列化効率を示した。高速化のための並列化においては、全実行台数においてtransposeが高効率を示した。

rippleコードにおいて高並列時にメモリオーバーが発生し、測定が出来なかった原因を究明する必要がある。また、8にある式は前述の様に、OSの並列動作等に関わるパラメータを含んでいない。逆に、上式と実測値の違いがOSやtranspose, ripple等の並列処理を行わせるためのオーバーヘッドと考えられる。今後研究を更に進め、並列計算性能を的確に表現できるパラメータを洗い出し、効率的な並列計算条件を特定していきたいと思う。

参考文献

- 1) Takakura, Y., Ishiguro, T., and Ogawa, S., On the Recent Difference Schemes for the Three-Dimensional Euler Equations, AIAA-87-1151-CP, 1987, pp. 537-545
- 2) Ishiguro, T., Ogawa S., and Takakura, Y., On the High Resolution Schemes for the Three-dimensional Euler Equations, I. Estimation of Resent TVD schemes, NAL TR-950T, 1987
- 3) Traub, J. F., Iterative solution of tridiagonal systems on parallel or vector computers. In Complexity of Sequential and Parallel Numerical Algorithms, Academic Press, 1973, pp49-82

```
DO 1000 I = 2, IM1
DO 1000 J = 2, JM2
DO 1000 K = 2, KM1
  J1 = J + 1
  AU(K, I, J, I) = AU(K, I, J, I) / D(K, I, J, I)
  D(K, I, J1, I) = D(K, I, J1, I) + AL(K, I, J1, I)*AU(K, I, J, I)
  FFF(K, I, J1, I) = ( FFF(K, I, J1, I) + AL(K, I, J1, I)*FFF(K, I, J, I) )
  :
```

1000 CONTINUE

図9 単一ベクトルプロセッサ用コード

```
!xocl processor PE(16)
!xocl proc alias PE1(16)=PE(1:16)
!xocl proc alias PEJ(16)=PE(1:16)

!xocl index partition partI=(PE1, index=1:N1, part=band)
!xocl index partition partJ=(PEJ, index=1:N2, part=band)

DIMENSION FFF_G(N1, N3, 5, N2)
DIMENSION FFF (N1, N3, 5, N2)
!xocl global FFF_G
!xocl local FFF(:, :, :, /partJ)
equivalence(FFF, FFF_G)

dimension FFF_TG(N3, 5, N2, N1)
dimension FFF_T (N3, 5, N2, N1)
!xocl global FFF_TG
!xocl local FFF_T(:, :, :, /partI)
equivalence(FFF_T, FFF_TG)
:
```

並列処理のための
宣言・定義

```
!xocl spread move /partJ
do j=1, N2
do l=1, 5
do k=1, N3
do i=1, N1
  FFF_TG(k, l, j, i)=FFF(i, k, l, j)
enddo
enddo
enddo
!xocl end spread (iddadiy11)
!xocl movewait(iddadiy11)
```

配列データの再配置

```
!xocl spread do /partI
DO 1000 I=2, IM1
DO 1000 J=2, JM2
DO 1000 K=2, KM1
  :
```

FFF(I, K, I, J1)=(FFF(I, K, I, J1)+AL(I, K, I, J1)*FFF(I, K, I, J))/D(I, K, I, J1)

1000 CONTINUE

!xocl end spread

図9と同じコード部分

```
!xocl spread move :, :, /partI
do j=1, N2
do l=1, 5
do k=1, N3
do i=1, N1
  FFF_G(i, k, l, j)=FFF_T(k, l, j, i)
enddo
enddo
enddo
!xocl end spread(iddadiy15)
!xocl movewait(iddadiy15)
```

配列データの再配置

図10 transposeのコーディング例

```
if(NPE.eq.1) then
!xocl spread do /partPE
!xocl index I
do i=1, N1
  flag10001(i, i)=.true.
  flag11001(i, i)=.true.
  flagt ( i )=.true.
enddo
!xocl end spread
elseif(NPE.eq.2) then
!xocl spread do /partPE
!xocl index I
do i=1, N1
  flag10001(i, i)=.true.
  flag11001(i, i)=.false.
  flagt ( i )=.true.
enddo
!xocl index NPE
do i=1, N1
  flag10001(NPE, i)=.false.
  flag11001(NPE, i)=.true.
  flagt ( NPE )=.true.
enddo
!xocl end spread
else
!xocl spread do /partPE
!xocl index I
do i=1, N1
  flag10001(i, i)=.true.
  flag11001(i, i)=.false.
  flagt ( i )=.true.
enddo
!xocl index
do pp=2, NPE-1
do i=1, N1
  flag10001(pp, i)=.false.
  flag11001(pp, i)=.false.
  flagt ( pp )=.true.
enddo
enddo
!xocl end spread
endif
```

ripple動作のための
フラグの初期化

```
do I=2, IM1
1001 if(.not.flag10001(pid, I)) goto 1001
!xocl spread nobarrier do /partJ
do 1010 J=2, JM2
do 1020 K=2, KM1
  :
```

FFF_w(k, I, J, I)=(FFF_w(k, I, J1, I)+AL_w(k, I, J1, I)*FFF_w(k, I, J, I))/D_w(k, I, J1, I)

1020 continue

1010 continue

!xocl end spread nobarrier

if(NPE.gt.1) then

!xocl spread nobarrier do /partPE

do pp=1, NPE-1

!xocl spread nobarrier move

do l=1, 5

do K=1, N3

:

FFF_wg(k, l, joverp, i)=FFF_w(k, l, joverp, i)

:

enddo

enddo

!xocl end spread(iddadiyF)

!xocl spread nobarrier move

do ppp=pp, pp

flag1000g(ppp+1, I)=flagt (ppp)

enddo

!xocl end spread(iddadiyG)

enddo

!xocl end spread nobarrier

!xocl movewait nobarrier(iddadiyF)

!xocl movewait nobarrier(iddadiyG)

endif

enddo

図9の部分を
ripple化
したコード

図11 rippleのコーディング例
(宣言・定義部は省略)

表1 倍精度格子点数

総数 S 万点	実行台数 x 台	N1×N2×N3 点
39	2	191×48×43
120	4	271×68×65
476	16	447×112×95
1478	64	762×192×101
2972	128	893×256×130
3183	140	895×280×127
3774	166	895×332×127

表2 単精度格子点数

総数 S 万点	実行台数 x 台	N1×N2×N3 点
79	2	253×64×49
233	4	365×92×71
949	16	573×144×115
2972	64	893×256×130
5967	128	1151×384×135
6429	140	1151×420×133
7681	166	1151×498×135

表3 主要DO-loopのベクトル性能

サブルーチン	dadix (3)	dadiy (4) [Trans]	dadiy (4) [Rippl]	dadiz (5)
loop	分割 :DO J=1, N2 sweep :DO I=2, IM2 vector:DO K=1, N3	分割 :DO I=2, IM1 sweep :DO J=2, JM2 vector:DO K=2, KM1	DO K=2, KM1 分/sw :DO J=2, JM2 vector:DO I=2, IM1	分割 :DO J=2, JM1 sweep :DO K=2, KM2 vector:DO I=2, IM1
配列	FFF (I, J, K, L)			
ベクトル性能	ベクトル長:N3 アクセス :stride付 ストライプ :N1×N2/PE	ベクトル長:N3-2 アクセス :stride付 ストライプ :N1×N2/PE	ベクトル長:N1-2 アクセス :block ストライプ :(1)	ベクトル長:N1-2 アクセス :block ストライプ :(1)

表4 主要DO-loopのベクトル性能(修正後)

サブルーチン	dadix (3)	dadiy (4) [Trans]	dadiy (4) [Rippl]	dadiz (5)
loop	分割 :DO J=1, N2 sweep :DO I=2, IM2 vector:DO K=1, N3	分割 :DO I=2, IM1 sweep :DO J=2, JM2 vector:DO K=2, KM1	DO I=2, IM1 分/sw :DO J=2, JM2 vector:DO K=2, KM1	分割 :DO J=2, JM1 sweep :DO K=2, KM2 vector:DO I=2, IM1
配列	FFF (I, K, L, J)		FFF (K, L, J, I)	
ベクトル性能	ベクトル長:N3 アクセス :stride付 ストライプ :N1	ベクトル長:N3-2 アクセス :block ストライプ :(1)	ベクトル長:N1-2 アクセス :block ストライプ :(1)	

表5 並列化効率(大容量化:倍精度)

総点数 S 万点	実行台数 x 台	並列化効率			
		transpose		ripple	
		経過時間 T 秒	効率 E	経過時間 T 秒	効率 E
39	2	37.86	1.00	40.54	1.00
120	4	63.05	0.91	66.44	0.93
476	16	58.48	0.97	メモリオーハ	メモリオーハ
1478	64	51.18	0.87	メモリオーハ	メモリオーハ
2972	128	55.32	0.81	メモリオーハ	メモリオーハ
3183	140	55.72	0.78	メモリオーハ	メモリオーハ
3774	166	55.88	0.78	メモリオーハ	メモリオーハ

表6 並列化効率(大容量化:単精度)

総点数 S 万点	実行台数 x 台	並列化効率			
		transpose		ripple	
		経過時間 T 秒	効率 E	経過時間 T 秒	効率 E
79	2	72.40	1.00	74.80	1.00
233	4	112.4	0.97	118.3	0.95
949	16	114.7	0.94	127.0	0.88
2972	64	94.22	0.90	118.6	0.74
5967	128	106.2	0.80	メモリオーハ	メモリオーハ
6429	140	109.6	0.76	メモリオーハ	メモリオーハ
7681	166	106.8	0.80	メモリオーハ	メモリオーハ

表7 並列化効率(高速化:倍精度)

総点数 S 万点	実行台数 x 台	並列化効率			
		transpose		ripple	
		経過時間 T 秒	効率 E	経過時間 T 秒	効率 E
39	2	38.70	1.00	42.74	1.00
39	4	20.56	0.94	25.57	0.84
39	8	10.99	0.88	16.58	0.64
39	16	6.184	0.78	12.32	0.43
39	24	4.588	0.70	11.03	0.32
39	48	3.087	0.52	10.73	0.17

表8 並列化効率(高速化:単精度)

総点数 S 万点	実行台数 x 台	並列化効率			
		transpose		ripple	
		経過時間 T 秒	効率 E	経過時間 T 秒	効率 E
79	2	74.91	1.00	78.31	1.00
79	4	38.72	0.96	44.98	0.87
79	8	20.34	0.92	27.12	0.72
79	16	11.12	0.84	18.86	0.52
79	32	6.384	0.73	15.12	0.32
79	64	4.265	0.55	14.49	0.17

行列積における並列処理性能の評価

中村孝*、吉田正廣*、山崎裕之*

Performance Evaluation of Matrix Multiplication with Parallelized Programs

by

Takashi Nakamura*, Masahiro Yoshida*, Hiroyuki Yamazaki *

ABSTRACT

We show the performance evaluation of matrix multiplication with parallelized programs.

Matrix multiplication is one of the basic operations in scientific computations.

We parallelized programs by two languages of data parallel and message passing.

We also parallelized by two approaches. One is not to change original programming style and the other is to improve parallel overhead caused by data transfer among processors.

1. はじめに

航技研「数値シミュレータIIシステム」において、基本的で応用上有用なプログラムである行列積を対象に、並列化と性能測定を行った。

数値シミュレータIIシステムの計算エンジンである「数値風洞 (NWT)」は今年のはじめに増強され、合計166台の要素計算機 (PE) となり、理論ピーク性能は280GFLOPS、主記憶容量45GBとなった (図1参照)。また今年度初頭のジョブ処理件数のうち、実に40%以上のジョブが並列ジョブであった。このことは、数値風洞が航技研CFDにおける有用性を示している。

る。

並列化はNWT-FORTRANおよびPARMACSを用いて行った。NWT-FORTRANはデータパラレルアプローチによる並列化で、従来の逐次型処理プログラムに並列化ディレクティブを挿入することにより、配列、DOループの分割等で並列実行を行う。この形式で並列化されたプログラムはそのまま通常のコンパイラで逐次処理が可能である。これに対し、PARMACSはメッセージパッシングアプローチの並列化ライブラリで、PVMやMPIなどと並んで、超並列計算機やワークステーションクラスなどに広く利用されている。この並列化はPE毎にローカルに処理し、対象全体のどの部分を処理しているかは常にPE番号と共にプログラム中で把握している必要があり、送信/受信/同期ライブラリを呼ぶことによりデータ通信を行い、並列実行を行う。

行列の分割方法は、まず1次元分割で行い、性能を検討しながら種々のチューニングを施した。また、ここでの並列化は、ライブラリ作成などで行われている高度なチューニングまでは行わない。

2. ベクトル性能

並列化を行う前にベクトル長、すなわち行列サイズ (N) による単一PEの性能を求める。行列積を

$$C = A \times B$$

とすると、オリジナルプログラムは図2のようになる。図では現在ベクトル計算機では普通に行われているプログラム形式、すなわちベクトル性能が発揮されるように最内側がベクトル化可能なループのプログラムになっている。DO 130のループは演算数が少ないため、DO 120のループについて2倍に展開されている (ループアンローリング)。こうすることによりベクトル命令が連続で実行され、高い性能が発揮される。図2において、S2、V2と表示されている。

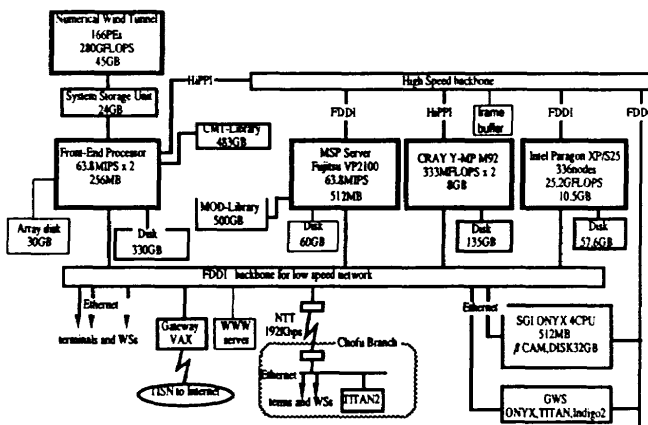


図1. 数値シミュレータIIシステム構成図

行列積プログラムは、プログラム行数が短く演算が少ないので、並列化の理解を得やすくかつ解析が容易である。ここではまずベクトル化の性能、次に種々の並列化を行い性能について検討する。この例ではNWTの1PEのユーザ使用メモリは200MBとし (ハードウェア上は256MB x 162台、1GB x 4台で、ユーザが最大使用可能なメモリは210MBおよび960MB程度)、行列は正方で、分割は全ての行列で同一分割とした。それはプログラムを見る上で並列化の性能評価の上でも理解を得やすくするためである。

```

isn      include
00001    C MATRIX MULTIPLY
00002    C VECTOR PRODUCT
00003    C
00004    PARAMETER (N=2048)
00005    C
00006    PARAMETER (NI=N,NJ=N,NK=N)
00007    REAL*8 A(NI,NJ),B(NJ,NK),C(NI,NK)
00008    REAL*8 WT1,WT2,WT3,WT4
.....
00035    CALL GETTOD (WT2)
00036    s   DO 100 K=1,NK
00037    s2  DO 120 J=1,NJ
00038    v2  DO 130 I=1,ni
00039    v2  C(I,K)=A(I,J)*B(J,K)+C(I,K)
00040    v2  130 CONTINUE
00041    s2  120 CONTINUE
00042    s   100 CONTINUE
00043    CALL GETTOD (WT3)
    
```

図2. オリジナルプログラム

図3に示すようにNが2048を越えた時点で性能が低下するが、これはNWTの最長ベクトルレジスタ長が倍精度で2048語(×8本、64語×256本)であるため、それを越える場合は、剰余を別処理する必要があり、性能低下が見られる。この例のプログラムの場合はNが2048で最高性能になる。行列積のこのプログラムではベクトル命令はL+M+A(L:ロード、M:乗算、A:加算)であり、この3つの命令は同時に実行可能であり、ほぼ理論ピーク性能(1.68GFLOPS)となる。

GFLOPS

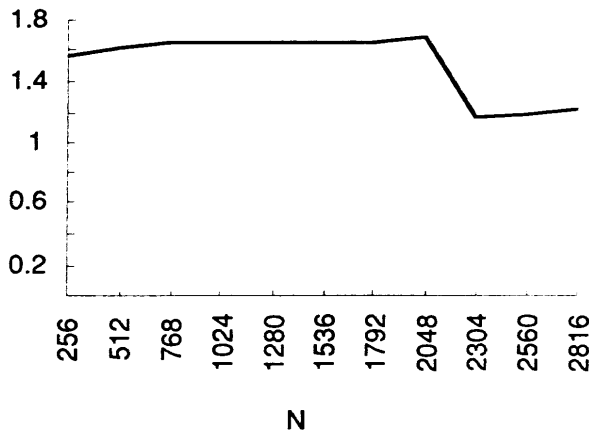


図3. 行列サイズの変化による単体性能

3. 並列化

並列化は、行列の分割配置、D Oループの分割実行、データ転送および同期に大きく分けられる。

(1) 初歩的な並列化

ベクトル性能を維持することを考えて図4に示すように、行列を列方向に等間隔で分割する。またD Oループはこれにあわせて最外側のKのループで並列実行する。図5で、第1カラムから!XOCLで書き始めている行が並列化の指示行(ディレクティブ)である。また図5で並列化のために挿入した行を網掛で示している。6、17行は使用するPE台数と型、12、16、19行はA_Gをグローバル宣言し、ローカル配列Aと結合させる。18行は分割するインデックスの範囲を指定し、20行は配列A, B, Cのローカ

ル分割配置宣言を示し、30行で指定された台数の並列実行が開始される。この行が来る前までは1台で実行している。56行から73行で囲まれたD Oループが分割実行される。また、60行から64行までがデータ転送を表し、65行が転送完了待合せを示す。80行で並列実行が終了し、以降1台のP Eで実行される。

この方法で並列化された場合、行列Aは全てのプロセッサから参照されるので、計算実行前にワーク配列に転送しておく。

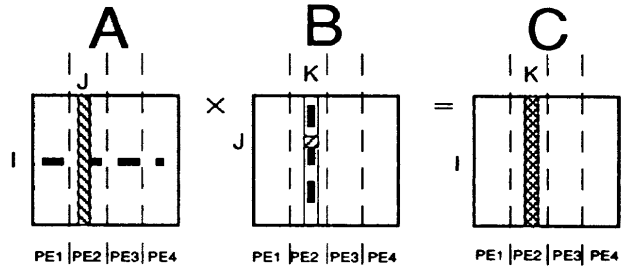


図4. 列方向等分割による並列化

```

isn      include
00001    C MATRIX MULTIPLY
00002    C VECTOR PRODUCT
00003    C PARALLELIZED ROWWISE
00004    C
00005    parameter (n=2048)
00006    PARAMETER (N=n)
00007    PARAMETER (NI=N,NJ=N,NK=N)
00008    REAL*8 A(NI,NJ),B(NJ,NK),C(NI,NK)
00009    C
00010    C PARALLEL
00011    C
00012    REAL*8 A_G(NI,NJ)
00013    REAL*8 BK(NI)
00014    REAL*8 WT0,WT1,WT2,WT3,WT4,WT5,
00015    & WT6,WT7
00016    EQUIVALENCE (A,A_G)
00017    !XOCL PROCESSOR PEG(NPE)
00018    !XOCL INDEX PARTITION IDXK=(PE0,INDEX=1,NK)
00019    !XOCL GLOBAL A_G
00020    !XOCL LOCAL A(:,/IDXK),B(:,/IDXK),C(:,/IDXK)
00021    C
.....
00030    !XOCL PARALLEL REGION
.....
00055    CALL GETTOD (WT2)
00056    !XOCL SPREAD DO /IDXK
00057    s   DO 100 K=1,NK
00058    s   DO 120 J=1,NJ
00059    s   CALL GETTOD (WT5)
00060    !XOCL SPREAD MOVE
00061    DO 111 I=1,NI
00062    WT(I)=A_G(I,J)
00063    111 CONTINUE
00064    !XOCL END SPREAD (ID)
00065    !XOCL MOVEWAIT (ID)
00066    s   CALL GETTOD (WT6)
00067    m   WT7=WT7+(WT6-WT5)
00068    v   DO 130 I=1,NI
00069    v   C(I,K)=WK(I)*B(J,K)+C(I,K)
00070    v   130 CONTINUE
00071    v   120 CONTINUE
00072    s   100 CONTINUE
00073    !XOCL END SPREAD
00074    CALL GETTOD (WT3)
.....
00080    !XOCL END PARALLEL
    
```

図5. 並列化プログラム

図5からわかるように、DO 120のループがアンローリングされないためベクトル性能が低下しているのが予測される。また、図6に示すように、全てのPEは同時にPE1上のAの要素を必要とし、アクセスの衝突(競合)が発生している。

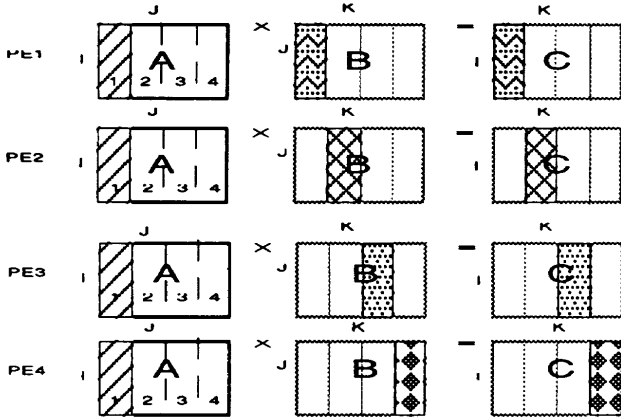


図6. 並列化(同時刻同一プロセッサ参照)

(2) チューニング1、衝突防止

以上の並列化では、同時に多数のプロセッサから同一のプロセッサに割り付けられた行列Aにアクセスが集中し、衝突が起こる。衝突を防ぐのは図7に示すように各PEの開始する位置をずらすことにより行える。そのプログラムを図8に示す。(図6、7の行列Aの中の数字は時刻を示す。各プロセッサは同時刻に同一番号の部分参照している。)

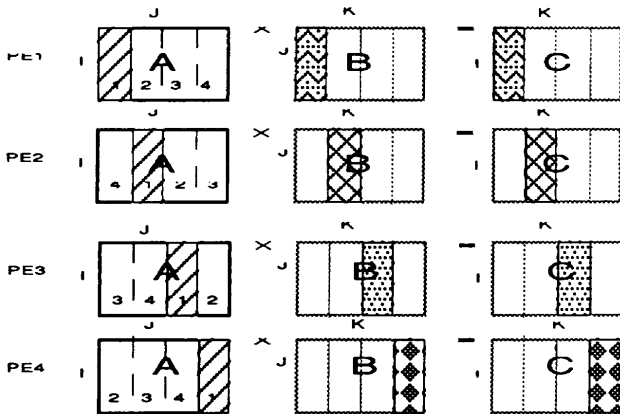


図7. 衝突を防ぐデータ参照

```

00017      EQUIVALENCE (A,A_G)
00018      !XOCL PROCESSOR PEG(NPE)
00019      !XOCL INDEX PARTITION IDXK=(PEG,INDEX=1:NK)
00020      !XOCL GLOBAL A_G
00021      !XOCL LOCAL A(:,/IDXJ),B(:,/IDXK),C(:,/IDXK)
00022      C
      .....
00067 s      m=idvproc()
00068 s      CALL GETTOD (WT2)
00069 !XOCL SPREAD DO /IDXK
00070 s      DO 100 K=1,NK
00071 m      DO 120 JJ=0,NJ-1
00072 v      jj=jjj+(m-1)*nj/npe
00073 m      j=mod(jj,nj)+1
00074 s      CALL GETTOD (WT5)
00075 !XOCL SPREAD MOVE
00076 DO 111 I=1,NI
00077 WK(I)=A_G(I,J)
00078 111 CONTINUE
00079 !XOCL END SPREAD (ID)
00080 !XOCL MOVEWAIT (ID)
00081 s      CALL GETTOD (WT6)
00082 m      WT7=WT7+(WT6-WT5)
00083 v      DO 130 I=1,NI
00084 v      C(I,K)=WK(I)*B(J,K)+C(I,K)
00085 v      130 CONTINUE
00086 v      120 CONTINUE
00087 s      100 CONTINUE
00088 !XOCL END SPREAD
00089 s      CALL GETTOD (WT3)
    
```

図8. 並列化プログラム(競合防止)

3) チューニング2、WRITEバケット

NWT-FORTRANではデータ転送は変数(配列)の代入文で表す(図8、75行から80まで)。それをコンパイラが読み取り、転送バケットを生成する。この場合、代入文の右辺または左辺にグローバルとローカル変数がそれぞれ現れるが、グローバルを右辺にローカルを左辺に書くとREADバケットに、ローカルを右辺にグローバルを左辺に書くとWRITEバケットとなる。データは常に右辺から左辺に流れる。ここで、READバケットは相手方PEに自PEが必要なデータ番地を教え、転送を依頼する。これに対し、WRITEバケットは必要としているPEにデータを送り込むだけである。READバケットの場合は相手の動作に依存するのに対し、WRITEは相手の受け取り口がふさがっていないければ何時でも送り出せるが、ネットワーク内のデータを押し出すためのダミーバケットの転送時間がオーバーヘッドとなる。図9の左にプログラム、右に動作を示す。requestと書かれているのはSPREAD MOVEが実行された時点を示し、斜め点線矢印でバケットの流を示す。waitで転送が完了する。READバケットはネットワークを往復するのに対し、WRITEバケットは一方通行である。

```

isn      include
00001 C MATRIX MULTIPLY
00002 C VECTOR PRODUCT
00003 C PARALLELIZED ROWWISE
00004 C TUNING 1 FOR MOVE
00005 C READ PACKET
00006 C
00007 parameter (n=2048)
00008 PARAMETER (NPE=2)
00009 PARAMETER (NI=N,NJ=N,NK=N)
00010 REAL*8 A(NI,NJ),B(NJ,NK),C(NI,NK)
00011 C
00012 C PARALLEL
00013 C
00014 REAL*8 A_G(NI,NJ)
00015 REAL*8 WK(NI)
00016 REAL*8 WT0,WT1,WT2,WT3,WT4,WT5,WT6,WT7
    
```

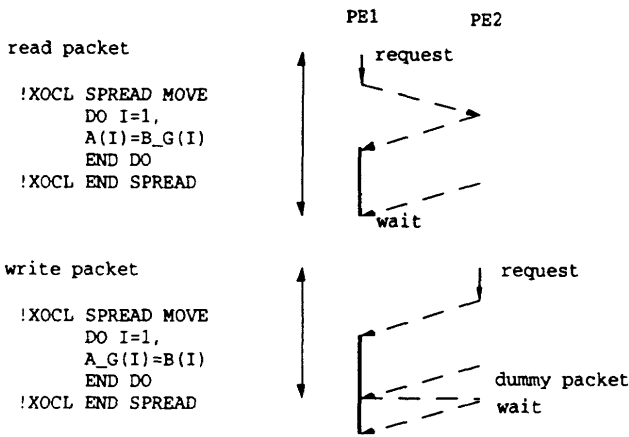


図9. READ/WRITEパケットの違い

これまでのチューニングにより図10に示すような並列の効果を実現される。

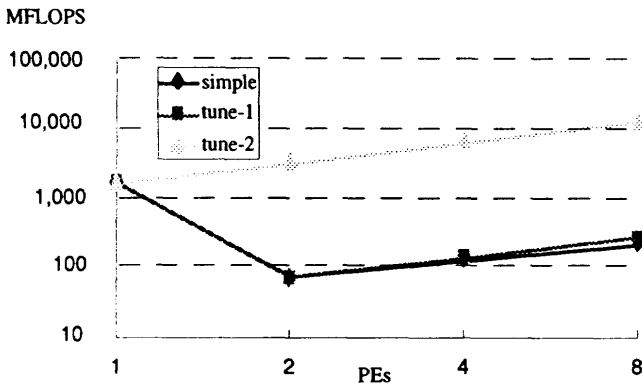


図10. 並列化による性能変化 (N=2048)

4) チューニング3、ブロック転送

転送時間を T_m 、パケット作成時間を T_p 、転送速度を R_m とすると、データ長 L バイトのパケットを一つ転送するのに要する時間 T_m は

$$T_m = T_p + L / R_m$$

で表される。2) では行列の大きさを N 、PE台数を N_{pe} とすると、 $L=N$ のサイズのパケットで

$N/N_{pe} * (N_{pe} - 1)$ 回の転送を必要とする。

また転送するデータ量は $N^2 / N_{pe} * (N_{pe} - 1)$ である。このチューニングでは衝突は防止されたものの、転送回数(転送パケット数)は1)と同数である。

NWTでは T_p が50マイクロ秒程度必要であり、 $N=2048$ 、 $N_{pe}=64$ を例にとると、総 T_p は約100ミリ秒であり、データ転送時間は約80ミリ秒である。そこで、 $(N, N/N_{pe})$ の大きさの作業用配列を用意し、PE毎に分担して格納している配列 A をまとめて転送することにより、転送パケット数を $N_{pe} - 1$ 回 ($N_{pe}=64$ の場合約3ミリ秒) に減らすことが可能である。このようにブロック化しても全体の転送量は不変である。このプログラムを図11に示す。

この場合は、プロセッサ台数に応じて総 T_p 時間は

線型に増加するが、データの総転送時間は行列サイズにはほぼ依存し、プロセッサ数に対してそれほど増加しない。また演算時間はプロセッサ数に比例して減少する。従って、演算時間が N_{pe} と共に減少するのに対し、転送時間は $N_{pe} * (T_p + L/R_m)$ となり N_{pe} と共に増加し、ある時点で演算時間より転送時間が多くなり、PE台数を増やしても実行時間の短縮とはならず、逆に時間が増加する。

```

00015      REAL*8 WK(NI,NJ/Npe)
00080      CALL GETTOD (WT2)
00081      CXOCL SPREAD DO /IDXL
00082      C      DO 121 M=1,NPE
00083              M=IDVPROC()
00084
00085      !xocl barrier
00086
00087      CALL GETTOD(WT8)
00088      m      DO 123 L=1,NPE
00089      m      LL=MOD(L+M-2,NPE)
00090      v      NJMOD=LL*NJ/NPE
00091      v      LM=MOD(NPE-L+M,NPE)+1
00092      v      LMOFF=(LM-1)*NJ/NPE
00093      s      MMOFF=(M-1)*NJ/NPE
00094      s      CALL GETTOD (WT5)
00095      !XOCL SPREAD MOVE
00096      DO 120 J=1,NJ/NPE
00097      DO 111 I=1,NI
00098      WK_G(I,J+LMOFF)=A(I,J+MMOFF)
00099      111 CONTINUE
00100      120 CONTINUE
00101      !XOCL END SPREAD (ID)
00102      !XOCL MOVEWAIT (ID)
00103      s      CALL GETTOD (WT6)
00104      m      WTM(L)=(WT6-WT5)-(WT1-WT0)
00105      v      WT7=WT7+WTM(L)
00106      s      K1=NK/NPE*(M-1)
00107      s      CALL GETTOD(WT9)
00108      s      DO 100 KK=1,NK/NPE
00109              K=KK+K1
00110      s2     DO 122 J=1,NJ/NPE
00111      2      JJ=J+LL*NJ/NPE
00112      v2     DO 130 I=1,NI
00113      v2     C(I,K)=WK(I,J+MMOFF)*B(JJ,K)+C(I,K)
00114      v2     130 CONTINUE
00115      s2     122 CONTINUE
00116      s      100 CONTINUE
00117      v      123 CONTINUE
00118      121 CONTINUE
00119      CXOCL END SPREAD
00120      CALL GETTOD (WT3)
    
```

図11. ブロック転送

図11で81行目と82行目のSPREAD DO文とDO 121の文がコメントアウトされているが、このプログラムでは分割実行をSPREAD DOを用いずに83行目の関数で自分のPE番号を取得し、これを用いて並列化を行う。こうすることにより、PE間で精度よく同期を取ることができ、前に述べた転送時の衝突が回避される。

4. 台数効果

チューニング3によるプログラムを用いて128台までの台数に対し、各々に行列サイズ N を変化させた場合の性能を図12に示す。図12には前に述べたように、PE台数を増加させても転送が支配的になると台数増加に反して実行時間が増加し、台数効果が現れない。それに対し、PE台数と共に問題規模を増大させる場合、スケラビリティ効果は十分発揮されている。

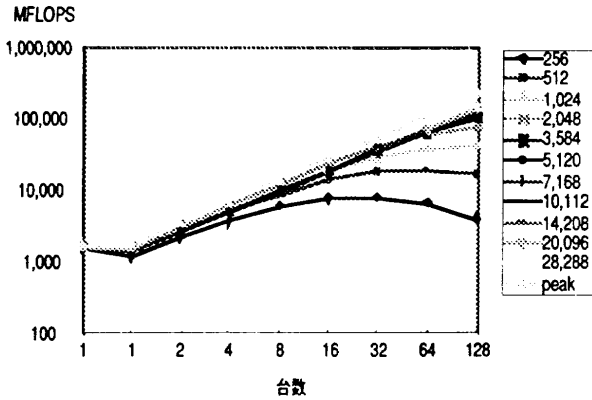


図12. 台数効果

5. 並列オーバーヘッドとさらなるチューニング

並列化の実行時オーバーヘッドは大まかに、

- ・転送時間（転送衝突を含む）
- ・ロードインバランス（同期時間を含む）
- ・CPU負荷、データ移動（バケット生成など）
- ・ワーク領域などのメモリ消費
- ・本質的な逐次処理部分（並列化不可部分）
- ・並列化によるベクトル性能低下

が考えられる。この問題では、ロードインバランスはなく本質的な逐次処理部もない。ここではさらに転送時間の減少を試みる。転送時間減少には、

- ・衝突の防止
- ・高速バケットの使用
- ・バケットをまとめる

を行ったが、さらに

- ・非同期転送
- ・データ転送量の減少（アルゴリズムの変更）

が考えられる。これらのチューニングではワーク領域の増加やプログラムが複雑になるなどのオーバーヘッドがある。

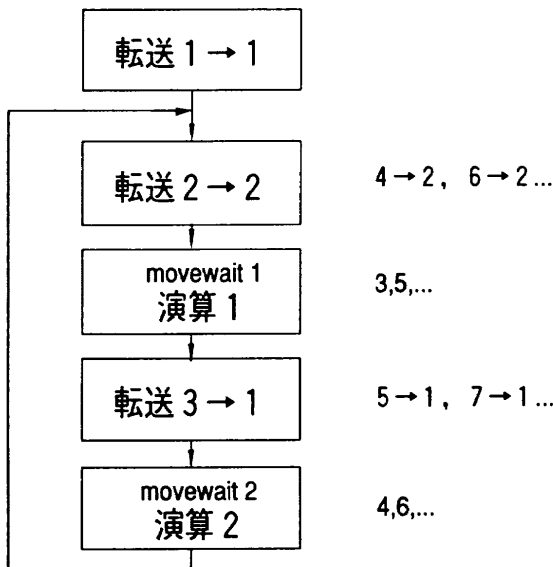


図13. 非同期転送チャート

1) チューニング4、非同期転送

図7から、明らかなように、あらかじめAの1の部分を送り、その終了を待って2の部分を送りながら1の部分の演算をする。次にこの転送をまって3を送りながら2の部分を実行する。この場合、1の部分の演算中に2の転送が終了している場合に非同期効果が最大となる。これを繰り返すことにより、転送時間を演算時間の中に隠ぺいすることが可能になり、転送時間を減少させることができる。このフローチャートを図13に示す。

2) チューニング5、2次元分割

さらに転送データ量を減らすために、2次元分割を考える。図14の上部に示すように分割することにより、転送データ量そのものおよびバケット数を減少させることが可能である。図14には16台のPEを使用した場合の1次元分割と2次元分割の違いを示している。1次元分割の場合は行列Aのみの転送で、データバケット数が $N_{pe} - 1$ なのに対し、2次元分割の場合はAおよびBともに転送する必要があるが、バケットの全体数は $2 * (\sqrt{N_{pe}} - 1)$ であり、1次元分割に比べて少ない。またデータ量は1次元分割の場合が、 $N * N / N_{pe} (N_{pe} - 1)$ であるのに対し、2次元分割の場合は、 $2 * N * N / N_{pe} * (\sqrt{N_{pe}} - 1)$ ですむ。 $N = 2048$, $N_{pe} = 16$ の場合、1次元分割では $2048 * 2048 / 16 * 15$ 、2次元分割では $2 * 2048 / 4 * 2048 / 4 * 3$ である（15対6）。

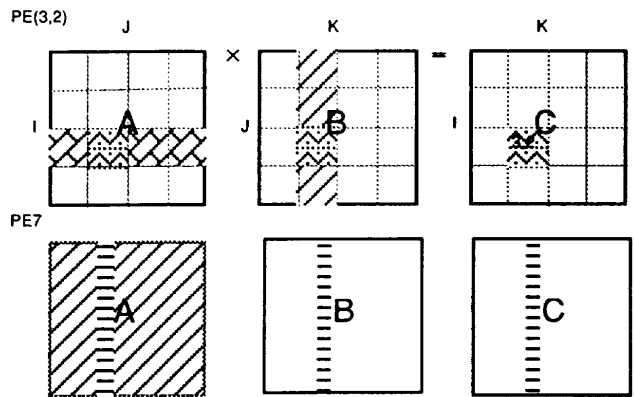


図14. 2次元分割（16台の場合）

これらのチューニングにより性能を計測しプロットしたのが図15である。図15にはPE台数を64台とした場合のREAD/WRITEバケットによる違い、非同期転送、2次元分割の比較を示す。図16に台数効果を示す。2次元分割はベクトル長が短くなるものの転送が支配的である64台ではかなり高い性能を示している。

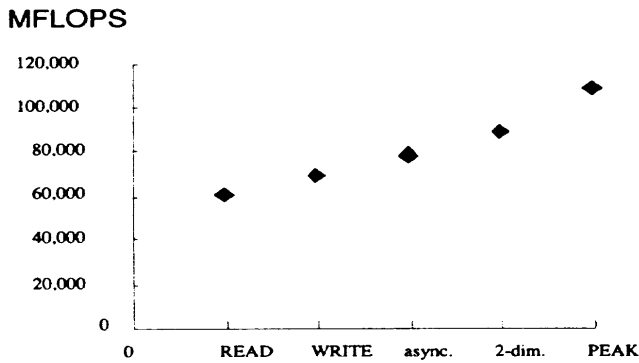


図15. 転送方法による性能 (64台の場合)

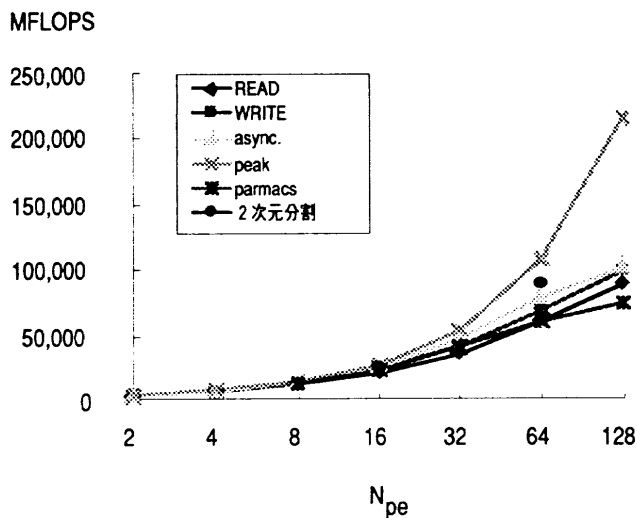


図16. 転送方法と台数効果

本質的に非同期転送が行えない場合もある。

e) 分割方法を変更する

2次元分割や3次元分割を考慮する。ただし、ベクトル長の減少やプログラムの複雑化を招くことがある。

f) アルゴリズムを変える

アルゴリズムを変えることにより転送を少なくすることが可能である場合があるが、一般的には収束性の悪化を招くこともある。ただし、行列積の場合は収束性は関係がない。

今後は他の有用かつシンプルなアプリケーションによる性能評価、例えばNASA Ames研究所のベンチマークテストであるNPB等の評価、また他の並列化による評価、例えばメッセージパッシングライブラリによる並列化、さらに別の計算機による評価、例えばPARAGON等を行う予定である。

また、システム全体としての評価、入出力性能、並列実行開始/終了、PEダイナミックアロケーションなどの評価をジョブ単位、システム単位に行うことも予定している。

最後に、並列計算機で性能評価を行う場合には、時間計測ツールや他のパフォーマンス計測ツールをどのように用いれば望むデータが取得できるのか、取得したデータで全てのPEの動作を評価可能か否か、などの吟味が必要である。また相対評価する場合は、何を基準とするか、その基準となるものも評価する必要がある。

6. おわりに

簡単で理解しやすい問題を例に挙げて並列化および性能評価を行った。初歩的な並列化では性能が発揮されない場合、種々のチューニングを考えたが、それほど複雑な並列化を施さなくてもかなりの性能を達成することが示された。まとめると、

1) ベクトル性能をあげる

連続アクセス、ベクトル長の増大、ループアンローリングがされるように書くなどPE本来の性能を引き出す。

2) 並列オーバーヘッドを考慮する

a) 転送時の衝突を防止する

特定のPEへのアクセスをずらす、同期を取って衝突が起こらないようにすることが大事である。

b) 高速バケットの使用 (可能なかぎりWRITEバケットの使用)

c) 転送を少なくする

ブロック化などを行い転送の回数を減らす。ただし、これはメモリアーバッドを招くので十分なメモリ量が必要である。

d) 転送時間の隠ぺい

非同期転送を行うことにより転送時間そのものを演算時間の中に隠ぺいすることができる。ただし、プログラム複雑化やメモリアーバッドを招く。あるいは

一次元移流拡散差分問題の誤差評価

名古屋 靖一郎* 牛島 照夫†

Error Estimate for One Dimensional Convective Diffusion Difference Problems

by

Seiichiro NAGOYA* and Teruo USHIJIMA†

ABSTRACT

Results on mathematical analysis for difference approximation of the constant coefficient convective diffusion problem with spatial dimension one are mentioned. As the difference approximation of spatial differential operators, difference operators with the order of accuracy less than or equal to 4 are considered. As for temporal discretization of the first order differential operator, the methods correspond to the truncation of Taylor-Maclaurin expansion of exponential function up to the first $M + 1$ terms, which are called the Runge-Kutta type method in the paper.

The characterization of von Neumann stability condition for a certain family of explicit schemes is obtained. The concept of ϵ -stability is, then, proposed for the problems. The concept implies that the stability for the problem under the neglect of the Fourier components of solution of discrete problem corresponding to the wave lengths longer than or equal to the threshold wave length determined by the positive small ϵ . Using the ϵ -stability concept, the advantage of 3rd order upwinding formula of Kawamura type approximating the first order differential operator is clarified in comparison with that of standard type. Stability analysis for the fully discrete problem with the Runge-Kutta type method is conducted for the purely convective problem in the case of 4th order central difference formulas adopted as the approximation of spatially first order differential operator. As for the error analysis of Runge-Kutta type method under the assumption of L^2 -stability, an error estimate between the genuine solution and the approximate solution is derived.

1. はじめに

最高四次精度を有する有限差分近似を適用したときの空間一次元非定常移流拡散問題に対する数学的理論解析の結果として、近似問題の安定性と、近似解と真の解との間の誤差評価に関する結果を示す。この内容は、文献[1]に従うものである。

空間方向の離散化には、2次精度以上であり、最高精度で4次を有する五点差分公式のある一般形を用いる。空間方向の離散化後に得られた時間方向のみの常微分方程式に対して、Runge-Kutta型公式と称し、精度の次数をパラメタとする時間積分公式のある一般形を適用する。本論文では、このようにして得られた広い範囲の差分スキームの族を統一的に取り扱う。

時間方向にEuler法を用いたときに、von Neumannの安定条件のCourant数と拡散数を用いた特徴付けに関する解析結果を述べる。これは、通常使われる差分公式のほとんどのものを含んだ結果である。また、新しい安定性の概念として、 ϵ 安定性を導入し、河村型三次精度風上法の標準型三次精度風上法(UTOPIA法)に対する有効性について述べる。

L^2 安定条件の仮定下で、上述の差分スキームの族を統一的に表現した誤差評価について述べる。

2. 問題設定

1次元の長さ L の領域 $\Omega = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < L\}$ を考える。その上で定義された周期境界条件下での移流拡散問題を (E) と書く。

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & t > 0 \quad x \in \Omega, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, L), & t > 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, L), & t > 0, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

u, K は非負の与えられた実定数とし、初期値 ϕ_0 を与えて、未知関数 $\phi = \phi(t, x)$ を求める問題を考える。ただし、 $K = 0$ の純移流問題を考える場合は、境界条件の後者の1階微分の条件は除くことにする。

有限差分法により連続問題 (E) を近似的に解く。空間方向を等幅 h で $2N$ 等分し、時間方向を等幅 τ で分割する。移流項の差分近似は、実パラメタ β, λ を使い、次のように定義される差分作用素 $D_h^{(\beta, \lambda)}$ を用いる。

$$(D_h^{(\beta, \lambda)} \phi)(x) = \frac{(T_{\frac{h}{2}}^{(\beta, \lambda)} \phi)(x) - (T_{\frac{h}{2}}^{(\beta, \lambda)} \phi)(x - h)}{h},$$

$$(T_{\frac{h}{2}}^{(\beta, \lambda)} \phi)(x) = \frac{\phi(x + h) + \phi(x)}{2} - \beta \{ (1 + \lambda)(\phi(x + h) - 2\phi(x) + \phi(x - h)) - \lambda(\phi(x + 2h) - 2\phi(x + h) + \phi(x)) \}.$$

この差分作用素は (β, λ) の値によって、表1に示す典型的な差分公式を表現できる。

表1 移流差分公式

(β, λ)	名称
$(0, \cdot)$	2次中心差分公式
$(\frac{1}{2}, 0)$	2次風上差分公式
$(\frac{1}{8}, 0)$	QUICK 公式
$(\frac{1}{5}, 0)$	UTOPIA 公式
$(\frac{1}{5}, 1)$	河村型3次風上差分公式
$(\frac{1}{5}, -\frac{1}{2})$	4次中心差分公式

Taylor展開できる関数 ϕ をとれば次のような評価式を得る。

$$(D_h^{(\beta, \lambda)} \phi)(x) - \left(\frac{d}{dx} \phi\right)(x) = \left(\frac{1}{3!} - \beta\right) \phi^{(3)}(x) h^2 + \beta \left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \phi^{(4)}(x) h^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{\beta}{4}\right) \phi^{(5)}(x) h^4 + O(h^5). \quad (1)$$

* (株) アーク情報システム 解析第一部
† 電気通信大学 情報工学科

次に拡散項の差分近似は、実パラメタ ξ を使い、

$$(D_{h\bar{h}}^\xi \phi)(x) = \frac{1}{h^2} [\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h) - \xi \{ \phi(x+2h) - 4\phi(x+h) + 6\phi(x) - 4\phi(x-h) + \phi(x-2h) \}]$$

を用いる。表2に典型的な拡散差分公式を示す。

表2 拡散差分公式

ξ	名称
0	2次中心差分公式
$\frac{1}{12}$	4次中心差分公式

Taylor展開できる関数 ϕ をとれば次のような評価式を得る。

$$(D_{h\bar{h}}^\xi \phi)(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi\right)(x) = \left(\frac{2}{4!} - \xi\right) \phi^{(4)}(x) h^2 + \left(\frac{2}{6!} - \frac{\xi}{6}\right) \phi^{(6)}(x) h^4 + O(h^6).$$

周期境界条件を用い、以上のような空間方向の離散化を行うと、 $\phi_h(t) \in C^{2N}$ についての常微分方程式に帰着される。

$$(E_h) \quad \frac{d\phi_h}{dt} = A_h \phi_h$$

ここで、次のように定義される $2N$ 周期数列 $\{a_j : a_j = a_{j+2N}, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ を用いて、行列 $A_h = (a_{k-j})_{1 \leq j, k \leq 2N}$ と表される。

$$\begin{cases} a_{-2} = -(\beta(1+\lambda)\gamma + \xi\delta), \\ a_{-1} = \left(\frac{1}{2} + \beta(3+4\lambda)\right)\gamma + (1+4\xi)\delta, \\ a_0 = -3\beta(1+2\lambda)\gamma - 2(1+3\xi)\delta, \\ a_1 = \left(-\frac{1}{2} + \beta(1+4\lambda)\right)\gamma + (1+4\xi)\delta, \\ a_2 = -(\beta\lambda\gamma + \xi\delta), \\ a_j = 0, \quad -N < j < -2 \text{ or } 2 < j \leq N. \end{cases}$$

また、 $\gamma = u/h, \delta = K/h^2$ である。

半離散問題 (E_h) に対して、 $\phi_h^n \sim \phi_h(n\tau)$ という近似の元に、時間方向は次のように離散化する。

$$(E_h^n) \quad \phi_h^{n+1} = R_M(\tau A_h) \phi_h^n.$$

ここで、正整数 M に対して $R_M(z) = \sum_{l=0}^M z^l / l!$ と定義した。このような時間方向の離散化法を、Runge-Kutta型公式と呼ぶことにする。

3. 安定性

行列 A_h は、単純巡回行列 (cf.[2]) であるので、ユニタリ行列

$$U = \frac{1}{\sqrt{2N}} (\exp(i\theta_j k))_{1 \leq k, j \leq 2N}$$

を用いて、 $\Lambda = U^* A_h U$,

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2N})$$

と対角化される。ここで、 i は虚数単位であり、 $j = 1, \dots, 2N$ に対して、

$$\begin{cases} \lambda_j = X(\theta_j) + iY(\theta_j), \\ \theta_j = \pi(j-N)/N, \\ X(\theta) = -\delta(1 - \cos \theta) - 2(\xi\delta + \beta\mu\gamma)(1 - \cos \theta)^2, \\ Y(\theta) = \gamma(1 + 2\beta(1 - \cos \theta)) \sin \theta, \end{cases} \quad (2)$$

とおいた。ここで、全離散問題 (E_h^n) の解 ϕ_h^n の離散 Fourier 変換として、 ψ_h^n を、 $\psi_h^n = U^* \phi_h^n$ と定義すると、問題 (E_h^n) は次のように書き換えられる。

$$\psi_h^{n+1} = \Lambda_{R_M} \psi_h^n$$

ただし、 Λ_{R_M} は対角行列であり、

$$\Lambda_{R_M} = \text{diag}(R_M(\tau\lambda_1), \dots, R_M(\tau\lambda_{2N}))$$

と定義する。空間 C^{2N} のノルムを、 $x = (x_1, \dots, x_{2N})^T \in C^{2N}$ に対して、

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2N} |x_j|^2}$$

と定義すると、Parseval の等式

$$|\phi_h^n| = |\psi_h^n|$$

が成り立つ。よって、 L^2 安定条件として、

$$|\phi_h^n| \leq |\phi_h^0|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

を定義すれば、次の条件が必要十分条件となる。

$$|R_M(\tau\lambda_j)| \leq 1, \quad j = 1, \dots, 2N.$$

これは、更に次のように書き換えることができる。

$$\sigma(\tau A_h) \subset S_M \quad (3)$$

ここで、 $\sigma(\tau A_h)$ は行列 τA_h の固有値の集合を表し、 $S_M = \{z \in C : |R_M(z)| \leq 1\}$ と定義する。 S_M を絶対安定領域と呼ぶことにする。(3) を全離散問題 (E_h^n) の L^2 安定条件と呼ぶこともする。

次に、von Neumann 安定条件を定義しておく。ここでの von Neumann 安定条件は、数学的文献 [3] での定義より強い条件を採用する。

定義1 (von Neumann 安定条件)

問題 (E_h^n) が von Neumann 安定であるとは、

$$\tau\sigma(\gamma, \delta) \subset S_M$$

であることをいう¹。ここで、

$$\sigma(\gamma, \delta) = \{z = X(\theta) + iY(\theta) : -\pi < \theta \leq \pi\}.$$

であり、関数 X, Y は (2) 式に定義した。□

定義から明らかなように、 $\sigma(A_h) \subset \sigma(\gamma, \delta)$ なので、定義1の von Neumann 安定条件は、 L^2 安定条件 (3) より強い条件になっている。

Courant 数 c と拡散数 d を次のように定義する。

$$c = \tau\gamma = \frac{\tau u}{h}, \quad d = \tau\delta = \frac{\tau K}{h^2}.$$

これらの量は、物理的な要請とメッシュ幅のみで決まるパラメタである。全離散問題 (E_h^n) は、スキームを特定するパラメタ (β, λ, ξ, M) と、物理的要請とメッシュ幅から決まるパラメタ (c, d) によって一つの計算可能な問題に帰着される。スキームを固定したとき、即ち、パラメタ (β, λ, ξ, M) を一つに固定したとき、そのスキームが von Neumann 安定であるための必要十分な (c, d) の範囲を von Neumann 安定領域と呼ぶことにする。そして、各スキームに対して、von Neumann 安定領域を求めることを、「(von Neumann) 安定領域の特徴付け」と呼ぶことにする。

von Neumann 安定条件を弱めて一般化した次の新しい安定条件の概念を導入する。 \cos の逆関数 \cos^{-1} の値域を $[-\pi, \pi]$ とする。

定義2 (ε 安定条件)

実数 ε を区間 $[0, 2]$ の一つの値に固定する。問題 (E_h^n) が ε 安定であるとは、

$$\tau\sigma_\varepsilon(\gamma, \delta) \subset S_M$$

¹ 複素数の集合 S の複素数倍の集合 τS とは $\{\tau s \in C : s \in S\}$ を意味する。

であることをいう。ここで、

$$\sigma_\varepsilon(\gamma, \delta) = \{z = X(\theta) + iY(\theta) : -\pi < \theta \leq \cos^{-1}(1 - \varepsilon)\}.$$

であり、関数 X, Y は (2) 式に定義した。□

$\varepsilon = 0$ のときの ε 安定条件は von Neumann 安定条件に一致する。この意味で ε 安定条件は von Neumann 安定条件の一般化である。 $\sigma_\varepsilon(\gamma, \delta) \subset \sigma(\gamma, \delta)$ が成立するので、 ε 安定条件は von Neumann 安定条件を弱めている。また、 ε を 0 から大きくしていくとき、単調に $\sigma_\varepsilon(\gamma, \delta)$ は小さくなり、

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow \sigma_{\varepsilon_1}(\gamma, \delta) \supset \sigma_{\varepsilon_2}(\gamma, \delta) \quad (4)$$

が成立する。 $\varepsilon \in [0, 2]$ を固定し、スキームを特定したとき、そのスキームが ε 安定を満足するための必要十分な c - d 平面上の領域を ε 安定領域と呼ぶことにする。性質 (4) から、 ε 安定領域は、 ε を 0 から大きくするとき、単調に広がっていく。即ち、 ε を固定したときの c - d 平面上の安定領域を S_ε と書くとき、

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow S_{\varepsilon_1} \subset S_{\varepsilon_2}$$

が成立する。

ε 安定条件は、 ε の値によってある種のモード θ に制限をつけたときの安定条件である。その制限とは、長波長のモードから順に $\cos^{-1}(1 - \varepsilon)$ に対応するモード θ の手前までを無視したときの安定条件である。長波長モードを無視する意味を以下に述べる。

- 最長波長のモードである定数モード $\theta = 0$ は常に安定である。即ち、 $\theta = 0$ に対応するスペクトル $X(\theta) + iY(\theta)$ は常に絶対安定領域 S_M に含まれる。そして、関数 X, Y はモード θ の連続関数であるので、 θ が 0 から変化して絶対安定領域から飛び出してもそれほど遠くにはいかず、即ち発散するモードであったとしても急激には発散しない。
- Navier-Stokes 方程式などの 2 次非線形項をもつ問題では、長波長モードは短波長モードに移行する。

上の二つのことから、2 次の非線形項をもつ流れのシュミレーションにおいては、長波長が発散するモードであったとしても、その発散は急激ではなく、そして、発散する前に短波長へと移行して行くことが推測される。即ち、 ε 安定条件は、2 次の非線形項をもつ流れのシュミレーションを意識した上での安定条件である。

3.1 Euler 法の場合の安定性

実際の数値計算では、時間方向の離散化に (陽的) Euler 法がよく使われる。そこで、Euler 法に限定して安定性の議論を行う。即ち、時間積分の次数 M を 1 に固定する。次の定理を導くことができる。

定理 1 (Euler 法の場合の von Neumann 安定領域の特徴付け)

$M = 1$ とし、 $\beta > 0, \xi \geq 0$ であるとする。そのとき、次の二つの条件は同値である。

$$(a) \quad \lambda \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \max \left(0, \frac{\beta(1+2\beta) - \xi}{\beta\sqrt{1+4\beta+8\beta^2}} \right).$$

(b) 全離散問題 (E_h^+) が von Neumann 安定条件を満たす必要十分条件が、非負パラメタ (c, d) を用いて次のように書ける。

$$c^2 \leq 2d \leq \frac{1-4\beta\mu c}{\eta}, \quad c \geq 0, d \geq 0, \quad (5)$$

ここで、 $\mu = 2\lambda + 1, \eta = 4\xi + 1$ である。□

定理 1 から得られた結果を図示する。拡散項に 2 次中心差分法 ($\xi = 0$) を用いるとき、移流項に UTOPIA 公式 ($(\beta, \lambda) = (\frac{1}{9}, 0)$) と河村公式 ($(\beta, \lambda) = (\frac{1}{9}, 1)$) を用いた場合は定理 1 の条件 (a) を満足するので (5) 式で von Neumann 安定領域は決定される。そこで、それぞれの von Neumann 安定領域を図 1 と図 2 に示す。(1) 式を見れば分かるように、河村公式は UTOPIA 公式に比して主要項である 4 階微分の係数を 3 倍大きくしている。そのため、河村公式は精度は UTOPIA 公式に劣るが安定性はよいと言われている。しかし、図 1, 図 2 からはその様子が観察されない。
 ε 安定性について次の定理を導くことができる。

定理 2 (Euler 法の場合の ε 安定条件の特徴付け)

$\varepsilon \in [0, 2]$ を一つに固定する。 β, λ, ξ は非負であるとする。全離散問題 (E_h^+) が ε 安定であるための必要十分条件は次のように書ける。

$$\begin{cases} -4\{d + (2\xi d + \beta\mu c)\varepsilon\} + 4\{d + (2\xi d + \beta\mu c)\varepsilon\}^2 \\ \quad + c^2(2 - \varepsilon)(1 + 2\beta\varepsilon)^2 \leq 0, \\ 2d \leq \frac{1-4\beta\mu c}{\eta}, \quad c \geq 0, d \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\mu = 2\lambda + 1, \eta = 4\xi + 1$ である。□

拡散項に 2 次中心差分法 ($\xi = 0$) を用いるとき、移流項に UTOPIA 公式 ($(\beta, \lambda) = (\frac{1}{9}, 0)$) と河村公式 ($(\beta, \lambda) = (\frac{1}{9}, 1)$) を用いた場合は定理 2 の仮定を満足するので (6) 式で ε 安定領域は決定される。そこで、 $\varepsilon = 0.5$ としたときの、それぞれの ε 安定領域を図 3, 図 4 に示す。 c - d 平面上の領域 $\{(c, d) : 0 \leq c \leq 1/2, 0 \leq d \leq \min(c^2/2, 1/2 - c)\}$ を強移流域と呼ぶことにする。河村公式を用いた図 4 は、UTOPIA 公式の図 3 より強移流域で著しく広がっている様子が観察される。このことから、高 Reynolds 数の流れ場を Navier-Stokes 方程式を離散化して計算する場合、河村公式の方が安定に計算できることが予想される。

3.2 移流問題の安定性

移流項の差分公式に注目し、この部分節では、 $K = 0$ の純移流問題を考える。von Neumann 安定条件の特徴付けとして、次の定理を導くことができた。

定理 3 (純移流問題に対する von Neumann 安定条件の特徴付け)

$K = 0, u > 0$ とする。 $\lambda = -\frac{1}{2}$ ($\mu = 0$) に固定する。このとき、次が成立する。

- (1) $M = 1, 2$ のとき、差分問題 (E_h^+) は von Neumann 安定にならない。
- (2) $M = 3, 4$ のとき、差分問題 (E_h^+) が von Neumann 安定なるための必要十分条件は、次が成立することである。

$$\tau \leq \frac{cM}{\sigma_{\max}(\beta)}. \quad (7)$$

ここで、

$$\sigma_{\max}(\beta) = \begin{cases} \gamma\sqrt{f_\beta(p\beta)}, & \beta \geq -\frac{1}{2}, \\ \gamma\sqrt{f_\beta(q\beta)}, & \beta < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_\beta(x) = (1 + 2\beta x)^2 x(2 - x), \\ p\beta = \frac{-6\beta + 1 + \sqrt{36\beta^2 + 4\beta + 1}}{2}, \\ q\beta = \frac{-6\beta + 1 - \sqrt{36\beta^2 + 4\beta + 1}}{2}, \\ \begin{cases} c_3 = \sqrt{3}, \\ c_4 = 2\sqrt{2}. \end{cases} \quad \square \end{cases}$$

$(\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$ のとき, 移流差分公式は 4 次中心差分公式になる. このとき, 定理 3 を適用できる. $M = 1, 2$ では, von Neumann 安定にはならないが, $M = 3, 4$ のときは, (7) 式を満足すれば von Neumann 安定である. 特に, $M = 4$ の古典的 Runge-Kutta 法を用いたとき, $K = 0$ の純移流差分問題 (E_h^r) が von Neumann 安定であるための最大 Courant 数は, 定理 3 の (7) 式から,

$$c \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3+8\sqrt{6}}{12}}} = 2.0612023 \dots$$

と計算される. 即ち, 移流差分公式を 4 次中心差分公式とし, 時間積分法を古典的 Runge-Kutta 法を用いるとき, 純移流問題 (E_h^r) は, Courant 数が 2 を越えて von Neumann 安定に解けることが分かった.

4. 誤差解析

領域 $\Omega = [0, L]$ を 1 次元トーラスとする. $j = 0, 1, 2, \dots, 2N$ に対して, jh を中心にする幅 h の定義関数を $w_j(x)$ と書くことにする ($w_0 = w_{2N}$).

$$w_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in ((j-1/2)h, (j+1/2)h), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$j = 1, 2, \dots, 2N$. ただし, w_{2N} を正確に書けば次のようになる.

$$w_{2N}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, h/2) \cup (L-h/2, L], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

そして, $w_j, j = 1, 2, \dots, 2N$ によって張られる関数空間 $X_h \subset L^2(\Omega)$ を考える. 連続関数の空間 $C(\Omega)$ から X_h への射影 P_h と X_h ノルム $\|\cdot\|_{X_h}$ を, C^{2N} から X_h への写像 Q_h を, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} P_h \psi &= \sum_{j=1}^{2N} \psi(jh)w_j, & \psi &\in C(\Omega). \\ \|\psi\|_{X_h} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{2N} |\psi(jh)|^2 h}, & \psi &\in X_h. \\ Q_h \psi &= \sum_{j=1}^{2N} \psi_j w_j, & \psi &= (\psi_1, \dots, \psi_{2N})^T \in C^{2N}. \end{aligned}$$

$A_h = Q_h A_h Q_h^{-1} : X_h \rightarrow X_h$ とおく. この A_h を用いて, 全離散問題 (E_h^r) は X_h 上の元を求める問題に書き直されるので, この問題を改めて (E_h^r) と書くことにする.

$$(E_h^r) \begin{cases} \phi_h^{n+1} = R_M(\tau A_h) \phi_h^n, \\ \phi_h^0 = P_h \phi_0. \end{cases}$$

ここで, 行列 A_h と X_h 上の作用素 \mathcal{A}_h は相似な関係にあるので, 前節での安定性の議論は, L^2 安定条件として,

$$\|\phi_h^n\|_{X_h} \leq \|\phi_h^0\|_{X_h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

と定義するところから出発してほぼそのまま成り立つ.

定理 4

全離散問題 (E_h^r) が L^2 安定条件 (8) を満足するとする. 初期値を $\phi_0 \in H^m(M, K)(\Omega)$,

$$m(M, K) = \begin{cases} \max(M+1, 5), & K = 0, \\ \max(2M+1, 6), & K > 0. \end{cases}$$

というようにとるとき, 条件 $\phi_h^0 = P_h \phi_0$ を満足する全離散問題の解

ϕ_h^n に対して, 次のような誤差評価ができる. $n\tau \leq T$ とし,

$$\begin{aligned} \|P_h \phi(n\tau) - \phi_h^n\|_{X_h} &\leq C'T \left[\tau^M \sum_{k=0}^{M+1} |u|^{k-1} K^{M-k+1} \|\phi_0^{(2M-k+2)}\|_{L^2} \right. \\ &+ |u| \{ \gamma_1 \|\phi_0^{(3)}\|_{L^2} h^2 + (\frac{\gamma_1}{\tau} + \gamma_2) \|\phi_0^{(4)}\|_{L^2} h^3 + \frac{\gamma_2}{\tau} \|\phi_0^{(5)}\|_{L^2} h^4 \} \\ &+ K \{ \gamma_3 \|\phi_0^{(4)}\|_{L^2} h^2 + \frac{\gamma_3}{\tau} \|\phi_0^{(5)}\|_{L^2} h^3 \} \\ &\left. + |u| h^4 \sum_{j=1}^5 c_{5,j} |\alpha_j^n| \|\phi_0^{(5)}\|_{L^2} + K h^4 \sum_{j=1}^5 c_{6,j} |\alpha_j^K| \|\phi_0^{(6)}\|_{L^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \left| \frac{1}{3!} - \beta \right|, \\ \gamma_2 = \left| \beta \left(\frac{1}{2} + \lambda \right) \right|, \\ \gamma_3 = \left| \frac{2}{4!} - \xi \right|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1^n = -\beta(1+\lambda), & \alpha_1^K = -\xi, \\ \alpha_2^n = \frac{1}{2} + \beta(3+4\lambda), & \alpha_2^K = 1+4\xi, \\ \alpha_3^n = 0, & \alpha_3^K = 0, \\ \alpha_4^n = -\frac{1}{2} + \beta(1+4\lambda), & \alpha_4^K = 1+4\xi, \\ \alpha_5^n = -\beta\lambda, & \alpha_5^K = -\xi. \end{cases}$$

$$c_{n,j} = \sqrt{\frac{1}{2n-1} \frac{|j-3|^n}{(n-1)!}}. \quad \square$$

5. 数値実験

5.1 安定領域の図示

数値的な手法により, 安定領域を近似的に求めて図示することを考える. (γ_1, δ_1) が, $\gamma_1^2 + \delta_1^2 = 1$ かつ $\gamma_1, \delta_1 \geq 0$ を満足するように取られているとする. このとき, 次のことを仮定する.

仮定 1

次の条件を満たす有限な非負の値 τ_1 を決定できる.

$$\tau_1 = \max\{ \tau : \tau\sigma(\gamma_1, \delta_1) \subset S_M, \tau \geq 0 \}$$

であり, かつ

$$\tau\sigma(\gamma_1, \delta_1) \subset S_M, \quad \forall \tau \in [0, \tau_1]. \quad \square$$

スキームが固定され, 物理的な要請 (u, K) と空間刻み幅 h が与えられている時を想定する. このとき, (γ, δ) の値は一意に決まっている. $\rho = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$ とおく. すると, ある (γ_1, δ_1) が取れて,

$$(\gamma, \delta) = \rho(\gamma_1, \delta_1), \quad \rho > 0.$$

この (γ_1, δ_1) に対して, 仮定 1 が成立するとし, τ_1 が決定できたとする. このとき,

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_1}{\rho}$$

ととれば, 全離散問題 (E_h^r) が von Neumann 安定に解けるための最大時間刻み幅となる. 実際, $\tau\sigma(\gamma, \delta) = (\tau\rho)\sigma(\gamma_1, \delta_1)$.

上述の原理を用い, 次のように安定限界を求める. $\sigma_h(\gamma_1, \delta_1)$ を次のように定義する.

$$\sigma_h(\gamma_1, \delta_1) = \{ \lambda_j = X(\theta_j; \gamma_1, \delta_1) + iY(\theta_j; \gamma_1, \delta_1) : j = 1, 2, \dots, 2N \}.$$

即ち, $\sigma_h(\gamma_1, \delta_1)$ は, $\sigma(\mathcal{A}_h)$ に一致する ($u = \gamma_1 h, K = \delta_1 h^2, h = \frac{L}{2N}$). 問題 (\mathcal{T}_h) を次のようにおく.

$$(\mathcal{T}_h) \quad \tau_1(h) = \max\{ \tau : \tau\sigma_h(\gamma_1, \delta_1) \subset S_M, \tau \geq 0 \}.$$

集合 $\{\{\theta_j : 1 \leq j \leq 2N\}_{h=\frac{1}{2N}} : N = 1, 2, \dots\}$ は、トーラス $(-\pi, \pi]$ の稠密集合であるので、次のことが期待できる。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_1(h) = \tau_1.$$

計算の都合上、次の同値な問題 (M_h) に変換する。

$$(M_h) \quad \max\{\tau = \sqrt{c^2 + d^2} : \sigma_h(c, d) \subset S_M, \frac{c}{d} = P, c \geq 0, d \geq 0\}.$$

問題 (M_h) と (T_h) の対応関係は次のようになる。 $c = \tau\gamma_1, d = \tau\delta_1, \tau\sigma_h(\gamma_1, \delta_1) = \sigma_h(c, d)$ 。ここで、 $P = \frac{c}{d} = \frac{\gamma_1}{\delta_1}$ はセル Péclet 数と呼ばれている。

$N = 50$ とする。 $\tau_1(h)$ を求めるために、変数 τ についての二分法を用いた。言い替えれば、行列 A_h の 100 個の固有値

$$\lambda_j = X(\theta_j; c, d) + iY(\theta_j; c, d), \quad j = 1, 2, \dots, 100,$$

が絶対安定領域 S_M に含まれるような τ の限界を二分法で追いつめて求めた。

時間方向の精度を $M = 4$ とし、拡散差分公式を 2 次中心差分公式に固定して、移流差分公式を、河村公式 $((\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, 1))$ 、UTOPIA 公式 $((\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, 0))$ 、4 次中心差分公式 $((\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}))$ の 3 種類の近似安定領域を図 5 に示す。図 5 から分かる特徴的なこととして、 $M = 4$ の古典的 Runge-Kutta 公式を用いたとき、Taylor 展開の精度 (1) のよいものほど安定領域が広がっている。

5.2 精度検証

純移流問題では、連続問題 (E) の解析解 ϕ が求められるので、ここでは、 $K = 0$ の純移流問題を用いて精度検証計算を行う。流速は $u = 1$ とし、領域の長さ $L = 2\pi$ とする。時間方向の離散化に古典的 Runge-Kutta 法 ($M = 4$) を用い、空間方向の移流差分公式には 4 次中心差分公式 $((\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}))$ を用いる。このスキームを 4 次-4 次スキームと呼ぶことにする。そして、時間刻み幅 τ と空間刻み幅 h を同じスピードで 0 に近づける。即ち、Courant 数 c を一定とする。このとき、定理 4 から、安定条件を満たす範囲では、4 次-4 次スキームは 4 次のオーダーで次の誤差 e が 0 に収束するはずである。

$$e = \|P_h \phi(T) - \phi_h^n\|_{X_h}$$

Courant 数 c は 2 に固定する。このとき、定理 3 から、4 次-4 次スキームは von Neumann 安定である。収束状況を見るために、 $N = 8, 16, \dots, 1024$ ($2^j, j = 3, 4, \dots, 10$) と分割を細かくし、

$$h = \frac{L}{2N}, \quad \tau = \frac{ch}{u}$$

ととる。精度検証時刻は、一周して戻った時刻で、 $T = L/u$ とする。

初期値を次の 4 通りにとり、誤差の収束の様子を両対数グラフにプロットした図を、それぞれ図 6、図 7、図 8、図 9 に示す。

(a) $C^\infty(\Omega) \ni \phi_0(x) = \sin x.$

(b) $C^6(\Omega) \ni \phi_0(x) = \begin{cases} x^6(1-x)^6, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < L. \end{cases}$

(c) $C(\Omega) \ni \phi_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1-x, & 0.5 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < L. \end{cases}$

(d) $C(\Omega) \ni \phi_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < L. \end{cases}$

これらの四つの図から、定理 4 の主張の通りの滑らかさをもつ初期値 ϕ_0 に対しては、ほぼ 4 次の精度がでていることが観察される。

6. まとめ

- 時間方向に Euler 法を用いた場合に、von Neumann 安定条件の特徴付けとして、定理 1 を報告した。
- 新しい安定性の概念として、 ϵ 安定性を導入した。これを用いて、2 次の非線形項をもつ流れの計算においては、河村公式は、UTOPIA 公式に比して、安定性をよくすることを予測される結果を示した。
- 純移流問題において、4 次-4 次スキームが、von Neumann 安定である Courant 数限界は 2 を越えることを解析的に示した。
- 移流拡散差分問題 (E_h^r) の誤差評価として、定理 4 を報告し、純移流問題の場合に、4 次-4 次スキームを用いて数値的な確かめ計算を行った。定理 4 の主張に整合する結果であった。

参考文献

[1] Nagoya, S., *Stability Analysis and Error Estimate for Difference Problems Derived from a Spatially One Dimensional Convective Diffusion Equation*. PhD Thesis, The University of Electro-Communications, Tokyo (1996).

[2] R.S. Varga (渋谷政昭 訳), 計算機による大型行列の反復解法, サイエンス社, 1972.

[3] Richtmyer, R.D. and Morton, K.W., *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Second Edition, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1967.

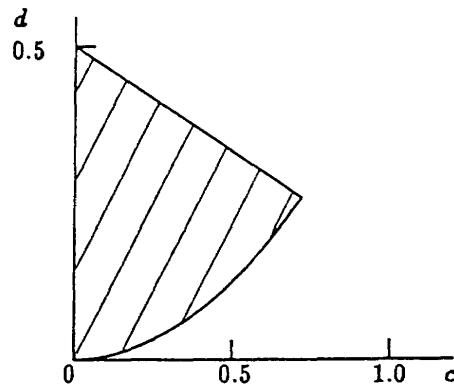


図 1 UTOPIA スキームの von Neumann 安定領域

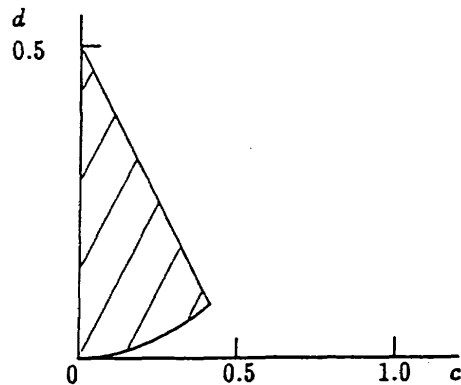


図 2 河村スキームの von Neumann 安定領域

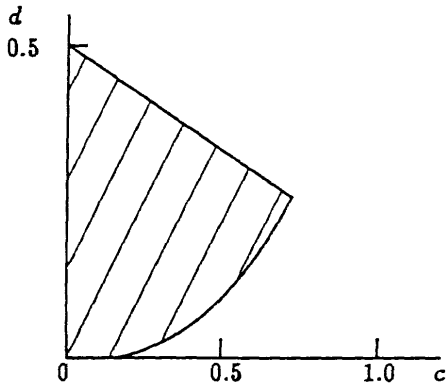


図3 UTOPIA スキームの ε 安定領域 ($\varepsilon = 0.5$)

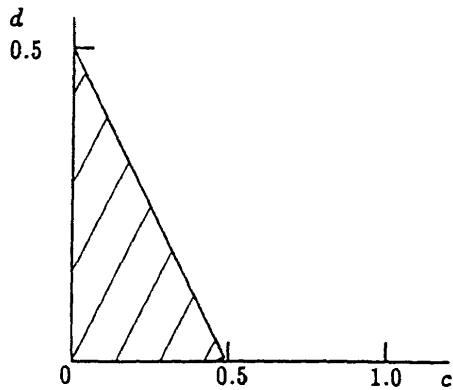


図4 河村スキームの ε 安定領域 ($\varepsilon = 0.5$)

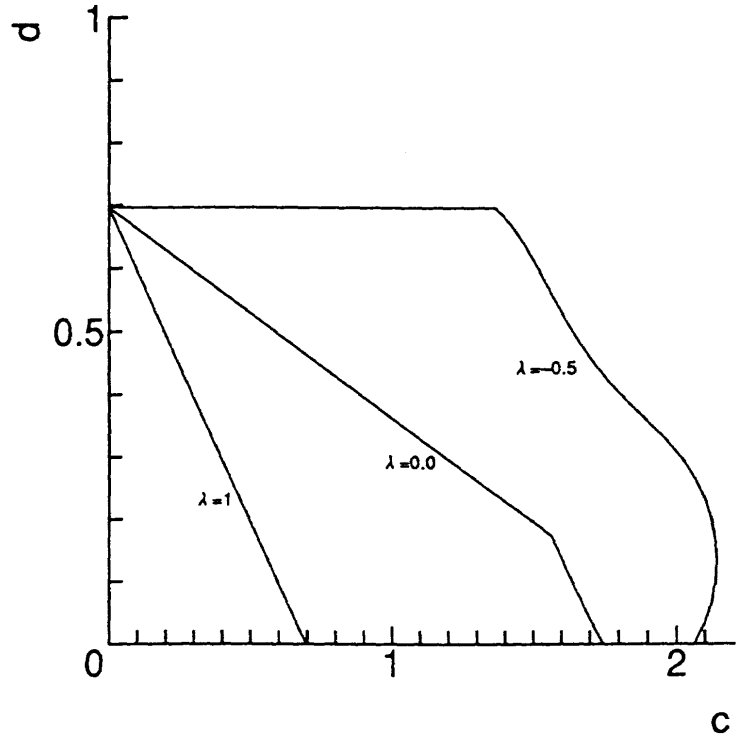


図5 Runge-Kutta 法の von Neumann 安定領域 ($M = 4$)

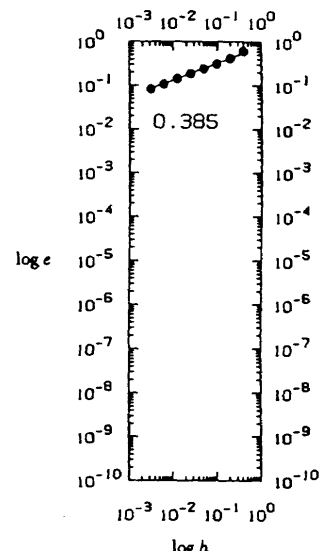
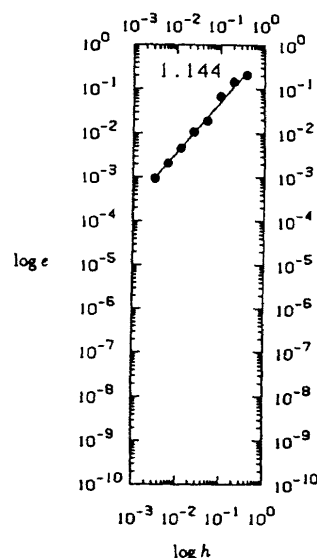
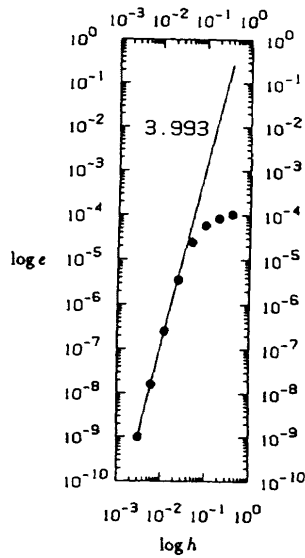
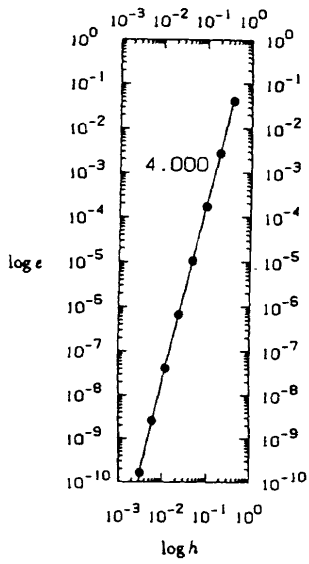


図6 誤差の収束率 ($\phi_0 \in C^\infty(\Omega)$) 図7 誤差の収束率 ($\phi_0 \in C^5(\Omega)$) 図8 誤差の収束率 ($\phi_0 \in C(\Omega)$) 図9 誤差の収束率 ($\phi_0 \notin C(\Omega)$)

交互境界条件を用いた領域分割法

福原 誠* 竹田 辰興*

A Domain Decomposition Method Using Alternating Boundary Conditions

FUKUHARA Makoto and TAKEDA Tatsuoki

Abstract

In domain decomposition methods, imposing what boundary condition on interior boundary is one question. In this paper we propose a new method which we named a domain decomposition method using alternating boundary condition. The method use Dirichlet condition and Neumann condition alternatively on interior boundary, so that renewal of boundary condition in an iteration become easy.

1 概要

偏微分方程式の境界値問題の高精度の数値解を求める方法として、領域分割法 (DDM = Domain Decomposition Method) というものがある。一般に高精度の計算を行うには、格子間隔を小さくすればよいが、自由度が大きくなるので、計算時間が長くなる。DDM では領域を分割して、各領域毎に (並列に) 解くことにより、自由度を小さくして、計算時間の短縮を目指す。その際、各領域における解が元の問題の解になるためには、領域全体でうまくつながる (連続になる) ようにすることが必要であり、そのために内部境界 (分割によってできた人工的な境界) における境界条件の選び方が一つの問題となる。ここで紹介する交互境界条件は、ディリクレ条件とノイマン条件を交互に用いることにより、反復における境界条件の更新を容易にしたものである。

2 モデル問題

楕円型偏微分方程式の代表として、次のようなポアソン方程式の境界値問題を考える。

$$(1) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g_{GD} & \text{on } \Gamma_{GD} \text{ (Global Dirichlet)}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_{GN} & \text{on } \Gamma_{GN} \text{ (Global Neumann)}. \end{cases}$$

ただし Ω は R^N の有界領域であり、 Ω の境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は $\Gamma = \Gamma_{GD} \cup \Gamma_{GN}$, $\Gamma_{GD} \cap \Gamma_{GN} = \emptyset$ と分解されているものとする。また、 Ω 上の関数 f と Γ_{GD} , Γ_{GN} 上の関数 g_{GD} , g_{GN} は既知であり、 Ω 上の未知関数 u を求める問題とする。

* 電気通信大学 情報工学科

Ω を全体領域 (global domain) と呼ぶ。また、この方程式の十分なめらかな解 \bar{u} が一意に存在すると仮定する。

3 領域分割

全体領域 Ω を、互いに重ならない N_{dom} 個の小領域 $\Omega_1, \dots, \Omega_{N_{\text{dom}}}$ (local domains と呼ぶ) に分割する:

$$(2) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_{\text{dom}}} \bar{\Omega}_i, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

ただし $\bar{\Omega}$ は Ω の閉包を表す。 n_i で Ω_i の外向き単位法線ベクトルを表す。 n_{ij} を内部境界 $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ において、 Ω_i から Ω_j に向かう向きの単位法線ベクトルとする。ただし、定義できる場合に限る。

$$\begin{aligned} B_i &= \{j; j \neq i, n_{ij} \text{ が定義できる}\}, \\ B &= \{(i, j); j \in B_i\} \end{aligned}$$

とおく。内部境界全体を Γ_{INT} で表す。これを2つの部分 $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ に分ける。すなわち、

$$(3) \quad \Gamma_{INT} := \left(\bigcup_{i=1}^{N_{\text{dom}}} \partial\Omega_i \right) \setminus \Gamma \quad (\text{interior boundary, interface}),$$

$$(4) \quad \Gamma_{INT} = \Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta, \quad \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \emptyset.$$

以後 Γ_α 上の関数 g_α , Γ_β 上の関数 g_β を一つ固定して考える。また、 $w_{ij} + w_{ji} = 1$ をみたす定数の組 $\{w_{ij}\}_{(i,j) \in B}$ を一つとり、固定する。

[注1] このように、隣り合った領域が共通部分を持たない方法を「重なりのない領域分割法 (non-overlapping DDM)」という。隣り合った領域に共通部分を持たせる方法もちろんある。

[注 2] 実際に計算する時、解 \tilde{u} についての情報がない時は $g_\alpha = g_\beta = 0$ とする。ある程度 \tilde{u} についてわかっている時は、 g_α は $\tilde{u}|_{\Gamma_\alpha}$ に近いもの、 g_β は $\pm \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}|_{\Gamma_\beta}$ (符号はうまく決める) に近いものとする。

[注 3] $\bigcup_{i=1}^{N_{\text{dom}}} \partial\Omega_i = \Gamma_{GD} \cup \Gamma_{GN} \cup \Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$ (disjoint) となる。

[注 4] 任意の i, j に対して $w_{ij} = 1/2$ とするのが簡単である。

4 関数列

$\{u^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ を次の漸化式で定まるものとする。ただし $u^{(k)} = \{u_i^{(k)}\}_{i=1}^{N_{\text{dom}}}$ であって、各成分 $u_i^{(k)}$ は Ω_i 上の関数であるものとする。

1. $u^{(0)}$

$i = 1, \dots, N_{\text{dom}}$ に対して、次の方程式の解を $u_i^{(0)}$ とする。

$$(5) \begin{cases} -\Delta u_i^{(0)} = f|_{\Omega_i} & \text{in } \Omega_i \\ u_i^{(0)} = g_{GD}|_{\partial\Omega_i} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_{GD} \\ \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial n_i} = g_{GN}|_{\partial\Omega_i} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_{GN} \\ u_i^{(0)} = g_\alpha|_{\partial\Omega_i} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\alpha \\ \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial n_{ij}} = (-1)^{j-i} g_\beta|_{\partial\Omega_i} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\beta \end{cases}$$

2. $\phi_\alpha : u^{(2k)} \mapsto u^{(2k+1)}$

$i = 1, \dots, N_{\text{dom}}$ に対して、次の方程式の解を $u_i^{(2k+1)}$ とする。

$$(6) \begin{cases} -\Delta u_i^{(2k+1)} = f|_{\Omega_i} & \text{in } \Omega_i \\ u_i^{(2k+1)} = g_{GD}|_{\partial\Omega_i} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_{GD} \\ \frac{\partial u_i^{(2k+1)}}{\partial n_i} = g_{GN}|_{\partial\Omega_i} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_{GN} \\ \frac{\partial u_i^{(2k+1)}}{\partial n_{ij}} = w_{ij} \frac{\partial u_j^{(2k)}}{\partial n_{ij}} + (1 - w_{ij}) \frac{\partial u_j^{(2k)}}{\partial n_{ij}} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\alpha \cap \partial\Omega_j \ (j \in B_i) \\ u_i^{(2k+1)} = w_{ij} u_j^{(2k)} + (1 - w_{ij}) u_j^{(2k)} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\beta \cap \partial\Omega_j \ (j \in B_i) \end{cases}$$

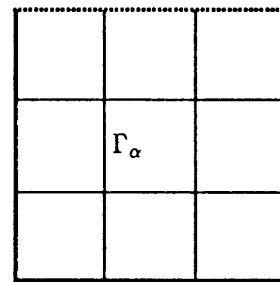
3. $\phi_\beta : u^{(2k+1)} \mapsto u^{(2k+2)}$

$i = 1, \dots, N_{\text{dom}}$ に対して、次の方程式の解を $u_i^{(2k+2)}$ とする。

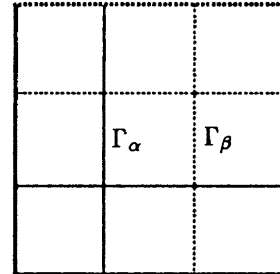
$$(7) \begin{cases} -\Delta u_i^{(2k+2)} = f|_{\Omega_i} & \text{in } \Omega_i \\ u_i^{(2k+2)} = g_{GD}|_{\partial\Omega_i} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_{GD} \\ \frac{\partial u_i^{(2k+2)}}{\partial n_i} = g_{GN}|_{\partial\Omega_i} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_{GN} \\ u_i^{(2k+2)} = w_{ij} u_j^{(2k+1)} + (1 - w_{ij}) u_j^{(2k+1)} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\alpha \cap \partial\Omega_j \ (j \in B_i) \\ \frac{\partial u_i^{(2k+2)}}{\partial n_{ij}} = w_{ij} \frac{\partial u_j^{(2k+1)}}{\partial n_{ij}} + (1 - w_{ij}) \frac{\partial u_j^{(2k+1)}}{\partial n_{ij}} & \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\beta \cap \partial\Omega_j \ (j \in B_i) \end{cases}$$

これは Γ_α 上で、 ϕ_α では $u^{(2k)}$ の Ω_i におけるノイマンデータと Ω_j におけるノイマンデータの (重み付きの) 平均値を新たなノイマン条件として $u^{(2k+1)}$ を求め、次に ϕ_β では今求めた $u^{(2k+1)}$ のディリクレデータの平均値を新たにディリクレ条件として $u^{(2k+2)}$ を求めるものである。また、 Γ_β では上の文章におけるディリクレとノイマンを逆にしたものになっている。

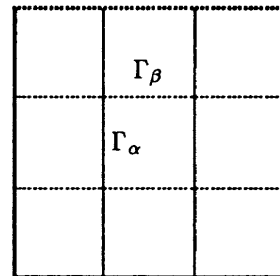
上に出てきた写像は well-defined, すなわち上の方程式の解が一意に存在すると仮定する。たとえば領域を基盤状に分割する場合、図 1 のように各小領域の境界が (内部では) 必ず Γ_α と Γ_β の両方と共通部分を持つようにしなければならない。これは、ノイマン条件だけでは解が一意にならないからである。



不可



太破線上でディリクレ条件なら可



可

太実線上ではディリクレ条件、太破線上ではディリクレ条件またはノイマン条件を課す。細実線で Γ_α 、細破線で Γ_β を表す。

図 1: 領域分割の例

5 関数列の性質

$\bar{u} := \{\bar{u}|_{\Omega_i}\}$ とおく (\bar{u} は (1) の解).

1. $\phi_E \bar{u} = \phi_O \bar{u} = \bar{u}$ が成り立つ.
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}^{(k)} = \bar{u}$ がある条件の下で (適当なノルムを用いて) 成り立つことが予想される.
3. w_{ij} の選び方によっては収束しないこともありうる.
4. $u^{(k)}$ を求める時, $u^{(k-1)}$ は境界値 (ディリクレデータまたはノイマンデータ) だけ使っている.
5. 各ステップでは, Ω_i と Ω_j の問題は独立である. すなわち, 同時に解くことが可能である.
6. $v^{(k)} := u^{(k)} - \bar{u}$ とおくと, $v^{(k)}$ の各成分 $v_i^{(k)}$ は次の式を満たす. 特に調和関数である.

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta v_i^{(k)} = 0 \quad \text{in } \Omega_i \\ v_i^{(k)} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_{GD} \\ \frac{\partial v_i^{(k)}}{\partial n_i} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_{GN} \\ v_i^{(2k+2)} = w_{ij} v_i^{(2k+1)} + (1 - w_{ij}) v_j^{(2k+1)} \\ \quad \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\alpha \cap \partial\Omega_j \quad (j \in B_i) \\ \frac{\partial v_i^{(2k+2)}}{\partial n_{ij}} = w_{ij} \frac{\partial v_i^{(2k+1)}}{\partial n_{ij}} + (1 - w_{ij}) \frac{\partial v_j^{(2k+1)}}{\partial n_{ij}} \\ \quad \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\beta \cap \partial\Omega_j \quad (j \in B_i) \\ \frac{\partial v_i^{(2k+1)}}{\partial n_{ij}} = w_{ij} \frac{\partial v_i^{(2k)}}{\partial n_{ij}} + (1 - w_{ij}) \frac{\partial v_j^{(2k)}}{\partial n_{ij}} \\ \quad \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\alpha \cap \partial\Omega_j \quad (j \in B_i) \\ v_i^{(2k+1)} = w_{ij} v_i^{(2k)} + (1 - w_{ij}) v_j^{(2k)} \\ \quad \text{on } \partial\Omega_i \cap \Gamma_\beta \cap \partial\Omega_j \quad (j \in B_i) \end{array} \right.$$

6 1次元2領域の場合

$N = 1, N_{\text{dom}} = 2$ という簡単な次の場合を考える:

$$(9) \quad \Omega = (0, 1), \Omega_1 = (0, a), \Omega_2 = (a, 1),$$

$$(10) \quad \begin{cases} -v''(x) = 0 & x \in (0, 1), \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases}$$

この問題の解は $v(x) \equiv 0$ であり, この問題に今回の領域分割法を適用すると, $v^{(2k)}(a) = c$ の時, $v^{(2k+2)}(a) = c(w - a)(w - (1 - a))/(a(1 - a))$ となる. したがって $p = p(w, a)$ を

$$(11) \quad p(w, a) := \frac{(w - a)(w - (1 - a))}{a(1 - a)}$$

とおくと, $v^{(2k)}(a) = p^k v^{(0)}$ となる. よって, 収束するための条件は $|p| < 1$ となる. $0 < a < 1, 0 < w < 1$ の範囲で考えると, $|p| < 1$ となる必要十分条件は

$$\frac{1 - \sqrt{w^2 + (1 - w)^2}}{2} < a < \frac{1 + \sqrt{w^2 + (1 - w)^2}}{2}$$

となる. 特に $w = 1/2$ の時は

$$(12) \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{4} < a < \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

であり, 具体的な値はおよそ $0.146 < a < 0.854$ となる. これは, 2つの小領域の大きさがそれほど変わらないことが収束するための必要十分条件であることを示している. 逆に a を固定して考えると, 収束が最も速い w は $p = 0$ となる場合であり, (11) 式より $w = a$ または $w = 1 - a$ の時である.

7 計算例

次の問題に対して数値実験を行った.

$$(13) \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (\text{単位正方形})$$

$$(14) \quad \begin{cases} -\Delta u(x, y) = 1 & ((x, y) \in \Omega), \\ u(x, y) = 0 & (x = 0 \text{ or } y = 0), \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0 & (x = 1 \text{ or } y = 1). \end{cases}$$

領域分割は $N_{\text{dom}} = 3$ とし, 次のようにした (図2参照).

$$(15) \quad \Omega_i = \{(x, y) \in \Omega; (i - 1)/3 < x < i/3\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(16) \quad \Gamma_\alpha = \{(x, y) \in \Omega; x = 1/3\}, \quad g_\alpha = 0,$$

$$(17) \quad \Gamma_\beta = \{(x, y) \in \Omega; x = 2/3\}, \quad g_\beta = 0,$$

$$(18) \quad w_{12} = w_{21} = w_{23} = w_{32} = 1/2.$$

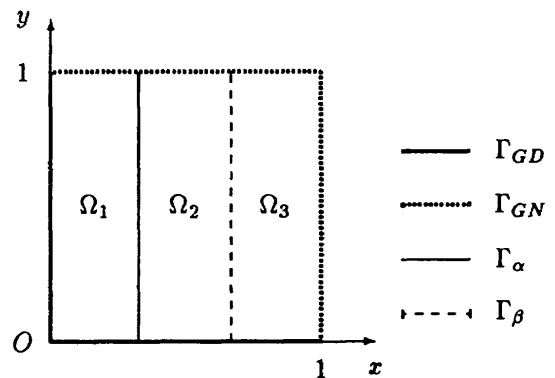


図2: Ω の領域分割

離散化には有限要素法を用いた. 各小領域 Ω_i をそれぞれ 5×15 個の要素に分割し, Q_1 要素 (双一次要素) を用いた. ノイマンデータは, 領域積分になおして計算した.

この時,

$$e(k) := \max_{i=1,2} \{ \|u_i^{(k)} - u_{i+1}^{(k)}\|_{L^\infty(\Gamma_{INT})} \}$$

と k との関係を表対数グラフにしたのが図3である.

k が偶数の場合と奇数の場合で線を分けているが, これは k が偶数の時は Γ_α 上では両側の値が一致するので, 実際には $e(k)$ は Γ_β 上での差の最大値であり, 逆に k が奇数の時には $e(k)$ は Γ_α 上での差の最大値であるからである.

また, $v^{(0)}$ から $u^{(5)}$ までの解の様子を図示したのがその次の図である.

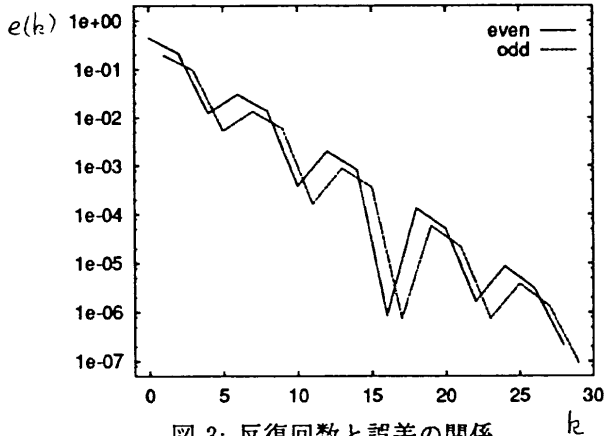
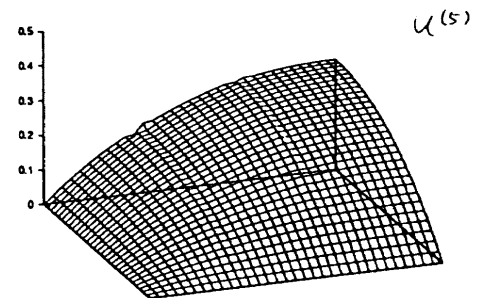
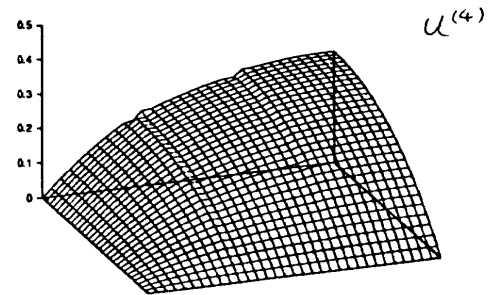
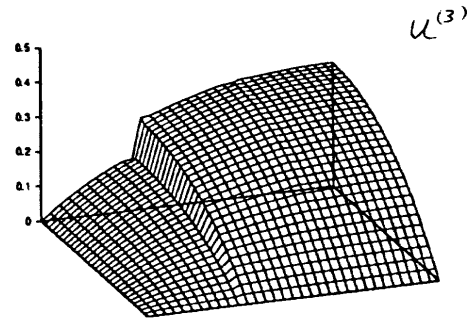
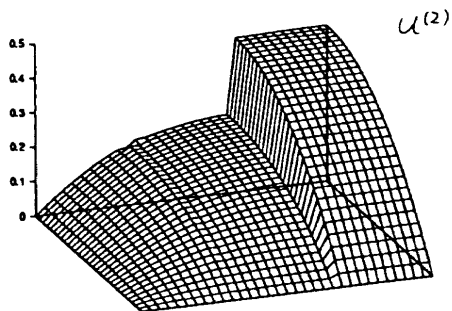
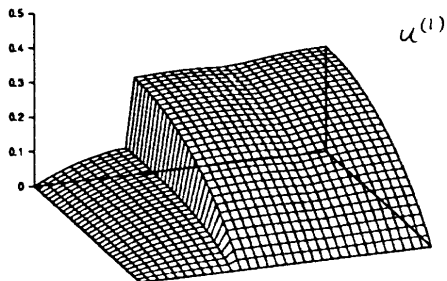
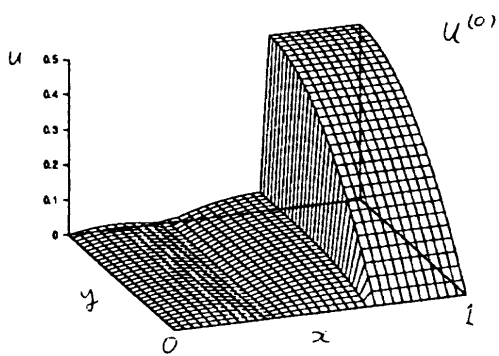


図 3: 反復回数と誤差の関係



8 まとめ

今回提案した方法は、単純であって、いろいろな問題に適用できると思われる。ただし、この方法の正当性や有用性については未知であり、たとえば

1. 連続問題に対する理論の構成
2. 離散化した問題に対する理論の構成
3. 領域数や要素数を増やしたときの収束の様子と計算時間の短縮効果

が当面の課題である。

参考文献

- [1] 菊地文雄, 有限要素法の数理, 1994, 培風館.
- [2] A. SUZUKI, Implementation of Domain Decomposition Methods on Parallel Computer ADENART, Proceeding of Parallel CFD '94, Elsevier Science.

4 因子分解による 3 次元圧縮性流れの陰解法

藤井孝藏*

**FOUR-FACTORED IMPLICIT TIME INTEGRATION SCHEME
FOR COMPRESSIBLE FLOW SIMULATIONS**

by

Kozo Fujii*

ABSTRACT

A new implicit time integration scheme is proposed based on the two-factored relaxation-type scheme. By approximating the positive and negative flux Jacobian matrices in the streamwise direction similarly to the LU-SGS scheme, both the implicit factors are diagonalized by the eigenmatrices for the other two directions. The SGS factorization used in the LU-ADI scheme is next adopted. The resultant scheme has four factors, each of which consists of a simple scalar sweep. The scheme is called FF-SGS (Four-Factored Symmetric Gauss Seidel) scheme. The implicit operations in the present scheme differs slightly from those of the LU-ADI scheme and therefore can be easily developed from the existing codes. Several computations are carried out and the results show the present scheme's applicability and the efficiency. For the simulations where most of the flow field is supersonic, local iterations at each streamwise station make the present scheme much more efficient. The results indicate the present FF-SGS scheme can be a versatile tool for a wide variety of the flow fields.

1. はじめに

圧縮性流れに対する効率的な陰解法は今でも大きな課題である。現在最も効率的であると考えられている時間積分法は LU-SGS 法[1]と LU-ADI 法[2]であろう。LU-SGS 法は流束ジャコビアン行列を近似化することで行列反転をスカラーの反転に簡略化したもの、LU-ADI 法は対角化と流束分離によって行列反転をスカラーの反転と行列積演算に簡略化したものである。LU-SGS 法はベクトル化に工夫が必要であるが演算量が少なく、LU-ADI 法はベクトル化は自然にできるが、LU-SGS に比べると演算量が多いという特徴がある。

高速流れにおいては、流れの大半の部分が超音速で

ある場合も少なくない。このような領域に対しては時間方向積分ではなくいわゆる空間前進型の積分が利用できる。また、亜音速領域を含む場合でも局所的な繰り返しを利用することで効率的に解を得ることがわかっている。これらは relaxation タイプのコードと呼ばれ、1980 年代中期から後期にかけて多くの研究がなされている[3-6]。これらの手法は、流れが超音速に支配されている場合には繰り返し数が激減できるため効率が良いが、亜音速や遷音速流れにおいては 1 つの繰り返しの要する演算が多いため逆に計算時間がかかるという欠点を持つ。すなわち、上記 2 つの手法に比べて演算自体が多いため一般の流れに対しては効率が悪いことになる。

ここではこれら relaxation タイプのプログラムを効率化する工夫をすることで総ての流れ領域で効率的な手法を考えてみる。以下に示すように得られるスキームは FF-SGS 法と呼ばれ超音速流れについては LU-ADI や LU-SGS よりも圧倒的な効率で定常解が得られると同時に亜音速流れにおいてもより効率的に定常解を得ることが出来る。以下に計算法の概要と実際に流れ計算に適用した結果について述べる。

2. 定式化

2.1 SS-SGS 法の導出

Relaxation タイプのスキームの代表的なものは Walters[4]や Newsome ら[5]のものである。Steger らによる 2 因子分解法[7]は一般の時間積分法として定義されており relaxation 法を意識したものではなかったが、実はそのスキームの構造は Newsome らの方法と非常に似ている。ここではまず Steger らによる 2 因子分解法からスタートする。2 因子分解法は

$$(I + \Delta t \delta_{\xi}^b \hat{A}^+ + \Delta t \delta_{\xi}^c \hat{C})(I + \Delta t \delta_{\xi}^f \hat{A}^- + \Delta t \delta_{\eta} \hat{B}) \Delta \hat{Q}^n = -\Delta t \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right)^n \quad (1)$$

と書ける。このスキームでは陰解法部分においてある方向 ξ の流束ジャコビアン行列のみを Flux Vector Splitting によって土に分離し、他の方向については中心差分を利用する。実際の演算では第 1 番目の因子は ξ 方向の前進解法となる。すなわち、 ξ 方向のインデックス j の位置では ξ による後退差分から生ずる $j-1$ や $j-2$ の項はすでに計算できているのでこれを右辺に移してやるとその結果左辺は ζ 微分の差分表示から得られる項に j の対角成分のみが加わったものとなり、通常の ADI 型のブロック 3 重対角方程式反転が利用できる。演算としては各 j で ζ に対する 3 項方程式の反転を行いながら j の大きい方向にスイープしていくことになる。同様に 2 番目の因子は j の大きな方から小さな方に η の反転をしながらスイープすることになる。 ξ 方向の前進、後退スイープが終了するとそれが時間 1 ステップとなり、これを繰り返し行うことで収束に至る。

まず式(1)を対角優位の分解に修正し、 Δt で両辺を割る。結果は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_j^- + \delta_{\xi}^b \hat{A}^+ + \delta_{\xi}^c \hat{C} \right) \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^-) \right)^{-1} \\ & \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_j^+ + \delta_{\xi}^f \hat{A}^- + \delta_{\eta} \hat{B} \right) \Delta \hat{Q}^n \\ & = - \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right)^n \end{aligned} \quad (2)$$

やはりブロック 3 項方程式を解きながら ξ 方向に前進、後退のスイープを行い 1 つの時間ステップとするが、対角優位性の確保によって安定性が向上する。例えば第 1 因子の実際の演算を書き下してみると

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^-) + \delta_{\xi}^c \hat{C} \right) \Delta \hat{Q}^* \\ & = - \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right)^n + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_{j-1}^+ \Delta \hat{Q}_{j-1}^* \end{aligned} \quad (3)$$

但し、

$$\Delta \hat{Q}^* = \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^-) \right)^{-1} \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_j^+ + \delta_{\xi}^f \hat{A}^- + \delta_{\eta} \hat{B} \right) \Delta \hat{Q}^n$$

となっている。説明を簡単にするために ξ 方向は 1 次精度としたが、高次精度への拡張は容易である。

ここで LU-SGS 法で用いられて成功している近似、すなわち $A^+ = \frac{A + \sigma_{\xi}}{2}$, $A^- = \frac{A - \sigma_{\xi}}{2}$ を導入する[1]。これによって因子中の ξ に関する項は $\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^- = \sigma_{\xi_j} I$ となりスカラー量となる。その結果、この因子は ζ の固有行列によって対角化が可能となる。すなわち、

$$\left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} (\hat{A}_j^+ - \hat{A}_j^-) + \delta_{\xi}^c \hat{C} \right) = R_{\zeta} \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi_j} I + \delta_{\xi}^c \hat{\Lambda}_{\zeta} \right) R_{\zeta}^{-1} \quad (4)$$

とできる。それにより式(3)は近似的に

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi_j} I + \delta_{\xi}^c \hat{\Lambda}_{\zeta} \right) (R_{\zeta}^{-1} \Delta \hat{Q}^*) = \\ & - R_{\zeta}^{-1} \left[\left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} \right)^n + \frac{1}{\Delta \xi} \hat{A}_{j-1}^+ \Delta \hat{Q}_{j-1}^* \right] \end{aligned} \quad (5)$$

となる。この段階で左辺の演算はブロックの三重対角行列の反転から行列演算とスカラーの三重対角行列の演算とに簡略化されている。さらに LU-ADI で用いたように ζ 微分について Flux Vector Splitting を利用して風上差分をとり[2]、対角優位の因子化を施すと、さらに演算が軽減化できて左辺のオペレータは

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j} \mathbf{I} \right) + \delta_{\zeta} \hat{\Lambda}_{\zeta} \right) (\mathbf{R}_{\zeta}^{-1} \Delta \hat{\mathbf{Q}}^*) \\
 &= \left(\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j} \mathbf{I} \right) - \frac{1}{\Delta \zeta} \hat{\Lambda}_{\zeta}^* + \delta_{\zeta} \hat{\Lambda}_{\zeta} \right) \\
 & \quad \left(\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j} \mathbf{I} \right) + \frac{1}{\Delta \zeta} \left| \hat{\Lambda}_{\zeta} \right| \right)^{-1} \quad (6) \\
 & \quad \left(\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j} \mathbf{I} \right) + \frac{1}{\Delta \zeta} \hat{\Lambda}_{\zeta}^* + \delta_{\zeta} \hat{\Lambda}_{\zeta} \right) (\mathbf{R}_{\zeta}^{-1} \Delta \hat{\mathbf{Q}}^*)
 \end{aligned}$$

となる。式(6)ではjにおける左辺の演算はζ方向の前進、後退のスカラ演算スイープからなっている。この演算はLU-ADIのζ方向の演算と対角要素に $\frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j}$ が加わっていることだけが違うのですでにLU-ADIのコードを持っていれば書き直しは数行ですむ。

もう1つの因子についてもjの後退スイープにおいて同様な作業をη方向の微分に対して行うだけである。最終的に全体の演算構成は

- jの前進スイープ
 - ┌ 1の前進スイープ
 - └ 1の後退スイープ
- jの後退スイープ
 - ┌ kの前進スイープ
 - └ kの後退スイープ

となる。例えばLU-ADI法からの書き直しはj, k, lの陰解法演算のうちjの演算をはずし、k, lのループをjのDOループで囲む。k, lの演算の際に右辺にrelaxationから出てくるj-1やj+1といった項をつけ加える—といった簡単な変更で本スキームを得ることができる。本スキームは4つの因子から構成されており、jの方向にもk, lの方向にもそれぞれSGS的な分解を用いているのでFF-SGS (Four-factored Symmetric Gauss Seidel)法と呼ぶことにする。左辺の離散化は右辺に対応するものをとる方が一般に収束性がよいが、通常そうであるようにFlux Difference Splittingなどの離散化を用いてもよい。このようにして得られたFF-SGS法は例えばLU-ADI法に比べてj方向の演算が少ない分1時間ステップの演算が軽減化される。

ちなみに当然のことながら式(5)を用いて演算することも可能である。この場合は2因子の分解法となるが、いわゆる対角化法のコードを持っていればやはり対角項に $\frac{1}{\Delta \xi} \sigma_{\xi j}$ を足し込むだけでより効率のよい方法が得られる。

以上がFF-SGS法の導出である。1つの前進、後退のjスイープが1つの時間積分を構成する。これを繰り返して定常解を得る。もちろん非定常の解も限られた精度範囲ではあるが得ることができるし、右辺に時間微分項を加えることでより時間精度を高めることもできる。予想されるように既存のLU-SGS法やLU-ADI法に比べて演算が極端に少ないわけではない。しかし、最初に述べたように本方法を導出する目的は超音速流れにおいて高い収束性を得ることにある。

2.2 Relaxation法としての利用

流れが非粘性で完全に超音速である場合を考えよう。この場合jでの流れはそれより上流j-1などの値から決まり、j+1など下流の影響を受けない。そこで、上記のスキームでのjminからjmax, jmaxからjminまで行う前進後退スイープの幅を1つのj単独でのスイープとする。つまり1つのjで上記の時間ステップ演算を行う。そして時間積分のループの外側に新たにjminからjmaxのループを作る。下流からの影響はないから各jでの時間積分(1つのjでの上記陰解法)は数十回の繰り返しで収束解に至る。収束解が得られると次のjに進む。という具合に局所的な時間積分によって定常解は各jについて次第に求めていく。時間積分ループを囲む外側のjのループがjmaxまで行き着けばそれで定常解が完全に求まったことになる。このような局所的な時間イタレーションを局所イタレーションと呼ぶ。これに対して最初に定義したj全体にスイープを行う作業を繰り返していく方法を全体イタレーションと呼ぶ。一種のLine Gauss Seidel法となっている。局所イタレーションを利用する方法でΔtを無限大にするといわゆるニュートン法になるが[4,5]、ここでは適当に大きなΔtとして収束させる。

もちろんナビエ・ストークス方程式を扱う場合は境界層内の亜音速部分における擾乱の前方への伝わりを抑えるために、PNS法と同じように境界層内にVigneronによる近似[8]を施さなければならない。

以上得られた方法は内側の j のループを j_{lin} から j_{2in} 、外側のループの幅を j_{1out} から j_{2out} としてこれらを計算の頭で定義してやればプログラム上は1つのプログラムで全体イタレーションを利用した通常的时间積分プログラムとしても局所イタレーションを利用した緩和法的なプログラムとしても利用することができる。局所的に亜音速部分がある場合にも局所イタレーションに j の幅を持たせて亜音速部分をその中に完全に含む形とし、局所イタレーションをその領域幅で行うことにすれば効率的な演算が可能である。また、仮に近似的な超音速解が局所イタレーションを利用する方法で得られればそれが完全な収束解でなくとも途中から全体イタレーションのプロセスに移ることによって希望する収束解を得ることもできる。

以上のことから本方法は亜音速、遷音速でも通常の効率的な陰解法に負けない収束性を維持しつつ、超音速流れではさらに高い収束性を持つ方法であると予想される。以下の章では具体的な例を利用してこのこと

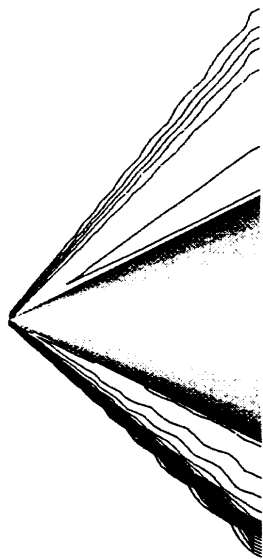


図1 密度等高線 (全体イタレーションの結果) : $M=2.0$, $\alpha=8.0$

を検証してみる。

3. 計算結果と検討

3.1 全体イタレーションによる計算例

最初に迎角を持つ円錐まわりの流れの計算例を示す。マッハ数は2.0、迎角は8度でオイラー方程式による計算である。図1は得られた密度等高線を図2は収束の過程を示している。計算格子点数は $31 \times 11 \times 31$ とかなり粗いため衝撃波はあまりきれいではないが計算には問題ないことがわかる。図2には比較のためLU-ADI法とStegerによる2因子分解法を利用した同じ計算の収束履歴

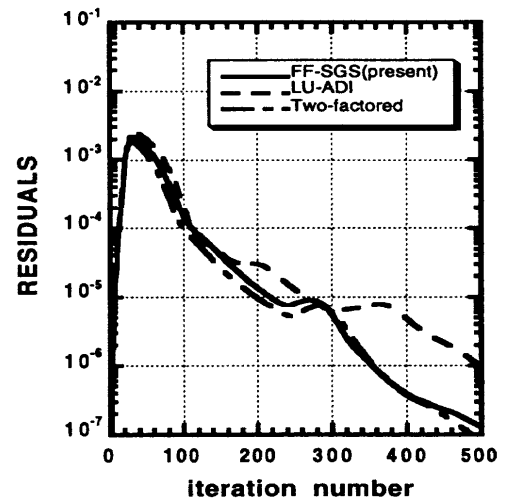


図2 図1のケースの収束履歴

歴も示した。比較を公平に行うために右辺の定常項は総て3次精度のRoeのFDSを利用している。左辺は1次の風上差分となっているから左辺、右辺の矛盾からマシンゼロへの収束性は得られていない。しかし、約500ステップ程度で残差は3-4桁おちて、実質的な収束解となっている。本FF-SGS法は2因子分解法とほぼ同じ様な収束履歴を示し、LU-ADI法よりも少しよい傾向を持っている。このことは流れ方向の流束ジャコビアン近似化が収束性の劣化を引き起こしていないことを示している。定式化のところからわかるようにFF-SGS法は2因子分解法に比べて(プログラミングの方法にもよるが)1つのイタレーションに要する時間は

1/3-6程度である。実際の計算時間は右辺演算も含めて1/4であった。またLU-ADI法に対しても1ステップに要する計算時間は右辺を含めても1割程度少ない。

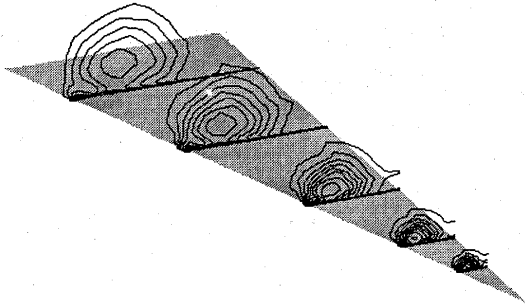


図3 デルタ翼上の前縁剥離渦のシミュレーション
—総圧分布— : $M=0.3, \alpha=12.0$

第2の例は亜音速の例でデルタ翼上の前縁剥離渦のシミュレーションである。方程式はナビエ・ストークス方程式、格子点数は $55 \times 35 \times 55$ である。マッハ数は0.3、迎角は12度とした。前縁剥離渦の流れ場は完全な定常解とはならないために残差は3桁近く下がってそこで変化しなくなる。図3に計算結果のうち総圧の等高線分布を示すが前縁剥離渦の存在が明らかで流れの計算が問題なく行われていることがわかる。

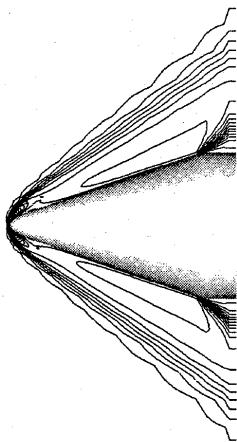


図4 ロケット頭部を過ぎる超音速流れ
—密度等高線— ($M=2.0, \alpha=0.0$)

3番目の例としてロケット頭部の形状を過ぎる超音速流れの例を図4に示す。マッハ数は2.0、迎角は0と

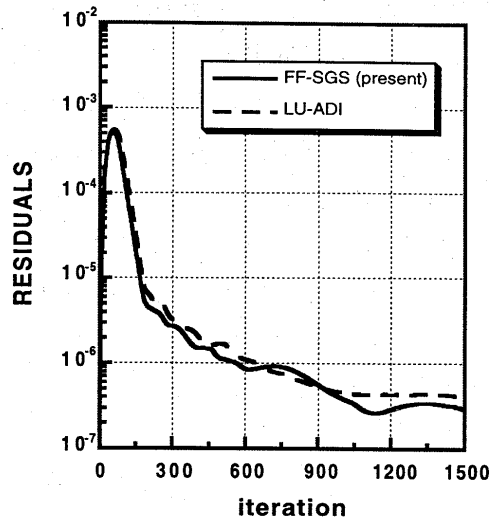


図5 図4のケースの収束履歴
した。この例では頭部付近の亜音速部分が存在する。この場合の残差履歴をLU-ADIのそれとともに図5に示す。ほとんど同じ様な収束履歴を示している。これは

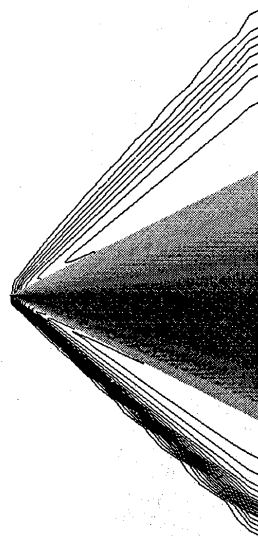


図6 密度等高線 ($M=2.0, \alpha=8.0$)
亜音速部分の影響があるからであろう。

3.2 局所イタレーションによる計算例

現在のところオイラー方程式の計算のみを行っている。ナビエ・ストークス方程式にするための境界層の処理はこれからの課題である。円錐に対する超音速

流れの例(密度分布)を図6に示す。マッハ数は2.0, 迎角は8度である。現在はスキームの確認のため1次精度で計算しているので, 図1に比べて衝撃波は厚い。特に局所イタレーションの収束判定をしていないので各jで40回の局所イタレーションを行うことにしたが, 総てのjについて40回で3桁以上の残差の落ちが観測されている。計算結果も問題ない。図1のマッハ数2.0の例で約400回程度の全体イタレーションを要している。この局所イタレーションによる方法は全体イタレーションによる一般の時間依存型の積分に比べておよそ10倍程度早く収束が得られることになる。

図7にはマッハ数が4.0のケースの密度等高線を示す。こちらと同じ局所イタレーション数で定常解が得られている。これらの結果から少なくとも流れが完全に超音速であればこの方法は効率に優れたものであることがわかる。当初は流れ方向の流束ジャコビアンの評価を厳密に行わないと局所イタレーションの収束に問題が出るのではないかと考えたが, 計算した結果は全体イタレーションと同じく全く問題がないことを示したと考えられる。境界層における Vigneron の近似は特別問題なく組み込められると思われるのでナビエ・ストークス方程式への拡張は可能と考える。

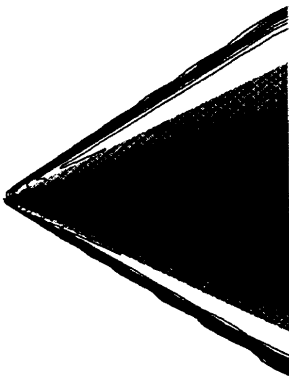


図7 密度等高線 (M=4.0, $\alpha=8.0$)

4. おわりに

新たな効率的な陰解法を提案した。考え方は単純で

いわゆる relaxation タイプのスキームから出発し, LU-SGS 法の流束ジャコビアンの近似化を流れ方向のみに導入する。これによって陰解法の近似因数分解された各オペレータは他の2方向の固有マトリックスによって対角化が可能となる。さらにLU-ADIの優対角分解を施すことで4因子の陰解法FF-SGS法が定義できる。各オペレータの演算はオリジナルのLU-ADI法のそれとほとんど同じで数行の書き直しでFF-SGS法となる。全体の演算は流れ方向のインデックスのループの中に他の2方向のオペレータが挟まるといった形式となる。得られたFF-SGS法はLU-ADI法などよりも演算量が少なく, 総ての速度領域で効率的な陰解法となる。同時に流れが超音速の場合には緩和法としての計算が可能で10倍程度の効率化が簡単に見込める。

亜音速から超音速に至るいくつかの流れ場への適用結果から以上の事実を確認することができた。今後さらに一般的な流れ場への適用によって本手法の汎用性を高めていきたいと考えている。

参考文献

1. S. Yoon and A. Jameson: AIAA Paper 87-0600, 1987.
2. S. Obayashi, K. Matsushima, K. Fujii and K. Kuwahara: AIAA Paper 86-338, 1986.
3. S. R. Chakravarthy: AIAA Paper 84-0165.
4. R. W. Walters and D. L. Dwoyer: AIAA Paper 85-1529CP, 1985.
5. R. W. Newsome, R. W. Walters and J. L. Thomas: AIAA Paper 87-1113CP, 1987.
6. A. C. Taylor III, W. F. Ng and R. W. Walters: J. C. P. Vol. 99, pp. 68-78, 1992.
7. S. Ying and J. L. Steger: AIAA Paper 86-2179, 1986.
8. Y. C. Vigneron, J. V. Rakich and J. C. Tannehill, AIAA Paper 78-1137, 1978.

3次元非構造格子上での空間前進解法

斎藤 英司*¹ 中橋 和博*² Dmitri SHAROV*²SPACE MARCHING METHOD
ON THREE-DIMENSIONAL UNSTRUCTURED GRIDEiji SAITOH*¹ Kazuhiro NAKAHASHI*² Dmitri SHAROV*²

An efficient method to solve supersonic flows on three-dimensional unstructured grid is developed. The present method takes advantage of the space-marching method. The space-marching method uses the property of supersonic flow where flow information travels from upstream to downstream only. In the present method, the entire flow-field is computed by marching a band-like computational subdomain in the flow direction starting from upstream boundary. The computational subdomain is determined to minimize the data required for computation. Procedure of node removal from this computational region is also introduced for efficiency. The subdomain is computed by time-marching method. Since computations are performed in the selected region only, the required flux computations and CPU time are far less than those in the whole region. Furthermore, if embedded subsonic regions appear, the computational region is expanded laterally so as to include subsonic regions in it. The resulting space-marching method has an advantage to treat arbitrary supersonic flows around complicated configurations on the three-dimensional unstructured grid. The method is applied to several supersonic flow problems to demonstrate its capability.

1. 緒言

近年、CFDはめざましい発展を遂げており、その信頼性および有効性は以前にも増して高いものとなっている。CFDとの比較、あるいはCFDの結果の検証として行われる風洞実験には、膨大な時間と費用を要するため、このような観点からもCFDに対して、より高精度で、かつ計算時間の大幅な短縮が望まれている。

CFDで計算対象となる航空機機体には複雑なものが多く、一般に用いられている構造格子では、計算格子の構築にかなりの時間を費やしてしまう。一方非構造格子では、通常、表面格子にのみ依存するためそのようなことはない。つまり、非構造格子は構造格子に比べ格子生成の際の融通性に優れており、また解適合格子等のための格子再分割化も比較的容易である。そのため、効率の良い計算方法やアルゴリズムが構築できれば、非構造格子を用いた解法の有用性もさらに増すであろう。

そこで本研究では、超音速航空機周りやロケットノズル内のような、全領域が超音速であるような流れ場に対して、計算の効率化のために用いられる空間前進解法[1]を、3次元完全非構造格子上で構築し、計算の効率化及びその有効性を確かめることを目的とする。

構造格子において、この空間前進解法を用いる場合、定常流れに対する支配方程式を上流の初期値を元に、下流方向に1格子面ずつ解いていく。流れが超音速であるかぎり、通常的全領域計算と比べて遥かに少ない演算量

で済む。しかし、流れ方向とそれを横切る方向に格子線を持つH型格子が常に要求されるという格子トポロジーの制限や、全領域が超音速でなければならないという流れの制限などがある。実際の超音速航空機等の流れ場では、機体先端や翼一ナセル部分に亜音速領域が生じ、全領域が超音速流れではなくなるのが普通である。また、一般に形状も単純なものではないため、計算格子としてH型格子を用いるのは困難である。そのため構造格子上での空間前進解法は、このような流れ場には不適である。

一方、非構造格子上では上記のような格子依存性がないため、格子トポロジーの制限は排除され、任意の複雑形状周りの超音速流れを扱うことができる。また、超音速流中に亜音速領域が現れた場合でも、その領域を計算領域に取り込み、1つの時間依存計算として解くことにより、流れに対する制限も排除することが可能となる。

ここでは、3次元非構造格子上で空間前進解法を用いるためのアルゴリズムや計算効率を高めるための上流収束点除去の手法、亜音速領域の処理について説明し、全領域が完全に超音速流れである場合と流れ場に亜音速領域が現れる超音速流れの計算例を示す。

2. 支配方程式

流れ場の時間依存計算には、3次元オイラー方程式に対して、Barth-Jespersenの方法[2]に基づく高次精度風上法を用いている。保存則の積分形は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{Q} ds + \oint_{\partial \Omega} \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{n}) dl = 0 \quad (1)$$

*1 東北大学工学部大学院

*2 東北大学工学部機械航空工学科

ここで、保存量 \mathbf{Q} は $\mathbf{Q} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]$ で、 ρ は密度、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の速度成分を、 e は全エネルギーである。また、 $\mathbf{F}(\mathbf{Q}, \mathbf{n})$ は検査体積境界 $\partial\Omega$ に鉛直外向きの流束を、 \mathbf{n} はその方向の単位法線ベクトルを表す。

$$(\mathbf{Q}_j)_{new} = \frac{1}{V_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{Q} dV \quad (2)$$

\mathbf{Q} を検査体積 Ω での平均量として(2)式のように読み替え、時間微分項となった(1)式第一項に前進差分を適用し、(1)式第二項を書き下すと次のようになる。

$$\mathbf{Q}_j^{n+1} = \mathbf{Q}_j^n + \frac{\Delta t}{V_j} \sum_i \Delta S_{ji} \mathbf{h}(\mathbf{Q}_{ji}^+, \mathbf{Q}_{ji}^-, \mathbf{n}_{ji}) \quad (3)$$

ΔS_{ji} は節点 j と i を結ぶ辺に対応した検査体積の面要素であり、 \mathbf{h} は検査体積境界での数値流束を表す。ここで、Roeの数値流束関数[3]を用いると \mathbf{h} は、

$$\mathbf{h}(\mathbf{Q}_{ji}^+, \mathbf{Q}_{ji}^-, \mathbf{n}_{ji}) = \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{Q}^+, \mathbf{n}) + \mathbf{F}(\mathbf{Q}^-, \mathbf{n})] - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right| (\mathbf{Q}^+ - \mathbf{Q}^-) \right\}_{ji} \quad (4)$$

\mathbf{Q}^\pm は検査体積境界 $\partial\Omega$ の両側の値で、高次精度のためにこの \mathbf{Q}^\pm を $\nabla \mathbf{Q}$ を用いて再構築する。

$$\mathbf{Q}^- = \mathbf{Q}_j + \Phi_j \nabla \mathbf{Q}_j \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j) \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}^+ = \mathbf{Q}_i + \Phi_i \nabla \mathbf{Q}_i \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_i) \quad (6)$$

$$\nabla \mathbf{Q}_j = \frac{1}{V_{\Omega_j}} \sum_i \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_j + \mathbf{Q}_i) \mathbf{n}_{ji} \Delta S_{ji} \quad (7)$$

\mathbf{r}_m は辺 ji の中点を、 V_{Ω_j} は検査体積 Ω_j の体積をそれぞれ表す。また、 Φ_j は節点 j での $\nabla \mathbf{Q}_j$ に対するリミッター[4]である。

時間微分項に対しては、局所時間刻みを用いた2段階ルンゲ・クッタ法を適用している。

3. 空間前進解法のアルゴリズム

本研究では、計算格子である非構造格子をあらかじめ全空間に生成しておき、主流が超音速であることを利用して、上流の境界点からある幅を持った領域を計算領域として設定し、順次その領域を下流方向に空間前進していく方法で、全領域を効率よく解く。この方法では、亜音速泡が現れた場合の処理が容易であるという利点がある。また、既存の3次元非構造格子コードへの組み込みが可能であるといった汎用性を持たせることができる。

既に2次元場に対して提案しており[5]、ここでは3次

元場への拡張について述べる。

3.1 マスキング

流れ場全体においてある特定の領域、ここでは計算領域のみの計算を行うため、この領域とそれ以外の領域を区別しなければならない。それは節点や辺にマスキングを施すことにより行われる。3次元場では、2次元場と比べて節点数や要素数が格段に増大し、それに伴い計算時間も大幅に増加するため、計算時間短縮には適切な計算領域の絞り込みが必要となる。本研究では計算格子により、一意に最小限の計算領域を取るようにするために、以下の方法を用いている。

まず、計算領域上流から流れ方向に最大長さを持つ辺を基準とし、その長さ幅の領域で収束判定を行う。また、収束判定領域下流から、流れ方向に最大長さを持つ辺を基準とし、その長さ幅の領域を収束判定領域に加えたものを計算領域とする。そこで、これらの領域を判別するために、全節点と辺にそれぞれ MASKN(in)、MASKE(ie)を用意する。図1に示してあるように、MASKN(in)はその位置及び接続状況に応じて表1のような値を持つ。また、MASKE(ie)は、辺の両端の節点の MASKN(in)によって決まり、辺の両端の節点が MASKN = 8 あるいは MASKN = 0 ならばその辺は MASKE = 0 となり、それ以外の辺は MASKE = 1 となる。

(2)式の流束計算は MASKE = 1 の辺のみで行われ、MASKE = 0 の辺はスキップする。保存量 \mathbf{Q} の更新は MASKN = 2 ~ 6 の節点で行われる。CPU時間短縮のため、高次精度計算は、一方の節点が MASKN = 3 ~ 6 である辺で行われ、その他の MASKE = 1 の辺は1次精度計算で行われる。また、保存量 \mathbf{Q} の勾配 $\nabla \mathbf{Q}$ を計算領域上流及び下流で正しく評価するために、計算領域の直上流点 (MASKN = 7) と直下流点 (MASKN = 1) も流束計算に関わるようにしている。

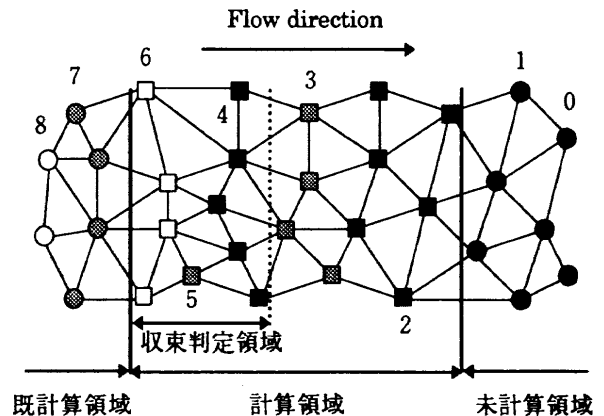


Fig.1 Masking of nodes

Table 1 Node flags

MASKN	計算点	保存量の更新	高精度計算	収束判定領域
0	×	×	—	—
1	○	×	× (1次精度)	—
2	○	○	× (1次精度)	—
3	○	○	○	—
4	○	○	○	○
5	○	○	○	○
6	○	○	○	○
7	○	×	○	—
8	×	×	—	—

3. 2 計算領域のマーチング

設定された計算領域は、その中の収束判定領域にある全ての節点が収束したと判定されたとすると、下流方向にマーチングされる。それは計算領域から収束判定領域を取り除くとともに、新たに計算領域下流の未計算点を計算領域に組み込むことにより行われる。流れが超音速である限り、流れの情報は上流から下流へしか伝わらないため、計算領域中の変化は上流の既計算点には影響を及ぼさない。

図2に計算領域のマーチングの様子を簡略的に説明したものを示す。流れの方向に計算領域は前進していき、最終的に計算領域内に節点がなくなった時点で、計算は終了する。

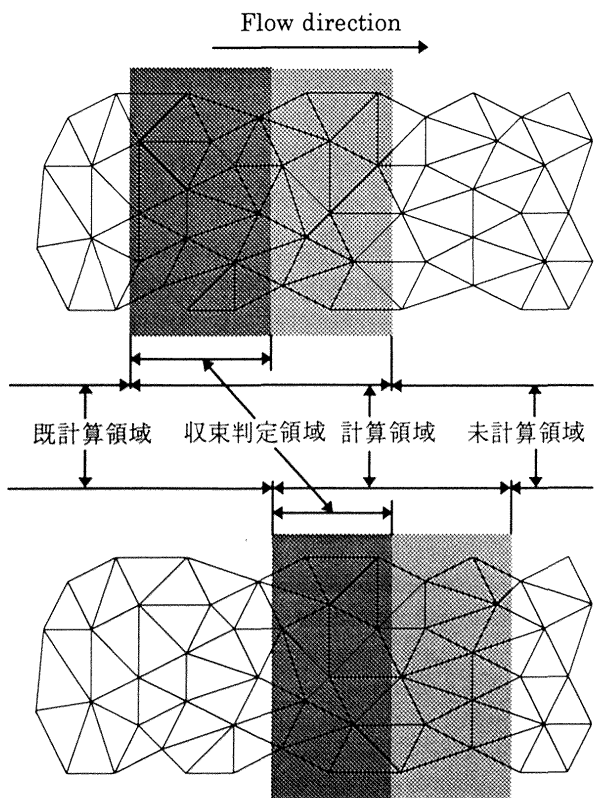


Fig.2 Marching of computational region

3. 3 計算中の上流収束点除去

3. 1節でも述べたように、3次元場では計算対象となる節点や辺が多くなるため、計算領域を適切に絞り込まなければならない。そこで、なるべく無駄な計算を避けるために、計算途中であっても、収束した上流点は計算領域から順次除去していく方法を導入している。これは超音速流れの特性から、計算領域の上流側から下流側へ徐々に節点が収束していくことを利用したものであり、これにより、下流未収束点のみが常に計算対象となり、流束演算量を最小に抑えることができる。除去することができるのは、既計算点と接続している計算領域上流点 (MASKN=6) の中の収束した節点であり、この時の収束の判定は通常の判定基準よりも厳しい条件を付している。図3に上流収束点の除去の様子を示す。この場合、図3(上)の□で示されている点が上流収束点となっている。

除去された上流収束点は、既計算領域に組み込まれ、MASKN=7となり、また新たに計算領域等のマスキングが行われる。但し、MASKN=4の節点と接続している上流の節点と MASKN ≤ 4の節点は、収束判定領域と計算領域下流の境界保持のため変更はされない。

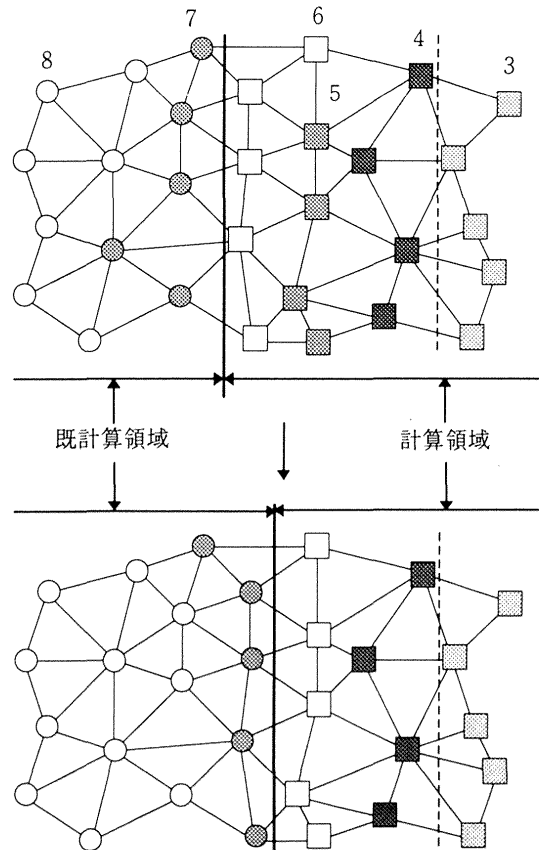


Fig.3 Removing converged upstream nodes from computational region

3. 4 亜音速領域の処理

空間前進解法を用いる際、全領域が超音速でなければ

ならないという流れの条件がある。亜音速領域が発生するような場合、構造格子上ではその部分のみを時間依存計算で解き、下流の超音速領域からこの空間前進解法を用いるなどアルゴリズムもかなり複雑になってしまう。これでは空間前進解法の計算効率の良さを、十分に活かすことはできない。

一方、非構造格子上では格子に沿った空間前進解法ではなく、計算領域を前進させるという方法を取る。そのため、もし計算中に亜音速領域が生じて、その領域を1つの計算領域内に取り込んで時間依存計算を行えば、空間前進解法のアルゴリズムを何ら変えることなく流れの制限は排除され、全領域を解くことができる。

亜音速領域が現れた場合、それを計算領域に取り込む方法を図4に示す。ここで○はマッハ数をモニターする節点であり、●は亜音速点である。図4(上)で4点が新たに超音速から亜音速へ変化している。

つまり、高次精度計算を行う収束判定領域の上流及び下流境界(MASKN=6とMASKN=3)でマッハ数をモニターし、計算中に亜音速点となれば、その点を取り込むように収束判定領域と計算領域を拡大する(図4下)。場合によっては既計算点が再び計算領域に組み込まれることもあるが、ここでも無駄な節点を取り込まないように最小限の拡大に抑える。

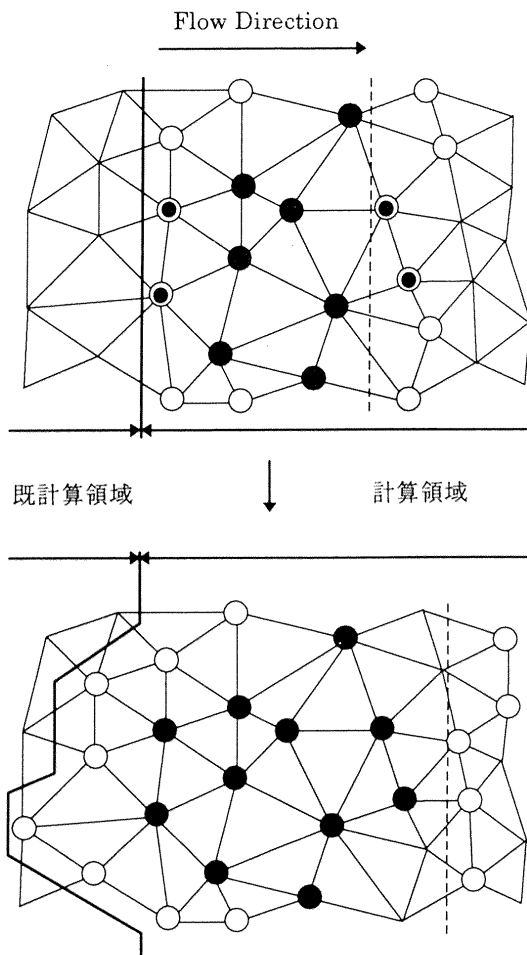


Fig. 4 Treatment of subsonic region

4. 計算結果

非構造格子上で空間前進解法を用いた計算例として、全領域が超音速流れである超音速旅客機(SST)の翼胴モデルと、亜音速泡を伴う超音速流れである2つの楕円体で定義される鈍頭物体形状(Double Ellipsoid) [6]の2ケースについての結果を示す。

4. 1. 1 SST翼胴モデル

この計算結果は、全領域が完全に超音速流れの例であり、図5にここで用いた計算格子を示す。節点数は88282、要素数は467325である。また、計算のための流れの条件は自由流マッハ数2.3、迎角 3.0° としている。

図6は完全に計算が終了した時点での計算結果(等マッハ線図)を示している。このSST翼胴モデルにおける揚力係数 C_L 、抗力係数 C_D 及び表面摩擦抵抗を考慮したときの揚抗比 L/D は表2のようになる。これらの結果は、全領域を通常の時間依存計算で解いた結果とほぼ、同じ数値をとる。

計算時間はCRAY C-90の1プロセッサを用いて、空間前進解法を用いた場合は約6700秒、通常的全領域計算では約32400秒を要した。

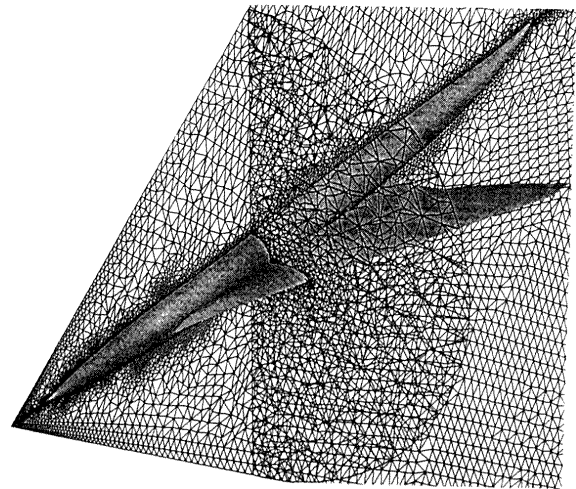


Fig. 5 Grid of SST wing-body model

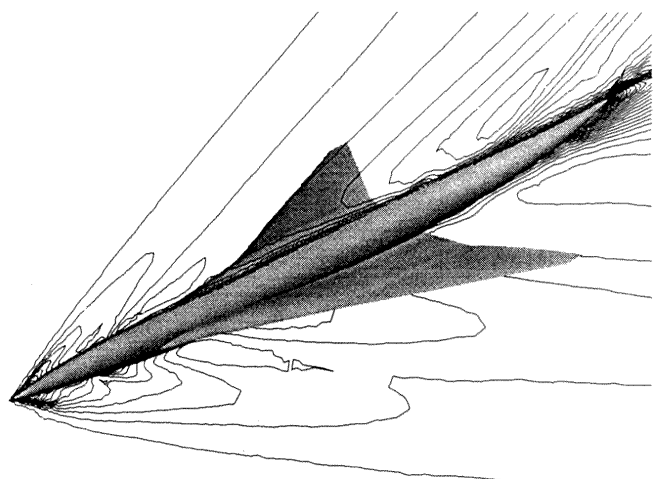


Fig. 6 Final computational result (Mach contours)

Table 2 Performance of SST wing-body model

揚力係数 C_L	0.06987
抗力係数 C_D	0.00538
揚抗比 L/D (表面摩擦抗力)	6.7272 (0.005)

4. 1. 2 Double Ellipsoid

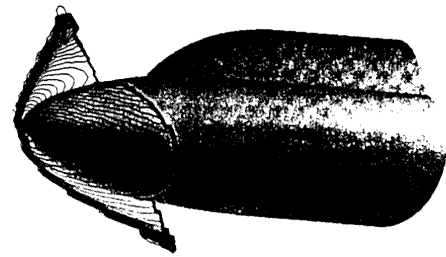
2つの楕円体で定義されるこの鈍頭物体形状では、超音速流れにおいて、物体先端部と対称面上の2楕円体の交点付近に亜音速領域が発生する。空間前進解法を用いた計算では、この領域をそれぞれ1つの計算領域内に取り込み、計算を行うことで処理している。

図7に Double Ellipsoid の計算格子を示す。節点数は76164、要素数は408509であり、流れの条件は自由流マッハ数8.15、迎角 30.0° である。

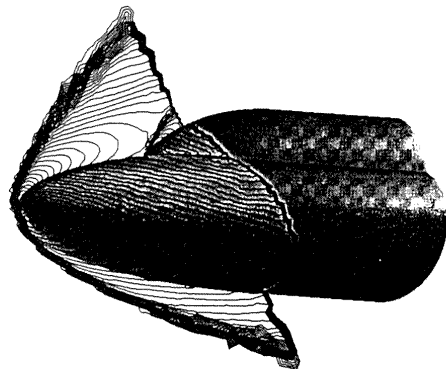
図8は計算領域が空間前進していく過程を、物体表面と対称面上での等マッハ線図で示したものであり、領域の収束が上流から下流へ進んでいるのがわかる。この計算例では、20マーチングステップで最終的に計算が終了している。計算時間は空間前進解法を用いた場合で約4700秒を要し、全領域計算のおよそ25%程度に抑えることができる。

これを残差の収束履歴で示したものが図9であり、空間前進解法の収束履歴の各々の線が各マーチングステップでの収束を表している。つまりこの場合、収束履歴の線は20本あることになる。また、3及び8マーチングステップ目では亜音速領域を取り込みながら計算が行われるため、収束に時間を要している。

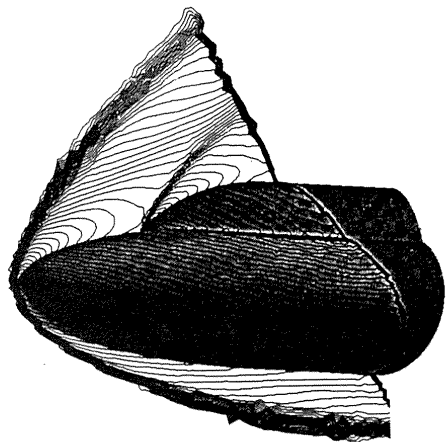
次に対称面上での C_p 分布を計算値と実験値で比較したものを図10に示す。参照できる実験のデータ点が多くないため、 C_p 分布全体を比較することはできないが、計算値と実験値を比較できるところでは、これらの値はほぼ一致している。この結果やSST翼胴モデルの性能評価から、空間前進解法を用いて得られる計算結果は、十分信用できるものといえる。



(a) 4th marching steps



(b) 8th marching steps



(c) 12th marching steps

Fig. 8 Mach contours of a double ellipsoid at selected marching steps

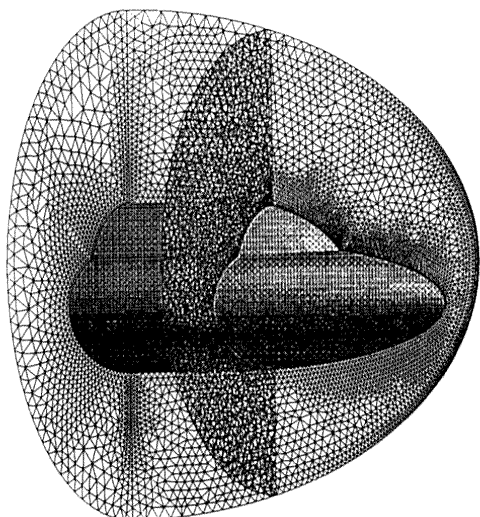


Fig. 7 Grid of double ellipsoid

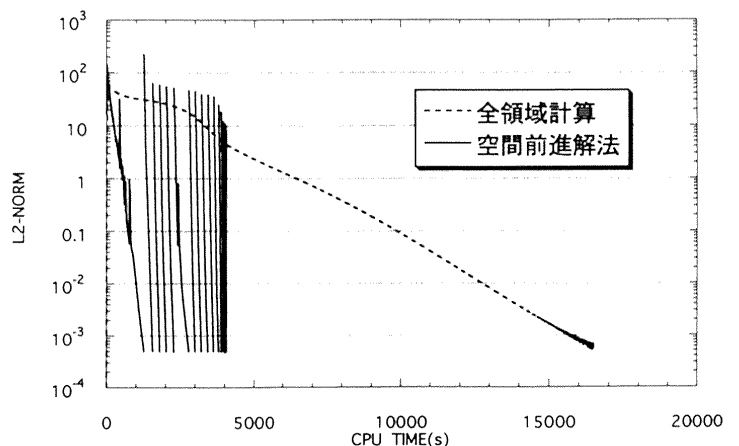


Fig. 9 Convergence history of residual

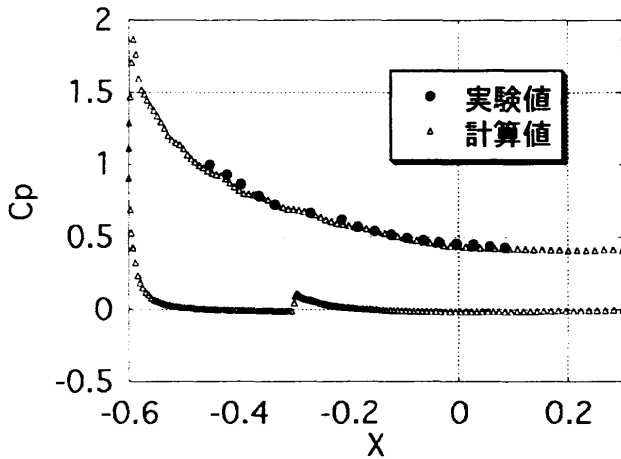


Fig. 10 Pressure Coefficient along the line $y=0$ on the windward side

4. 2 計算効率

表3に、この空間前進解法と通常的全領域計算との計算時間の比較を示す。(全領域計算の場合を1としている。)CASE1~3は全領域が超音速流れの計算例であり、CASE4が亜音速泡を伴った超音速流れの計算例である。全領域が超音速流れの場合、計算格子の均一性や節点数などにより、多少の変化はあるものの、およそ20%前後に計算時間を抑えることができる。一方、亜音速泡を伴った超音速流れの場合、発生した亜音速領域の収束に時間を要するため、全領域が超音速流れの場合よりも計算効率は下がり、計算時間は全領域計算の25%程度となる。

Table 3 Comparison of CPUtime

	空間前進解法	全領域計算
CASE1(SST)	0.206	1.000
CASE2(Vortex Generator)	0.167	1.000
CASE3(Scram Jet)	0.185	1.000
CASE4(Double Ellipsoid)	0.246	1.000

5. 結言

超音速流れの計算において、空間前進解法を非構造格子上で用いることにより、3次元の任意複雑形状を扱うことが可能となり、計算時間も大幅に減少させることができる。更に、亜音速領域の存在が許されることから、流れの制限は排除され、より一般的な超音速流れに適用することができる。また、手法自体シンプルなため既存の計算コードへの組み込みが容易であるといった利点からも、この方法の有用性は極めて高いといえる。

今後は、1流束演算に要する計算時間がより大きいナビエ・ストークス方程式や反応を伴う極超音速流れへ、この空間前進解法を拡張し、その効果を検証していく予定である。

6. 参考文献

- [1] McGrory, W. D., Walters, R. W., and Löhner, R., "Three Dimensional Space-Marching Algorithm on Unstructured Grids", AIAA J., Vol.29, No.11
- [2] Barth, T. J. and Jespersen, D. C., "The Design and Applications of Upwind Schemes on Unstructured Meshes", AIAA Paper 89-0366, 1989
- [3] Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", J. Computational Physics, Vol.43, pp.357-372, 1981.
- [4] Venkatakrisnan, V. "Convergence to Steady State Solutions of Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters", J. Computational Physics, Vol.118, pp.120-130,1995.
- [5] Nakahashi, K. and Saitoh, E., "Space-Marching Method on Unstructured Grid for Supersonic Flows with Embedded Subsonic Regions", AIAA Paper 96-0148, 1996.
- [6] Desideri, J.-A, Glowinski, R., and J. Periaux(Eds.), *hypersonic Flows for Reentry Problems*, Vol.1 and 2, Springer-Verlag, 1991.

プラズマトーチによる超音速燃焼強制着火

小幡茂男^{*1}

Forced Ignition Effect by Plasma Torch on Supersonic Combustion

Shigeo Obata ^{*2}

Abstract

The most effective plasma injection state, atomic oxygen in diffuse mode, is applied for forced ignition within a two-dimensional supersonic shear flow, constructed between supersonic air and sonic gas hydrogen. Under a condition out of combustion limit by cold air, the effect of plasma forced ignition has been investigated by molecular gas dynamical numerical approach. The Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) method based on the Boltzmann equation has been employed with reactive inelastic molecular collision model (IE Model) as a numerical analysis method. It is clarified that plasma torch is able to act as an ignitor for supersonic combustion with a low temperature condition.

1. 序論

燃焼反応に参加する各種化学活性基を巨大な熱流束と共に集中的に供給することが可能なプラズマトーチは、超音速燃焼場における着火装置として期待され、実験的¹⁾にも、解析的^{2,3)}にもその効果が確認されつつある。本研究では、これまでにプラズマトーチの最も効果的な運転条件を探るべくDSMC解析法⁴⁾を用いて気体分子運動論的な立場から、二次元超音速剪断流中の初期燃焼過程にプラズマ活性基が及ぼす影響を数値的に解析してきた結果、単原子酸素成分の多いプラズマを超音速空気中へなるべく広範囲に拡散噴射させる形態の使用法を推薦した。今回は、そのような条件のプラズマ活性基による低温超音速空気中の強制着火性能について報告する。

2. 数値解析手法と計算条件

本研究で使用している数値計算手法は、これまで同様、定常解のための時間平均操作、衝突判定のためのMODIFIED NULL-COLLISION法⁵⁾、衝突断面積一定の剛体球分子モデル、回転自由度のみを考慮したBorgnakke-Larsenの並進-内部エネルギー平衡モデル⁶⁾、内部エネルギー参加型の反応分子非弾性衝突モデル⁷⁾による反応発生判定法、これらを組み合わせたDSMC解析法である。最も重要な、燃焼反応の解析には、水素-酸素系の主要な8つの反応化学種(H, O, OH, H₂, O₂, N₂, HO₂, H₂O)が参加する表1の16 Reaction System⁸⁾を採用し、微弱な初期着火問題の解析にも十分耐え得る精度を持たせた。

対象とする超音速剪断流は、音速噴射の低温水素ガスを上下にはさんで流れる超音速の空気により、図1のように上下対称な二次元的に形成される。計算領域は、水素噴流の中心線を対称境界として上半分だけを用いた。プラズマは、空気流と水素噴流を

表1 : 16 Reaction System

1:H+OH=H ₂ +O:2	3:O+OH=O ₂ +H:4
5:H ₂ +OH=H ₂ O+H:6	7:OH+OH=H ₂ O+O:8
9:OH+OH=H ₂ +O ₂ :10	11:H+HO ₂ =H ₂ +O ₂ :12
13:H+HO ₂ =OH+OH:14	15:H+HO ₂ =H ₂ O+O:16
17:HO ₂ +O=O ₂ +OH:18	19:HO ₂ +OH=H ₂ O+O ₂ :20
21:H ₂ +HO ₂ =H ₂ O+OH:22	23:H+H+M=H ₂ +M:24
25:O+O+M=O ₂ +M:26	27:H+O+M=OH+M:28
29:H+O ₂ +M=HO ₂ +M:30	31:H+OH+M=H ₂ O+M:32

分けているリップの後縁よりも上流地点で超音速空気中へと噴射され、空気とプラズマが均一に混合した状態で計算領域へと流れ込んで来るものとした。

超音速剪断流を構成する二流には表2に示す通り、空気流の温度を変化させた三条件を与えた。図2は水素-酸素系の着火特性⁹⁾を示したものであるが、前報まで使用してきたケースAが着火可能条件であるのに対し、ケースBおよびケースCはそれぞれ弱着火条件と非着火条件に相当し、プラズマ活性基の導入が無い自発着火条件下の解析においては、計算領域内部に反応の発生は確認されなかった。

表2 : 超音速剪断流流入条件

	Supersonic Air	Sonic Hydrogen
Pressure [N/m ²]	1.01 × 10 ⁵	1.01 × 10 ⁵
Mach Number	2.44	1.00
Temperature [K]	Supersonic Air	Sonic Hydrogen
Case A	1500	250
Case B	1000	250
Case C	750	250

プラズマ活性基は単原子酸素のみから成り、空気流中へ十分に拡がった拡散条件(O-W-r)で使用した。プラズマ活性基には表3に示す通り、超音速空気と比べて非常に小さな流束値を与え、計算領域へ流入させた。

矩形の計算領域は、ケースAの空気条件の平均自

^{*1} 防衛大学校 ^{*2} National Defense Academy

表3：プラズマ活性基流束条件

Inlet Flux Ratio (Plasma Flow / Air Flow)	
Number Flux Ratio	Heat Flux Ratio
1.72×10^{-3}	1.23×10^{-3}

由行程の半分の一辺長を持つ立方体形の衝突試行用セルを横(x)方向640個、縦(y)方向160個並べた大きさとした。流入境界の超音速空気流路はセル130個から成り、このうちリップ寄りの120個分単原子酸素が空気流に混入して流入する。リップには厚み無し、滑り条件、断熱境界と共に、セル10個分の長さが与えられる。水素噴射口の対称全高さ(h、セル60個分)を代表長さとするヌーゼン数は $Kn=0.017$ 、レイノルズ数は $Re=21433$ である。他の三境界は、それぞれ、上側境界が超音速空気流と同じ条件に保たれ、下側境界は対称境界、出口境界にはx方向に物理量変化の無い連続条件を与えて真空流出を避けた。以上のケースAを基準とする計算領域全サイズは、残りの二ケースでもそれぞれ同じとし、流入空気温度の低下に伴う空気流平均自由行程の減少に対しては、構成セルの数を増加させて対応している。

3. 超音速燃焼初期過程

前記したように活性基導入の無い場合、ケースBとCには自発燃焼は起こらず、また、ケースAの自発着火の燃焼規模も非常に小さかったので、以下、三ケースそれぞれの混合過程に注目して結果を示してゆく。図3～図6に載せたのは、いずれも上からケースA、B、Cであり、各ケースの右端括弧内の数字は等高線間隔を示し、図中の小文字のHおよびLはそれぞれ計算領域中で各物理量の最大値、最小値を有する位置を表す。

図3に等圧力線図を示す。いずれのケースもリップ後縁から圧縮と膨張の対になった弱い波が超音速空気流中へと伸びている。二流の運動量の違いにより混合が流れの加減速を引き起こし、また、気体分子の熱運動による粒子の遡上に伴い、これらの圧力波が生ずる。よって、二流の速度差が小さく、気体温度の低いケースCでは非常に弱い波となっている。

図4は、等水素濃度線図である。全てのケースで、リップ後縁直後における濃度剪断層が空気流側へ大きく広がっていること、および、計算領域出口にまで亘って水素噴流の中心部では水素濃度がほぼ100%に保たれていることから、混合の物質輸送が水素の空気中への浸透により支配されていることが分かる。しかし、その混合過程も空気温度の低下に伴い進行度を落とし、濃度剪断層の幅が狭くなると共に、水素噴流中心の純粋水素領域が大きくなり、空気温度の影響を大きく受けていることを示している。

図5は、紙面下向き右ねじ方向の等焓度線図であるが、いずれのケースにも特徴的なのはリップ後縁で形成された渦の拡散帯が水素噴流側へ引きずられるように、渦剪断層を水素噴流の内部に形成している点である。実際、渦剪断層の中心と水素濃度90%の線は出口境界までほぼ一致している。これから、混合による運動量の交換が水素の空気中への浸透の初期段階において行われていることが分かる。また、空気流側に渦帯が見られないことは、空気流と比べて噴射速度の小さな水素も一旦空気流中へ浸透した後には速やかに空気流速に乗って高速度で流れ始めることを示している。三ケースのそれぞれの比較では、温度の低下による空気の運動量の減少に伴い、渦の強さと渦の拡散速度も小さくなっている。

図6に等温度線図を示す。渦剪断層がより水素噴流側へ寄った位置に現われるのに対し、三ケースとも、リップ後縁で温度勾配の大きな領域を空気流側へ大きく広げ、そのまま下流に向かってもやや空気流寄りに温度剪断領域を形成している。これは、渦剪断層を通過し、運動量交換を終わった水素と空気の間でエネルギー交換が行われ、冷たい水素が自らの温度を上昇させていることを示している。また、二流の温度差が小さくなるにつれ温度剪断層の幅と勾配も小さくなっていくことが分かる。

図7の様な流れと垂直な断面内部で、次式により定義される混合効率を用いて、混合過程に及ぼす空気温度の影響を評価したのが図8である。これからも、空気温度の低下により混合が大きく阻害されている様子が見て取れる。また、流れ場と関連づけて、リップ直後の領域において渦を発生しながら急激に混合が進み、水素の空気中への輸送を行った後、熱エネルギーの交換によるゆっくりとした混合が進んでゆくことが確認できる。

$$\eta = \frac{\int_0^{y_{\max}} \left(\frac{n(y)}{\bar{n}} \right) dy}{\left(\frac{n(y)}{\bar{n}} \right)_{total}} : \begin{cases} \Phi(y) > 1 \rightarrow \Omega = \Phi(y) \\ \Phi(y) < 1 \rightarrow \Omega = 1 \end{cases}$$

図3～図6および図8から、超音速剪断流の混合過程の特徴を以下の様にまとめることができる。

- ・物質輸送は水素から空気へと行われる
- ・混合の第一段階は運動量交換による渦形成
- ・第二段階は浸透水素の温度上昇
- ・空気温度の低下に伴う混合の抑制

4. 強制着火効果

単原子酸素プラズマによって活性化される起鎖反応は16 Reaction Systemの反応番号2であり、そこから一次生産物質の水酸基(OH)を経由して、分

枝反応である素反応5により大発熱と共に水蒸気(H₂O)を生産する。しかしながら、本研究で用いた小さな計算領域内部においては流れ場に擾乱を引き起こす様な巨大な発熱を供給出来るほどの反応頻度は得られなかった。そこで、以下の図9、10では、反応生成物質の中でも主として水酸基と水蒸気とに注目して、その生成状況から、プラズマ活性基による強制着火効果を明らかにしてゆく。図は前節同様、上から順にケースA、B、Cである。

図9に等水酸基数密度線図を示す。自発着火の不可能なケースB、Cにおいても単原子酸素拡散プラズマにより流れ場中に水酸基の存在が認められる。しかし、空気温度の低下が強制着火性能に強い影響を与えていることは明らかであり、ケースB、Cと空気温度の低下に従って、水酸基生産量の減少のみならず、生産開始地点が流れ方向に後退してゆくことが分かる。三ケースに共通しているのは、水素濃度が高く、領域温度の低い水素噴流中心近傍に全く水酸基が見られないことと、やや空気噴流側に寄った位置から反応が開始している点であり、これからも反応進行に及ぼす熱的影響を見て取れる。また、混合過程と関連のある特徴として、図4の濃度剪断層の幅に応じて各ケースの水酸基帯の中心が移動している点が上げられる。ケースAと比べてケースCでは、水酸基帯の中心がより空気流側へ近づいて形成され、わざわざ水素濃度がさほど高くない領域を主反応場としている。空気温度の低いケースCにおいては、高水素濃度領域はそのまま低水素温度領域であるために、単原子酸素プラズマといえども十分に反応2を加速させることが出来ない。よって、不利を承知で水素濃度の低い領域で起鎖反応を進めざるを得ないのだと考えられる。

図10は、等水蒸基数密度線図である。図9と同様、ケースCの燃焼が非常に弱いことがよく分かる。このような微弱な反応の発生を一回一回カウントできるのもDSMC解析法の特徴の一つである。三ケースのいずれもが、水酸基と比べて水蒸気生産が多少の時間遅れをもって行われることを示している。また、図9と同様に水素噴流中心部では水蒸気生産が行われていない。分枝反応である反応5は水素と水酸基との間で進行するため、多量の水素が存在しても水酸基の無い領域に於て、その発生は不可能である。

図11は混合効率同様、流れと垂直な断面内部で次式により定義される水蒸気生産効率の流れ方向変化

$$\eta = \frac{\int_0^{r_{\max}} \left(\frac{n(y)}{n(y)_{\text{ref}}} \times \Omega \right) dy}{\int_0^{r_{\max}} \Omega dy} : \begin{cases} \Phi(y) > 1 \rightarrow \Omega = \frac{1}{\Phi(y)} \\ \Phi(y) < 1 \rightarrow \Omega = \Phi(y) \end{cases}$$

である。比較のため、プラズマ活性基導入の無い自発着火条件のケースAの結果を同時に載せた。弱着火条件以上の空気温度を持つケースA、Bが共に混合開始から全く時間遅れなく水蒸気を生産開始を行うことが出来ているのに対して、非着火条件のケースCには、自発着火のケースAよりも大きな時間遅れが認められる。しかしながら、出口境界付近の最終的な燃焼効率はケースCの方が2桁以上高い値を獲得しており、単原子酸素プラズマが持つ良好な強制着火・燃焼促進能力を示している。

5. 結論

1. 単原子酸素プラズマの使用により着火限界外の低温空気を用いた超音速剪断流においても燃料水素の強制着火が可能となる。
2. プラズマジェット強制着火により、自発着火よりも二桁以上大きな水蒸気生産効率が達成可能となる。

参考文献

1. 堀沢, 木村, 佐山 "スクラムジェットの着火・保炎機構に関する研究" 日本航空宇宙学会誌, 40巻, 460号, 1992
2. 小幡, 長島 "DSMC法による燃焼反応流解析" NAL SP-27, p63-68
3. 小幡ら "並列計算機を用いた超音速燃焼初期過程のDSMC解析" NAL SP-30, p59-64
4. G.A.Bird "Molecular Gas Dynamics" Oxford Univ. Press, London, 1976
5. K.Koura "Null-Collision technique in direct-simulation Monte Carlo Method" Phys. Fluids 29 November 1986 3509-3511
6. C.Borgnakke and P.S.Larsen "Statistical Collision Model for Monte Carlo Simulation of Polyatomic Gas Mixture" J. Comp. Phys. 18 405-420, 1975
7. 小幡, 長島 "DSMC法における反応分子非弾性衝突モデル" Thermal Science and Engineering, Vol.3 No.1, 1995, pp13-19
8. J.S.Evans and C.J.Schexnayder Jr "Influence of Chemical Kinetics and Unmixedness on Burning in Supersonic Hydrogen Flames" AIAA Journal, vol.18 no. 2, 1980, pp188-193
9. V.V.Voevodsky and R.I.Soloukhin "On The Mechanism and Explosion Limits of Hydrogen-Oxygen Chain Self-Ignition in Shock Waves" Proceedings of Tenth Symposium (International) on Combustion, 1965, pp279-283

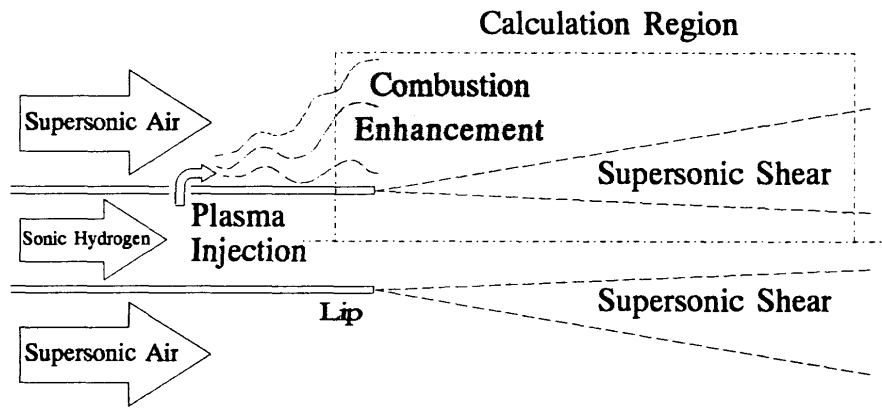


図1：二次元超音速剪断流とプラズマ噴射モデル

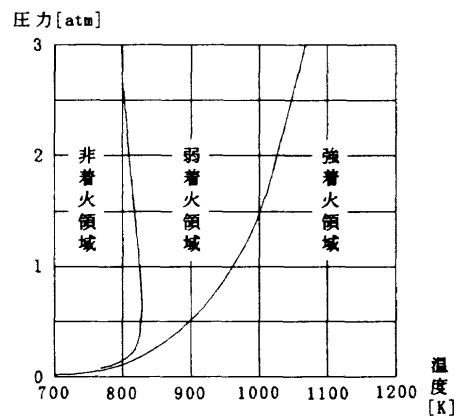


図2：水素-酸素系自発着火限界

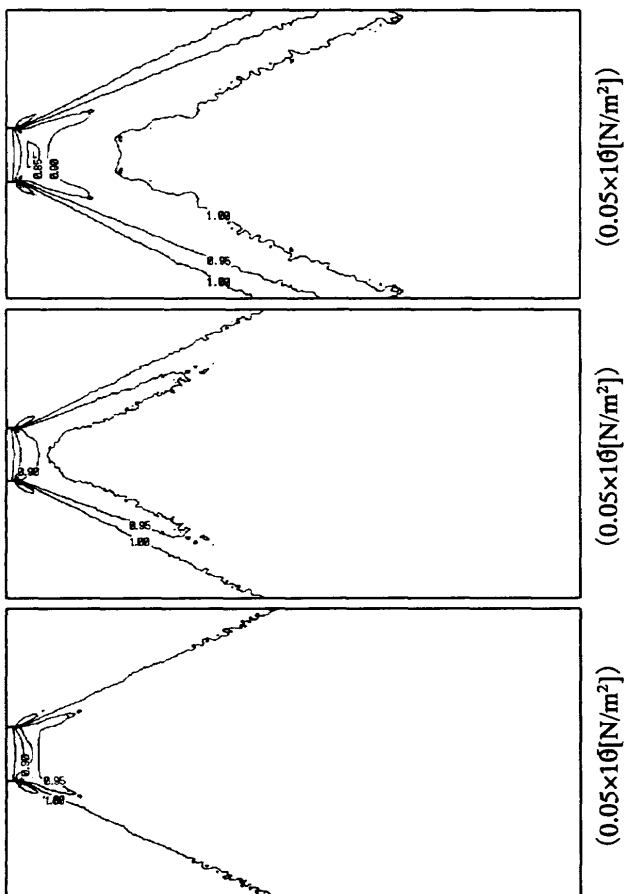


図3：等圧力線図

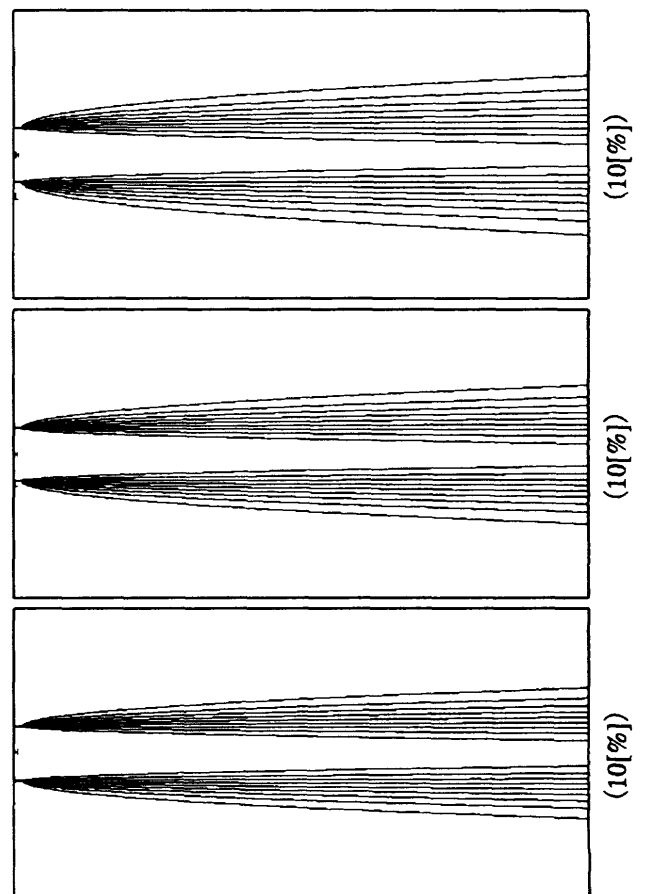


図4：等水素濃度線図

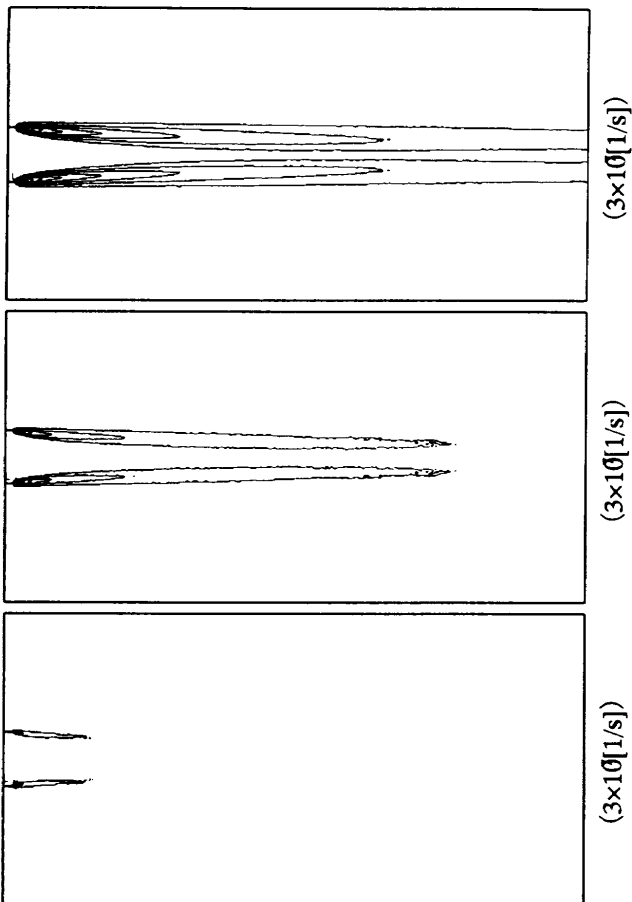


図5：等渦度線図

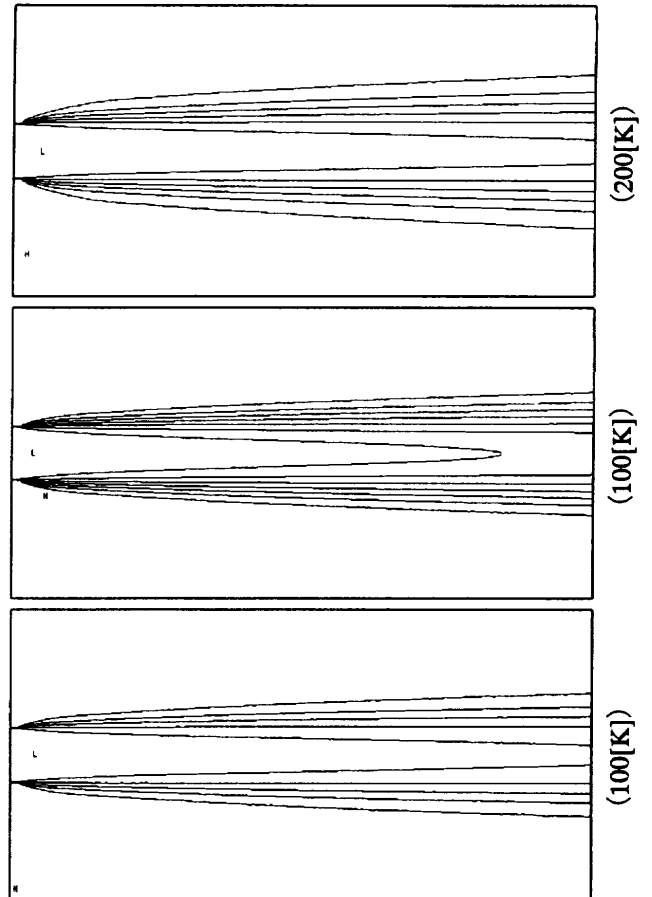


図6：等温度線図

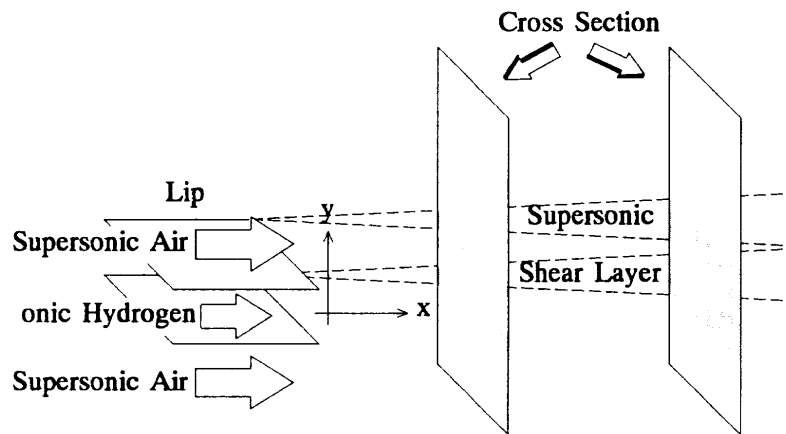


図7：効率算出断面図

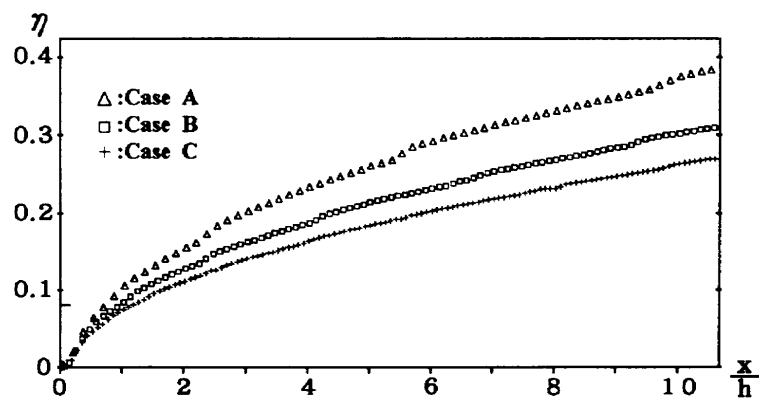


図8：混合効率

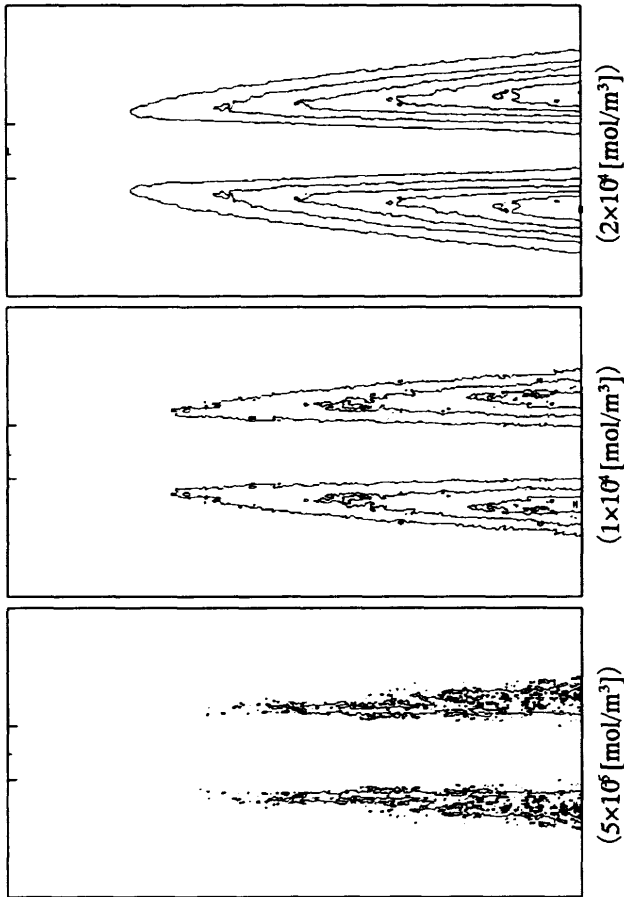


図9：等水蒸基数密度線図

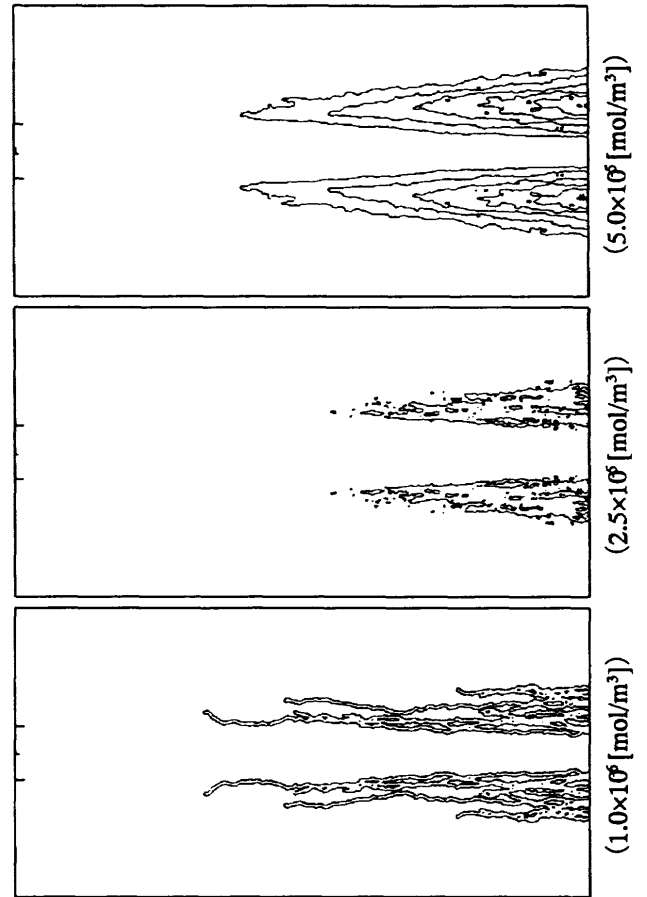


図10：等水蒸基数密度温度線図

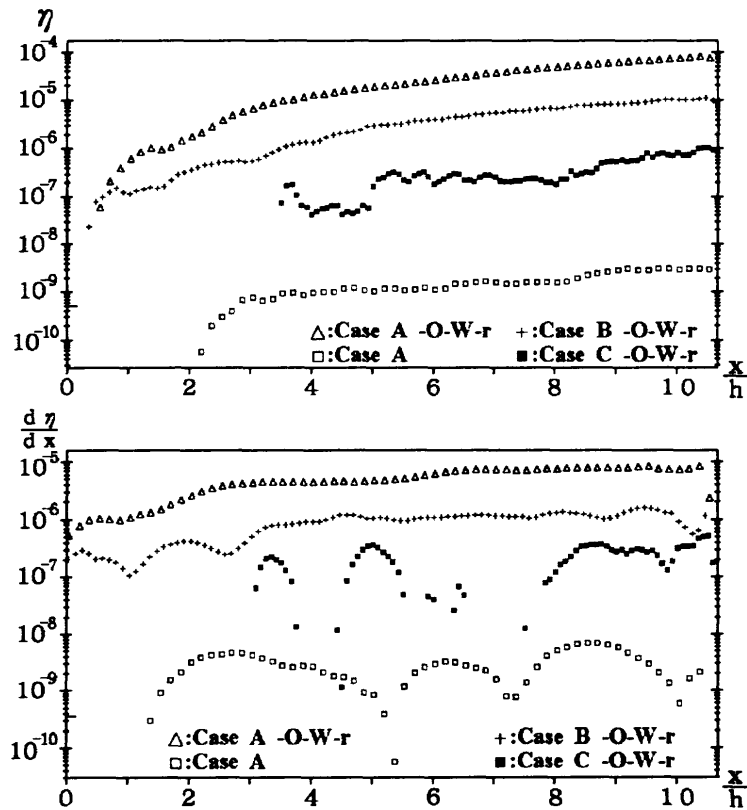


図11：水蒸気生産効率

超音速空気への水素噴射の数値計算

溝渕泰寛, 小川哲 (航技研)

Computation of Hydrogen Injection into Supersonic Air Flow

Yasuhiro Mizobuchi, Satoru Ogawa (NAL)

ABSTRACT

A hydrogen injection into a supersonic air flow is numerically calculated by solving the Reynolds averaged three-dimensional Navier-Stokes equations with chemical reactions. The effects of turbulence on the mixing are estimated using the turbulence diffusion coefficient which is proportional to the eddy viscosity coefficient which is obtained by solving the transport equations of ordinary two-equation turbulence models. The effects on the chemical reactions are estimated considering the temperature fluctuation effects on the reaction rates. The temperature fluctuation is obtained from its transport equations. The results show that for the mixing problem the computational solutions get close to the experimental results by introducing the turbulent transport coefficients. Moreover the turbulence effects on chemical reaction are estimated for the supersonic combustion.

1 はじめに

超音速空気への水素の噴射による燃焼はスペースブレーン用のエンジンとして考えられているスクラムジェットエンジンの重要な要素である。その特性は超音速噴流、混合、化学反応、乱流といったそれぞれ興味深い現象が組み合わさった複雑なメカニズムに支配される。

おおよその流れ場の様子は図1の様になると考えられる。空気/水素の混合はせん断層を中心に起こるが、この様なせん断層では流れの乱れが発達するため、分子拡散による混合よりも、それをはるかに上回る乱流運動による混合が支配的となることも考えられる。また乱れがあることによって燃焼速度が飛躍的に速くなることも燃焼の分野では良く知られた事実である。このように乱流によって混合・燃焼とも大きく促進されたため、乱流の影響をいかに計算に取り入れるかということが、数値的に解析する際、特に重要となる。これらの影響を取り入れられる最も明解な方法は、計算格子幅をコルモゴロフスケールよりも小さくとしたDNSによって最小渦まで分解し、非定常な乱流現象を追従、解析することであろう。しかしながら現在の計算機の記憶容量からいって、また将来的にも暫くは工学的、実用的な条件での計算は現実的でない。従って現状では平均量に関する方程式を扱わざるをえない。本研究では時間平均の支配方程式を用いるが、その際にはレイノルズ応力等の平均操作によって生じる諸量、及び平均操作後の化学反応項をどのように評価するかという問題が生じる。

今回この問題を解決するためのアプローチとして次の

ような比較的簡便な方法を用いた。平均操作によって生じるレイノルズ応力、乱流熱伝達、乱流拡散は従来の方法、すなわち、輸送係数を分子運動による輸送係数と乱流運動による輸送係数に分離する方法を用いて評価する。乱流輸送係数は2方程式の乱流モデルによって評価する。超音速の混合層では乱れに対する圧縮性の影響があり通常用いられる非圧縮性流体の乱流モデルでは混合を過大評価することが報告されている^[1]が、今回は研究の第一段階として非圧縮性流体の乱流モデルを用いた。化学反応項の時間平均については温度変動が反応速度に及ぼす影響を考慮したTsugé^[2]らの理論を適用する。この方法は予混合ガスの燃焼速度において成功をおさめている^[3]。この理論を適用するためには温度の変動を求める必要があるが、同じく2方程式からなるモデルから求める。

2 モデル

流れ場は熱的平衡状態にあるとする。各化学種の分子運動による輸送係数はLennard-Jonesの分子間ポテンシャルを用いて評価し、Wilkeの法則によって混合気体の輸送係数 μ を求める。

化学反応モデル

化学反応のモデルとしてはWestbrookの9化学種17反応モデル^[4]を用いた。その反応過程および反応速度を表1に示す。各化学種のエンタルピーはJANAFテーブルから引用した。

乱流による輸送係数

渦粘性係数 μ_t は通常用いられる $k-\varepsilon$ モデル等の2方程式乱流モデルの輸送方程式を解くことによって求める。

乱流拡散については、渦粘性係数を求め、Schmidt数一定とし粘性係数の増加分だけ拡散係数も増加させる。すなわち

$$D_t = \frac{\mu_t}{\mu} D \quad (1)$$

とする。

乱流熱伝達係数については一定の乱流プラントル数を仮定して渦粘性係数から求めるのが通常であるが、ここでは後述するように輸送方程式を解いて求めた温度の変動とその散逸から求める。

化学反応生成項

Arrhenius型の反応速度 W を平均温度 T と温度変動 \bar{T}^2 から以下のように求める^[2]。

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \{W(\bar{T} + \delta T) + W(\bar{T} - \delta T)\}, \delta T^2 = \bar{T}^2. \quad (2)$$

速度場乱流モデル

渦粘性を求めるためには2方程式の乱流モデルを用いる。 $k-\varepsilon$ モデルの輸送方程式は以下の通り。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i k}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right\} \\ &+ P_k - \varepsilon + D \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \varepsilon}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right\} \\ &+ \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} f_1 P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon) + E \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

$$P_k = \left\{ \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right\} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (6)$$

記号の詳細、定数等は参考文献[5]等を参照のこと。

温度場乱流モデル

温度の変動を求めるためにも2方程式のモデルを用いる。非圧縮性流体中のスカラーの変動に関する輸送方程式はJonesら^[6]によって示されているが、それは、変動の強度、その散逸、速度との相関の3つの輸送方程式からなる。ここでは、温度と速度の相関を、温度変動とその散逸を用いて表す長野らのモデル^[7]を用いる。輸送方程式は以下の通り。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \bar{T}^2}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \bar{T}^2}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_h} \right) \frac{\partial \bar{T}^2}{\partial x_i} \right\} \\ &+ P_t - \varepsilon_t + D_t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varepsilon_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \varepsilon_t}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial x_i} \right\} \\ &+ \frac{\varepsilon_t}{\bar{T}^2} (C_{P1} f_{P1} P_t - C_{D1} f_{D1} \varepsilon_t) \\ &+ \frac{\varepsilon_t}{k} (C_{P2} f_{P2} P_k - C_{D2} f_{D2} \varepsilon) \\ &+ E_t \end{aligned} \quad (8)$$

$$\alpha = C_\lambda f_\lambda \rho k \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^{-1} \left(\frac{\bar{T}^2}{\varepsilon_t} \right)^2 \quad (9)$$

$$P_t = \alpha \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (10)$$

ここに、 ε_t は \bar{T}^2 の散逸である。その他記号の詳細、定数等は参考文献[6, 7]を参照のこと。なお乱流熱伝達係数は

$$\kappa_t = c_p \alpha \quad (11)$$

と書ける。

3 支配方程式

3次元ナビエ・ストークス方程式に4つの乱流量の輸送方程式および9化学種の保存式を組み込んだ支配方程式は以下の通り。

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial F_{\xi_i}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial F_{v\xi_i}}{\partial \xi_i} + H_c + H_t \quad (12)$$

ここに、

$$Q = V \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \\ \rho f_r \\ \rho z_s \end{bmatrix} \quad F_{\xi_i} = \begin{bmatrix} n_{ij} \rho u_j \\ n_{ij} \rho u_1 u_j + n_{i1} \left(p + \frac{2}{3} k \right) \\ n_{ij} \rho u_2 u_j + n_{i2} \left(p + \frac{2}{3} k \right) \\ n_{ij} \rho u_3 u_j + n_{i3} \left(p + \frac{2}{3} k \right) \\ n_{ij} (E + p + \frac{2}{3} k) u_j \\ n_{ij} \rho f_r u_j \\ n_{ij} \rho z_s u_j \end{bmatrix}$$

$$F_{v\xi_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_{ij} \tau_{1j} \\ n_{ij} \tau_{2j} \\ n_{ij} \tau_{3j} \\ n_{ij} (\tau_{jk} u_k + q_j) \\ n_{ij} \mu_r f_{rj} \\ n_{ij} \rho (D_s + D_{st}) z_{s,j} \end{bmatrix}$$

$$E = e + \frac{1}{2}\rho(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (13)$$

$$e = \sum_s \rho z_s (H_s + \Delta H_{fs}) - p \quad (14)$$

$$p = R_u T \sum_s \rho z_s \quad (15)$$

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left(u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{m,m} \right) \quad (16)$$

$$q_j = (\kappa + \kappa_t) T_{,j} + \sum_s \rho (D_s + D_{st}) h_s z_{s,j} \quad (17)$$

$f_r (r = 1 \sim 4)$ は $k, \epsilon, \overline{T^2}, \epsilon_t$ であり, z_s は化学種 s の単位質量当りのモル数である. H_c, H_t はそれぞれ化学反応, 乱流モデルの生成項である. $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial x_i, (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ はカーテシアン座標系, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ は一般座標系である. V は計算セルの体積, n_{ij} はセル境界の面ベクトルである. その他特記の無い記号は慣用に従う.

4 解析手法

対流項の計算には Roe スキームを高精度化した TVD 数値流束^[8]で評価し, LU-ADI 法を用いて陰的に時間積分を行なっている. なお現在のところ流れは定常と仮定し定常解を求めている. また, 流れ場の対称性を仮定し半領域を計算している.

乱れの境界条件は, 一様流および吹き出し口で 0.1% の乱れを仮定し, 乱流輸送係数が分子運動による輸送係数と等しくなるように与える.

5 計算結果

化学反応が無い場合

まず, 混合の問題が本研究で用いる手法で解決できるかということ調べるために化学反応が起こらない低温流れの場合について計算し, 実験との比較を行なう.

計算対象はマッハ数 4.03 の空気への平板からの水素の吹き出しである. 噴出口は直径 D が 1.02mm の円形で平板前縁から 186mm の位置にある. 計算格子は図 2 に示したもので流れ方向に 141 点, 高さ方向に 101 点, 幅方向に 67 点である. 計算は航空宇宙技術研究所の数値風洞 (NWT) の 8pe を用いて行なった. 計算条件は表 2 の通りである.

噴流/一様流動圧比が 1.5 の場合の結果を示す. 図 3 は各断面での水素の質量分率分布である. 左から実験結果^[9], 乱流モデルを用いずにナビエ・ストークス方程式を図 2 の計算格子を用いて直接解いた結果, 明・笠木の $k-\epsilon$ モデル^[5]を用いた計算結果である. 等値線の値は実験結果と同じ値を描かせている. 乱流モデルを用いない計算では水素の拡散が充分でなく, 水素と空気の混合は実験と比較して全く不十分であることが分る. 一方, 乱流モデルを用いた場合は当然のことではあるが拡散の程度が大きく, 実験に近付いている. 次に定量的な比較を容易に

するために図 4 に噴流中心部の水素の質量分率の変化を示した. なお $q-\omega$ モデル^[10]を用いた場合の結果もあわせて示している. 乱流モデルを用いた場合はどちらのモデルの場合でも吹き出し口から吹き出し口径の 30 倍程度から下流ではかなり実験に近付いていくことが分る. 吹き出し口近くで実験と大きな差があるのは, 吹き出し口の乱れを非常に小さく与えたことが原因の一つと考えられる.

図 5 は噴流/一様流動圧比が 1.0 の場合の噴流中心部の水素の質量分率の変化である. 動圧比が 1.5 の場合と同様に吹き出し口から吹き出し口径の 30 倍程度から下流では実験と良い一致を示している.

以上示した通り混合の問題に関しては 2 方程式の乱流モデルを用いることによりかなり実験に近い解が得られることが分った.

化学反応を伴う場合

一様流の温度, 圧力を高くして自然着火する条件での計算を行なった. 計算条件は表 3 の通りである. 図 6 に温度変動の分布を示す. 温度変動は噴流と一様流のせん断層辺りで発達しており平均温度の 30% 程度の乱れが生じている. 図 7 は燃焼反応によって生じた水の質量分率を示している. 燃焼は温度変動と異なり噴流の中心部で最も活発に起こっていることが分る. 図 8 は反応速度に温度変動の影響をいれた場合とそうでない場合の比較である. 噴流中心部の水の質量分率の分布を比較している. 温度変動が 30% 程度あることを考えると, その差は非常に小さいように思われるが, これは前述の通り燃焼が活発に起こっているところで温度の変動が必ずしも大きくないこと, また流れが非平衡であることもその一因であろう.

6 まとめ

乱流が拡散および化学反応に及ぼす影響を乱流モデルを用いて考慮する計算方法を提案し, それを用いて超音速空気流れへの水素の吹き出しの数値計算を行なった.

化学反応が生じない低温の場合, 乱流モデルを用いない計算では実験と比較して全く拡散が不十分であるのに対し, 通常の 2 方程式の乱流モデルを用いて渦粘性, 乱流拡散係数を求めるという方法を用いることでかなり実験に近い解が得られることが分った.

燃焼反応を伴う流れについては, 温度変動をモデルを用いて求め, その温度変動と平均温度から反応速度の時間平均を求める反応速度モデルを用いて計算を行なった. 今回の計算条件に関しては乱れが燃焼反応に及ぼす影響はさほど大きくなかったが今後様々な反応性の流れ場に適用し, また実験と比較することにより計算方法の妥当性の検討, 改良を行なっていく必要がある.

表 1: 化学反応モデル (cm³-mole-sec-kcal units)

$$k = AT^n \exp(-E_a/RT)$$

	Reaction	Forward rate			Reverse rate		
		log A	n	E _a	log A	n	E _a
1	H + O ₂ ⇌ O + OH	14.27	0	16.79	13.17	0	0.68
2	H ₂ + O ⇌ H + OH	10.26	1	8.90	9.92	1	6.95
3	H ₂ O + O ⇌ OH + OH	13.53	0	18.35	12.50	0	1.10
4	H ₂ O + H ⇌ H ₂ + OH	13.98	0	20.30	13.34	0	5.15
5	H ₂ O ₂ + OH ⇌ H ₂ O + HO ₂	13.00	0	1.80	13.45	0	32.79
6	H ₂ O + M ⇌ H + OH + M	16.34	0	105.00	23.15	-2	0.00
7	H + O ₂ + M ⇌ HO ₂ + M	15.22	0	-1.00	15.36	0	45.90
8	HO ₂ + O ⇌ OH + O ₂	13.70	0	1.00	13.81	0	56.61
9	HO ₂ + H ⇌ OH + OH	14.40	0	1.90	13.08	0	40.10
10	HO ₂ + H ⇌ H ₂ + O ₂	13.40	0	0.70	13.74	0	57.80
11	HO ₂ + OH ⇌ H ₂ O + O ₂	13.70	0	1.00	14.80	0	73.86
12	H ₂ O ₂ + O ₂ ⇌ HO ₂ + HO ₂	13.60	0	42.64	13.00	0	1.00
13	H ₂ O ₂ + M ⇌ OH + OH + M	17.08	0	45.50	14.96	0	-5.07
14	H ₂ O ₂ + H ⇌ HO ₂ + H ₂	12.23	0	3.75	11.86	0	18.70
15	O + H + M ⇌ OH + M	16.00	0	0.00	19.90	-1	103.72
16	O ₂ + M ⇌ O + O + M	15.71	0	115.00	15.67	-0.28	0.00
17	H ₂ + M ⇌ H + H + M	14.34	0	96.00	15.48	0	0.00

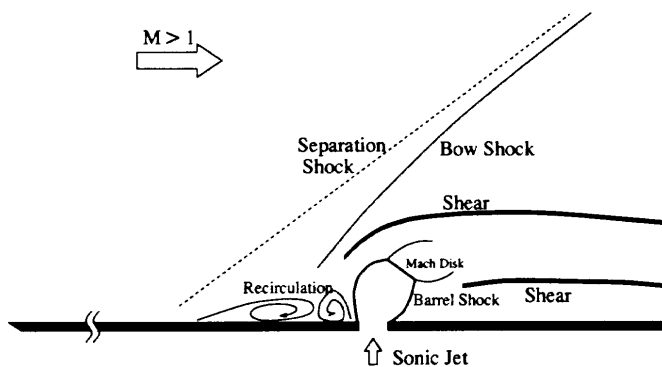


図 1: 流れ場の概要

表 2: 計算条件

	M _∞	p _{t,∞}	T _{t,∞}	M _{jet}	p _{t,jet}	T _{t,jet}
ケース 1	4.03	13.6	300	1.0	3.96	450
ケース 2	4.03	13.6	300	1.0	2.64	450

(単位 p:atm, T:K)

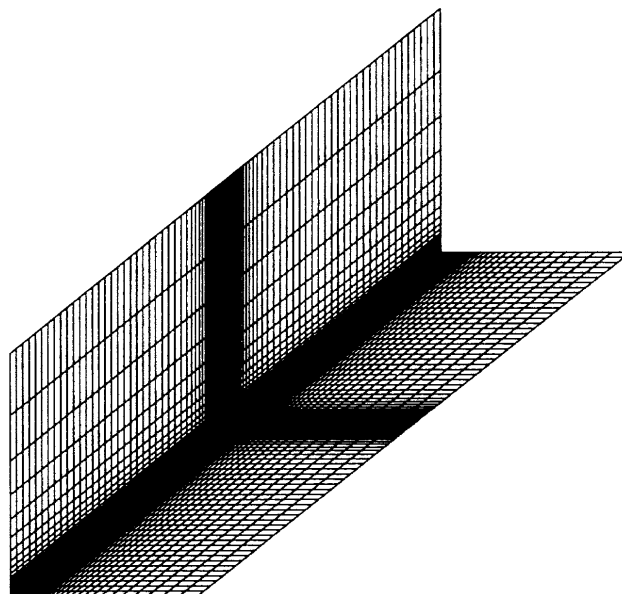


図 2: 計算格子 (141×101×65)

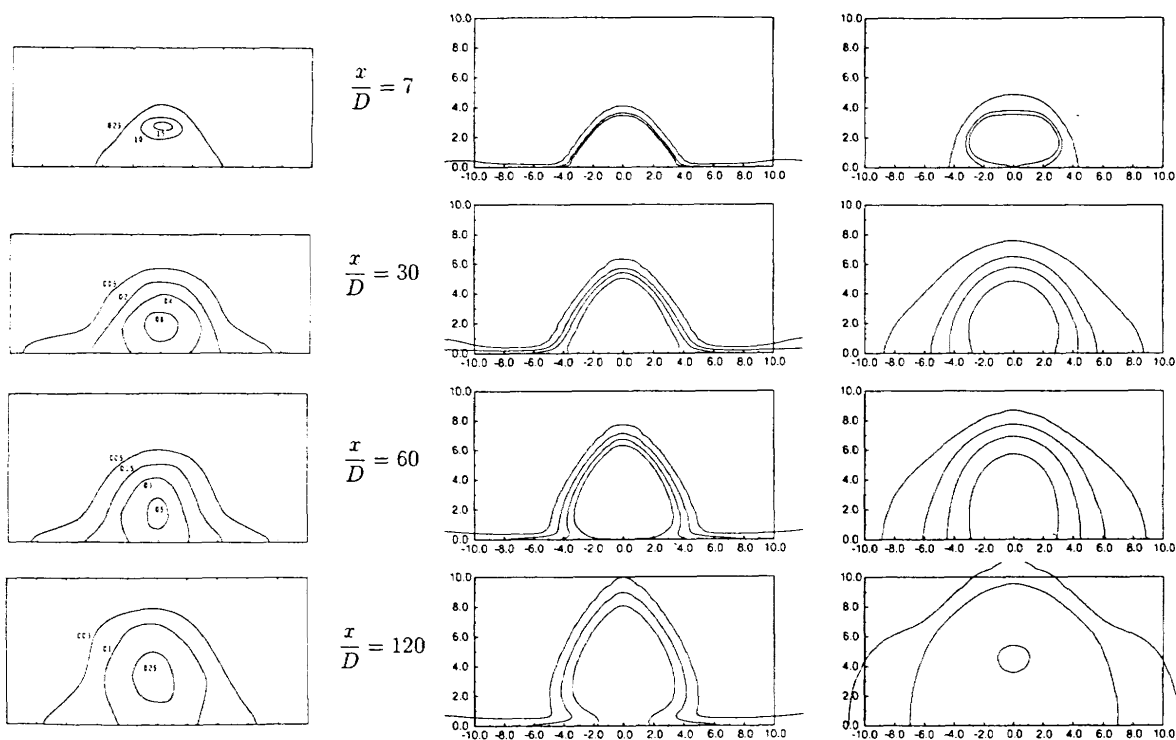


図 3: 水素の質量分率分布 (ケース 1; 左:実験結果, 中央:乱流モデルなしの計算結果, 右: $k-\epsilon$ モデルを用いた計算結果)

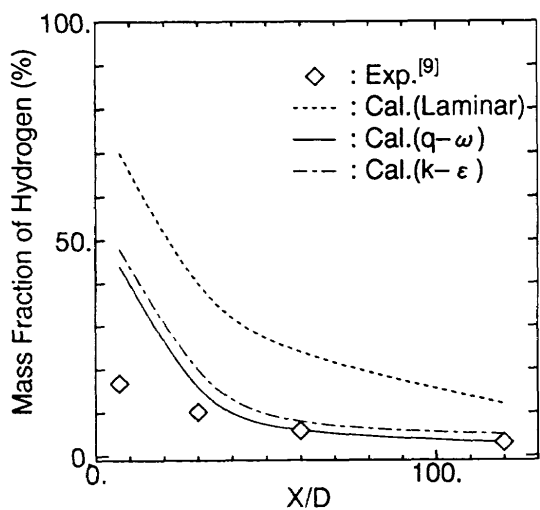


図 4: 噴流中心部の水素の質量分率 (ケース 1)

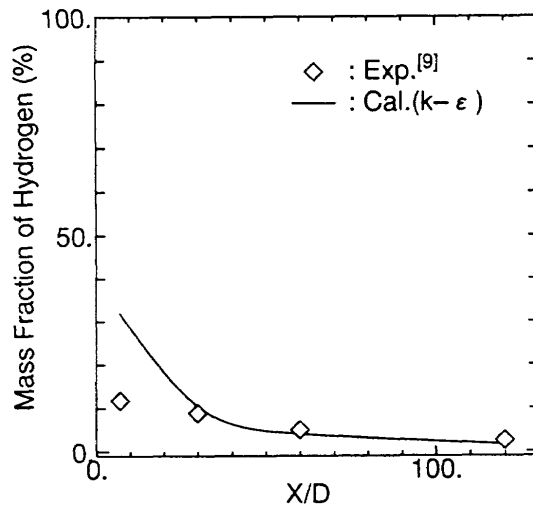


図 5: 噴流中心部の水素の質量分率 (ケース 2)

表 3: 計算条件

	M_∞	$p_{t,\infty}$	$T_{t,\infty}$	M_{jet}	$p_{t,jet}$	$T_{t,jet}$
ケース 3	4.03	68.0	3000	1.0	3.96	450

(単位 p :atm, T :K)

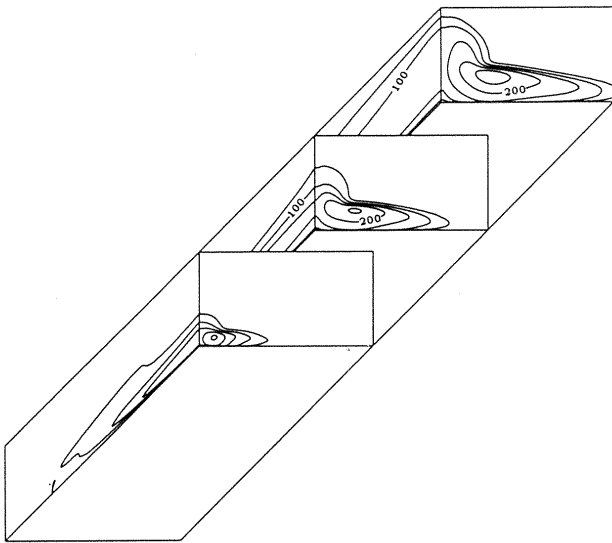


図 6: 温度変動分布 (等値線間隔 50 K)

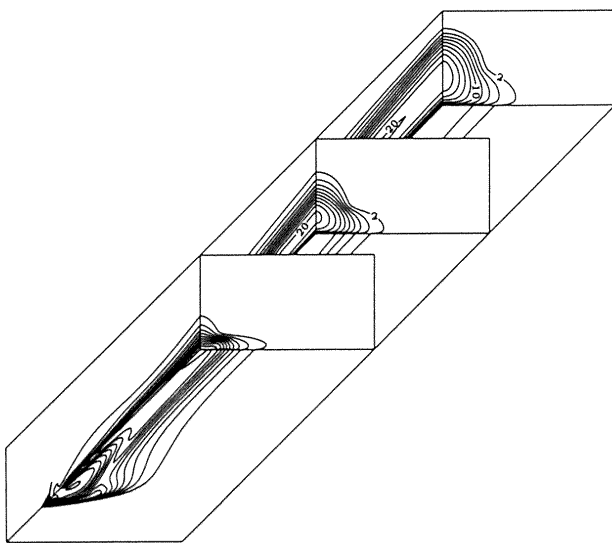


図 7: 水の質量分率分布 (等値線間隔 2%)

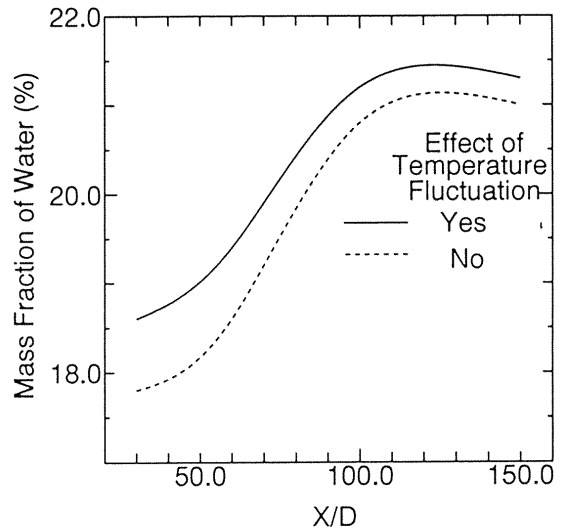


図 8: 温度変動が水の生成に及ぼす影響

参考文献

- [1] 松尾裕一, '超音速混合層の成長に及ぼす圧縮性の影響について,' 第 8 回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.395-398, 1994.
- [2] Sagara K. and Tsugé S., 'Exact Solution of BBGKY hierarchy equation,' Phys. Fluids, Vol.25, 1982, pp.1970-1977.
- [3] Tugé S. and Ogawa S., 'Turbulence as a solitary wave in physical-plus-eddy space,' Turbulent and Molecular Process in Combustion, Elsevier, pp35-50, 1993.
- [4] Westbrook, C. K., 'Hydrogen Oxidation Kinetics in Gaseous Detonations,' Combustion Science and Technology, Vol.29, 1982, pp.67-81.
- [5] 明賢國, 笠木伸英, ' $k-\epsilon$ 乱流モデルに対する新たな提案とその評価,' 日本機学会論文集 54-507, B, 1988, pp.3003-3009.
- [6] Jones W. P. and Musonge P., 'Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations,' Phys. Fluids, Vol.31, 1988, pp.3589-3604.
- [7] 長野靖尚, 田川正人, 辻俊博, '壁乱流の漸近挙動を考慮した温度場 2 方程式乱流モデル,' 日本機学会論文集.56-530, B, 1990, pp.259-265.
- [8] Wada Y., Ogawa S. and Ishiguro T., 'A Generalized Roe's Approximate Riemann Solver for Chemically Reacting Flows,' AIAA paper 89-0202, 1989.
- [9] Rogers, R. C., 'A Study of the Mixing of Hydrogen Injected Normal to a Supersonic Airstream,' NASA TN D-6114, 1971.
- [10] Coakley, T. J., 'Turbulence Modeling Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations,' AIAA Paper 83-1693, 1983.

HYPRフロントミキシングダクト内混合流の数値解析

平井健二、児玉秀和（石川島播磨重工業）
田村敦宏、菊地一雄、野崎理（航技研）

Analysis of mixing flow in front-mixing duct of HYPR engine

by

Kenji Hirai, Hidekazu Kodama (IHI)
Atsuhiko Tamura, Kazuo Kikuchi, Osamu Nozaki (NAL)

ABSTRACT

An axisymmetric Navier-Stokes code was developed to analyze mixing flow in a duct for a turbo-ramjet engine. The three-step Runge-Kutta scheme is used to drive the solution toward a steady state. The Lam-Bremhorst Low-Reynolds number $k-\epsilon$ model was used to simulate the effect of turbulence on mixing phenomenon. An experiment using a scaled model duct was conducted to validate the numerical code. The predictions of mixing, mass flow and unsteady pressure fluctuation are mainly compared with the experimental data because they are key issues for the design of the duct. Comparison with experimental data indicated that computed results successfully captured important features of mixing flow phenomenon for steady state.

1.はじめに

超音速機用推進システム^{1,2)}は、マッハ数0-3ではターボファンエンジンとして作動し、マッハ数2.5-5ではターボラムジェットエンジンとして作動する。したがって、作動中に2つのエンジン形態を切り換える必要があり、そのために通常のエンジンにはない特有の要素を持つことになる。フロントミキシングダクトもその1つであり、ここではファンにより加圧された空気（ファン空気）とエンジン入口の空気（ラム空気）とが混合し、後流に位置するラム燃焼器へと流入する（図1参照）。上記の2つの空気流量の比は、切り替え動作の進行に伴いさまざまな値をとり、混合の

様子も変化する。

フロントミキシングダクトの設計において重要な要素は、1)ダクト出口までにどの程度ミキシングが進行するか（後流のラム燃焼器の性能に影響する）、2)2つの流路のそれぞれの流量はどうなるか（特にファンからの流量はファンのストールに影響する）、3)流路内の非定常圧力振動はどの程度あるか（各構成要素にかかる力となる）、4)切り替え初期に逆流がないか（エンジン全体のシステムに影響する）である。ここでは、次項で述べる数値解析ソフトを用いて、上記1)~3)についてどの程度の予測が可能であるかを、試験データと比較して考察する。

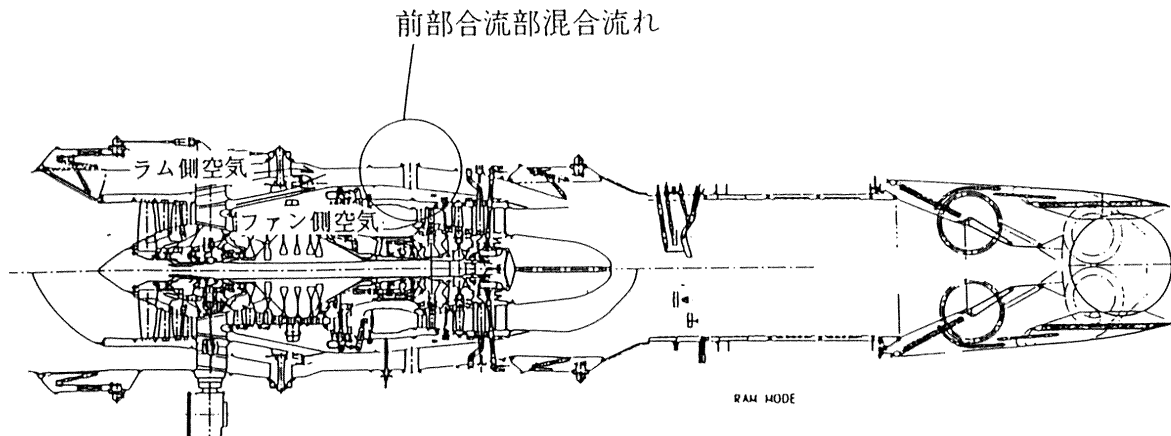


図1 超音速機用推進システム（可変サイクルエンジン）

2. 数値解析手法

基礎方程式として下記の軸対称準3次元の圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いた。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial z} + R = \frac{1}{r} \frac{\partial F'}{\partial r} + \frac{\partial H'}{\partial z} + R' = 0$$

ここで、

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ \rho v_z \\ r \rho v_\theta \\ \rho \theta \tau \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} r \rho v_r \\ r(\rho + \rho v_r^2) \\ r \rho v_r v_z \\ r^2 \rho v_r v_\theta \\ r(\rho \theta \tau + p) v_r \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_r \\ p + \rho v_z^2 \\ r \rho v_z v_\theta \\ (\rho \theta \tau + p) v_z \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\rho + \rho v_\theta^2)/r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F' = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rr} \\ \tau_{rz} \\ r^2 \tau_{r\theta} \\ F'_5 \end{bmatrix}, H' = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zz} \\ \tau_{z\theta} \\ H'_5 \end{bmatrix}, R' = \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi_{\theta\theta}/r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ただし、

$$F'_5 = r(\pi_{rr} v_r + \tau_{r\theta} v_\theta + \tau_{rz} v_z - Q_r)$$

$$H'_5 = \tau_{zz} v_r + \tau_{z\theta} v_\theta + \pi_{zz} v_z - Q_z$$

$$\pi_{rr} = \sigma_{rr} + p, \sigma_{rr} = -p + 2(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{v} \right)$$

$$\pi_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} + p, \sigma_{\theta\theta} = -p + 2(\mu + \mu_t) \left(\frac{v_r}{r} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right)$$

$$\pi_{zz} = \sigma_{zz} + p, \sigma_{zz} = -p + 2(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{v} \right)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$q_r = -\gamma \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} = -C_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$q_z = -\gamma \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} = -C_p \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\theta = \theta \tau - \frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2)$$

式中の記号については、密度 ρ 、速度 v (添え字 r, θ, z はそれぞれ半径方向、円周方向、軸方向を表す)、圧力 p 、比熱 C_p 、比熱比 γ 、エネルギー e_r 、内部エネルギー e 、静温 T 、プラントル数 Pr 、粘性係数 μ (添え字 t は乱流を表す) である。

乱流モデルとして下記のLam-Bremhorstの低レイノルズ数型 $k - \epsilon$ を用いる。

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho k v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho k v_z)}{\partial z} = G + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \rho \epsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \rho \epsilon v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho \epsilon v_z)}{\partial z} = C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\epsilon G}{k} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\rho \epsilon^2}{k}$$

ただし、

$$G = \mu_t \left(2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{v_r^2}{r^2} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 \right)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$f_\mu = (1 - \exp(-0.0165 R_\mu)) \left(1 + \frac{20.5}{R_\mu} \right)$$

$$f_1 = 1 + \left(\frac{0.05}{f_\mu} \right)^3, f_2 = 1 - \exp(-R_f^2)$$

$$R_k = \frac{\rho k^2}{\mu \epsilon}, R_\mu = \frac{\rho \sqrt{k} y}{\mu}$$

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92$$

式中の記号については乱流エネルギー k 、散逸率 ϵ 、壁面からの距離 y である。

解法としては3段階ルンゲ・クッタ法を適用し、陽的に解いている。また、対流項は2次精度中心差分に2次と4次の人工粘性を加えて評価し、粘性項は2次精度中心差分で評価している。定常状態の計算時には、収束を加速するために局所時間刻みを用いる。

3. モデル試験

モデル試験装置の構造と計測仕様を図2に示す。

試験条件については、切り替え初期にあたるラム空気/ファン空気流量比0.0から、切り替え後期にあたる流量比1.6までの範囲とした。

計測については、ミキシングの進行と流量を把握するために、入口での全圧と全温測定を行い、断面AからEでのトラバース装置による定常全圧計測と静圧孔による定常壁圧計測を行った。また、流量比0.0の場合のみについて、非定常圧力振動の計測を、壁面A及びBの位置でクーライトを用いて行った。切り替え初期の逆流の有無の判定については、タフトによる可視化により、実施した。

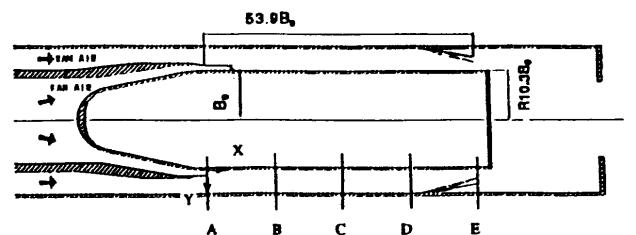


図2 モデル試験装置の構造および計測仕様

4. 結果

計算概要

計算領域はファン空気側とラム空気側の2領域に分け、接続境界で格子点を共有している。格子点数は基本的にファン空気側に 100×30 点、ラム空気側に 100×50 点である(図3参照)。ただし、格子点数の影響を見るために各方向2倍の格子点数での計算を実施し、解の精度に影響が少ないことを確認した。境界条件として、入口で全温、全圧、流入角を与え、出口で静圧を与えており、壁面はノンスリップ条件としている。接続境界上では、各変数を線形補間して与えた。流量比としては0.0、0.8、1.6の3ケースについて計算を実施した。

ミキシング予測

3ケースの流量比でのマッハ数線図を図4に、断面AからEでの速度分布について、試験値と予測値の比較を図5に示す。流量比0の場合は断面Cでほぼ平坦な速度分布までミキシングが進行している一方、流量比1.6の場合は断面Eでも若干速度分布が残っている様子が試験結果から読みとれる。本計算コードによる予測値は、どの流量比でもミキシングの様子を定量的に再現していることが分かるが、予測値の方がやや早めにミキシングが進行する結果となっている。この原因としては、ファンダクト内壁の境界層が試験値よりも厚く見積られている(図5参照)のために、ファンからの流れが混合層側に曲げられてミキシングを促進しているということが考えられる。

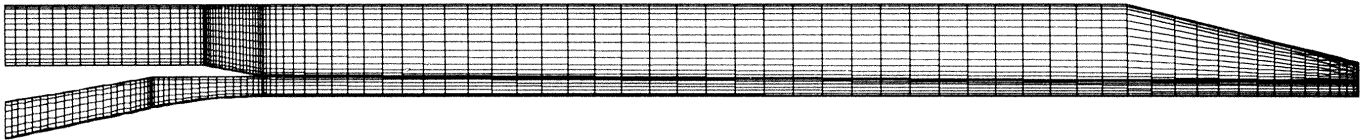
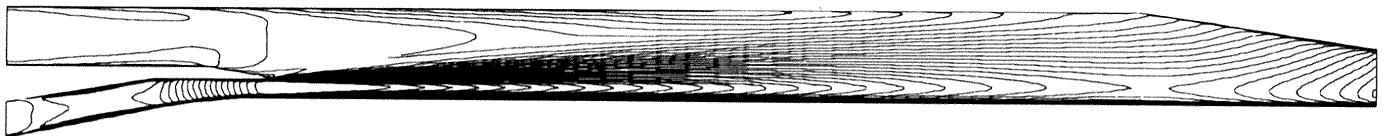


図3 計算格子



(a) 流量比0.0

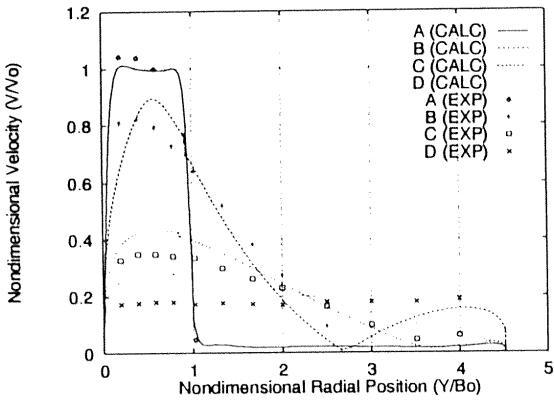


(b) 流量比0.8

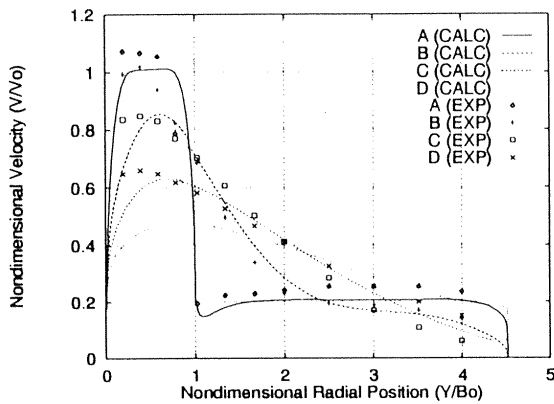


(c) 流量比1.6

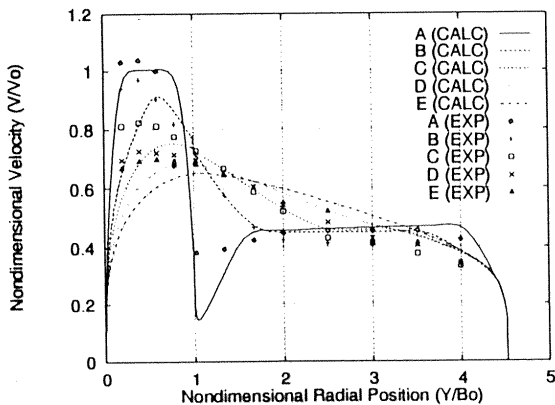
図4 等マッハ数線図



(a) 流量比0.0



(b) 流量比0.8



(c) 流量比1.6

図5 速度分布

流量予測

各流量比での流量予測を図6に示す。ファン空気流量を小さめに予測する傾向があるものの、全体的に見ると、流量予測精度については全ケースで約±10%であり、設計ツールとしての有用性は確認された。

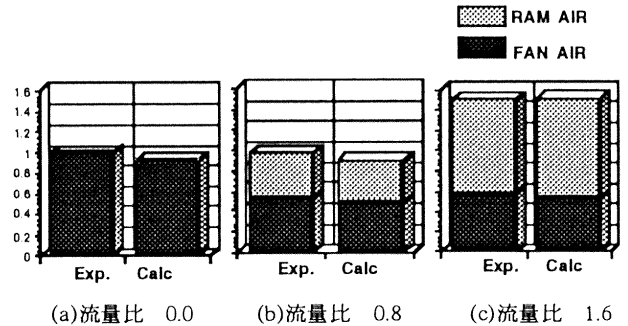


図6 流量予測

また、図7-(1)に示すように流入部の計算領域を拡大して計算を実施した(CASE 2)ところ、ファン空気流量がさらに小さく見積られる結果となった(図8)。計算結果を詳細に見ると、ファンダクト内壁の境界層が厚く評価されており、そのために流量が小さくなっていると思われる。ファンダクト内壁は鈍頭ノーズに沿う加速流によって境界層発達が抑制されているはずであり、計算ではその効果を正しく再現できていないと予想される。再現できない原因としては、乱流モデルの性能や計算スキームの問題などが考えられ、今後の改善が必要である。

また、合流部の仕切り板の後縁部の厚さを考慮した計算も実施した結果(CASE 3、図7-(2))、ラム空気流量がオリジナルの計算よりも数%減少した(図8)。これはウェイクが厚くなり圧力損失が増えたために、出口での全圧が減少し、その結果流量に影響が現われたものと考えられる。ラム空気流量の減少が大きく、ラム/ファン空気流量比はオリジナルの計算値1.89から、試験値1.63に近い1.64という値まで改善された(図9)。

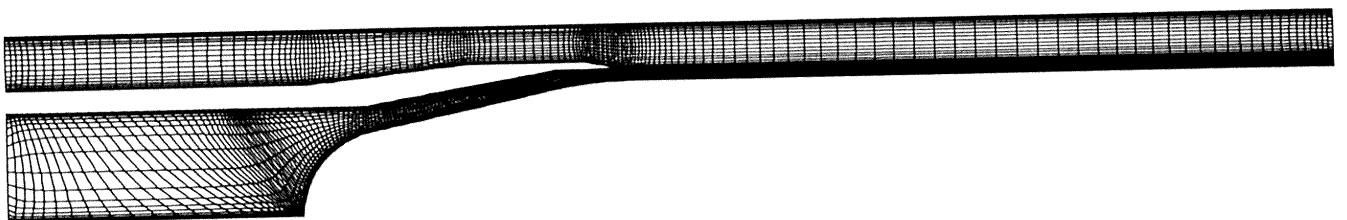


図7-(1) 計算領域の変更箇所(CASE 2)

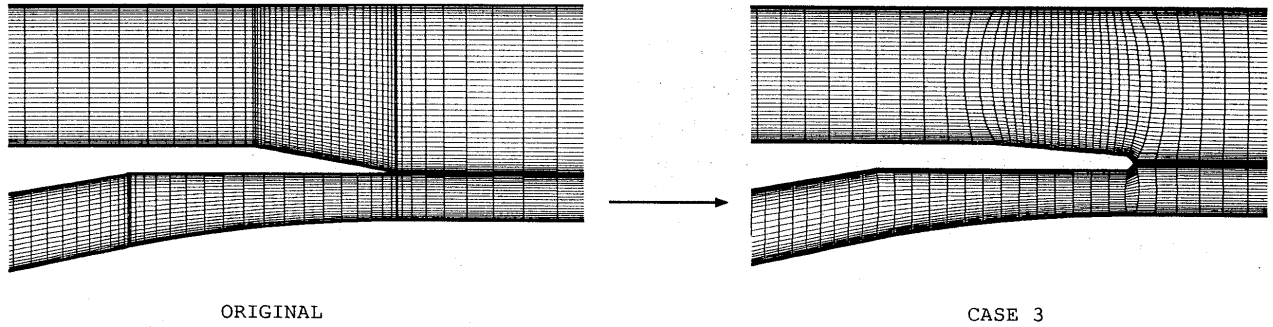
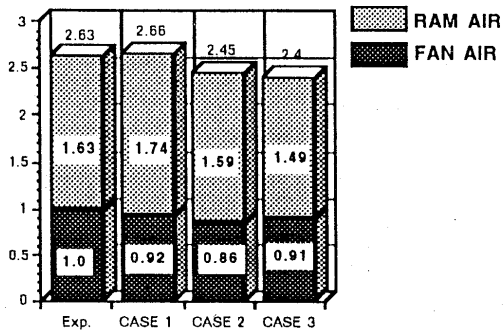


図 7-(2) 計算領域の変更箇所(CASE 3)

非定常空気力予測



CASE 1: オリジナルの格子
 CASE 2: 鈍頭ノーズを含めた格子
 CASE 3: 分離板の後縁部厚さを考慮した格子

図 8 流量予測

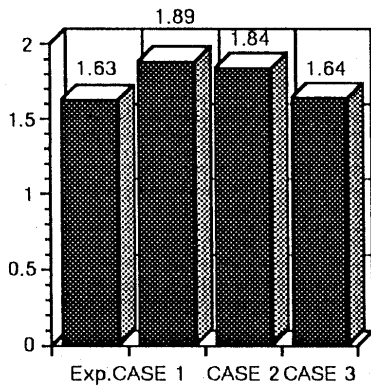


図 9 流量比予測

図 10 に示すように、流量比 0.0 の場合の流線を見ると、ラムダクト側に大きな渦が形成されていることが分かる。この渦に代表されるように、流路内の渦による圧力振動がどの程度なのかを設計上把握しておく必要がある。

モデル試験の結果、断面 B での圧力振動は定常圧力の最大 5% 程度であり、エンジン構成要素には大きな影響がないことが確認された。定常計算と同じ境界条件のまま、数値解析によりこの圧力振動の再現を試みたが、圧力振動は 1% 未満 (図 11) であり、渦による圧力変動はこの程度だと推測される。試験で得られた 5% の振動は他の原因によるものと考えられ、非定常現象を扱えるような境界条件を今後導入して数値解析を実施していく必要がある。

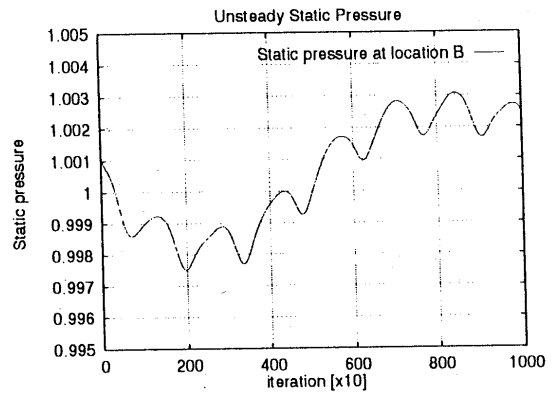


図 11 圧力振動 (壁面 B)

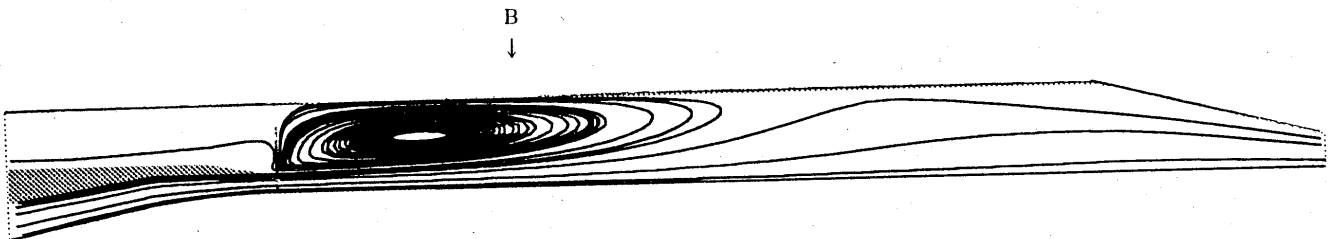


図 10 流線図 (流量比 0.0)

5.まとめ

本数値解析手法により、フロントミキシングダクト部の流れについて、定常性能を定量的に予測できることを確認できた。また、ミキシング性能予測において、予測精度に影響のある解析条件についての知見を得た。しかし、非定常性能の予測は、境界条件の与え方について今後の改善が必要である。

参考文献

- (1) Miyagi,H., Miyagawa,H. et al., "Combined Cycle Engine Research in Japanese HYPR project", AIAA95-2751, 1995.
- (2) Miyagi,H., Miyagawa,H et al., "Research and Development Status of Combined Cycle Engine Demonstrator", 第2回 超音速輸送機用推進システム 国際シンポジウム 予稿集, pp.237-244, 1995.
- (3) Lam,C.K.G. and Bremhorst,K., "A modified form of the k-e model for predictig wall turbulence" , J.Fluid. Engng., Vol.103, pp.456-460,1981

流路切り換え機構の空力解析

清水邦弘^{*1}、中西英全^{*1}、三宅慶明^{*1}、東森弘高^{*1}

野崎 理^{*2}、菊地一雄^{*2}、田村敦宏^{*2}

Aerodynamic Analysis of the Flow Switch Device

by

Kunihiro Shimizu^{*1}, Hidemasa Nakanishi^{*1}, Yoshiaki Miyake^{*1}, Hirotaka Higashimori^{*1}

Osamu Nozaki^{*2}, Kazuo Kikuchi^{*2}, Atsuhiko Tamura^{*2}

ABSTRACT

The variable bypass fan engine is proposed as an engine configuration to reduce noise at take-off & landing and to obtain high specific thrust during supersonic flight. The Flow Switch Device is one of the methods to change bypass ratio. 3D Viscous Analysis was conducted to grasp the aerodynamic characteristics of the Flow Switch Device, comparing with test results.

The analysis qualitatively predicted the total pressure loss at the exit side of the Flow Switch Device, and was proved to be quite useful improvement design.

1. はじめに

第2世代超音速旅客機用のエンジンは、超音速飛行時の高比推力と同時に、離着陸時の低騒音が要求されている。騒音は排気速度の8乗に比例するため、排気速度の低減が低騒音化には最も有効であるが、超音速飛行時に高比推力を得るためには排気速度を上げる必要がある。

これはエンジンの性能面からは相反する課題となり、その両立をはかるためには何らかの可変機構により離着陸時のエンジン排気空気流量を増加させて排気速度の低減をはかる形態とする必要がある。

図1にバイパス比と排気速度の関係を示すが、最新の亜音速旅客機用のエンジンは高バイパス比により排気速度が350m/sレベルとなっている。

種々ある候補エンジン形態の中で最も直接的かつ有効にエンジン排気空気流量を増加させるエンジン形態として可変バイパス・ファンエンジンが提案されており、この可変バイパス・ファンエンジンを成立させるためのキーテクノロジーとなるのが流路切り換え機構である。

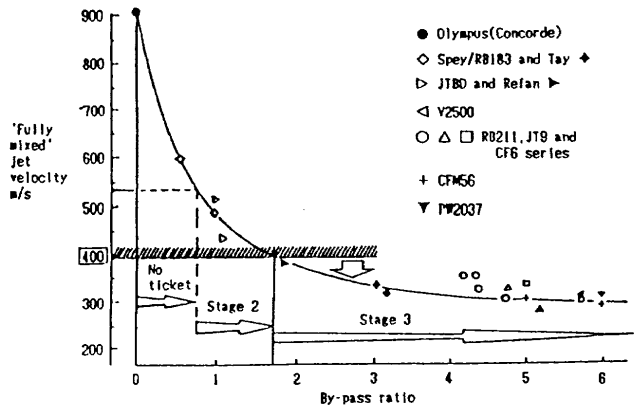


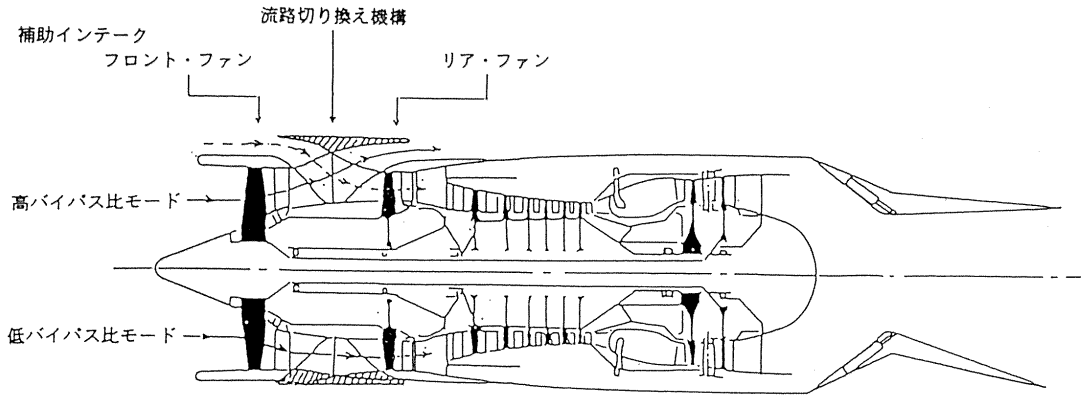
図1 バイパス比と排気速度の関係

本機構を用いた可変バイパス・ファンエンジンの概念図を図2に示す。ファン部を2段軸流形態としてフロント・ファンとリア・ファンの段間に流路切り換え機構を設置しバイパス比を可変とする。超音速飛行時はフロント・ファンとリア・ファンを直列の2段ファンとして作動し（低バイパス比モード）圧力比を高めエンジンとして高比推力を発生する。一方、離着陸時はフロント・ファンとリア・ファンを並列の2つの単段ファンとして作

*1三菱重工業株式会社 *2航空宇宙技術研究所

動し（高バイパス比モード）バイパス側の空気流量を増やしてエンジン排気速度を低減することにより低騒音化をはかる。

高バイパス比モード：フロント・ファン、リア・ファン共に大気吸い込み状態。
離着陸時、亜音速巡航時など。



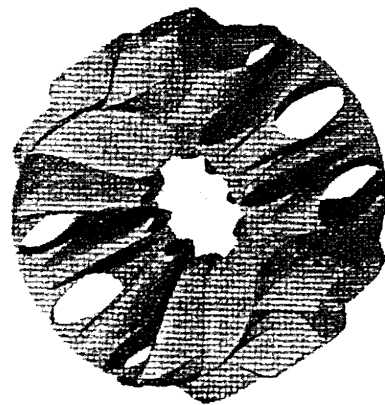
低バイパス比モード：フロント・ファン、リア・ファンを直列で用い2段ファンとして作動。
遷音速加速時、超音速巡航時など。

図2 可変バイパス・ファンエンジンの概念図

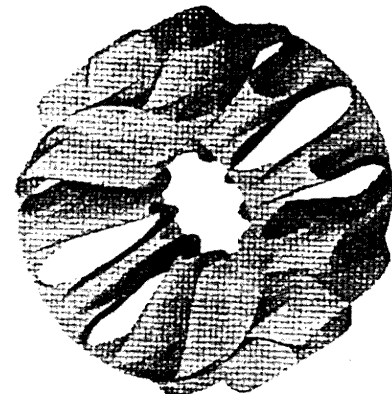
2. 流路切り換え機構

流路切り換え機構の概念図を図3に示す。切り換え機構は、上流側・下流側の2つの部分から構成され、一方が他方に対して相対的に回転することにより上流と下流の流路の接続が変化する構造となっている。上流側の部分は、入口が内径側と外径側に仕切られたセルとなっており、出口は周方向に等分に仕切られたセルとなっている。下流側の部分はその逆で入口が周方向に等分仕切られたセルとなっており、出口が内径側と外径側に仕切られたセルとなっている。双方の合わせ面は、周方向に等分に仕切られたセルの部分であり流路の切り換えは仕切られた1つのセルに相当する角度だけ周方向に回転して流路の接続を変更する。

低バイパス比モード時は、切り換え機構の入口内径側と出口内径側・入口外径側と出口外径側がそれぞれ接続し、高バイパス比モード時は、切り換え機構の入口内径側と出口外径側・入口外径側と出口内径側がそれぞれ接続する。



低バイパス比モード



高バイパス比モード

図3 流路切り換え機構概念図

3. 解析手法

(1) 解析コード

解析コードは3次元レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式を差分法により時間方向に解いて定常解を求める。

対流項の空間離散化には、van LeerのMUSCL法¹⁾によるTVD差分スキームを用い、粘性項は中心差分を用いた。時間差分には、Pulliam-Chausseeの対角化近似因子法²⁾を用いた。

TDV差分スキームは、Godunov³⁾型の上流差分スキームで、Roe⁴⁾の平均化により得られる数値流束関数の式を用いてリーマン問題を近似リーマン解法で解いている。Godunov型のスキームは1次精度でTVD安定に解を求めるが、ここではさらに区分的1次関数を仮定するMUSCL法により2次精度に改良されている。なお、乱流モデルはBaldwin-Lomaxモデルを用いた。

(2) 解析格子

解析は、低バイパス比モードと高バイパス比モードの2ケースについて行われた。図4に解析格子を示す。

格子は、流れ方向に55点、周方向に39点、径方向に80点である。

(3) 境界条件

入口境界では全圧、全温、流入角を与え、出口境界では静圧を与えた。これらの値は、試験結果を用いたが出口静圧については、流量を試験結果に一致させるために変更した。

4. 解析結果

図5に低バイパス比モードの解析結果を示す。内径側では流路の中央付近から剝離が発生している。これは、内径側の流路面積変化の急変によるものと考えられる。

外径側では、通路の後半部から剝離が発生して大きな渦を形成しており、流路面積の変化と外形側の曲率が影響しているものと考えられる。

図6に高バイパス比モードの解析結果を示す。内径側では大きな剝離はない。外形側では流路中央付近から剝離が発生しているが低バイパス比モードと比較すると小さい。

以上の結果から流路後半部の形状については、改良の余地があることが判明した。

5. 試験結果との比較

図7に解析結果と試験結果の比較を示す。図は、流路出口における全圧分布を比較したもので、等高線および下限値は試験結果に合わせた。

損失のレベルは解析結果の方が大きいですが、分布については、定性的に一致していると考えられる。

表1に全圧損失係数の比較を示す。解析結果は低バイパス比モード、高バイパス比モードとも試験結果より約3%大きい。ただし、高バイパス比モードと低バイパス比モードの全圧損失係数の比は、ほぼ一致する。

表1 全圧損失係数の比較

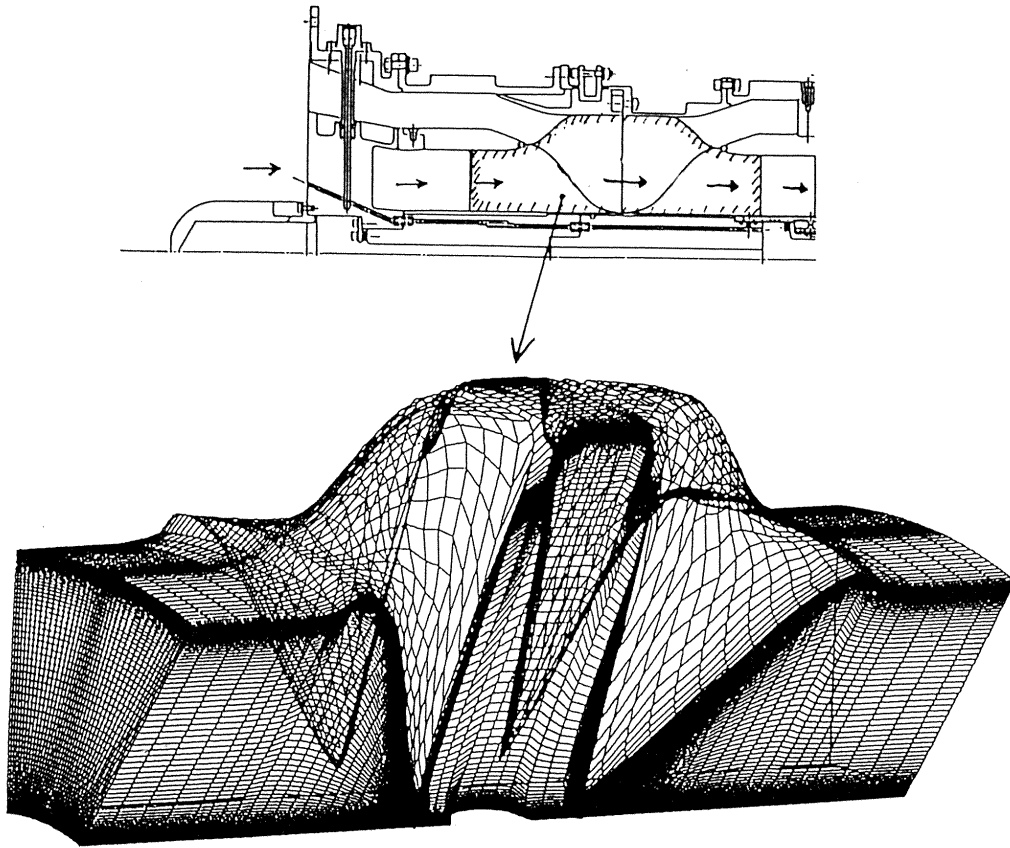
	試験	解析
低バイパス比モード	7.78 %	10.90 %
高バイパス比モード	6.96 %	9.40 %

6. まとめ

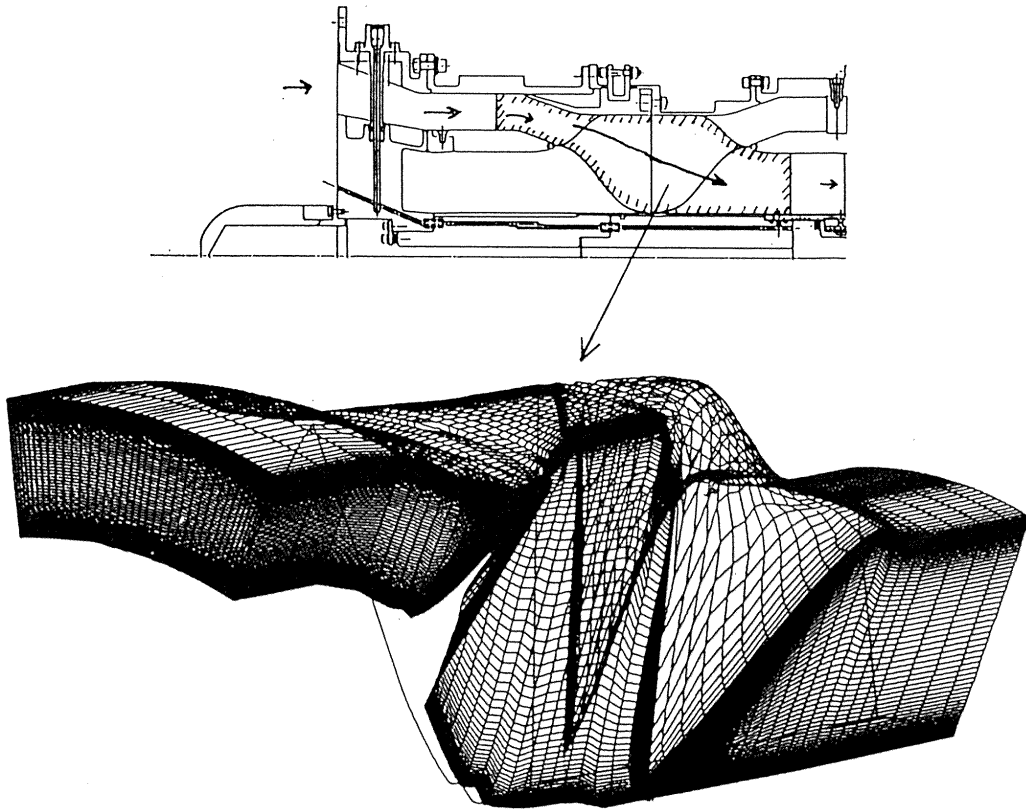
- (1) 定性的な傾向は、全圧分布、損失係数とも試験結果とほぼ一致する。
- (2) 剝離の発生領域を特定できるため、改良の検討に本解析コードが有効であることが判明した。

7. 参考文献

- 1) van Leer, B., "Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A second order sequel to Godunov's methods," J. Comp. Phys., Vol. 32, 1979, pp. 101-306.
- 2) Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of a Implicit Approximate-Factorization Algorithm," J. Comp. Phys., Vol. 39, 1981, pp. 347-363.
- 3) Godunov, S.K., "Finite difference methods for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics," Mstematicheskii Sbornik, Vol. 47, 1959, pp. 271-306.
- 4) P.L. Roe, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," J. Comp. Phys., Vol. 43, 1981, pp. 357-372.

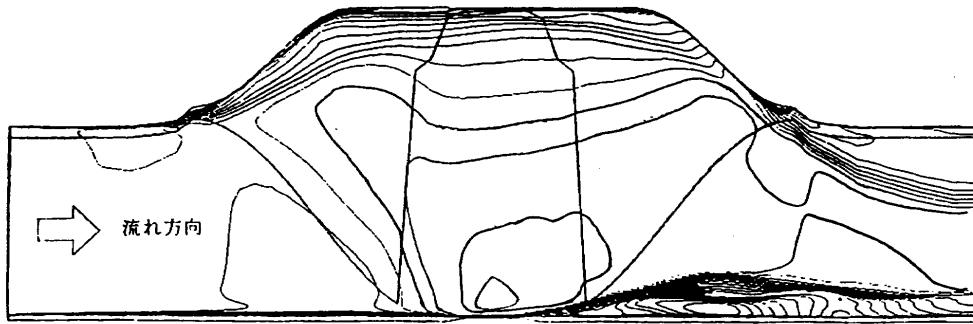


低バイパス比モード

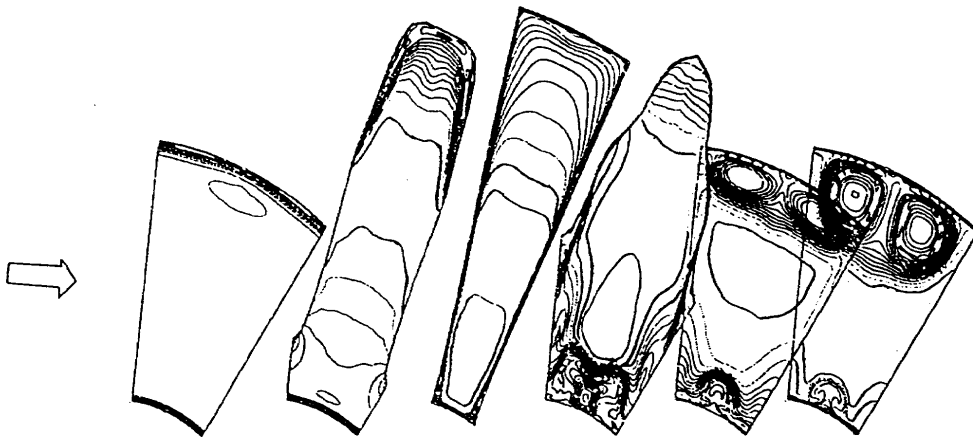


高バイパス比モード

図4 解析格子

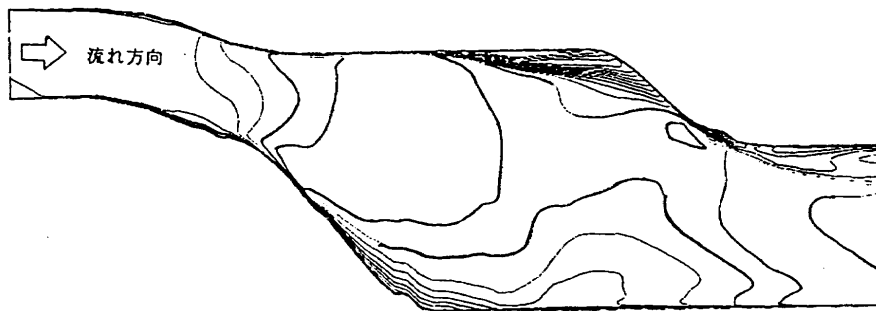


流れ方向等マッハ線図

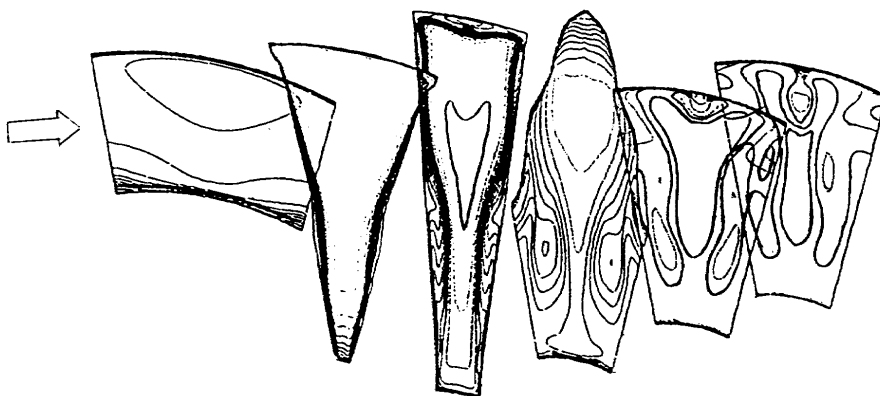


任意断面等マッハ線図

図5 低バイパス比モード解析結果

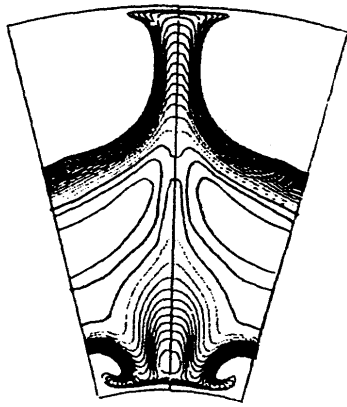


流れ方向等マッハ線図

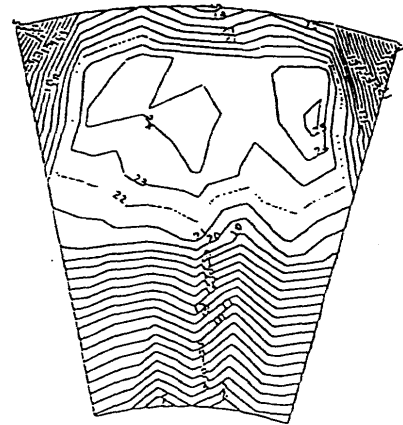


任意断面等マッハ線図

図6 高バイパス比モード解析結果

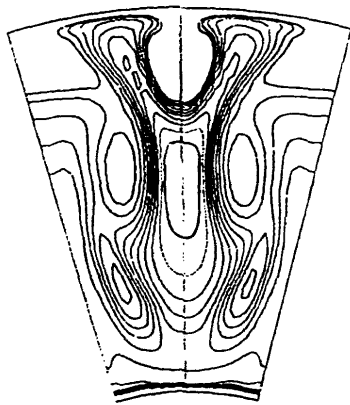


解析結果

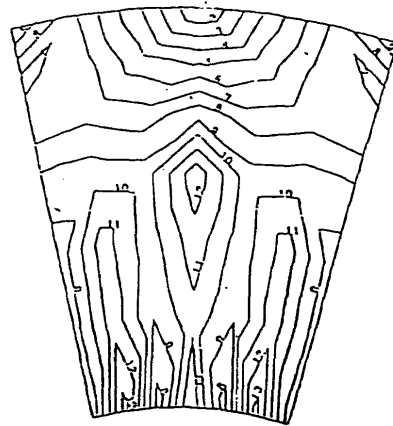


試験結果

出口全圧分布（低バイパス比モード）



解析結果



試験結果

出口全圧分布（高バイパス比モード）

図7 解析結果と試験結果の比較

コンプレッサ全周流れの数値シミュレーション

菊地一雄*、松尾裕一*、野崎 理*
松永康二**、竹内久雄**、平井健二**

Unsteady Flow Analysis of a Compressor Blade Row with Inlet Distortion

by

Kazuo KIKUCHI, Osamu NOZAKI, Yuichi MATSUO
National Aerospace Laboratory
Koji MATSUNAGA, Hisao TAKEUCHI, Kenji HIRAI
Ishikawajima-Harima Heavy Industries Co., Ltd

Abstract

Unsteady flow simulation has been conducted to a compressor rotor blade row with inlet distortion. As the distortion, lower total pressure is assumed in 1/3 of the circumference of the cascade. In the computation, Newton iteration is incorporated time accuracy. To deal with 30 blade passages at the same time, 30 processing elements of NWT are used and the flow field of each passage is computed in parallel. The solution was obtained stably, and its result agreed with experimental data qualitatively.

はじめに

現在の翼列の三次元流れ解析は、ナビエ・ストークス方程式を時間進行法により解いて定常な解を求めることでは十分な精度を持っている。翼列設計においてもタービン翼列では定量的にも信頼できる数値シミュレーションが行われている。しかし、ファン、コンプレッサなどの減速翼列においては、定性的なシミュレートさえ出来ないことがある。その理由の一つとして、タービン等の翼列に比べ、流れが剥離し易く、その領域も大きく、時間的な変動も無視できないことがある。即ち、ファン等の流れは非定常現象として捉えることが解析の精度を向上させる一つの方法である。

著者らは上記の観点から非定常ナビエ・ストークス流れ数値シミュレーションの設計への応用をにらみながら、その一環として非定常流れ解析コードを中核とした翼列設計支援システム構築のための格子生成、流れ解析、結果処理、画像表示それぞれの熟成と、相互インターフェースの基礎的な資料を得るために研究を進めている¹⁾。非定常流れ解析の検証は、コンプレッサ全周流れ及びタービン単段

流れの数値シミュレーションについて行っている。ここではインレットディストーションのあるコンプレッサの全周流れの検証について述べる。

多くのエンジン要素の数値シミュレーションは空気が一様に流入する条件で行われているが、これは例えば巡航状態の航空機エンジンを模擬していることになる。一方、機体の旋回、横滑りあるいは離着陸時に横風を受ける場合などには流入する流れの速度、流量が不均一となる。この状態がインレットディストーションである。ファンやコンプレッサに不均一な流れが流入すると旋回失速やサージなどの危険な非定常現象が起こり、エンジンの停止や翼列の破壊につながるなど、ディストーションは性能や安全性に大きな影響を及ぼす現象である。

今回の目的は、インレットディストーションのあるコンプレッサの非定常流れ解析を行うことにより実験値との比較を通してコードの実用化と構造強度から興味のある非定常な翼面荷重を含む空力性能の推定を行うことである。

1. 非定常流れ解析の特徴

数値解析上の問題として、ディストーションの無い流れにおいては多くの場合周期計算条件が成り立つので一翼間の流れの定常解を求めればよい。ディストーションのあ

* 航空宇宙技術研究所

** 石川島播磨重工業

る動翼列の場合には全周で非定常な計算となりシミュレーションする上で2つの問題点が出てくる。

第一は大容量、高速な計算機と時間精度の良い非定常流れ解析コードを必要とすることである。本研究では当所で開発した非定常三次元ナビエ・ストークスコードと数値風洞 (Numerical Wind Tunnel : NWT) を使用した。第二の問題は、大量な計算データの後処理である。これに対しては表示するデータ領域、表示方法を事前に吟味して必要なデータのみをワークステーションに転送するというあたりまえの方法が非常に有効であり、今回はこの方法により行った。

2. 計算コード

流れ解析に使用したコードは三次元非定常ナビエ・ストークス方程式を差分法により時間進行法を用いて解いている。又 Chakravarthy-Osher の TVD法を使い、乱流モデルとして Baldwin-Lomax モデル、非定常アルゴリズムには Newton 法を用いている^{2),3)}。

3. 検証翼列

入口にインレットディストーションのある流れによる翼列実験は公表されているものが少ないが、ここではチップスピードが大きく、圧力比の高いコンプレッサの動翼列

を選んだ^{4),5)}。その諸元を表に、又、実験装置の流路形状を図1に示した。

実験では空気取入口の周方向1/3、120度にスクリーンを取り付けてディストーションを発生させている。流れは一様流部分の平均で、マッハ数0.493、入口全圧9041kg/m²、入口全温299.7K、出口静圧16223.5kg/m²である。

表 検証翼列諸元

翼枚数	30枚
回転数	11088rpm
流量	84.8kg/s
圧力比	2.0
周速度	487.6m/s
相対マッハ数	1.6 ^{*1}
直径	0.8104m ^{*2}
ボス比	0.5 ^{*3}
ソリディティ	1.3 ^{*1}
アスペクト比	1.66 ^{*4}

(*¹ 翼端, *² 翼後縁, *³ 翼前縁
*⁴ 平均翼高/root chord)

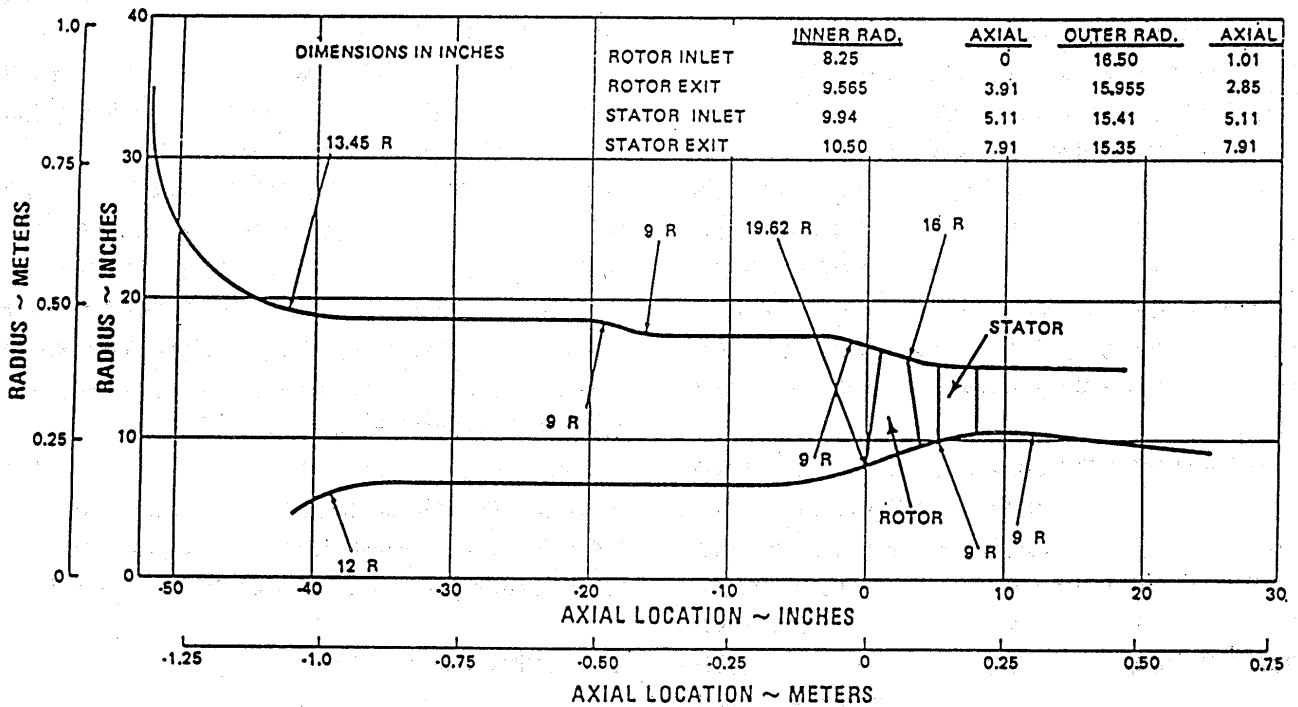


図1 流路形状

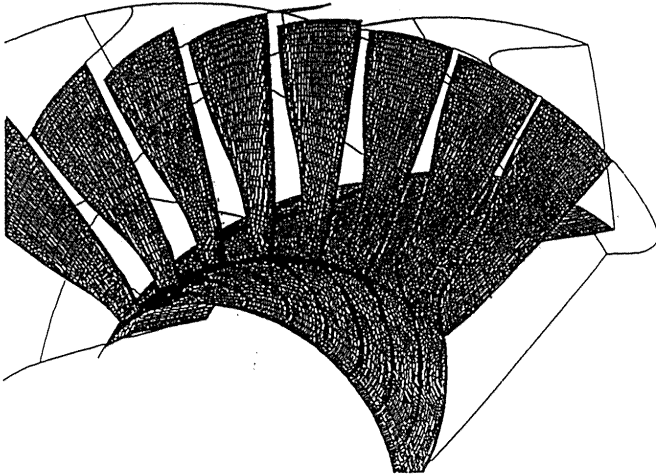


図2 翼配備及びハブ、翼面の計算格子

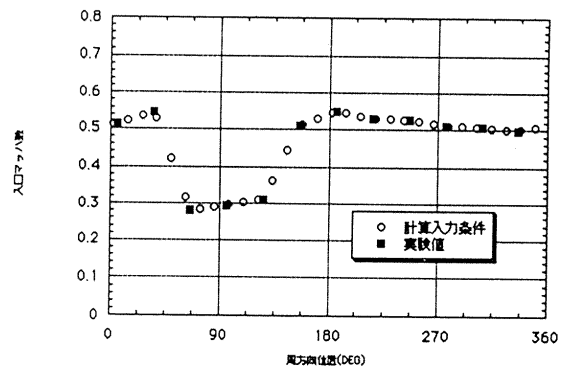


図3 入口でのマッハ数分布

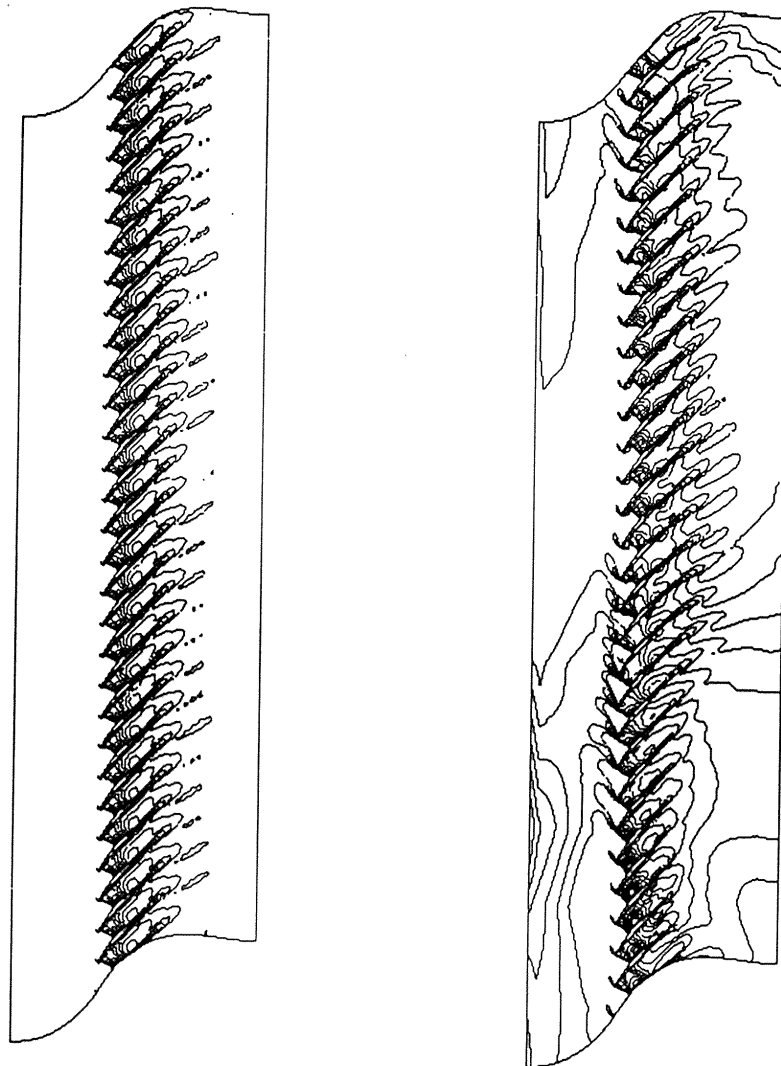


図4 マッハ数分布 (ミッドスパンでの展開表示)

4. 検証計算

計算は30枚の全周モデルについて行った。使用した翼列の翼配備及びハブ、翼面上の格子を図2に示した。境界条件は入口でマッハ数、流入角、全圧、全温を、出口で静圧をあたえた。それぞれの値は実験条件の値を用いた。実験では翼高さ方向5、10、15、30、50、70、85、90、95%位置で各物理量を計測している。計算ではこの値を補間して使用した。流入角分布の計測値もあたえられているが、入口の境界条件の反射を考え、前方に直管部を附加したので流入角は 0° とした。ディストーションは図3のようにマッハ数の分布をあたえ全圧を下げることににより模擬した。図は縦軸がマッハ数で横軸は周方向位置を表わし ■ 印が実験値を ○ 印がそれを補間し境界条件に使用した値を示している。

計算格子はH型で1翼間あたりの格子点数は、流れ方向、翼間方向、翼高方向にそれぞれ $119 \times 51 \times 21$ である。翼枚数が30枚であるので総格子数は約380万点となった。シミュレーションはNWTにより行ったが、NWTについては本特別資料SPの他の論文あるいは既刊の航技験ニュース等で詳細に述べられているのでそちらを参照されたい。本シミュレーションは領域による並列化を行い1翼間を1計算機に割りあて、30計算機による並列計算を行った。

5. 計算結果

図4はマッハ数の等高線で翼列をミッドスパンで展開表示したものであり、(a)は一様流入、(b)はディストーションのある場合で下部の翼10枚分がディストーション部分である。図5は翼列の1/2コード下流での瞬間のマッハ数分布の全周表示であり、図6はミッドスパンの軸方向速度分布を表示した。

図7は出口断面での全圧及びマッハ数を表わしている。横軸は周方向位置を角度で示し、○印がマッハ数を × 印が全圧を、実線が計算値を破線が実験値を表わしている。計算値は翼間中央の値で平均操作は行なっていない。全圧、マッハ数共に計算値が大きく、又ディストーションの影響の表れている位置が $20^\circ \sim 30^\circ$ ずれている。

図8は翼間のマッハ数の等高線と C_p 分布の時間変化を表わしている。(a)~(e)まで翼列1回転分の時間周期を5分割してある。グラフは横軸が翼コードを縦軸は C_p を表わしている。(a)、(b)は動翼が全圧分布の高いディストーションのない部分を通過中で、(c)がディストーション部へ入った直後、(d)はディストーション部を抜ける直前、(e)はディストーション部分を抜けたところである。マッハ数等高線図によればディストーションに入ると入口全圧が下がるた



図5 マッハ数分布 (1/2コード下流)

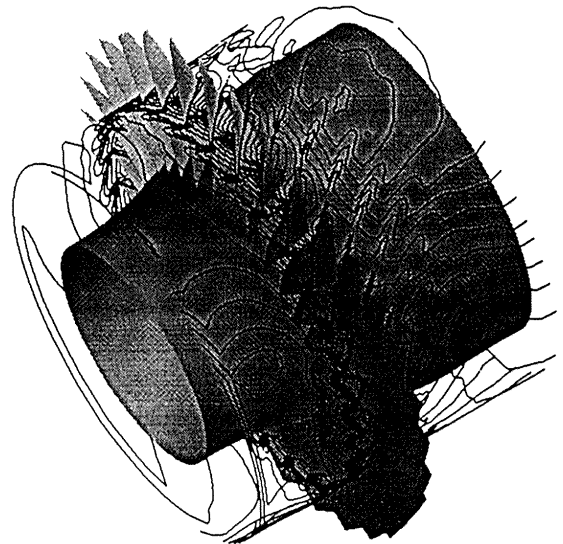


図6 ミッドスパン付近マッハ数分布

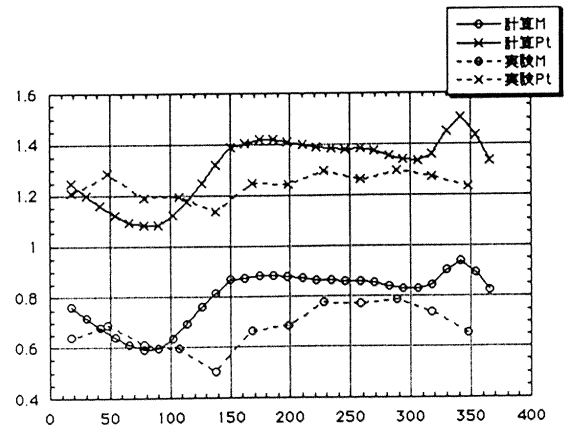
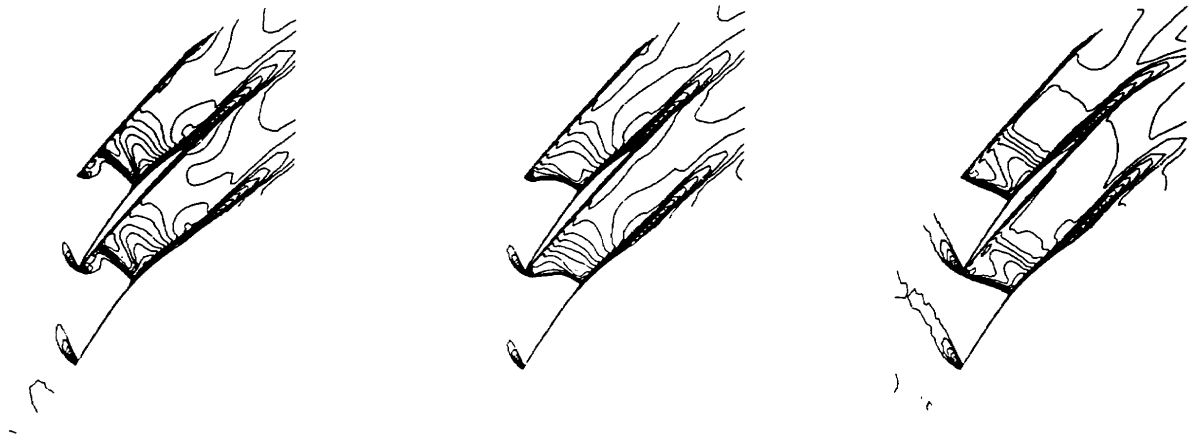
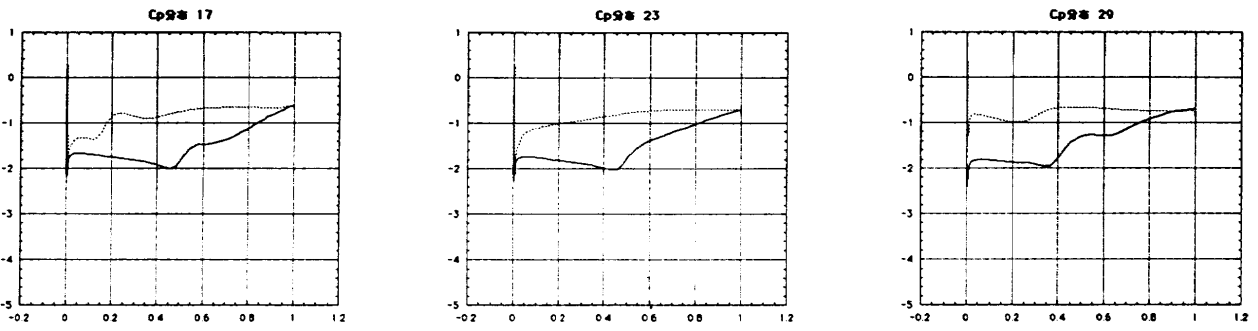


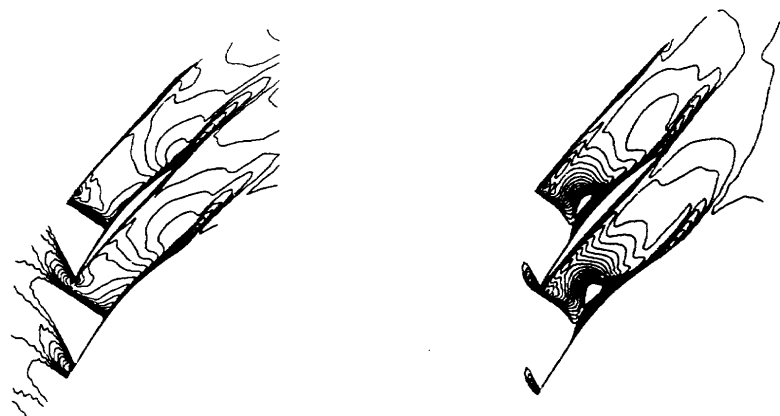
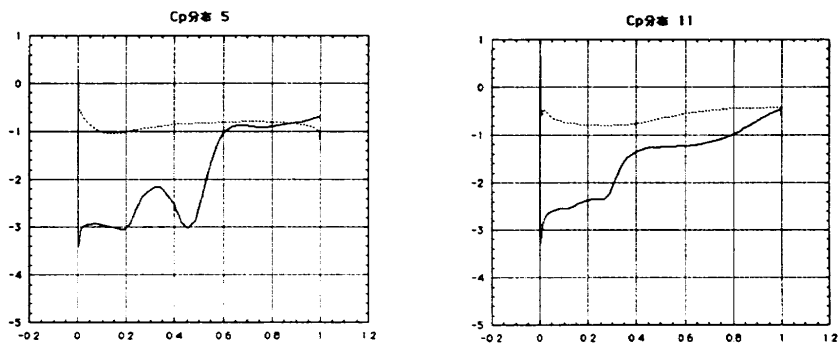
図7 出口断面での全圧及びマッハ数分布



(a) $T=0$

(b) $T=1/5$

(c) $T=2/5$



(d) $T=3/5$

(e) $T=4/5$

図8 翼間マッハ数の等高線と C_p 分布の時間変化

め流速が下がり、翼間のショックが前方へ移動してくる。
 (d) ではバウショックと翼間のショックが一体化している。
 (e) では背面のショックが下がりかけているのがわかる。又このことは C_p 分布図によっても確認できる。

結論

非定常ナビエ・ストークス方程式による流れ解析コードによりコンプレッサ動翼のシミュレーションを行なった結果以下の2点が解った。

- (イ) 使用したコードがインレットディストーションによる非定常流れを安定に解析できる。
- (ロ) マッハ数及び全圧の周方向分布が定性的な傾向をとらえていることが計算値と実験値の比較により確認できた。

今後の課題として

- (イ) シミュレーションの信頼性を確認するために静翼を含めた段解析を行う。
- (ロ) 出口全圧、マッハ数以外の実験値との比較を行い、さらに非定常な翼面荷重を含む空力性能の推定を行う。

この研究は航空宇宙技術研究所と石川島播磨重工業の共同研究として行われた。又、共同研究の全般について及び結果についての討論に参加された航空宇宙技術研究所 田村敦宏室長、西澤敏雄主任研究官、石川島播磨重工業 児玉秀和課長、計算の実行、データ処理を行っていただいた同じく石川島播磨重工業の福島淳一氏に感謝いたします。

参考文献

1. 菊地一雄, 野崎 理, 松尾裕一, 児玉秀和, 松永康二, 竹内久雄, “インレットディストーションのあるファン翼列の非定常流れ解析”, 航技研特別資料, SP-30, 1966.1
2. Matsuo, Y., “Computations of Three-Dimensional Viscous Flows in Turbomachinery Cascades”, AIAA Paper 91-2237
3. Matsuo, Y., “An Efficient Numerical Method for Simulating Unsteady Viscous Flows through Counter Rotating Propeller”, Proc. of 5th ISCFD Sendai, Vol. II, 1993
4. Monsarrat, N.T., et al., “Design Report Single-Stage Evaluation of Highly-Loaded High-Mach-Number Compressor Stages”, NASA CR-72562
5. Sulan, D.H., et al, “Single-Stage Evaluation of Highly-Loaded High-Mach-Number Compressor Stage II . Data and Performance Multiple-Circular-Arc Rotor”, NASA CR-72694

タービン単段流れの数値シミュレーション

松永康二*1, 竹内久雄*1, 平井健二*1
松尾裕一*2, 菊地一雄*2, 野崎 理*2

Unsteady Single Stage Analysis for a High Pressure Turbine

by

K. Matsunaga, H. Takeuchi, K. Hirai
Ishikawajima-Harima Heavy Industries Co., Ltd.
Y. Matsuo, K. Kikuchi, O. Nozaki
National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

The flows through a single stage high pressure turbine cascade configuration, consisting of a stator vane cascade and a rotor blade cascade, were numerically simulated. An 3-D Navier-Stokes code, using unsteady algorithm, block structure grid system and sliding grid technique, was developed and verified here to estimate the unsteady aerodynamic characteristics of the single stage cascade configuration. The simplified flowfield through one stator vane passage and moving two rotor blade passages were calculated simultaneously here to evaluate the aerodynamic performances of the stage. The numerical results showed a fairly good agreement with experimental data, such as pressure loss coefficients and stage total efficiencies, demonstrating the effectiveness of the numerical code as an aerodynamic design tool.

1. はじめに

航空エンジンを構成する各翼列要素内の流れを数値シミュレーションし、翼列の空力性能評価技術を確立することはより高性能な航空エンジン開発のための不可欠な技術として位置付けられている。従来からの数値シミュレーションによる翼列の3次元流れ解析は、1翼間を対象として定常流れ解析により翼列の定常な空力性能を評価し、翼列設計に反映させることを目的としてきた。これは静翼、動翼ともに同様であり、現在では定量的にも設計翼列の性能を評価可能なレベルにまで到達し、設計実務にも利用されている^{1,2)}。

ところで、航空エンジンを構成する各翼列内の流れは動静翼干渉、インレットディストーションなど本質的に非定常な現象を含んでいる。近年の流れの数値シ

ミュレーション技術およびコンピュータハード性能の急速な向上は、従来から研究を主な目的として実施されてきた複数翼の非定常流れ解析を設計における実用技術としての利用を可能としつつある。翼列の段性能、非定常な空力性能を評価し翼列設計へフィードバックすることは、今後より高度な翼列設計を実現するための重要なツールとなると期待される。

航空エンジンを構成する要素としてのタービンやコンプレッサー翼列は、静翼と動翼の組合せを1単位とする単段翼列を複数段並べることにより成り立っている。すなわち、静翼は前段の動翼による非定常な流入流れを常に受ける。また、動翼はそれ自身が回転することにより静翼と時刻毎に異なる相対位置に移動し、常に異なる流れを受けることになる。当然その影響は同一段を構成する静翼の trailing edge 近傍の流れにもフィードバックされ、静翼まわりの流れ場をも周期的に変動させることになる。

*1 石川島播磨重工業株式会社

*2 航空宇宙技術研究所

現実の航空エンジンの各翼列に作用している流れは、理想的な一様な平行流ではなく、時間的に変動する非定常な流れとなっている。その結果として、各翼列には非定常な外力が作用し、翼振動の原因となる。また、翼列の空力性能も非定常な変動を受けていると予想される。各段における非定常性がさらに後方に位置する翼列に蓄積されて影響する場合、そこにおける流れ場は空力設計において想定した流れとは大きく異なっている恐れがある。

本研究においては、翼列内非定常流れ解析コードの実用化を大きな目標としている。その第一段階として、単段翼列流れの数値シミュレーション技術の開発を実施してきた。ここでは、単段翼列における非定常な翼荷重および非定常空力性能の推定を目的としてまず実施した、高圧タービン単段流れ解析結果について報告する。

2. 数値計算

2.1 数値計算法

数値計算には翼列内非定常流れ解析コード^{3),4)}を利用した。その特徴は次の通り。

- ・ ADI 法
- ・ TVD 法 (Chakravarthy and Osher)⁵⁾
- ・ Baldwin-Lomax 乱流モデル⁶⁾
- ・ Newton Iteration
- ・ Sliding Zonal Grid System

時間方向には Newton 法による繰り返し計算を実施している。この時の計算格子の移動による変化は、境界における 1 mesh を相互に重複させ、線形補間により各計算格子間で情報の伝達を行っている。

2.2 計算対象と計算格子

計算の対象とした高圧タービン単段翼列の主要諸元を表1に示す。入口側は静翼で翼枚数28、出口側は動翼で翼枚数57で構成される。ここでは簡単のため翼枚数比を1:2に単純化し、静翼1翼と動翼2翼間でモデル化している。計算格子は静翼119×101×21、動翼119×51×21のH型格子を使用した。計算格子の概観を図1に、流路方向の格子断面を図2に示す。

また、動翼翼端間隙 (tip clearance) を無視した場合と、これを考慮してここにスパン方向4格子を配した2ケースについて計算を実施した。ただし、簡単のため tip clearance 内の流れは解かず平均化処理とした。

2.3 計算条件

数値計算においては、静翼入口のマッハ数、流入角、全圧、全温および動翼出口における静圧を規定し、動静翼間は計算ステップ毎にデータを伝達してい

る。入口、出口流れ条件を表2に示す。本計算においては単段翼列における非定常流れの解析を主目的とすることから、casing については slip 壁とし、翼表面のみ non-slip 条件とした。

計算時間刻みとしては1周期300ステップ、すなわち動翼が回転して静翼翼間を移動し、次の静翼と相対的に同位置にくるまでを300分割して計算を実施した。また、各時間ステップにおいては4回の繰り返し計算を実施している。

以下、tip clearance を考慮したケースを中心に数値計算結果を示すとともに、結果について若干の考察を加える。

3. 計算結果および考察

3.1 単段翼列内の非定常流れ

計算結果の例として、ミッドスパンにおけるマッハ数分布を図3に示す。tip clearance 有りの場合である。静翼の後流と動翼が干渉する様子がシミュレートされている。

図4にこの時の動翼 leading edge における静圧の時間変動を示す。動翼1と動翼2では、全く同一波形が位相遅れをもって繰り返されていること、絶対値として約3%の変動振幅をもつことが観察される。このことは、数値計算が静翼翼間で周期的かつ安定な非定常流れ場を捕らえていることを示している。

図5には静翼負圧面上の70%コード位置における静圧の時間変動を、また図6には静翼 Cp 分布の時間変動 (各4step 毎) および1周期間の平均値を示す。これらの図より、動翼の回転により静翼まわりの流れ場もまた影響を受けていることがわかる。

図3を詳細にみると、静翼と動翼の相対位置が変化することにより、静翼後流の方向が微妙に変化していること。また、静翼の流出境界を構成する動翼 leading edge 付近の速度場も時間的に変動していることがわかる。その結果として、静翼まわりの流れ場も変動していると推察される。図6からその変動は負圧面上で大きく、0.4コード長より下流側の翼まわり流れに影響を及ぼしていると判断される。静翼および動翼面上における荷重の時間変動は、各翼列に対する翼起振力として作用することになる。

3.2 単段翼列の空力性能

翼列内非定常流れ解析コードの検証および単段翼列流れの数値シミュレーション結果の評価を目的として、高圧タービン単段空力回転試験における動翼出口トラバース試験の解析結果と数値計算結果を比較検討した。

図7に動翼段における圧力損失の翼高さ方向分布の

実験値と数値計算結果の比較を示す。tip clearance 有りの場合の時間変動および平均値の比較である。数値計算結果は各時刻により大きく変動する。しかし、1周期間を平均するとほぼ実験値と設計値の中間的な値をとる。

図8には計算モデルの相違による圧力損失推定値の変化を示す。すなわち、動翼単翼、tip clearance 有り、無しによる変化である。各計算値にそれ程大きな変化は見られないが、inner casing 側で動翼単独と単段解析結果との差および実験値との差が顕著である。これは casing および静翼ルート部における粘性影響と推察される。翼端部の tip clearance 影響領域の広がりには狭い部分に限られている。これは圧力損失の評価点が動翼 trailing edge 部であることが原因していると考えられる。また、tip clearance 計算に使用した格子は翼端部で密になっており、翼高さ方向に均等分布させた tip clearance 無しの計算格子とは分解能が異なることも影響していると考えられる。

図9にステージ効率の翼高さ方向分布の実験値と計算値の比較を示す。ステージ効率は inner および outer casing 付近で差が見られるものの、実験値を非常によく推定している。本研究で実施した高圧タービンの単段解析の場合、実用的なレベルで単段空力性能の推定に使用可能と評価できる。

4. まとめ

翼列内非定常流れ解析コードの実用化のため、高圧タービン単段翼列流れの数値シミュレーション技術を開発し、単段翼列における非定常な翼荷重および非定常空力性能の解析を実施した。数値計算結果は非定常な動静翼干渉をシミュレートし、動翼および静翼に作用する非定常な圧力は安定かつ周期に変動する。静翼における圧力変動は0.4コード長より下流側の負圧面で顕著である。また、空力回転試験結果との比較により、高圧タービン単段における動翼段の圧力損失、さ

らにステージ効率などの空力性能を実用的に推定可能であることが示された。

今後の課題としては、まず casing 壁面境界層および tip clearance 影響をより詳細に検討、評価する必要がある。その結果、単段解析としての精度および完成度を高め、翼起振力や非定常な翼列空力性能推定の信頼性を向上させる。次にこれを発展させて、より実機に近い多段解析の実用化をめざす。

なお、本研究は航空宇宙技術研究所と石川島播磨重工業株式会社の一般共同研究の一環として実施したことを付記する。

参考文献

- 1) 菊地一雄, 野崎理, 田村敦宏, 松永康二, 竹内久雄, 真家孝, 山脇るり子, “3次元N-S解析コードのタービン翼列設計への応用”, 航空宇宙技術研究所特別資料, SP-14, 1990.11
- 2) 松永康二, 竹内久雄, 田中厚成, 山脇るり子, 浜崎浩志, 菊地一雄, 野崎理, “数値シミュレーションとタービン翼列設計”, 航空宇宙技術研究所特別資料, SP-19, 1992.12
- 3) Matsuo, Y., “An Efficient Numerical Method for Simulating Unsteady Viscous Flows Through Counter Rotating Propeller”, Proc. of the 5th Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics-Sendai, Vol. II, 1993
- 4) 菊地一雄, 野崎理, 松尾裕一, 児玉秀和, 松永康二, 竹内久雄, “インレットディストーションのあるファン翼列の非定常流れ解析”, 航空宇宙技術研究所特別資料, SP-30, 1996.1
- 5) Chakravarthy, S. R., Osher, S., “A New Class of High Accuracy TVD for Hyperbolic Conservation Laws”, AIAA-85-0363, 1985
- 6) Baldwin, B., Lomax, H., “Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows”, AIAA-78-0257, 1978

表1 高圧タービン単段翼列主要諸元

	翼枚数 (枚)	翼高さ (mm)	コト長 (mm)	T.C. (mm)	回転数 (rpm)	axial gap
入口静翼	28	66.9	65.5	0.2	7140	8.96 (mm)
出口動翼	57	66.9	35.2			

表2 入口, 出口条件

入口マッハ数	0.155
流入角	0 °
入口全圧	21200 kg/m ²
入口全温	385 K
出口静圧	10200 kg/m ²

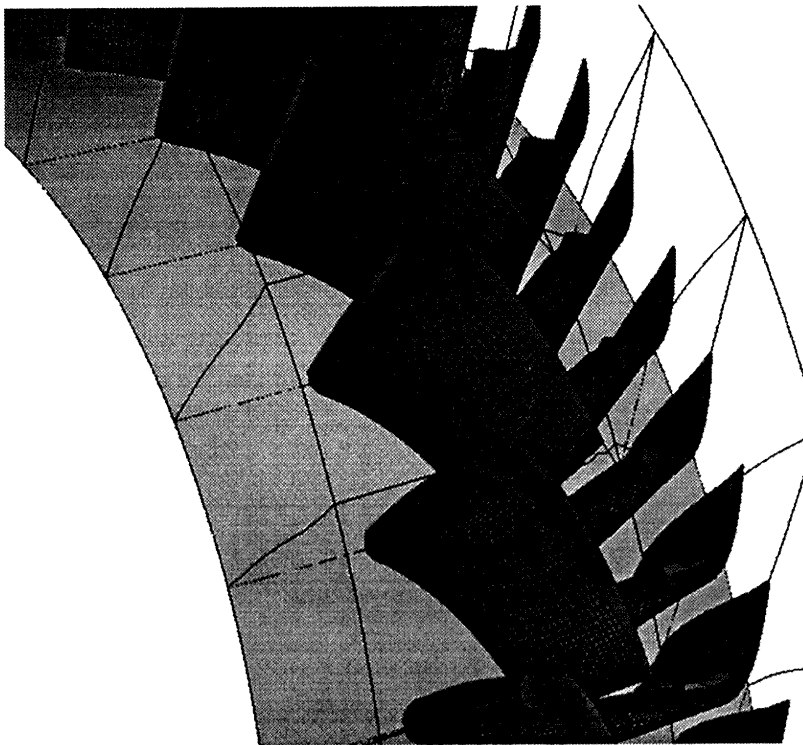


図1 計算格子

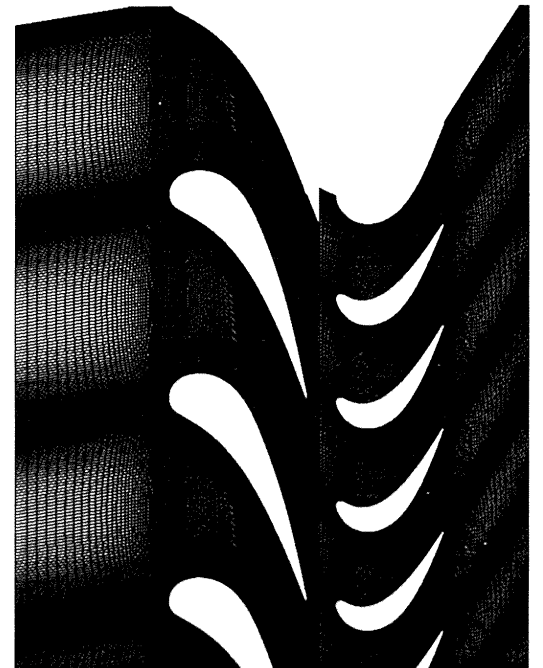


図2 流路方向の格子断面

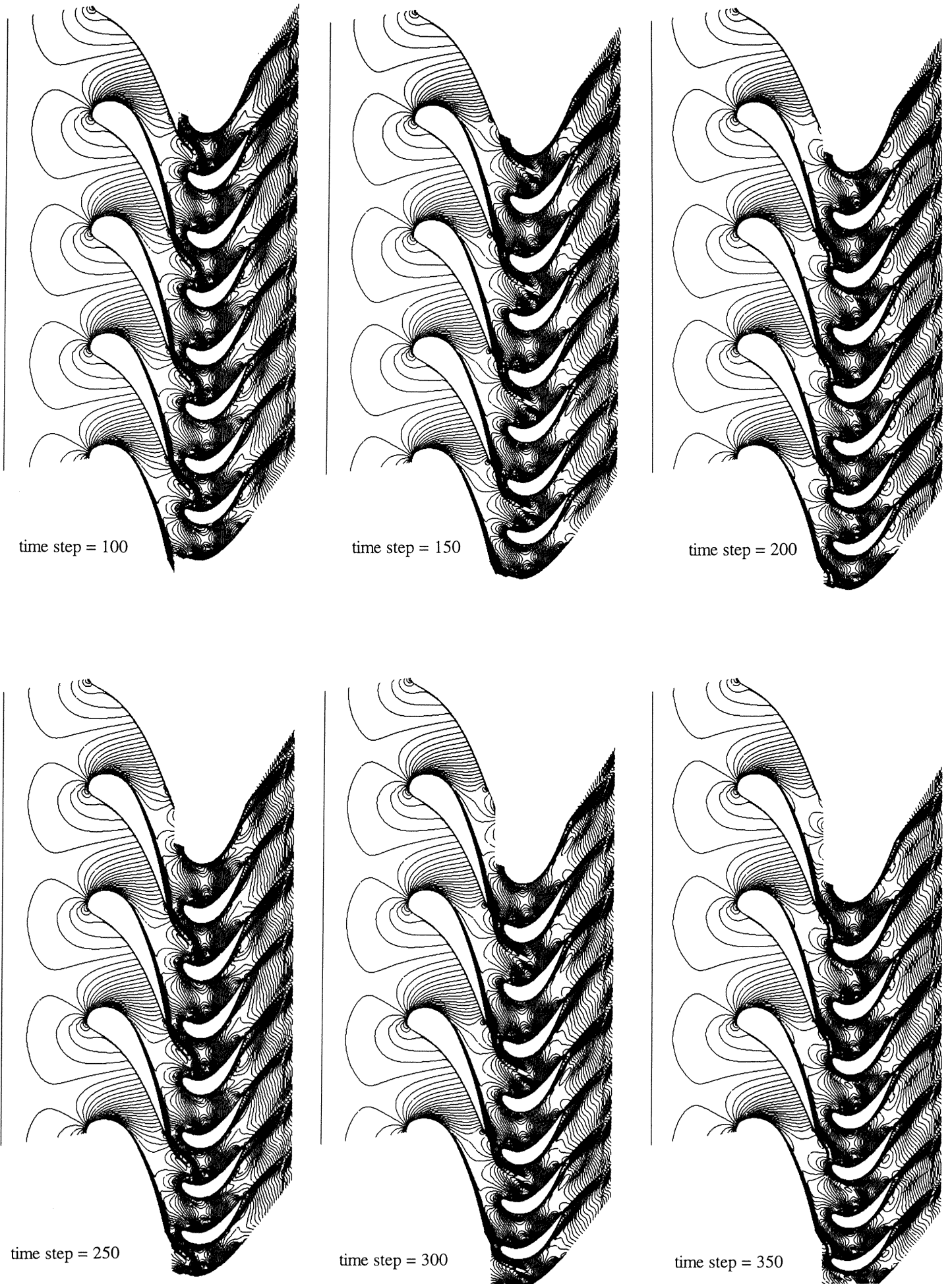


図3 マッハ数分布 (Mid-span, tip clearance 有)

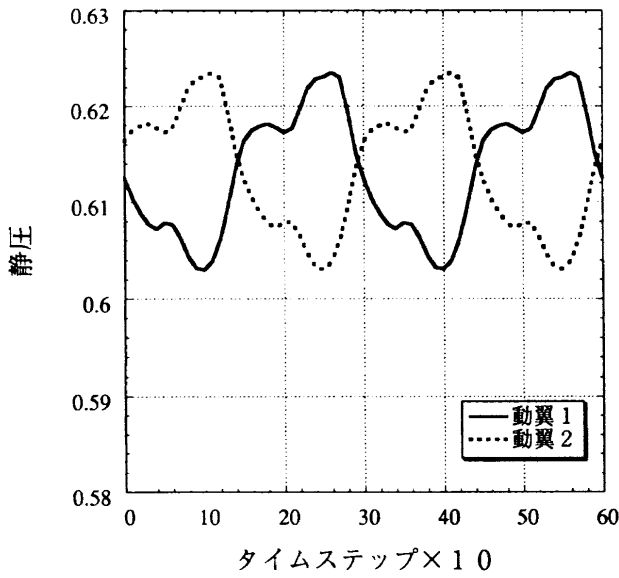


図4 動翼面上 (L.E.) の静圧変動

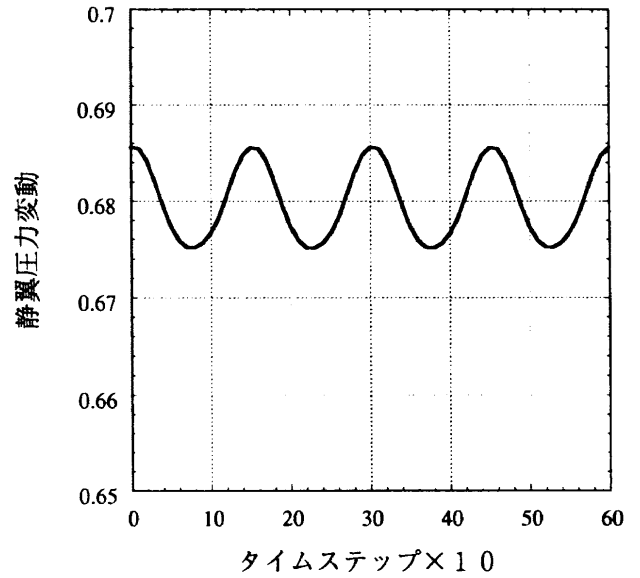


図5 静翼面上 (負圧面70%コード) の静圧変動

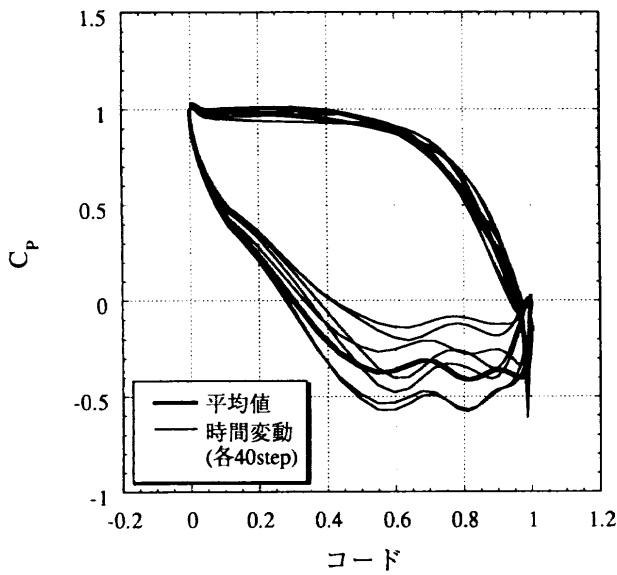


図6 静翼 Cp 変動

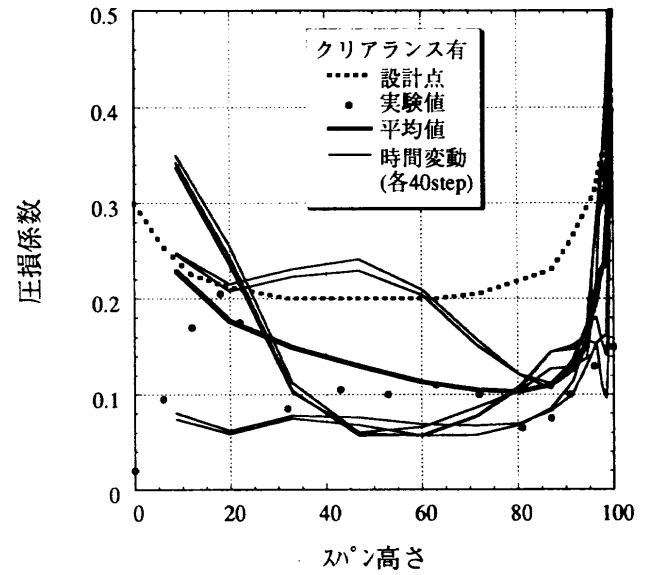


図7 動翼圧力損失の変動

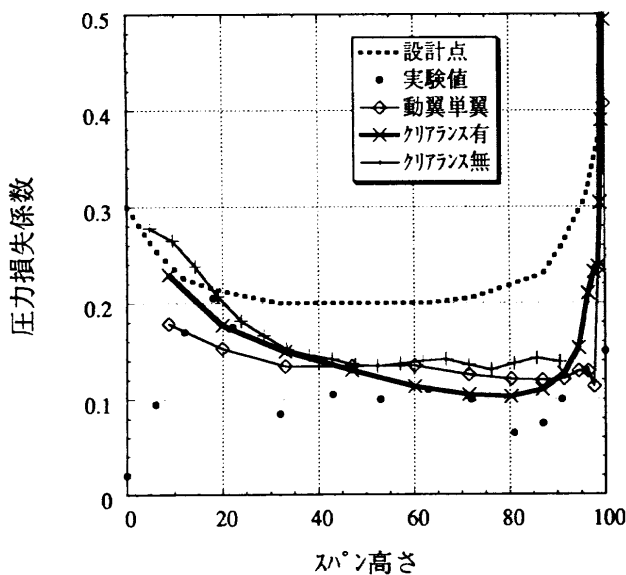


図8 動翼圧力損失係数の比較

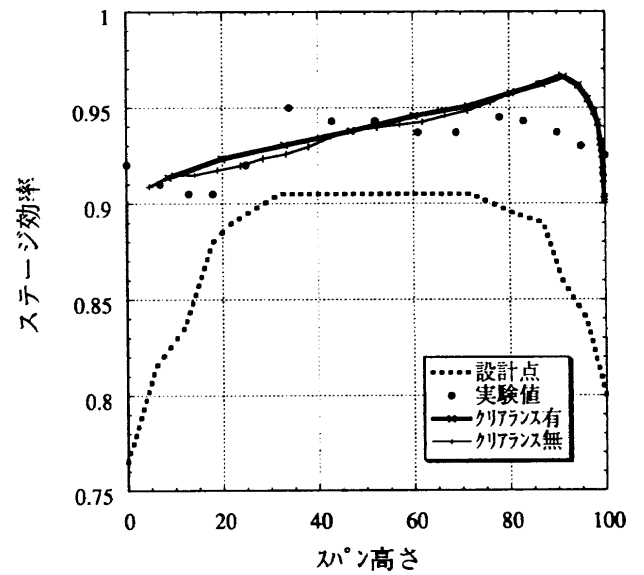


図9 ステージ効率分布

CAD データに基づく計算格子の作成

岩宮敏幸^{*1}、吉田正廣^{*1}、山崎裕之^{*1}

Grid Generation based on CAD data

by

Toshiyuki IWAMIYA^{*1}, Masahiro YOSHIDA^{*1},

Hiroyuki YAMAZAKI^{*11}

Abstract

With the progress of computer performance, Computational Fluid Dynamics (CFD) is well developed and it is very promising to utilize as a design tool for the development of aircraft and spacecraft. It is usual to define a configuration by using a CAD tool. It is necessary to construct a grid system around it for analyzing the flow field. But this part is a bottleneck since the usual general-purpose CAD software packages do not support the generation of surface grids suitable for CFD analysis.

In this paper we report the preliminary work of surface grid generation based on the CAD data. Conversion format from a CAD tool is the IGES format. We first reconstructing the configuration from the section data so that the isoparametric curves are quite suitable as the grid curves. Then we generate a surface grid by assigning the number of grid points needed.

1. はじめに

航空機等の周りの流れの数値シミュレーション解析は、航空機等の設計の有効な手段として利用されるようになってきている。設計においては、形状はCADを利用し、自由曲面として定義されるが、通常使われているCATIA等の汎用CADでは数値シミュレーションによる解析に必要な表面格子を張る作業を十分サポートしておらず、CADのオペレーションを利用しているため、表面格子生成作業に多大な労力と時間を必要としているのが現状である。

本研究では汎用CADで定義された航空機形状データを基に表面格子をインタラクティブに生成していく手法を検討し、アルモニコス社製のCADフレームワークソフトウェア「Axcad」上アプリケーションソフトウェアとしてプロトタイプを開発したので報告する。

2. 形状再定義

3次元CADで立体を表現する方法は、ワイヤフレーム、サーフェス、ソリッドに大別される。ワイヤフレーム・モデルは3次元形状を稜線(面の境界線)と頂点のみで表現しているためメモリも少なく済み、デ

ータへのアクセスも速いが、立体が一意に決まらないという問題点がある。サーフェス・モデルはワイヤフレーム・モデルのデータに加えて面のデータを持っている。現在最もよく利用されているのがこのサーフェス・モデルに基づくCADでサーフェス・モデルと呼ばれる。サーフェス・モデルにおいては面、その境界線、頂点といった幾何情報を持つがそれらの間の関係(位相情報) —ある曲線がある曲面の境界であるとかある点がある曲線上にのっているといった情報—を持たないため、立体は完全に表現されていないことに注意する必要がある。

サーフェス・モデルでは航空機等の形状を幾つかのパッチと呼ばれる自由曲面(SurfaceあるいはFace)の張り合わせとして実現している。パッチの数学的な表現形式は、CADごとに異なるが、ベツェ(Bezier)曲面、クーンズ(Coons)曲面、Bスプライン(B-spline)曲面等が利用されている。これらの自由曲面はいずれも矩形領域あるいはその部分集合をパラメータ空間とするパラメータ表示として表現されており、そのアイソパラメトリック曲線等を適当に利用することにより、各パッチ上に構造格子を張ることは比較的容易である。しかしながら、でき上がる格子をパッチ間で連続に繋げるためにはパッチ間のつながり方を考慮することが必要である。パッチ間で連続になりかつ各パッチ上で独立に表面格子を生成するためには、境界上の通過

^{*1} 航空宇宙技術研究所 National Aerospace Laboratory

点を前もって指定することが必要となるが、現在最もよく利用されているサーフェス・モデラと呼ばれる CAD では自由曲面およびその境界曲線は別の幾何要素として定義されているだけで、位相情報を持たず曲面とその境界として認識されないため境界線と考えられる曲線上に点を指定しても曲面の境界上の点あるいは曲面を表現しているパラメータ空間の対応するパラメータ値を指定したことにはならない。また、オペレーションのやり方によっては曲面の間に隙間ができる場合もある。このため、境界線上の点から曲面へ射影する等位相関係を意識したオペレーションを CAD のオペレータが行う必要があり、表面格子生成の大きな障害となっている。

これを回避するためには、表面格子を生成することが容易な形に内部での表現形式を作り直してやる必要がある。ここでは、最終的にでき上がる空間格子としては複合構造格子を考え、胴体及び翼をそれぞれ一枚の曲面として定義し直す方法を採用するとした。

次に検討しなければならないのはデータの受け渡しの問題であるが、CAD データは一般的に独自のデータ形式で保存されているため CAD 間でのデータの互換性はない。互換性を確保するため、幾つかの標準的形式が定められているが、ここでは多くの CAD でサポートしている IGES (The Initial Graphic Exchange Specification) と呼ばれる形式を採用した。IGES はいろいろな曲線、曲面を表現できるが、CAD ごとに出力される表現形式、精度等が異なるため、汎用性を考慮する必要がある。

また、汎用 CAD は一般に機能の豊富さや操作性には優れているが、専用のオペレータを確保する必要があり、研究者が自由に自分自身のアイデアを表現するためのツールとしては使えない状況にある。通常の航空機的设计ではまず翼の平面形、翼断面形状、胴体断面形状を設計し、それらの断面を滑らかに接続することにより初期形状を決定している。

これらを考慮して、胴体及び翼の断面データを点データの集合として外部から入力し、形状の再構築をする方法を採用することとした。

形状再定義は胴体編集 (図1)、翼編集 (図2)、翼面配置 (図6) の3つの要素から成る。

2. 1 胴体編集

胴体編集は以下のメニュー構成となっている。

初期化・・・点データを断面ごとに分類し、順序付けを行う。

Kink 点・・・Kink 点の指定を行う。

曲線化・・・Kink 点指示の結果を基に断面を B ス

プライン曲線で表現するとともにノットベクトルの共通化を行う。

Kink 断面・・・Kink 断面の指定を行う。

曲面生成・・・Kink 断面指示の結果を基に曲面を生成する。

ここで注意すべきは、汎用 CAD から IGES 形式で点のデータを出力するとき点の順序を汎用 CAD 側で制御するのはかなり困難であるという点である。このため、読み込んだ側で順序を決めてやる必要がある。この作業が初期化である。基本となる軸を指定し、その軸への射影により点データを断面ごとに分類し、順序付けを行って、その順序で点をポリラインで結んでいる。この時点で、正しく順序付けがなされているかを確認する必要がある。

また、曲線化の過程では、まず、最初に与えられた断面上の点を忠実に通過する B スプライン曲線を生成し、その後、曲面を B スプライン曲面として実現するため各断面のノットベクトルの共通化を行っている。この過程においてトレランス値を設定し、そのトレランス値の範囲内での誤差は許して最初に与えられた点を通過するようにしている。これは、ひとつにはノットベクトルの数を少なくして CAD としての操作性を向上させることに役立つが、他方、設計の観点から設計パラメータを減らす方法としても役立つと思われる。

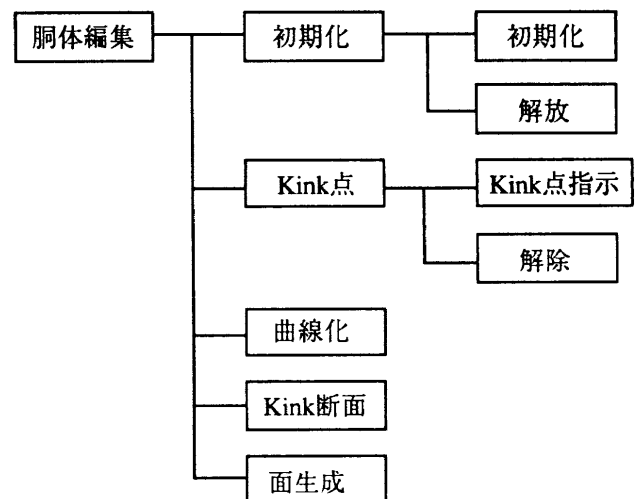


図1 胴体編集メニュー

2. 2 翼編集

翼編集についても胴体編集とほぼ同様の機能を持つが、パラメトリックスタディを考慮して、上反角、後退角、局所迎角の変更機能を追加した。また、胴体との交線が確実に求められる様、データが与えられた断面から外挿して新たな断面を作る断面追加機能を付加

した。

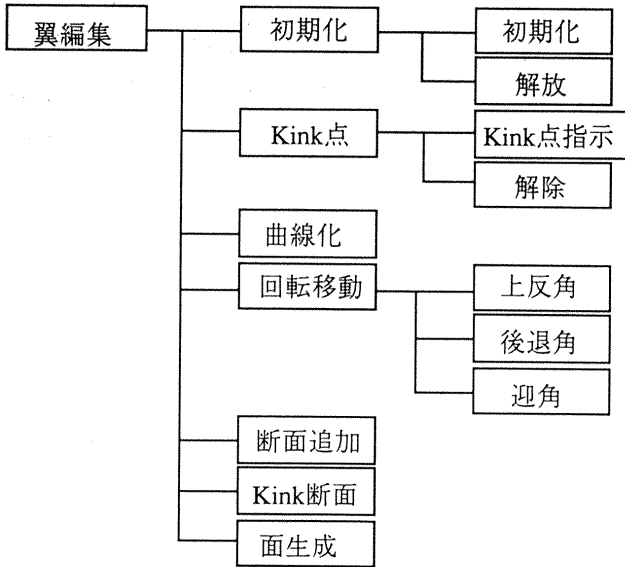


図2 翼編集メニュー

高亜音速航空機の主翼について翼編集の一連の動きを図3～図5に示す。

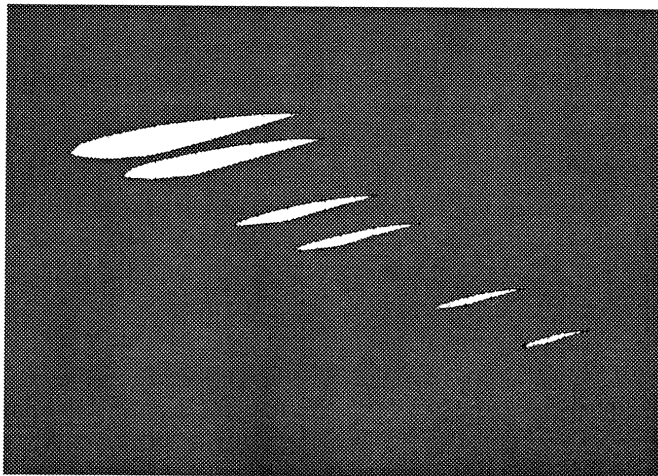


図3 翼編集—初期化

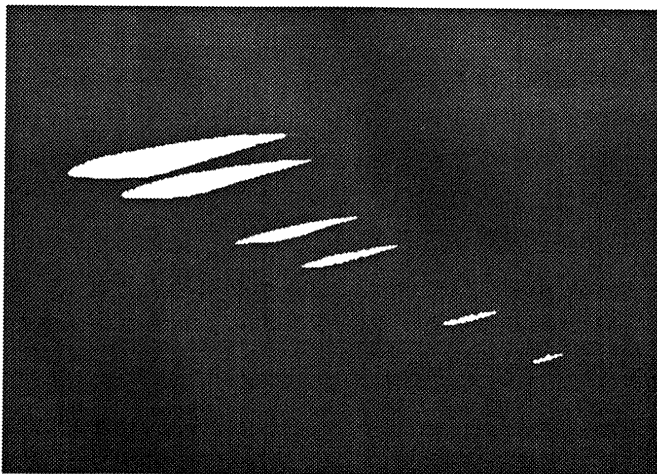


図4 翼編集—曲線化

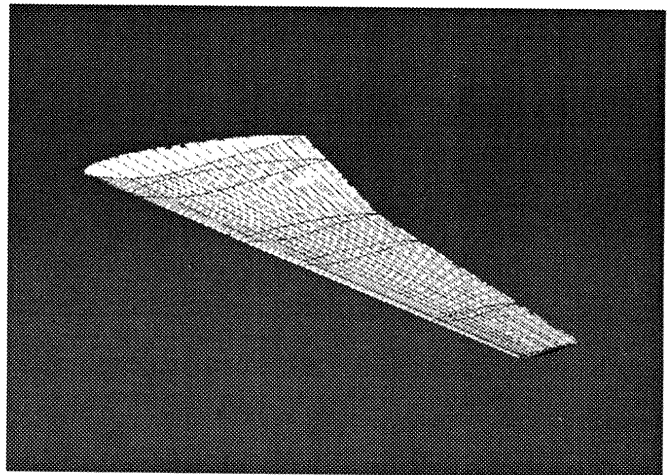


図5 翼編集—曲面生成

翼面配置は胴体編集、翼編集で作られた主翼、尾翼、垂直尾翼等の各翼面の胴体への取付位置を変更するための機能で平行移動、回転移動が可能である。この機能もパラメトリックスタディには有効であると思われる。

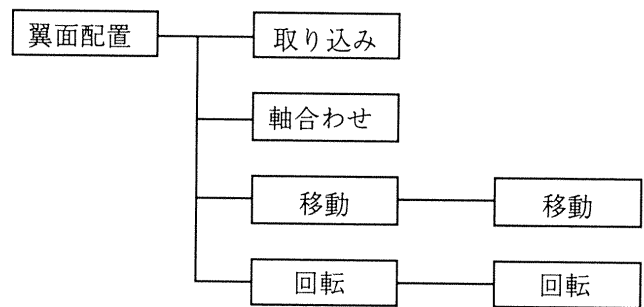


図3 翼面配置メニュー

3. 表面格子作成

形状再定義で得られた形状を基に表面格子を生成する。基本的な戦略は曲面のパラメータ空間に格子を張ることである。そのために胴体と翼の交線計算を行い、胴体面のパラメータ空間に主翼、水平尾翼等との交線に対応する内部境界及び垂直尾翼等との交線に対応する外部境界を作成し、それらを境界とする内部領域に格子を張る。曲面の構成の仕方からパラメータ空間は断面方向と断面にほぼ直交する方向から構成されているため、パラメータ空間上に直交格子を生成すれば、直交性のよい表面格子が張られることが予想される。

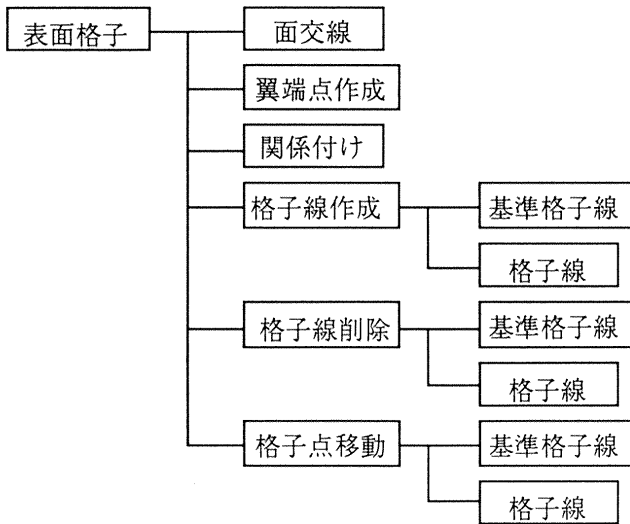


図6 表面格子メニュー

実際の格子生成は以下の手順を踏む。

胴体面上の格子と翼面上の格子とは胴体と翼との交線上で接続される必要があるため、交線を基準としてまず格子枠と呼ぶ幾何学的な構造上必要最小限の格子を張る（格子枠生成 図7）。

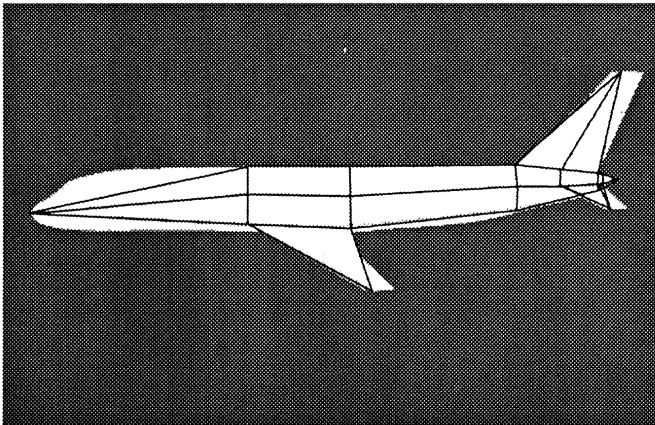


図7 表面格子-格子枠生成

この格子枠を細分化（格子線追加）することにより全体の格子を構成していく。格子線追加においては、胴体と翼の交線を通過する格子線（基準格子線と呼ぶ）を追加するには、交線を指示し、点数を指定することにより必要な数の格子線が生成される。

その他の部分については任意の格子線（単に格子線と呼ぶ）上に必要数の点を発生させ、これを基に細分化を行う。

現在のバージョンでは、格子間隔は指定した格子線に対して線長等分割、曲率等分割の二つの方法で分割できる。

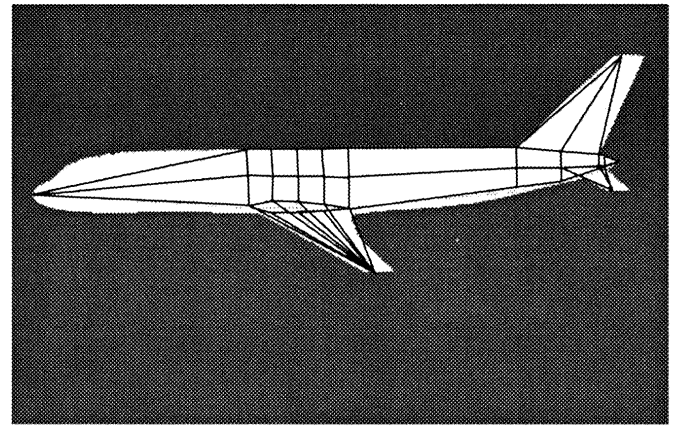


図8 格子線追加-基準格子線

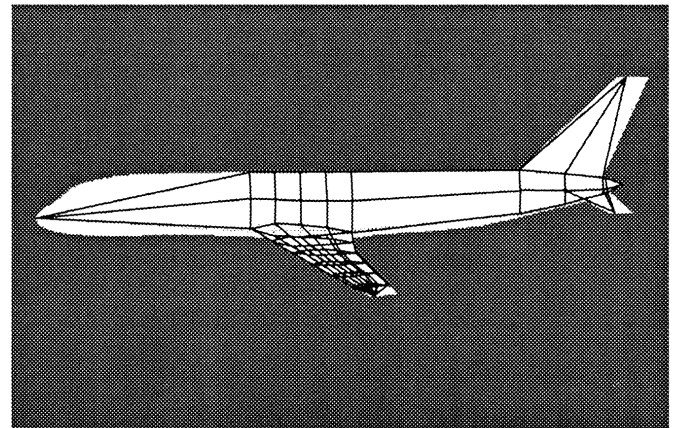


図9 格子線追加-格子線

また、格子線削除機能により不必要な格子線を削除できる。

格子点移動機能では、移動したい格子点、影響範囲、新しい格子点の位置を指定することにより、影響範囲内の格子点を含めて格子点が滑らかに移動する。

以上の機能により、ユーザがインタラクティブに表面格子を生成することになる。

4. 今後の課題

今回作成したプロトタイプで、複合格子に対応する表面格子生成に必要な基本的な機能は実現されている。今後、生成された表面格子の良否を評価するとともに、ソフトウェアの高速化、ストレッチ関数等を利用して格子間隔を制御する機能等、より柔軟な表面格子生成への対応、ユーザインタフェースの改良等を施し、ユーザへの負担が少なく質の高い格子が生成できるものにしていく予定である。

Systematic Modification of Ship Hull Forms Using B-Splines

Yoshiaki Kodama, Hideki Kawashima, Haruya Takeshi
Ship Research Institute

B- スプラインを用いた船型の系統的変形

児玉 良明、川島英幹、竹子春弥*

ABSTRACT

縦横のメッシュ状のスプラインネットで定義された、例えば船体のような滑らかな物体形状は、メッシュの交点を移動させることによって高い自由度で変形させることができる。しかし、この高い自由度は却って実施作業を困難にする。先ず、設計者である人間がこの変形作業を実施する場合、変形によって元の曲面の滑らかさが損なわれないためには、各交点の移動量が全体として滑らかに分布していなければならないが、設計者がそのような移動量を直接各交点で与えることは殆ど不可能である。メッシュを粗くすると、滑らかな分布を与えることは容易になるが、形状表現の自由度が低下する。次に、最適化アルゴリズムによって計算機が物体形状を自動的に変形させる場合には、メッシュの各交点での移動量を形状表現パラメータとすることが適当であるが、メッシュを細かくするとパラメータ数が飛躍的に大きくなり、計算量とパラメータ間の独立性の点で問題になる。また、メッシュを粗くすると、やはり表現力の点で問題が生じる。

本報告は、粗いメッシュの問題点の例として、Bスプラインの基底関数の山の位置を連続的に変化させたとき、山の形状を保てないことを示す。次に、この問題点の解決法として、細かいメッシュを用いながら、少ないパラメータ数で変形を表現するグループ化を提案する。そしてその実現例として、船体形状をスプラインネットで表し、その一部に変形量をオーバーラップさせて船尾形状を変形させた場合を示す。

1. Introduction

The progress of CFD has reached a stage in which inverse problems are feasible, i.e., a body shape having specified fluid dynamic performances is obtained after iterative modification of the shape through a huge amount of computation. In many cases, the process of obtaining a body geometry having a desired fluid dynamic performance takes the form of optimization with constraints. For example, a ship hull form is optimized to get minimum drag under the constraint of constant volume.

In optimization, a body shape must be given a high degree of freedom, in order that the search for optimization covers a wide area. This accompanies a large number of shape parameters. But, at the same time, the number of shape parameters should be as small as possible, because, otherwise, the CPU time would be too much and the independence among the parameters would be degraded.

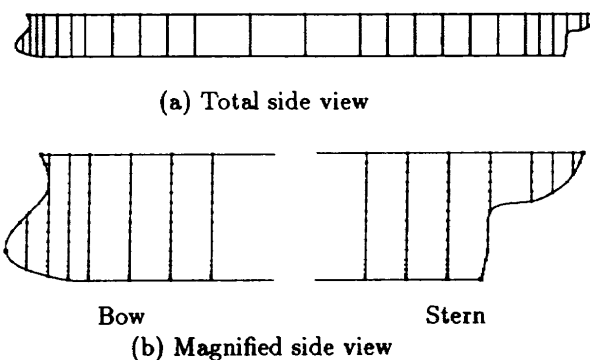
Perhaps the most flexible way of representing a body shape is to fit its surface with a mesh, and give coordinates to points of intersection of the mesh. By refinement, one can fit the mesh to almost all body shapes. A natural choice of parameters in such a mesh system is to use coordinates of intersection points. But, by refining the mesh, the number of parameters increases rapidly, and the process of optimization using the system would be impractical.

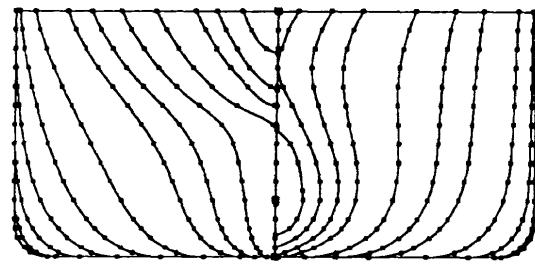
In order to solve the problem, Hamazaki et al^[1] used a fine mesh for representing a ship hull, and overlapping coarse mesh for changing the body shape, thus retaining the flexibility of body geometry and reducing the number of parameters for optimization at the same time.

But, as will be shown in §3, the use of a coarse mesh has its own problem, and in §4, another method for solving the problem will be proposed.

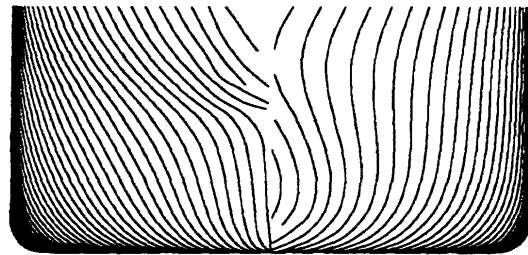
2. Representation of a Ship Hull Form

A ship's hull form is defined by a set of discrete points called offsets. Fig. 1 shows its example of a tanker model. The hull form has a bulb at the bow (front) for reducing wavemaking resistance. Fig.1(d) shows interpolated $x=\text{constant}$ sections at 1/100 length pitch.



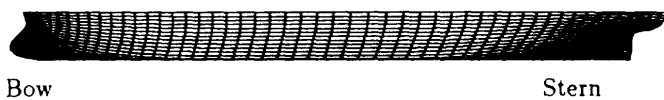


Aft Fore
(c) Body plan

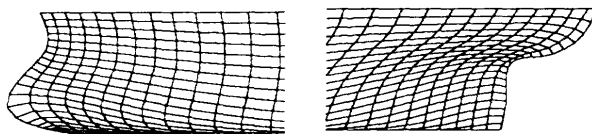


Aft Fore
(d) Interpolated $x=constant$ sections
Fig.1 Offset data of a ship hull form

Based on the offset data, splines passing through the spline curves at each offset sections are generated lengthwise and crosswise using the Implicit Geometrical Method^{[2],[3],[4]}. They are called a spline net as shown in Fig. 2, and by interpolating those splines in a tensor product manner, a spline surface that covers continuously the entire hull surface is defined.



Bow Stern
(a) Total side view



Bow Stern
(b) Magnified side view

Fig. 2 A spline net for a tanker model.

3. B-splines on a coarse net

B-spline can be conveniently used for representing a body geometry. It defines a curve by interpolating a set of control points Q_i using basis functions $N_i^k(s)$ as shown in Fig.3.

$$P_i(s) = N_{i-3}^4(s)Q_{i-3} + N_{i-2}^4(s)Q_{i-2} + N_{i-1}^4(s)Q_{i-1} + N_i^4(s)Q_i$$

$$(s_i \leq s \leq s_{i+1}) \quad (3.1)$$

$$P_i(s_i) = P_i$$

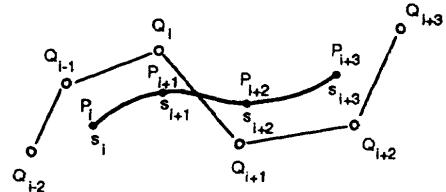
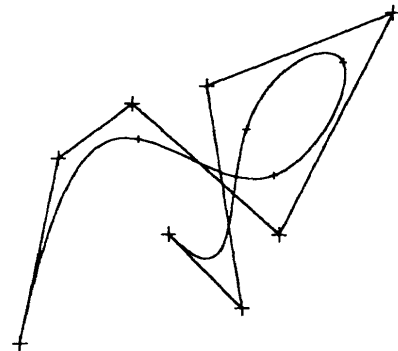
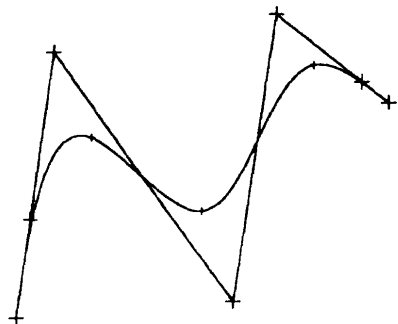


Fig. 3 A B-spline curve and control points.

An example of a generated B-spline is shown in Fig. 4(a). It is also possible to compute a B-spline that passes through given points, as shown in Fig. 4(b), where 2nd derivatives at boundary points are set zero.



(a) Control points are given.
+ : control points



(b) Passing points are given.
+ : control points
+ : passing points

Fig.4 1-D non-uniform B-spline

For the ease of extension to 2D, knot vectors s_i are equally spaced with a spacing of unity, i.e., uniform B-splines are used. Then the basis functions take the following forms.

$$\begin{cases} N_{i-3}^4(\xi) = \frac{1}{6}(1-\xi)^3 \\ N_{i-2}^4(\xi) = \frac{1}{6}(3\xi^3 - 6\xi^2 + 4) \\ N_{i-1}^4(\xi) = \frac{1}{6}(-3\xi^3 + 3\xi^2 + 3\xi + 1) \\ N_i^4(\xi) = \frac{1}{6}\xi^3 \end{cases} \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (3.2)$$

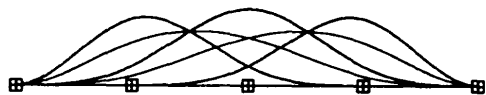


Fig. 5 A hump moving on a coarse 1-D B-spline.

In 1-D, if the value of a function at a certain control point is unity and the values at all the other control points are zero, a B-spline gives a hump which extends in four consecutive intervals. It is shown as a thick curve in the center of Fig. 5. It is called a basis function of B-spline. The two neighboring humps shown by thick curves have a function value of unity at adjacent control points. Their asymmetry is caused by the influence of boundary conditions. If one wants to place the peak of the hump at somewhere between the control points, one would give the values of function which sum up to unity to the two control points while changing their ratio depending on the location of the peak. In case the peak is at the middle of the two control points, the function values should be 0.5 each. The case is shown by thin curves in Fig. 5. Clearly, the hump is shorter and wider, and does not preserve its shape.

The extension of uniform B-splines to 2-D curved surfaces is straightforward. It is carried out by the tensor product of B-splines in two direction, as shown below.

$$P_{i,j}(\xi, \eta) = [N_{j-3}^4(\eta), N_{j-2}^4(\eta), N_{j-1}^4(\eta), N_j^4(\eta)] \times \begin{bmatrix} Q_{i-3,j-3} & Q_{i-2,j-3} & Q_{i-1,j-3} & Q_{i,j-3} \\ Q_{i-3,j-2} & Q_{i-2,j-2} & Q_{i-1,j-2} & Q_{i,j-2} \\ Q_{i-3,j-1} & Q_{i-2,j-1} & Q_{i-1,j-1} & Q_{i,j-1} \\ Q_{i-3,j} & Q_{i-2,j} & Q_{i-1,j} & Q_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i-3}^4(\xi) \\ N_{i-2}^4(\xi) \\ N_{i-1}^4(\xi) \\ N_i^4(\xi) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$(\xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}, \eta_j \leq \eta \leq \eta_{j+1})$

where the control points $Q_{i,j}$ are distributed meshwise as shown in Fig. 6.

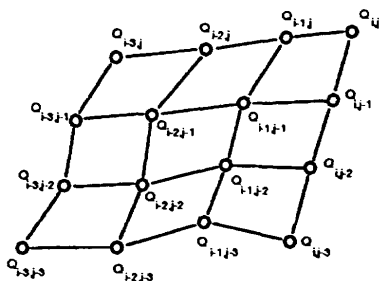


Fig. 6 Control points $Q_{i,j}$ for B-spline surface.

If all those humps in Fig.5, drawn in thick or thin lines, are distributed at consecutive sections in 2-D, the contour plot of the height distribution would be like that in Fig. 7. The figure shows clearly the poor quality of a coarse mesh in preserving the hump shape when its location changes continuously.

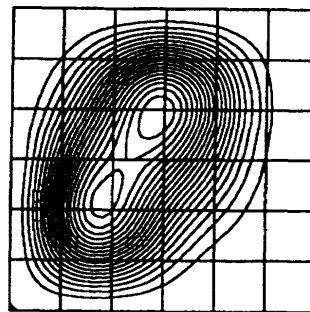


Fig. 7 Humps changing location at a half mesh pitch on a B-spline net.

Fig. 7 shows the severest test case for the moving hump problem, while Fig. 8 shows the easiest, where the location of the hump agrees with that of the control point at each section. But one can observe slight wiggles in the contours even in this easiest case.

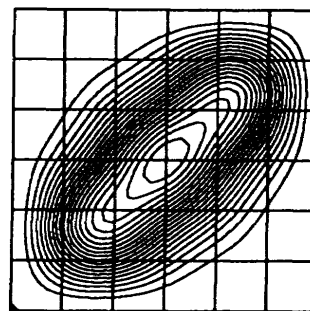


Fig. 8 Humps changing location at a mesh pitch on a B-spline net.

4. B-splines on a fine net with grouping

In order to get better quality in preserving the shape of the hump, the number of control points are doubled as shown in Fig. 9.

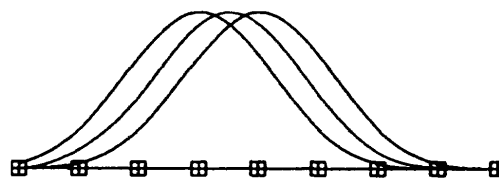
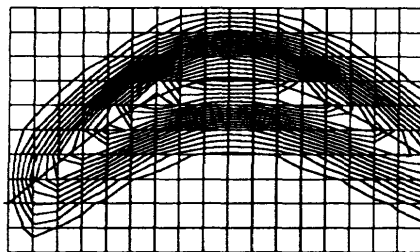


Fig. 9 A hump with least square fitting on a fine 1-D B-spline.

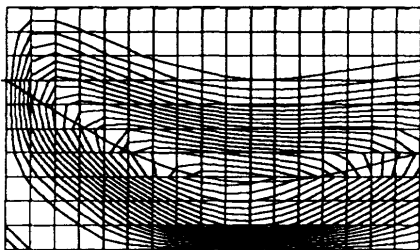
The location of the hump in the center is at the mid point of the two control points, and the locations of the other two are at control points. The values of the function at control points for the middle hump are obtained by least square fitting. As shown in the figure, the shape of the middle hump is indistinguishable from the other two. Thus the problem related with a coarse mesh has been solved. Note that the basis function of a coarse mesh is only one example of target functions for least square fitting. A function of arbitrary shape can

be used.

The problem with refining a mesh is the rapid increase of control points. Therefore, instead of using directly the values of the functions at control points as body geometry parameters, a new set of parameters, much smaller in number, which group control points, should be defined. An example of the grouping is shown in Fig. 10, in which the location and height of the hump is given at three horizontal locations (i.e., the left end, the middle, and the right end), and the values in between are interpolate using B-splines. Thus the number of parameters representing a series of humps in this case is only six. These parameters can be easily controlled by a designer. If more complexity in geometry is needed, more groups should be add.



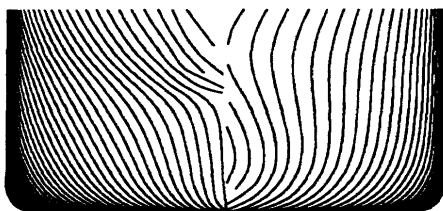
(a) Case 1



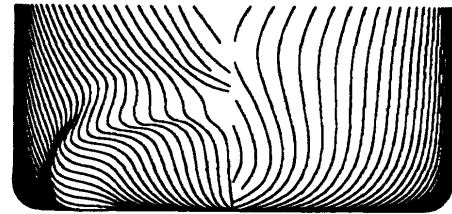
(b) Case 2

Fig. 10 Grouping of control points on a fine 2-D mesh.

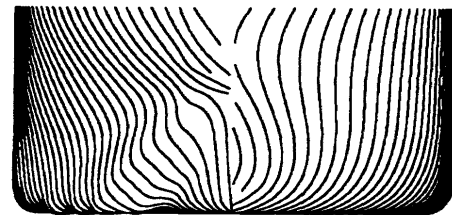
Figs. 11(b),(c) show the modified hull forms, where the height distributions shown in Fig. 10 are added in normal direction to the original shape shown in Fig. 11(a).



(a) Original shape



(b) Case 1



(c) Case 2

Fig. 11 Hull forms with modification

5. Conclusions

A new method for grouping control points on a spline mesh for representing and modifying body geometry has been proposed. The method reduces the number of body geometry parameters significantly, so that a designer can easily control. In order to use this method in practical applications, further study is needed to select suitable form of target functions, and to avoid unnecessary wiggles in the functions obtained using least square fitting.

References

- [1] Hamazaki, J. et al.: Hull Form Optimization by Nonlinear Programming (Part 4) - Improvement of Stern Form for Wake and Viscous Resistance -, J. Kansai Soc. of Naval Architecture, Japan, No. 226, September 1996 (To be published).
- [2] Kodama, Y.: "Generation of 2D, 3D and Surface Grids Using the Implicit Geometrical Method", AIAA 95-0218, 1995.
- [3] Kodama, Y.: "Generation of Body-surface Spline Net Using the Implicit Geometrical Method", 13th NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics, June, 1995 (in Japanese).
- [4] Kodama, Y.: "Representation of Ship Hull Form Using Multiblock Grid", J. Kansai Society of Naval Architects, Japan, No. 226, September 1996 (to be published in Japanese).

楕円型方程式を用いたマルチブロック格子生成法について

山本一臣*

On a Multi-Block Grid Generation Method Using an Elliptic Equation

by

Kazuomi Yamamoto*

National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

A multi-block grid generation method using an elliptic PDE (partial differential equation) proposed by the author is presented. To reduce the human effort for the cumbersome multi-block grid generation, surface grids are also created in the interior volume grid generation by surface boundary conditions, and the grid topology is defined by the nodes which form block vertices. As examples, grids for turbomachinery flow problems are successfully generated with the high quality properties of the elliptic PDE method without large human effort.

1. はじめに

マルチブロック構造格子は、構造格子による計算の速度、容量、精度の面の利点を維持しながら物体形状への適合性や格子の質を高めることができる上、ブロック間の連続性や保存性が完全に保証されるため、実際の複雑な物体形状周りの流れの計算、特に内部流れの計算に適している。図1は単一格子とマルチブロック格子の比較により、その利点を簡単に説明している。単一格子では、図1(a)や(b)のように一部の境界に格子を合わせると、他の境界で質の良い格子を作ることができなくなってしまうが、図1(c)のようにマルチブロックにして、図1(c)のA点とB点のようにブロック同士の接続に非構造的なつながりを許すことにより、格段に全体の質が向上することがわかる。4つの格子点からなる矩形セルをコントロールボリュームと考えて有限体積法を適用すれば、計算上はA点とB点は特異点として扱う必要もなく、従来の計算方法を大きく変更する必要がない。

実際の応用としては、航空機全機まわりの格子のように、胴体、主翼、尾翼、エンジンのそれぞれに適合しながら、全体としても質の良い格子の生成が可能であり、また三次元ターボ機械の流れの計算のように、翼のねじれによる格子の大きな歪みをマルチブロック格子にすることにより避けることも可能である。さらに、タービン内部の冷却通路のように、凹凸やピンの存在などにより複雑に見える形状でも、マルチブロック格子を利用すれば、非構造格子法に頼らなくとも滑らかで質の良い格子を作成することが可能である。

しかしながら、以上のような利点に対してマルチブロック構造格子の生成作業は非常に複雑なものになりやすい。従来の格子生成手順は、表面格子を先に生成してから、それを Transfinite 法で内挿するか、微分方程式を解いて空間格子（内部領域の格子）を生成する。しかし、この方法を

そのままマルチブロック格子の生成に適用すると、各ブロックの表面格子をすべて先に決める必要があるため、作業が非常に煩雑になってくる。しかもブロック同士の接続境界の位置には自由度があるので、その決め方が格子全体の質を左右することになる。近年は CAD の考え方を基本にし、インタラクティブに三次元マルチブロック格子を作成する方法が一般的になってきているが、それでも三次元形状が複雑であったり、ブロックの個数が増えるにしたがって煩雑化し、何百回ものマウスクリックを要求され、人間の作業量が異常に多くなってしまった。したがって、マルチブロック構造格子の生成には従来とは異なる、より自動化された方法が要求される。

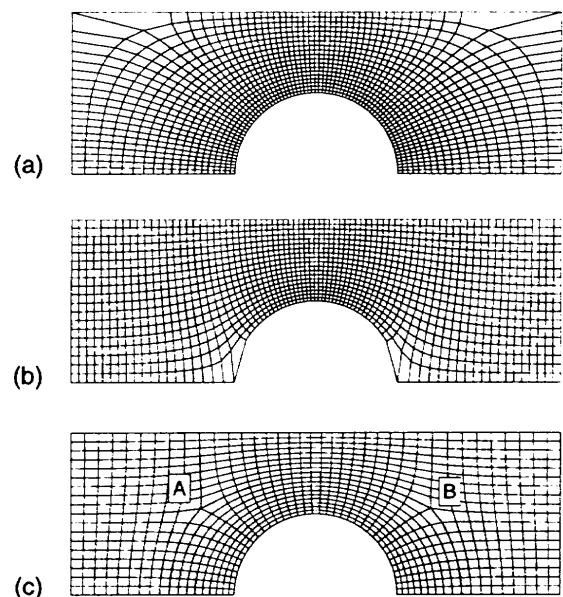


図1 単一格子とマルチブロック格子。

最近 Eiseman[1 など]は格子トポロジーの定義と格子生成を分離する、という考え方により、格子のトポロジーとクラスタリングのパラメーターだけを人間が決めると、後はほぼ自動的にスムーズな格子が生成される方法を提案している。試行錯誤が無く、一度で最適な格子を生成することができれば、従来のインタラクティブな方法に比べ、大幅な省力化が可能になる。一方、著者[2]は試行錯誤を極力減らして最適な格子生成を可能にするため、柔軟性が高く、しかも頑丈な楕円型偏微分方程式法を提案している。本方法では格子の制御を、境界、内部領域に関わらず自由に行うことが可能であり、制御パラメーターに物理的な意味付けを行うことで試行錯誤を減らしている。

そこで、この楕円型偏微分方程式法に、上記のトポロジー一定義と格子生成を分離する手続きを適用してマルチブロック格子生成を一般化し、作業量を大幅に減らすことを試みた。本報告では、定式化の説明では、一般的に三次元の場合について説明を行い、結果については、二次元の圧縮機翼列を例にとり、その具体的なトポロジー一定義の方法、格子生成手順などについて述べ、格子生成作業の省力化の程度と格子の質の向上について説明する。

2. 格子生成方程式

格子生成方程式の基本的な考え方は以前のもの[2][3]と変わっていないが、若干の修正を行っている。三次元の場合は、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \left[C_\xi x_{\xi\xi} + C_{d1} \left(1 - \frac{\delta_1}{|x_\xi|}\right) x_\xi + C_{v1} (x_\xi - |x_\xi| e_1) \right] \\ & + \alpha_2 \left[C_\eta x_{\eta\eta} + C_{d2} \left(1 - \frac{\delta_2}{|x_\eta|}\right) x_\eta + C_{v2} (x_\eta - |x_\eta| e_2) \right] \\ & + \alpha_3 \left[C_\zeta x_{\zeta\zeta} + C_{d3} \left(1 - \frac{\delta_3}{|x_\zeta|}\right) x_\zeta + C_{v3} (x_\zeta - |x_\zeta| e_3) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、

$$\mathbf{x} = (x, y, z), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^3 J_{ij}^2$$

J_{ij} はヤコビアン行列

$$J = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}$$

の余因数である。

$\delta_{1,2,3}$ は各格子線の方向 (ξ, η, ζ 方向) の格子幅 (格子点間の間隔) を制御するための参照格子幅であり、 $e_{1,2,3}$ は各格子線の向きを制御するための参照単位ベクトルである。(1)式の幾何学的な意味を図2に示す。各方向の二階微分項は、注目している格子点を両側2点間の中心に移動させることで格子を滑らかにし、一階微分項は、それぞれ格子幅を δ 、方向をベクトル \mathbf{e} の方向に回転させようとする。これら三つの制御を C_ξ, C_{d_i}, C_{v_i} の値により平均化し、希望する格子を作ろうとしている。したがって、格子の質は δ 、 \mathbf{e} と C_ξ, C_{d_i}, C_{v_i} の値の与えかたによって決まってくるが、格

子生成の考え方としては、局所的に格子幅や方向を望みどおり制御し、それ以外は格子を滑らかにする、というものが自然であるので、 δ や \mathbf{e} はある空間内で局所的に一定値としておき、 C_ξ, C_{d_i}, C_{v_i} を ξ, η, ζ の関数として格子を制御する方法をとる。また、図2からも分かるように、格子幅を制御するベクトルと方向の制御をするベクトルは互いに直交しているので、独立に制御することが可能である。

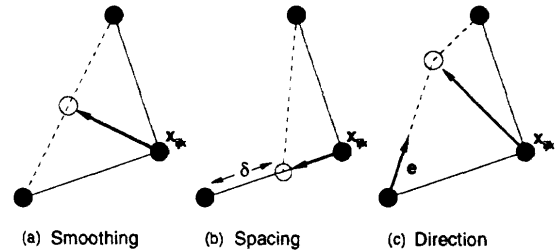


図2 格子生成方程式の幾何学的な意味。(a)二階微分項による平滑化、(b)格子幅の制御、(c)格子線方向の制御。

3. 格子制御関数

制御関数 C_ξ, C_{d_i}, C_{v_i} の決めかたには任意性があるが、これまでの経験から、以下のようなものをとる。

$$\begin{aligned} C_{v_i} &= \begin{cases} \text{sign}(\xi_c^i - \xi^i) \max\left(\frac{\xi_c^i - \xi^i}{\xi_c^i - \xi_0^i}, 0\right) & (\xi_c^i - \xi^i \neq 0) \\ 0 & (\xi_c^i - \xi^i = 0) \end{cases} \\ C_{d_i} &= \begin{cases} \text{sign}(\xi_c^i - \xi^i) \frac{S(1+S)^{\xi_c^i - \xi^i - 1}}{(1+S)^{\xi_c^i - \xi^i} - 1} & (\xi_c^i - \xi^i \neq 0) \\ 0 & (\xi_c^i - \xi^i = 0) \end{cases} \\ C_\xi &= 1 - \max(|C_{d1}|, |C_{d2}|, |C_{d3}|) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $i=1,2,3$ はそれぞれ ξ, η, ζ に対応し、 S は格子幅のストレッチングを意味するパラメーター $S = x_{\xi\xi} / x_\xi$ である。 ξ_c^i は幅や方向制御の中心になる格子点の ξ^i であり、 ξ_0^i は C_{v_i} の値がゼロになる ξ^i である。

(2)式の C_{v_i} は単純に直線的に減衰する関数であるが、 C_{d_i} と C_ξ の組み合わせは、等比級数的に格子幅が引き伸ばされていくように格子を制御する。たとえば、 S を 0.5、 δ を 1/1000 の一定値として直線上に格子点を分布させたとき、格子の点数が最適であれば、格子幅は ξ_c では正確に 1/1000 となり、離れるにしたがって 1.5 倍ずつ格子幅が広がっていく。実際は、要求される格子の間隔、方向、ストレッチングを同時に満たすことはできないため、本方法では格子幅と方向の制御を優先させ、それに合わせてストレッチングが調整されるようにしている[3]。さらに、他の格子線方向の制御にも影響されて、最終的な格子は決定される。

厳密に望む格子幅を与えたい部分では $C_{d_i} = 1$ とするが、(2)式の関係から、方向が不定にならないように必ず $C_{v_i} > 0$ として、方向ベクトル \mathbf{e} を与える必要がある。

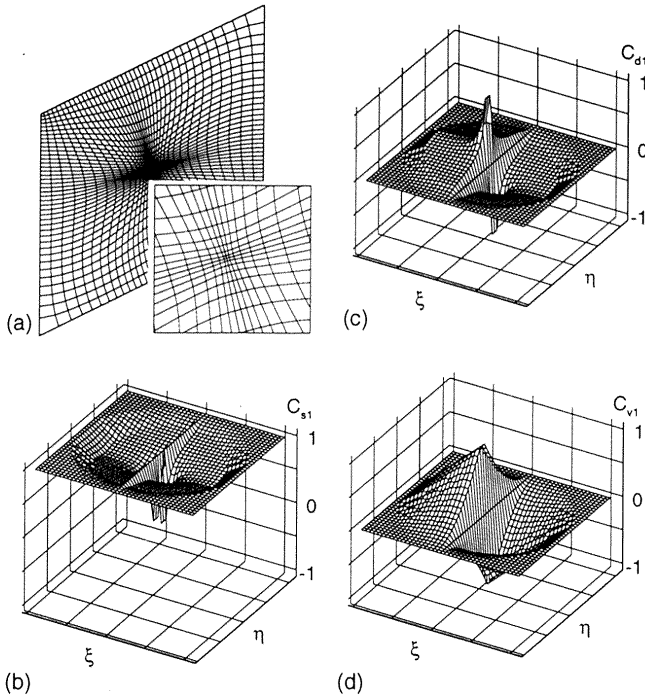


図3 格子制御関数。(a)(b)~(d)の制御関数で生成された格子、(b)平滑化、(c)格子幅、(d)直交性の制御関数。

図3(a)は平行四辺形の中に中心の格子幅を一辺の長さの1/1000にした格子を生成した例である。図の右下には中心部を拡大して表示している。図3(b)~(d)は(a)の格子生成のために使った ξ 方向の格子制御関数の分布を示している。

ここまで、制御関数は (ξ, η, ζ) 座標で表現されているが、物理的な距離との関係が分かると、格子の制御がやりやすい場合がある。たとえば、図4のように格子線とは関係のない曲線 $y = f(x)$ などの幾何学形状に対して格子をよせる場合などがそれにあたる。一次元で等比級数的なストレッチングを仮定すると、 ξ と距離 L の関係は次のようになる。

$$\xi - \xi_c = \frac{\ln(1 + SL/\delta)}{\ln(1 + S)} \quad (3)$$

ここで、 L は格子を制御する座標から、注目している格子点までの距離である。

さて、(1)式は、形式上は一般によく使われるThompsonらの方法[4]を含み、同じように見えるが、その基本的な考

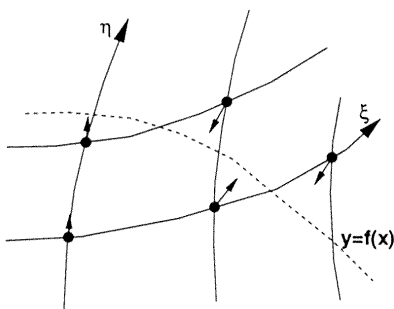


図4 格子線以外の曲線へのクラスタリング。

え方が異なっている。彼らの方法は、楕円型方程式で滑らかな格子を作り、ソース項を加えることにより、それを变形させて格子の制御をやろうとしている。これに対し、本方法では、局所的に厳密に格子の制御を行うことを考え、その残りの部分を平滑化するように作っている。したがって、格子の制御の緻密さと柔軟さが根本的に異なっている。

4. 離散化

二階微分項は単純な中心差分を用いるが、一階微分項には、計算の安定化のためと、図2の幾何学的な意味から、次のように片側差分をもちいる。

$$x_\xi \approx \max(C, 0)(x_{j+1} - x_j) + \min(C, 0)(x_j - x_{j-1}) \quad (4)$$

さらに、繰り返し計算で(1)式を解くために、まず、 $x^{n+1} = x^n + \delta x^n$ とおき、Newton法を適用することにより、 x の修正量 δx は次のように得られる。

$$[\partial F / \partial x]^n \delta x^n = -F(x^n) \quad (5)$$

ここで、 $F(x^n)$ は離散化された(1)式である。(4)式により、ヤコビアン行列 $[\partial F / \partial x]^n$ の優対角性が保証されるので、(5)式を解くためには対称 Gauss-Seidel法を用いている。その頑丈さにより初期格子にはかなり荒っぽい格子を用いることができる。

5. 表面格子と境界条件

各ブロックは物体表面境界とブロックどうしの接続境界をもつが、いずれの表面格子も(1)式の計算をそのまま表面上で行うことによりブロック内部の空間格子の計算と同時に生成する。

ブロックどうしの接続は、ブロック境界をまたいで格子点を重ね合わせるにより行う。また、いくつもの格子線が集まる可能性があるブロックの角の点は各ブロックの平均値をとることにより行う。

物体表面上の格子の生成は、児玉[5]と同様に物体表面上を格子点が移動するという制約条件をつけて、(1)式を計算することにより行う。この場合、二通りの考え方があり。一つは、特に表面格子内でクラスタリングを行う必要がなく、滑らかに格子が生成されていれば良い場合であり、表面に対して格子線が垂直に交わるという条件をつけて表面格子を決定する。この場合、表面格子は空間格子全体が最も滑らかになるように決定される。もう一つの方法は、従来同様に、表面格子の生成と空間格子の生成を分離して、表面格子を生成する場合であり、表面格子内での格子制御を厳密に行うことができる。この場合、表面と交差する格子線方向の制御を無効にすることで、空間格子とは独立して表面格子が決定される。そして、空間格子はこの表面格子を境界条件としながら同時に生成される。もちろん、この二つの方法を平均し混合させることも可能と考えられる。

6. トポロジーの設定

これまでの計算方法により、格子生成は可能になるが、境界条件やクラスタリングのパラメーターを各ブロックごとに設定してやる必要があり、このままでは従来の格子生成同様、人間の作業量が膨大となり、手軽に格子を作ることができない。そこで、Eiseman ら[1]と同様に、格子のトポロジーを表現する節点を、入力データの対象として考える。各節点に座標値や境界条件、クラスタリングパラメーターなどの情報を与え、各ブロックの頂点に対応する節点のラベル（番号など）を与えることにより、各ブロックごとの境界条件、クラスタリングパラメーターの分布などを作り出すことができる。図 5 (a)は図 1 (c)の格子に対する入力情報を示しており、図 5 (b)はそれによって作られた格子トポロジーを表すワイヤフレームである。節点についている番号は節点を表すラベル、四角で囲っている番号はブロックを表すラベルである。各節点には固定か、自由に移動できるか、また、物体上にあるのか、を示す属性を与えている。著者が作成したコードでは、簡略化のために、一つのブロックの各辺は一種類の（格子の）境界条件に限る、という制約をつけている。

格子生成計算に先立って、このような前処理をすることにより、ユーザーはブロックの接続を意識せずに済み、二重、三重に同じようなデータを入力することによる煩雑さとケアレスミスを避けることができる。節点座標は繰り返し計算のための初期格子を作るときに利用されるが、格子生成計算の頑丈さにより、固定する節点以外はおおまかな座標値を与えればよい。

```

begin_topology
Node
node#      X      Y      Attribute  Geometry#
1          -2.0   0.0   free       1
2          -1.0   0.0   fix        1 2
3          -2.0   1.2   free       2
4          -1.0   1.0   free       2
:          :      :      :          :
16         3.0   0.0   fix        3 5

Block
1          2      3      4
4          5      3      6
7          8      5      6
:          :      :      :
8          16     6      13

end_topology
    
```

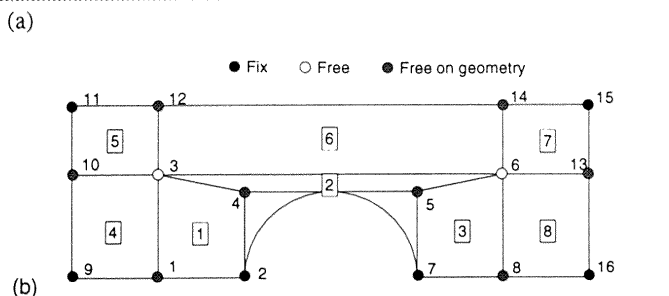


図 5 図 1 (c)の格子のトポロジー設定。(a)入力データ、(b)トポロジーを表すワイヤフレーム。

したがって、ユーザーは対象にしている物体の形状の重要な座標値だけを認識していればよく、作業量を大幅に減らすことができる。さらに、本方法は本来マルチブロック格子の生成を目的として作られているが、マルチブロック格子に限らず、最終的に単一ブロック格子になる場合でも、いくつかに分割してマルチブロック化してから格子生成を行い、再度結合することにより、ほぼ完全に一般化した形でコードを利用することができる。

特に三次元の場合、Transfinite 法を利用した格子生成法でも現在のワークステーションでは計算時間がかかるため、インタラクティブな方法で格子を生成する作業は、計算の規模が大きくなるにつれて非現実的になる。しかし、本方法のように格子トポロジー定義と格子生成を分離できる場合は、トポロジー設定の前処理にグラフィック・ユーザー・インターフェースを利用しても計算に時間がかからず、格子生成の方は独立に規模の大きな計算機にまかせることができる。また、クラスタリングパラメーターの決定は物理的な検討で決めることが可能であり、十分な検討を行った後であれば、試行錯誤無しに、ほぼ一回で望む格子を生成することも可能である。

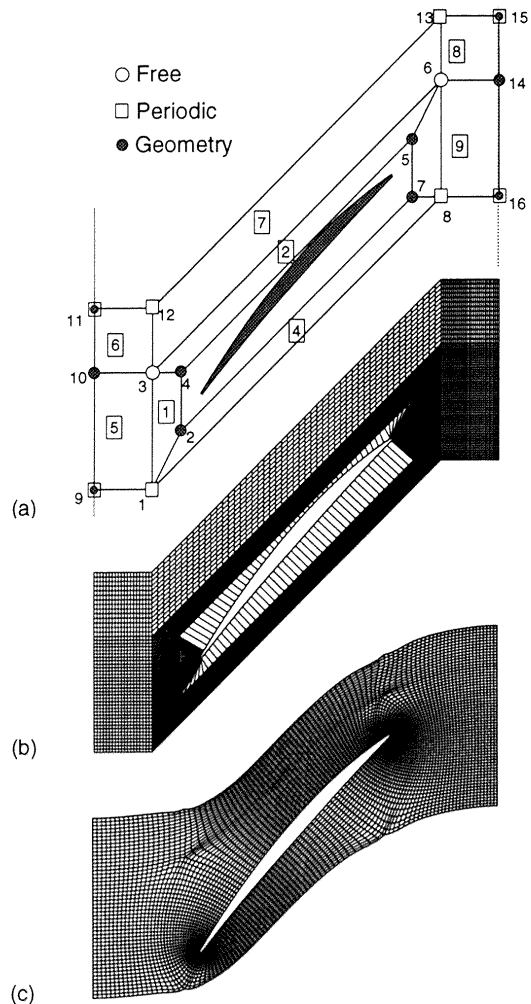


図 6 圧縮機翼列周りの格子生成。(a) 格子トポロジー、(b) 初期格子、(c) 特異点の周りだけクラスタリングを行う。

7. 二次元格子生成の例

図6～8は圧縮機翼列のまわりに9ブロックからなる格子を生成した例である。図6(a)は図5(b)と同様に作られた格子トポロジーである。ここでは、属性として、翼列流れの計算特有の周期性を加えている。つまり、図6(a)の節点、9,1,8,16はそれぞれ11,12,13,15と周期的に接続されている。なお、このケースでは固定した節点一つもない。節点1,3,12,8,6,13は5つのブロックが接続されている節点であり、格子幅が広がりやすいので、節点に向けて格子が集まるようにしてある。また、ブロック1,2,3,4は翼面に格子が集まるように、翼面上に移動する辺に向けて格子が集まるようにしている。それ以外に、幾何形状へのクラスタリングとしては、翼の前縁および後縁周辺に格子が集中するようにしており、また、後流の解像度をあげるため、後縁から下流に向かう直線に格子を集めるようにしている。

図6(b)は図6(a)のワイヤフレームからつくられた初期格子である。節点2,4,5,7は翼面上で最も近い位置に移動している。翼面上の格子点で固定しているものがないので、まず最初に翼面上のおよその格子点位置を決めるために、翼面、前・後縁、後流へのクラスタリングを行わず、全体の格子が最適なものになるように1000回の繰り返し計算を行った(図6(c))。次に、翼面、前・後縁、後流へのクラスタリングを加えて、さらに1000回のクラスタリングを行った最終結果を図7に2ピッチ分、ブロック境界とともに示している。各クラスタリングの条件を満たしながら非常に滑らかで直交性の良い格子が作られていること、また、図6(a)とくらべて、格子が最適になるようにブロック境界が変形していることがよく分かる。図8(a),(b)は前縁および後縁付近の拡大図である。格子のクラスタリングが滑らかに行われていることが理解できる。

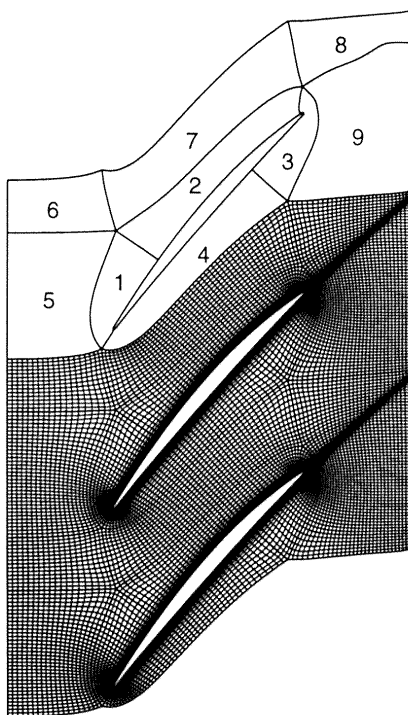


図7 圧縮機翼列周りの格子。

図9、10は、ある圧縮機翼に対して本方法と他の方法を使った計算の比較である。図9(a)はEAGLE格子生成コード[6]による格子、図10(a)は本方法によって作られたものである。どちらも同じマルチブロックのトポロジーを使っているが、格子の直交性や特異点(5つのブロックの節点)での格子の制御に明らかな差が出ている。直交性の違いは人間が最初にブロック境界を定義したか、それが最適になるように計算で求められたか、によるところが大きい。また、人間が作業に要した時間は、本方法が15分程度、EAGLEの方は一日かかっている。本方法では同じトポロジーで似たような物体の周りに格子を作る場合、人間の作業がほとんど必要ないのに比べ、従来の方法では毎回格子を作り直す作業が必要になってくる。また、本方法では、作業をする人間の経験やセンスによっても、できあがる格子に差が出てこないことも特徴である。なお、図10(a)の格子は、一度、本方法による格子で流れを計算した後に、衝撃波と後流の形状を表す曲線を求め、それらにクラスタリングを行っている。

図9(b)、図10(b)はRoeのUpwind Differenceを使ったTVDスキームによる流れの計算結果の比較である。等高線はマッハ数分布を示している。図9の方ではマルチブロックの特性を生かしきれず、格子が歪んでいるため、衝撃波が不鮮明になっているが、格子の直交性の良い図10の方

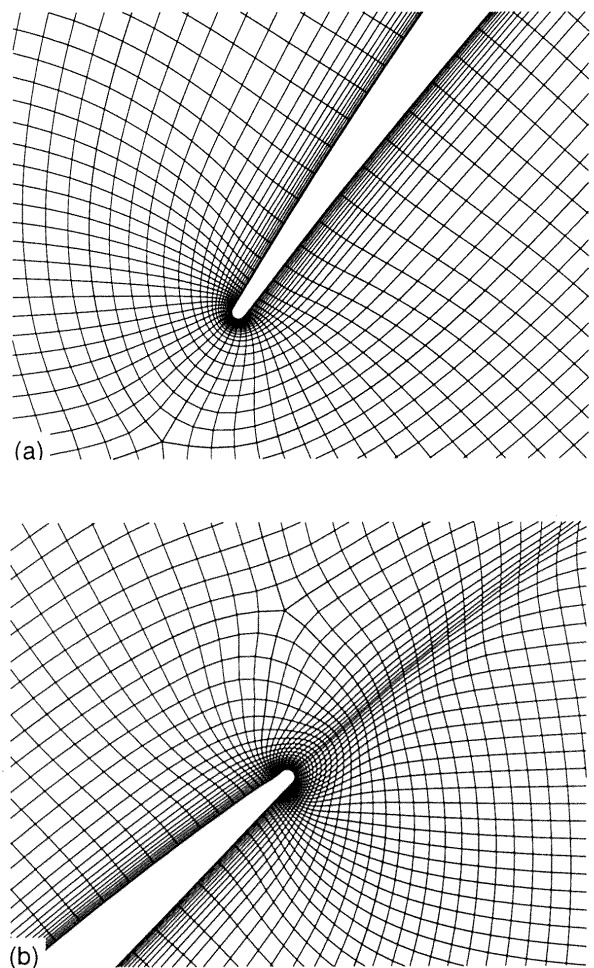


図8 前縁(a)、後縁(b)周辺の拡大

では、非常に鮮明に捕らえられている。衝撃波にクラスタリングを行ったことによる差もあるが、図9では歪んだ格子のために衝撃を捕獲するのに5点以上が必要になっているのに対して、図10では本来のスキームの特性を生かして2~3点で捕獲することができる。

8. 結論

格子制御の柔軟性が高く頑丈な楕円型格子生成法に、トポロジー定義と格子生成を分離するという手続きを導入して一般化することにより、マルチブロック格子の生成にかかる人間の作業量を大幅に減らすことができた。また、クラスタリングパラメーターの工夫などにより、質の高い格子を最小限の試行錯誤で生成することが可能となった。現在、本方法の三次元版コードの作成を進めている。

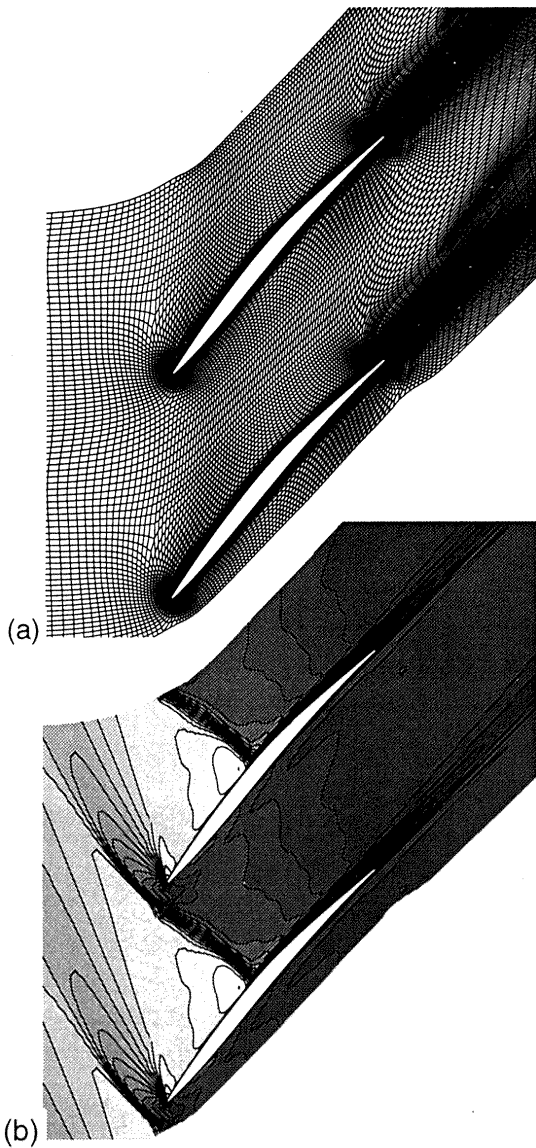


図9 他の格子生成コードによる圧縮機翼列周りの格子。(a)格子、(b)計算結果(マッハ数)；格子点数13000。

謝辞

本方法によるコードの作成にあたって、御助言、御協力を頂きました、ドイツ航空宇宙研究所(DLR)のDr. Karl J. Engel氏、航空宇宙技術研究所の榎本俊治氏、および株式会社システム開発の中野彦氏に対し、深く感謝の意を表します。また、図9,10の計算はDr. Karl J. Engel氏によるものです。

参考文献

- [1] Cheng, Z. and Eiseman, P., *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation*, Soni, B. K. et. al., Eds., pp.413-421, Apr. 1996.
- [2] 山本一臣：第10回航空機計算空気力学シンポジウム論文集、pp193-198、航空宇宙技術研究所SP-19, 1992
- [3] Yamamoto, K., AIAA Paper 95-0178, Jan. 1995
- [4] Thompson, J. F. et.al., *Numerical Grid Generation: foundation and an applications*, North Holland, 1985
- [5] Kodama, Y., AIAA Paper 95-0218, Jan. 1995
- [6] Thompson, J. F., AIAA Paper 87-0275

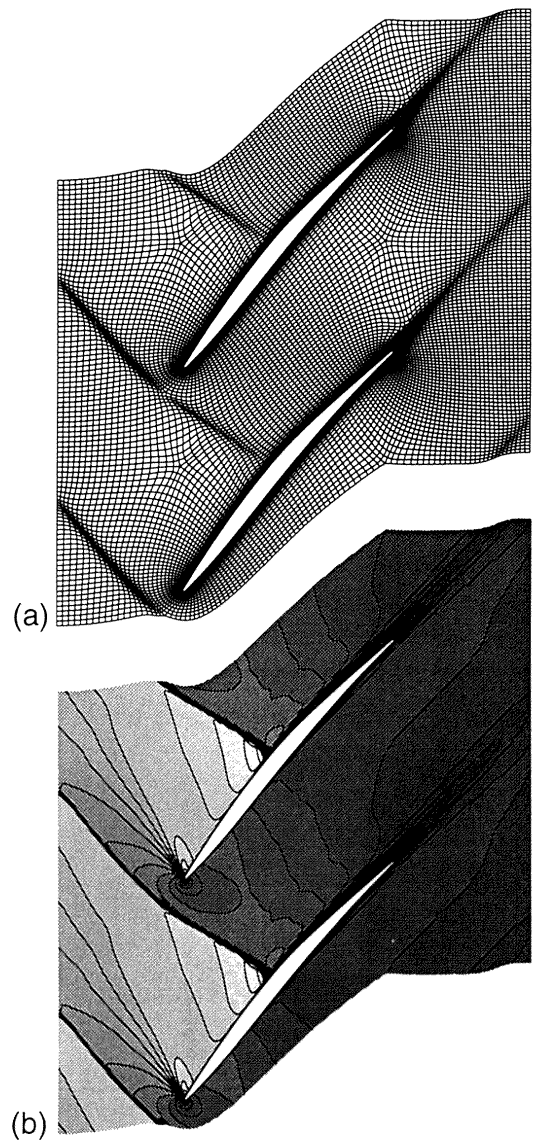


図10 本方法による圧縮機翼列周りの格子。(a)格子、(b)計算結果(マッハ数)；格子点数9500。

RCSジェットと希薄気流干渉の モンテカルロ直接シミュレーション

古浦勝久*¹、高平幹成*²、石川直恒*²

Monte Carlo Direct Simulation of Jet/Rarefied Corner Flow Interaction

by

Katsuhisa KOURA*¹, Mikinari TAKAHIRA*², and Naotsune ISHIKAWA*²

ABSTRACT

The Monte Carlo direct simulation of the interaction of a reaction control system (RCS) nitrogen jet with a hypersonic rarefied nitrogen flow in the corner region of two perpendicular flat plates is performed using the improved null-collision (INC) technique. The molecular model is taken as the variable soft sphere (VSS) model for elastic collisions and the statistical inelastic cross section (SICS) model for rotationally inelastic collisions. The plate surface pressure is compared with the experimental results provided by the European Space Agency (ESA).

1. はじめに

大気圏再突入飛行体の希薄大気飛行時における姿勢制御用(RCS)ジェットと極超音速希薄気流との干渉による物体表面圧の変動を調べるためのモデル実験が行われ、2枚の直交平板表面圧の測定データがESAから提供された。⁽¹⁾ 本研究では、モデル実験に対応した窒素分子ジェットと極超音速窒素分子希薄気流との干渉のモンテカルロ直接シミュレーションを行い、表面圧実験データと比較する。直接シミュレーションモンテカルロ(DSMC)法は、擬衝突(NC)法を実在気体シミュレーションのために改良した改良型擬衝突(INC)法⁽²⁾⁽³⁾を用いる。

2. 計算モデル

実験に用いられた2枚の直交平板(40mm×120mm, 60mm×120mm)とRCSジェット(出口径1.53mm)及び34個の表面圧測定穴(出口径1mm)の位置をFig. 1に示す。A, B, C, D, AH, E, F, G, AVは表面圧測定線を表す。実験に対応して、一様流はよどみ点圧3.5bars及びよどみ点温度1100Kの等エントロピー流のマッハ数20.2における流れとし、RCSジェットはよどみ点圧4bars及びよどみ点温度300Kの

*¹航空宇宙技術研究所 *²大興電子通信株式会社

等エントロピー流の出口マッハ数5.96及び半頂角9°のソースフローで近似する。2枚の直交平板表面は圧力測定穴を無視した壁温300KのMaxwell反射モデルを適用し、弾性及び回転非弾性衝突に対する適応係数は等しいと仮定する。2枚の直交平板に対応した直方体計算領域を巨視的物理量の計算のための小さな直方体データセルに分割する。分子衝突シミュレーションのための衝突セルは、Fig. 2に示すようにデータセルを分子数適合分割法により自動的に分割生成する。弾性衝突モデルは可変性軟球(VSS)分子モデル⁽⁴⁾とし、回転非弾性衝突モデルはParkerの回転エネルギー利得関数をVSS衝突モデルに一般化した⁽⁵⁾統計的非弾性断面積(SICS)分子モデル⁽⁶⁾を用いる。

3. 実験結果との比較

3.1. ジェット吹出無

RCSジェットの吹き出しが無い場合における測定線上の表面圧の比較をFigs. 3-11に、表面圧の等高線分布をFig. 12に示す。完全拡散反射壁(適応係数値 1.0)の場合、表面圧は実験結果より幾分高いので、適応係数値0.8に対する結果と比較してあるが、全般的によい一致が見られる。しかし、工学的表面は完全拡散反射壁であり、運動

量変化から求めた表面圧は圧力穴内の測定値より高い可能性もあるので、さらに検討を要する。

3.2. ジェット吹出有

RCSジェットとの干渉による表面圧の比較を Figs. 13-21に、表面圧の等高線分布をFig. 22に示す。適応係数値は0.8を仮定した。よい一致が見られる部分もあるが、計算値が測定値より高い部分や低い部分が全般的に混在しているので、不一致の原因を詳細に調べる必要がある。分子衝突モデルのパラメータ値、分子衝突セルの大きさ、分子衝突セル当たりの分子数の影響等を検討したが、これらは不一致の原因ではないことが確認された。また、RCSジェットのよどみ点圧が約半分程度の場合に実験値とよい一致が見られるので、RCSジェットのノズルや配管における圧力損失を推算したが、不一致を説明できる程度の損失はない。⁽⁷⁾ RCSジェットの計算モデルが不十分である可能性が高いが、さらに研究を進める必要がある。

参考文献

- (1) J. Allegre and M. Raffin, SESSIA Report 1759/92.1133 (1992).
- (2) K. Koura, Phys. Fluids, 6, 3473 (1994)
- (3) K. Koura, Computers and Mathematics with Applications: Simulation Methods in Kinetic Theory (in press).
- (4) K. Koura et al., Phys. Fluids A3, 2459 (1991); Phys. Fluids A4, 1083 (1992); Prog. Astronaut. Aeronaut. 159, 459 (1994).
- (5) K. Koura, Phys. Fluids 8, 1336 (1996).
- (6) K. Koura, Phys. Fluids A4, 1782 (1992); Phys. Fluids A5, 778 (1993).
- (7) T. Shimada, private communication (1996).

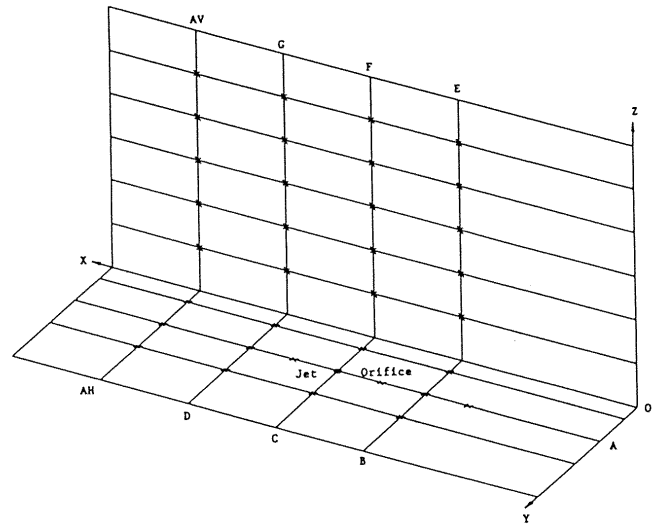


Fig.1 RCS jet and pressure orifice locations on two perpendicular flat plates

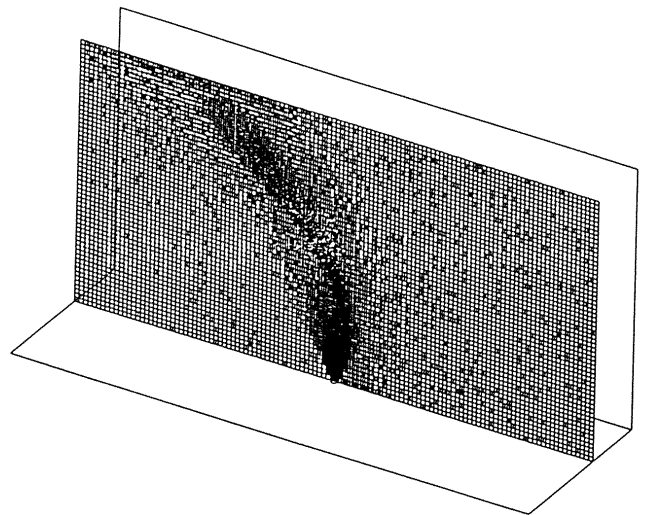


Fig.2 Adaptive Collision Cells.

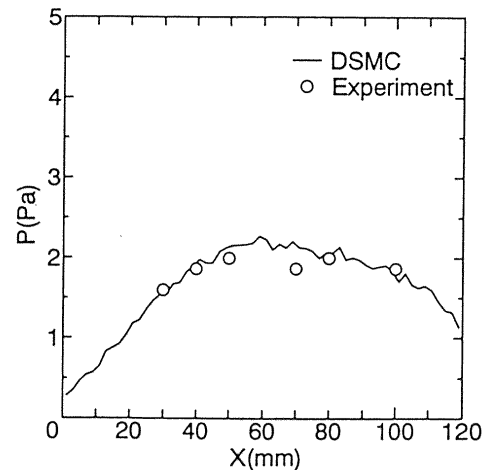


Fig.3 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section A (no jet firing)

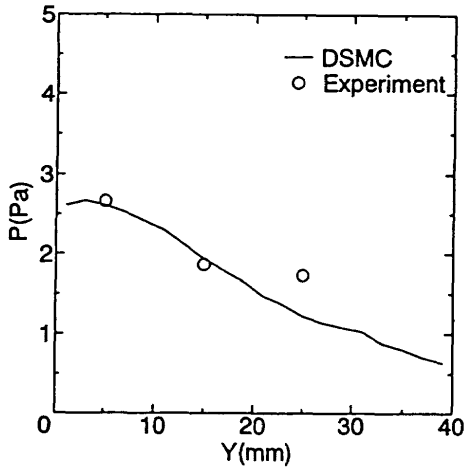


Fig. 4 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section B (no jet firing)

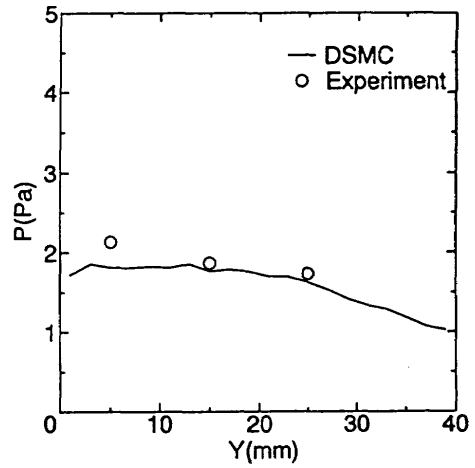


Fig. 7 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section AH (no jet firing)

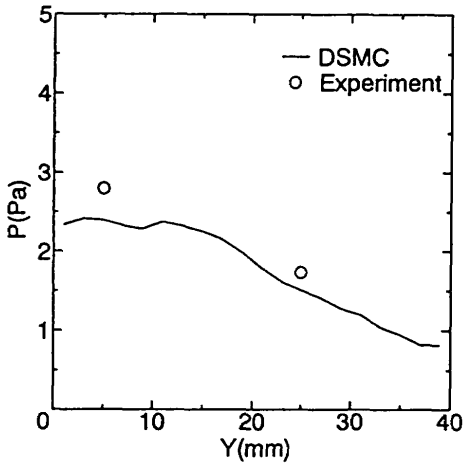


Fig. 5 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section C (no jet firing)

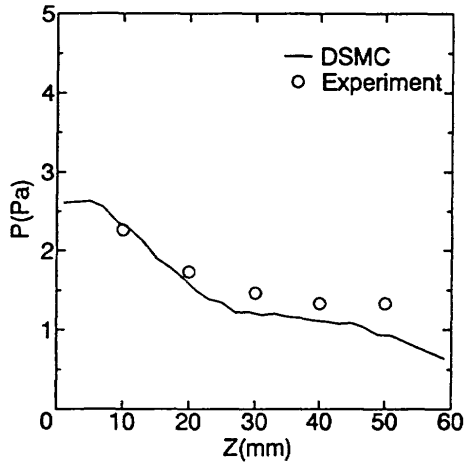


Fig. 8 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section E (no jet firing)

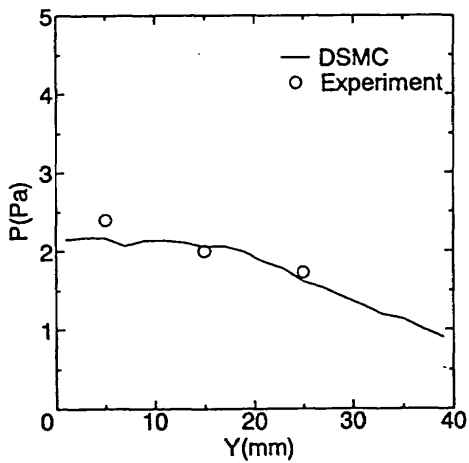


Fig. 6 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section D (no jet firing)

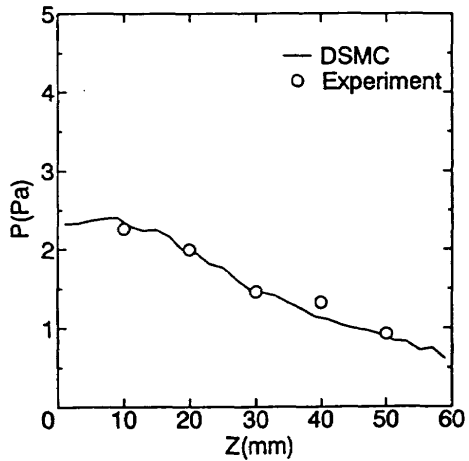


Fig. 9 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section F (no jet firing)

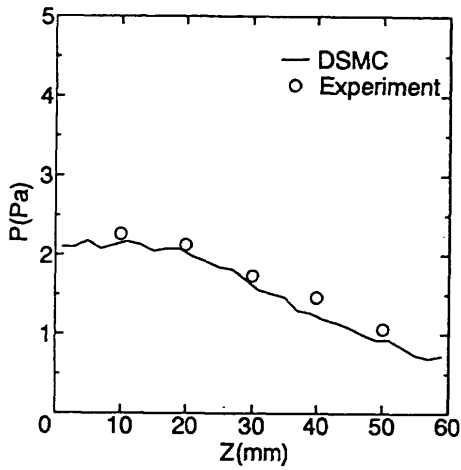


Fig. 10 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section G (no jet firing)

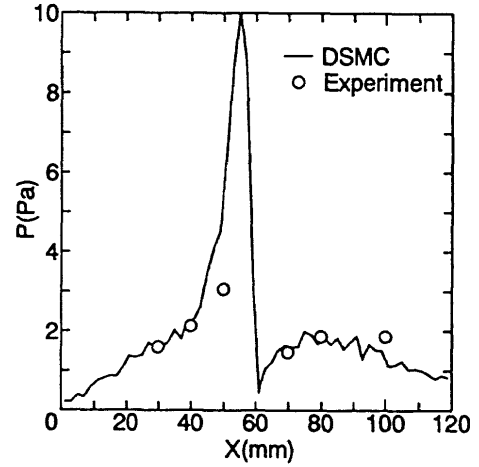


Fig. 13 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section A

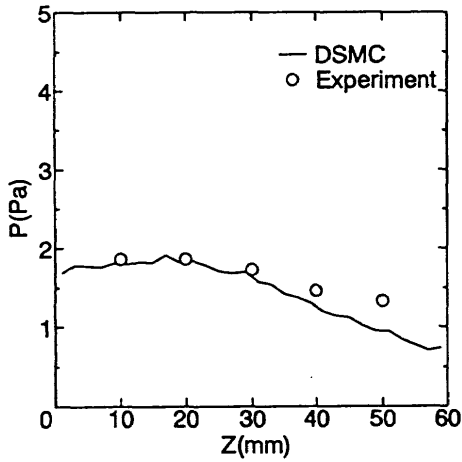


Fig. 11 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section AV (no jet firing)

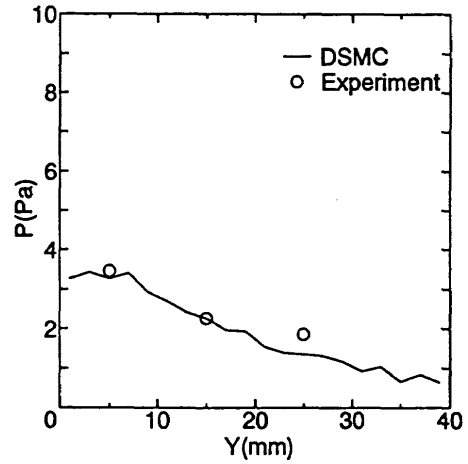


Fig. 14 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section B

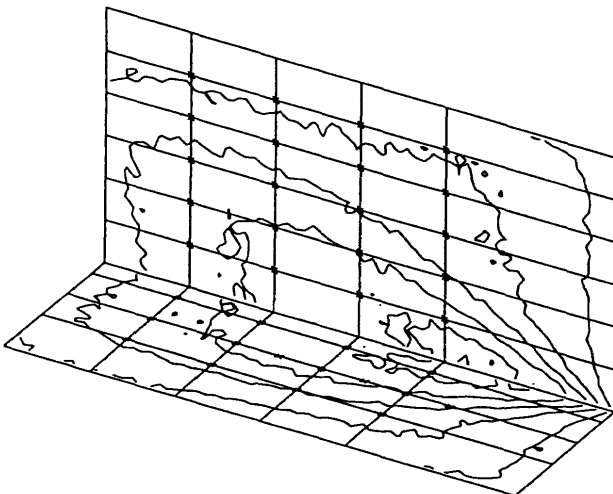


Fig. 12 DSMC surface pressure contour (no jet firing)

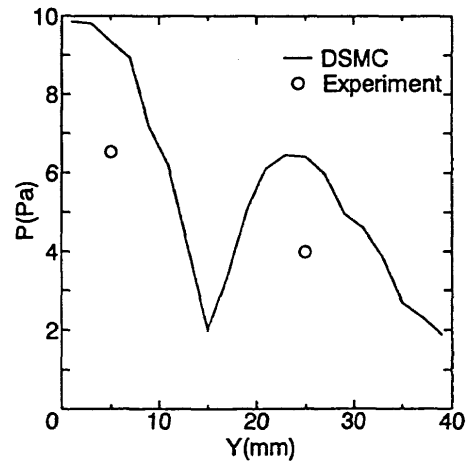


Fig. 15 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section C

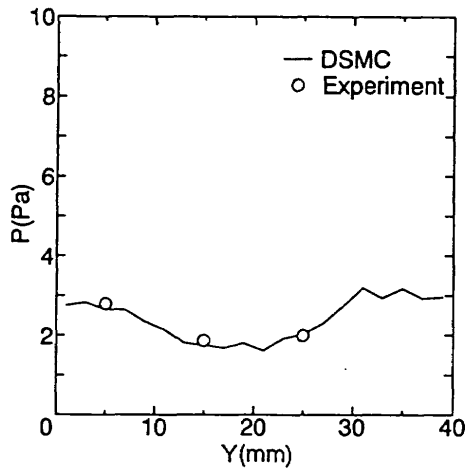


Fig. 16 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section D

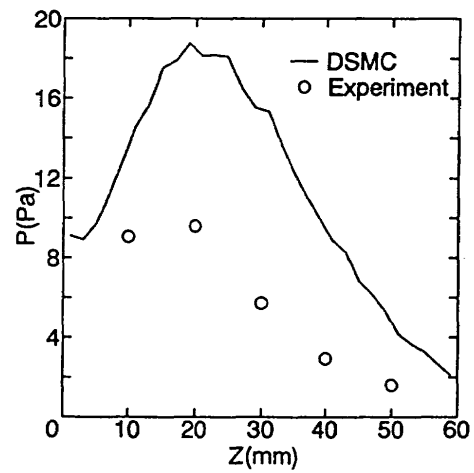


Fig. 19 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section F

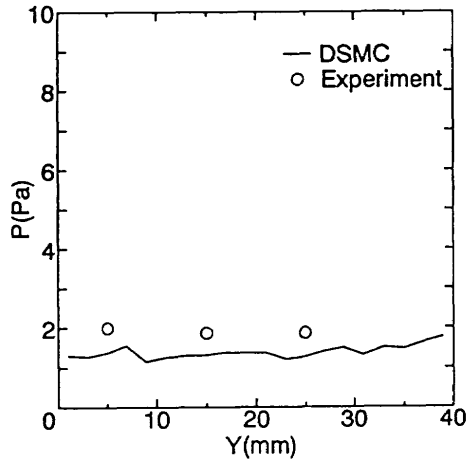


Fig. 17 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section AH

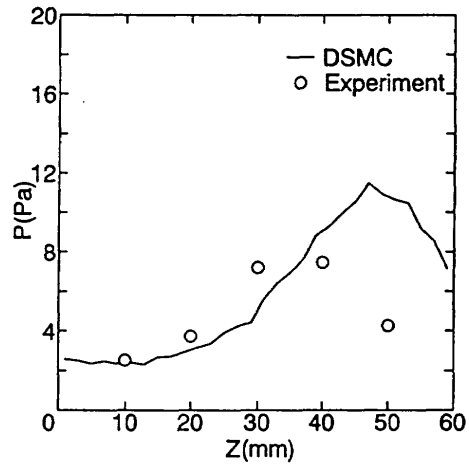


Fig. 20 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section G

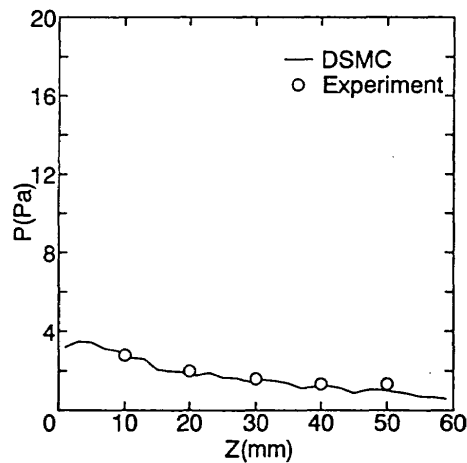


Fig. 18 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section E

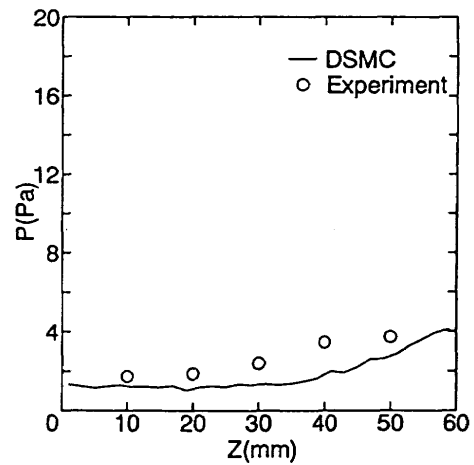


Fig. 21 Comparison of DSMC and experimental surface pressures on section AV

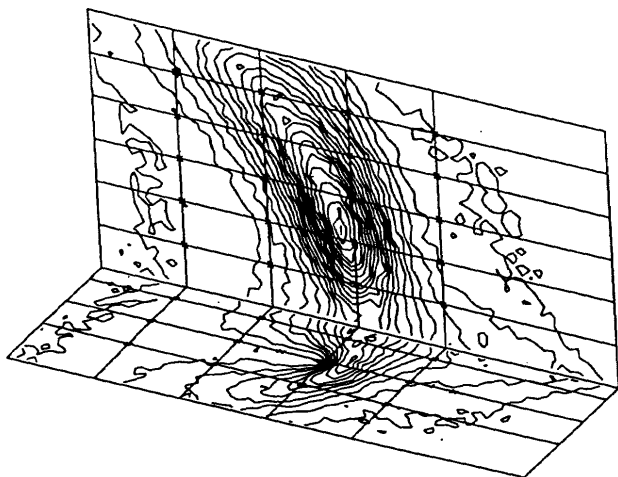


Fig. 22 DSMC surface pressure contour

van der Waals 気体中の衝撃波の不安定解析

石井隆次 由比政年

Instability of Shock Waves in a van der Waals Gas

by

Ryuji ISHII

Department of Engineering Science, Kyoto University,

and

Masatoshi YUHI

Department of Civil Engineering, Kanazawa University,

ABSTRACT

Instability or stability of shock waves in van der Waals gas is investigated numerically. First possibility of presense of several types of shock transition is proved. Next an evolution condition is applied to these shocks numerically. It is shown that only the supersonic-subsonic shock can exist stably. However, all the supersonic-subsonic shock can not always exist as an stable entity and then the supersonic-subsonic condition is only a necessary condition for the shock to be stable. Shock splitting process or the time evolutions of unstable shock transition is also simulated.

1. Introduction

Real gas near the phase boundary has some peculiar effects that are different from those caused by viscosity, heat conduction, relaxation of internal modes and chemical reactions. The most important effects are "degradicity" and "retrogradicity". The former is responsible for the expansion shock and the latter the evaporation (or condensation) in adiabatic expansion (or adiabatic compression).

A fundamental problem concerning the nature of shock waves in a van der Waals gas has long been studied. One of the most interesting facts proved so far is that the existence of expansion shocks cannot be ruled out from the point of view of stability. It is well known that the compression shocks occur in gases having a fundamental derivative $\Gamma = (C^4/2V^3)(\partial^2 V/\partial p^2)$, > 0 , where V , p , C and s are the specific volume, the pressure, the speed of sound and the specific entropy, respectively, and expansion shocks occur for those having $\Gamma < 0$.¹⁻⁴⁾

Shock waves in a large-heat-capacity gas emerging from a tube were investigated numerically and experimentally by Thompson³⁾ et al. Weak shock waves in which the local value of the fundamental derivative changes were studied in detail by Cramer and Kluwick⁴⁾. In the previous studies, analyses were made mainly for relatively weak shock waves. In the full nonlinear problem, the shocks exhibit much more complicated behavior than that of the weak shocks. In this paper, one-dimensional

shock waves are considered. First, the Rankine-Hugoniot relations are obtained by using the Rayleigh line and the shock adiabat in the pV -plane. Characteristics of the shocks are investigated in detail. Next, to justify and confirm the analytical results, numerical experiments are made on a supercomputer with a TVD-scheme. All the numerical simulations were performed on the supercomputer Fujitsu VP-2600 at the Data Processing Center of Kyoto University.

2. Possible Shock Transitions

Detailed investigation of shock transitions satisfying the Rankine-Hugoniot relations and the entropy condition yields the result; there can be seven types of shock transition in the van der Waals gas⁵⁾. These are

Case 1; $M_1 > 1, M_2 > 1$	} for compression shocks,
Case 2; $M_1 > 1, M_2 < 1$	
Case 3; $M_1 < 1, M_2 < 1$	
Case 4; $M_1 > 1, M_2 > 1$	} for expansion shocks.
Case 5; $M_1 > 1, M_2 < 1$	
Case 6; $M_1 < 1, M_2 > 1$	
Case 7; $M_1 < 1, M_2 < 1$	

The sample flow conditions found here are listed in Table 1.

3. Time Evolution of Shock Discontinuity

The evolution condition is that the solution is unique and the transition must be stable to

Table 1. Possible shock transitions

Case	upstream conditions (V_1, p_1, M_1)	downstream conditions (V_2, p_2, M_2)
1	(1.80, 0.92862, 1.01188)	(1.30, 1.06221, 1.00810)
2-1	(1.90, 0.90515, 1.06542)	(0.90, 1.19528, 0.70261)
2-2	(1.80, 0.92862, 1.01262)	(1.450, 1.02227, 0.99729)
2-3	(1.80, 0.92862, 1.01123)	(1.060, 1.12608, 0.95806)
3-1	(1.60, 0.97549, 0.99563)	(1.0, 1.13272, 0.90064)
3-2	(1.40, 1.01939, 0.98961)	(1.010, 1.11558, 0.92042)
4-1	(1.40, 1.01939, 1.00952)	(1.760, 0.92699, 1.00401)
4-2	(1.20, 1.05513, 1.04721)	(2.0, 0.86080, 1.01495)
5-1	(1.40, 1.01939, 1.00963)	(1.650, 0.95521, 0.99759)
5-2	(1.20, 1.05513, 1.04080)	(1.610, 0.95675, 0.97703)
6	(1.0, 1.080, 0.96212)	(2.40, 0.76586, 1.05653)
7	(0.950, 1.08671, 0.85949)	(1.650, 0.93281, 0.95591)

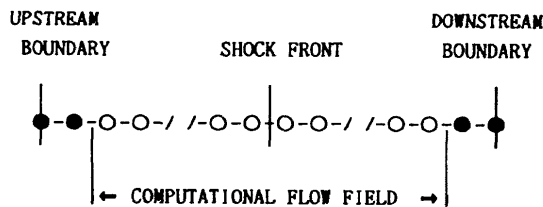


Fig.1 Initial and boundary conditions.

small disturbances. Since all the shock transitions listed in Table 1 are determined uniquely in the p - V plane, here the evolution condition requires that these shock transitions are stable to small disturbances⁶⁾.

Numerically we investigate the shock stability or instability in the coordinate system moving with the shock front. As shown in Fig. 1, first flow conditions satisfying the Rankine-Hugoniot relations and the entropy condition are specified as the initial conditions across the discontinuous plane. For the boundary conditions, the initial conditions are always fixed at two points both upstream and downstream of the boundaries. A time-dependent approach is adopted with a finite difference TVD-scheme⁷⁾. As is well known, numerically any shock wave has some numerical (artificial) structure extending into several meshes. Then after the initiation of numerical simulation, the specified discontinuous shock structure begins to shift into a numerically stable structure. During this transition process, some numerical (artificial) fluctuations are produced. If the upstream flow is subsonic, these propagate upstream and on arriving at the boundaries, some part of the fluctuations may be reflected back from the boundary. On the other hand, those always

propagate downstream and some part will be reflected back, if the downstream flow is subsonic. These disturbances will fluctuate again the shock.

In this paper, we define a shock is stable if the shock wave stay substantially at the original position, its profile extending into several meshes tends to have a converged steady profile, and the flow conditions both upstream and downstream of the numerical shock (having a structure with several meshes) converge exactly to those specified initially. Here it must be emphasized that any shock in the ideal gas has been confirmed to be stable in the similar numerical experiment with the present TVD-scheme.

Samples of time evolutions of the shock transition are shown in Fig.2, where the CFL and mesh numbers are taken to be 0.4 and 100, respectively. The first shows an unstable supersonic-supersonic shock. In such an unstable case, the original discontinuous shock is splitted into a few types of waves which spread out with increasing time step. Once the wave splitting occurs, any time converged shock profile can never be constructed. Figs. 2-b) and c) show stable shocks and then their numerical structures converge to steady ones. Fig.2-d) shows an unstable shock. It is interesting that this shock is supersonic-subsonic shock. Figs.2-e) and f) show expansion shocks, where the former is an unstable supersonic-supersonic shock and the latter is a stable supersonic-subsonic shock.

It has to be stressed that for the stable shocks, the results were checked for various time steps up to 500,000 and it was also confirmed that the instabilities do not depend on the mesh number (50~5000) and the CFL number

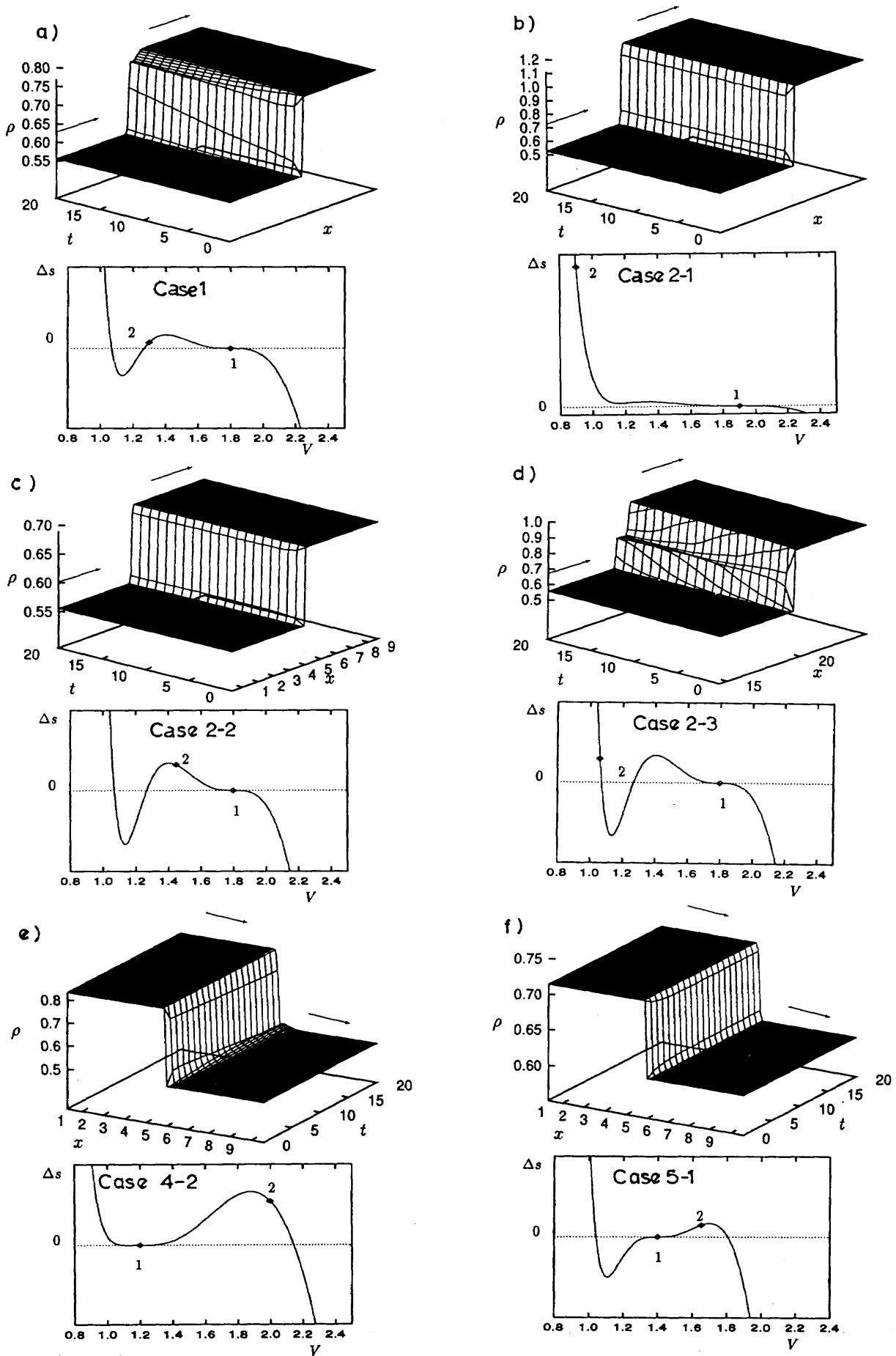


Fig.2 Stable and unstable shock transitions.

Table 2. Stable and unstable shocks.

Case	Present Numerical	Theoretical		
		C & K	F & H	K
1 (CS, Sup.-Sup.)	●	●	★	★
2-1	○	○	○	○
2-2 (CS, Sup.-Sub.)	○	○	○	○
2-3	●	●	○	○
3-1 (CS, Sub.-Sub.)	●	●	○	○
3-2	●	●	○	○
4-1 (ES, Sup.-Sup.)	●	●	★	★
4-2	●	●	★	★
5-1 (ES, Sup.-Sub.)	○	○	○	○
5-2	○	○	○	○
6 (ES, Sub.-Sup.)	●	●	★	★
7 (ES, Sub.-Sub.)	●	●	○	○

○; stable, ●; unstable, ★; not applicable,
 C & K; Cramer and Kluwicz⁴⁾, F & H; Fowles and Houwing⁵⁾,
 K; Kontorovich⁶⁾.

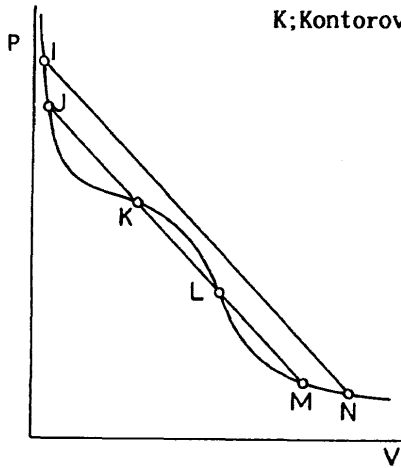


Fig.3 Rankine-Hugoniot relations in the p-V plane.

(0.4~0.8).

For the shock instability, we can summarize the results as in Table 1, where a few theoretical predictions are compared. Obviously the present results agree completely with Cramer & Kluwicz's predictions⁴⁾ but do not always with the other predictions. Since the stability theories of Kontorovich⁶⁾ and Fowling & Fowling⁵⁾ are discussed in the previous paper, here Cramer & Kluwicz's theory is described briefly. Their analysis is based on the Navier-Stokes equations which can be applied only to weak shock waves. And they assumed their result is applicable to shocks with arbitrary strength. They concluded that the shock adiabat and the Rayleigh line intersect only at two points in the p-V plane, describing the upstream and downstream flow conditions across the shock discontinuity, for the shock to be stable.

Fig. 3 shows schematically the stable and

unstable shock transitions in the p-V plane. All transitions between two points (I,N), (J,K), (J,L), (L,M), (K,L), (K,M) and (L,M) are possible. Although their transition directions are determined by the entropy condition, only those between the points (I,N), (J,K), (K,L) and (L,M) are stable.

From Cramer and Kluwicz's criterion and the present numerical results, it can be said that the supersonic-subsonic condition is a necessary condition but not a sufficient condition. It is rather remarkable that the present results about the shock instability are completely well explained by their theory. Obviously the present conclusion is partly contradictory to the results in the previous paper, where it was concluded that the supersonic-supersonic shock is stable at least numerically. This wrong result comes from the fact that for a shock transition where the fundamental derivative Γ takes very small absolute values, the wave profile changes very slowly. Then the accurate investigation of shock instability requires a sufficiently large number of time steps. Then although the previous Cramer numerical results are correct but the time steps are not always satisfactory to observe the shock instability.

4. Conclusions

Normal shock waves in the van der Waals gas are investigated theoretically and numerically. Some interesting features of shock transitions, which are different from those in the ideal gas, were found: 1) In the p-V plane, the

shock adiabatic and the Rayleigh line can intersect at four points. 2) The supersonic-subsonic condition is only a necessary condition but not always a sufficient condition. 3) The stable shocks satisfy the criterion proposed by Cramer & Kluwick but do not always those by Fowles & Houwing and Kontrovich. 4) One-dimensional shock splitting occurs for unstable shock transitions.

As described in the introduction, there are two kinds of shock instability; one is the shock splitting and the other the corrugation instability. The latter could not be treated in the present one-dimensional analysis and then will be studied in the near future.

References

- 1) Thompson, P. A.: A Fundamental derivatives in gasdynamics, *Phys. Fluids* 14 (1971), pp. 1843-1849.
- 2) Thompson, P. A. & Lambrakis, K.G.: Negative shock waves, *J. Fluid Mech.* 60 (1973), pp. 187-208.
- 3) Thompson, P. A., Carofano, G. C. & Kim, Y-G.: Shock waves and phase changes in a large-heat-capacity fluid emerging from a tube, *J. Fluid Mech.* 166 (1986), pp.57-92.
- 4) Cramer, M. S. and Kluwick A.: On the propagation of waves exhibiting both positive and negative nonlinearity, *J. Fluid Mech.* 142 (1984), pp.9-37.
- 5) Ishii, R; Shock Waves in a van der Waals Gas (part 1), Special Cases, *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.* Vol.38, No.121 (1995), pp.282-292.
- 6) Lax, P. D.: "Shock waves and entropy," in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis* edited by Zarantonello, Academic Press, New York, 1971.
- 7) Chakravarthy S.R. and Osher, S.: A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws, *AIAA Paper* 85-0363 (1985).
- 8) Kontrovich, V. M.: Concerning the stability of shock waves. *Sov. Phys: Tech. Phys.* 6 (1957), pp.1179-1181.
- 9) Fowles, G. R. & Houwing, A. F.P.: Instability of shock and detonation waves. *Phys. Fluids*, 27 (1984), pp.1982-1990.

浮力が作用する回転曲管内の流れと熱伝達

石垣 博*

Fundamental Characteristics of Mixed Convective Laminar Flow in Rotating Curved Pipes

Hiroshi ISHIGAKI

National Aerospace Laboratory, Kakuda Research Center.

The fluid flowing in rotating heated curved pipes is subjected to three body forces: centrifugal, Coriolis and buoyant forces. Fully developed laminar flow in rotating coiled pipes is investigated through similarity arguments and computational studies. The thermal boundary conditions at the wall are uniform wall heat flux axially and uniform wall temperature peripherally. Flow and heat transfer characteristics are elucidated for the case when they are governed by four parameters: Dean number, Prandtl number, body force ratio and buoyancy parameter. Detailed structures of velocity and temperature fields are shown for wide range of these parameters.

1 緒言

回転体内部に流路を設け、流体を流して冷却する回転機械の冷却問題では3つのモード、すなわち(I)直流路が回転軸に平行な場合(平行回転)、(II)直流路が回転軸に直交している場合(直交回転)、(III)曲流路が曲率中心のまわりに回転している場合(回転曲管)、が基本的に重要である。著者はこれらすべてのモードについて、流れと熱伝達の特徴を系統的に解明している。本報告はモード(III)についてのものであり、浮力が作用しない場合についてはロスビー数が大きい場合の流れ特性^{(1),(2)}と熱伝達特性⁽³⁾、およびこれらにおよぼすロスビー数の影響⁽⁴⁾について既に報告した。

曲管がその曲率中心のまわりに一定角速度で回転するとき、管内を流れる流体には管の曲率による遠心力、管の回転による遠心力とコリオリの力が同時に作用する。さらにたとえば大形発電機などでは回転による遠心力が 10^4g にも達するので、管壁と流体のあいだに温度差があると遠心浮力の影響が顕著にあらわれる。このときには3種の体積力が同時に作用し、流動伝熱特性はさらに複雑になる。

浮力が作用する回転曲管内層流についての唯一の研究として、かなり以前の Miyazaki の解析がある^{(5),(6)}。この解析は主流と回転が同方向の場合(正回転)について、境界層近似を用いた摂動解を差分法により数値的に求めたものであるが、回転および浮力の効果がきわめて微弱な場合しか適用できず、また第ゼロ近似でさえもその境界層近似の適用には問題があって信頼性にとぼしい。

さてこの流れの体積力効果は曲率、回転、加熱の三つから成るから、後で示すように極限状態として静止曲管と回転直管の二つの強制対流および平行回転直管の複合対流の合計三つの流れをもつ。このうち、前二者については曲率パラメータ λ とロスビー数 Ro がともに大きい場合に定量的相似性(アナロジー)が成立し(層流については文献(7)-(10)、乱流については文献(11)、(12))、著者の回転曲管内流れの研究はこのアナロジーに基礎をおいている。また平行回転直管の複合対流については文献(13)、(14)でその流動伝熱特性を明らかにした。

本研究では著者の相似理論を適用して標記の問題に対する相似パラメータを導く。その結果、この流れは λ と Ro が大きくてその影響が無視できれば、ディーン数 K_{Lc} 、プラントル数 Pr 、体積力比 F および浮力パラメータ B の四つのパラメータにより支配されるこ

* 航空宇宙技術研究所角田宇宙推進技術研究センター

とが明らかになった。少なくとも4つ以上のパラメータにより支配されるこの流れの全容は複雑・多岐にわたるので、ここでは相似性と流動伝熱場の構造を明確にし、実用的に重要な圧力損失と熱伝達については別に述べる。なお熱的境界条件は軸方向に熱流束一定、周方向に壁温一定とする。

2. 主な記号

- B : 浮力パラメータ = $K_{LB}^2 / (Pr K_{LC}^2)$
- F : 体積力比 = λ / Ro
- K_{LB} : 水平直管複合対流の層流特性数 = $\sqrt{Ra_H}$
- K_{LC} : 曲管の層流特性数(ディーン数) = $Re / \sqrt{\lambda}$
- Pr : プラントル数 = ν / α
- Ra_H : 回転レイリー数 = $R\Omega^2 \beta q_w d^4 / (\nu k \alpha)$
- Re : 主流のレイノルズ数 = $w_m d / \nu$
- Ro : ロスビー数 = $w_m / \Omega d$
- β : 体積膨張係数
- λ : 曲率パラメータ = R / d

3. 基礎式と数値解法

図1に示すように、曲率中心まわりに回転する曲管に固定して円環座標系 (r, θ, ϕ) をとり、速度成分を (u, v, w) 、温度 T とする。曲管は $0'-y'$ 軸のまわりに一定の角速度 Ω で回転するものとし、回転方向が主流方向と同じ場合 ($\Omega > 0$) を正回転、逆の場合 ($\Omega < 0$) を逆回転と呼ぶ。一般に回転機械では回転半径が大きいので、 λ が十分に大きい ($\lambda \approx 8$) と仮定すれば、管軸距離 $z = R\phi$ として円筒座標 (r, θ, z) に変換できる。曲管壁が管軸方向に熱流束一定、周方向に壁温一定の条件で加熱されているものとし、管内の流れは定常、非圧縮性層流で、速度場、温度場ともに完全に発達した状態にあるものとする。また Boussinesq 近似を導入して密度変化は浮力項でのみ考慮し、粘性係数などの物性値は一定と仮定、重力による浮力は無視する。

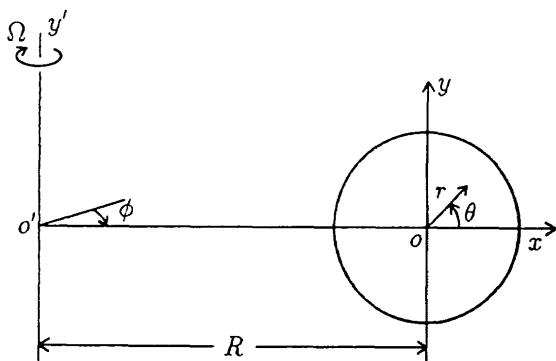


図1 回転曲管の座標系

このとき加熱曲管管内の完全発達層流の基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{w^2 \cos \theta}{R} + 2\Omega w \cos \theta + R\Omega^2 \beta (T_w - T) \cos \theta + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} - \frac{w^2 \sin \theta}{R} - 2\Omega w \sin \theta + R\Omega^2 \beta (T_w - T) \sin \theta + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} - 2\Omega(u \cos \theta - v \sin \theta) + \nu \nabla^2 w \dots \dots \dots (4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \dots \dots \dots (5)$$

ここに ν は動粘性係数、 α は温度拡散係数であり、ラブラシアンは次式で与えられる。

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

また p^* は実際の圧力 p から回転遠心力場の作用による平衡圧力を引いた換算圧力である。

$$p^* = p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (R + r \cos \theta)^2 \dots \dots \dots (6)$$

完全発達流では $\partial p / \partial z$ は一定となる。

$$-\frac{\partial p^*}{\partial z} = C \dots \dots \dots (6a)$$

さらに軸方向熱流束一定で加熱したときの温度場の完全発達条件より

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_b}{dz} = \frac{4q_w}{\rho c_p w_m d} \dots \dots \dots (6b)$$

の関係がある。ここに ρ は密度、 c_p は比熱、 T_b は混合平均温度、 q_w は壁熱流束、 w_m は管内平均流速である。

計算は全管断面について行い、境界条件を次のように与えた。

$$r = d/2 : u = v = w = 0, T = T_w,$$

しかし計算結果の等高線はすべて x 軸に関して対称であったので、§5の等高線は半断面のみについて示してある。数値計算プログラムは Patanker の著書⁽¹⁵⁾を参考にして作成したもので、著者らの一連の研究に用いているものである。有限体積法、スタガード格子、べき乗スキーム、SIMPLE法によっている。速度場、温度場ともに発達している場のエネルギー式の計算方法は Kays & Crawford の著書⁽¹⁶⁾を参考にした。格子点は r 方向32、 θ 方向53点を取り、 θ 方向は $\Delta\theta$ 等間隔、 r 方向は壁近傍で密な不等間隔にとった。

4. 流動伝熱場の相似性

著者以外の回転曲管内流れの研究では二次流れ速度 u, v を粘性速度 ν/d で無次元化して導いた無次元パラメータを用いて、実験あるいは計算結果を表示している。しかし粘性速度は二次流れのない非加熱直管流では正しい長さスケールであるが、いったん二次流れが起れば物理的意味を失う。このようにして導かれたパラメータは流れの相似性とは無関係であるから、これらのパラメータを使って流れの変化を連続的に表示したとしても、物理的には脈絡のないものになる。たとえば Miyazaki の研究では曲りがゆるやかな場合の基礎式から出発しているにもかかわらず、物理的に出現しないはずの λ が支配パラメータの一つとして現れている。ゆるやかな曲りの仮定は議論を流れ特性が λ に独立な場に限定するために導入される仮定なのである。

著者の理論で用いる無次元変換は、軸方向代表速度を u_m 、断面内の代表速度を U_S として、一般的に次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{U_S}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{U_S}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{u_m}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U_S^2} \\ \tilde{C} &= \frac{C}{\rho U_S u_m / d}, \quad \tilde{T} = \frac{T - T_b}{T_s}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{d} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

壁熱流束一定の場合の、温度スケール T_s は k を流体の熱伝導率として、 $T_s = q_w d / k$ である。

緒言でも述べたように、この流れは三つの流れを極限としてもつので、三通りの無次元化が可能である。このうち曲管流と直交回転管内流のあいだにはアナロジーが成立するので、実質的には二つと考えてよい。浮力が小さいときを想定して曲管内流れを基準にとれば、速度スケール U_S は文献(1)-(4)で示したように

$$U_S = u_m / \sqrt{\lambda} \dots\dots\dots (8)$$

であるから、式(2)~(5)を無次元化した式は次のようになる(式(1)は同じ形になるので省略する)。

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{r}} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{w}^2 \cos \theta + 2F \tilde{w} \cos \theta + B \tilde{T} \cos \theta \\ &+ \frac{1}{K_{LC}} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{u} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{r}} &= -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - \tilde{w}^2 \sin \theta - 2F \tilde{w} \sin \theta + B \tilde{T} \sin \theta \\ &+ \frac{1}{K_{LC}} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{v} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} = \tilde{C} - \frac{2}{Ro} (\tilde{u} \cos \theta - \tilde{v} \sin \theta) + \frac{1}{K_{LC}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{w} \dots\dots\dots (11)$$

$$Pr \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} \right) + \frac{4\tilde{w}}{K_{LC}} = \frac{1}{K_{LC}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \dots\dots\dots (12)$$

ここに

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots (13)$$

上式で浮力パラメータ $B = K_{LB}^2 / (Pr K_{LC}^2)$ は流体にはたらく浮力と遠心力の比をあらわし、 $B \rightarrow 0$ とおけば回転曲管内強制対流の無次元式となる。文献(1)-(4)で明らかにしたように $B = 0$ のときの速度場は温度場から独立で、 Pr に無関係であり、軸速度場のパターンは K_{LC} のみによって決まる。温度場は Pr によって大きく異なり、(i) $Pr \ll 1$ のときは二次流れのない直管強制対流場に相似、(ii) $Pr \approx 1$ のときは軸速度場に相似、(iii) $Pr \gg 1$ のときは二次流線 ψ に相似となる⁽⁴⁾。

つぎに他方の極限である平行回転直管内複合対流を基準にとれば、文献(13)、(14)に示したように二次流れの速度スケールは

$$U_S = \sqrt{R\Omega^2 \beta T_s d / Pr} \dots\dots\dots (14)$$

であるから、式(2)~(5)を無次元化した式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{r}} \right) &= -\frac{1}{Pr} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{w}^2}{B} \cos \theta + \frac{2F}{B} \tilde{w} \cos \theta \\ &+ \tilde{T} \sin \theta + \frac{1}{K_{LB}} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{u} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{r}} \right) &= -\frac{1}{Pr \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - \frac{\tilde{w}^2}{B} \sin \theta - \frac{2F}{B} \tilde{w} \sin \theta \\ &+ \tilde{T} \sin \theta + \frac{1}{K_{LB}} \left(\tilde{\nabla}^2 \tilde{v} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right) &= \frac{\tilde{C}}{Pr} - \frac{2}{Pr Ro} (\tilde{u} \cos \theta - \tilde{v} \sin \theta) \\ &+ \frac{1}{K_{LB}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{w} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \theta} + \frac{4\tilde{w}}{K_{LB}} = \frac{1}{K_{LB}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \dots\dots\dots (18)$$

上式で $B \rightarrow \infty$ にすれば平行回転直管内複合対流の無次元式となる。式(8)からわかるように、この流れでは速度場ではなく温度場が Pr に独立になる(実際に $Pr > 0.7$ では Pr には ∇ 無関係になることは既に示した^{(13),(14)})。 Pr の影響は速度場に大きくあらわれ、速度場 \tilde{w} のパターンは (i) $Pr \ll 1$ のときには二次流線 ψ に相似、(ii) $Pr \approx 1$ のときには温度場に相似、(iii) $Pr \gg 1$ のときには二次流れのない直管強制対流のポワズイユ分布に相似となる⁽¹³⁾。

浮力が作用する曲管内の流動伝熱特性は上に述べた二つの極限の中間状態になり、 B の値を増加させると $B=0$ の特性から $B=\infty$ の特性へと変化していく。したがって K_{LC} 、 F を一定にとり B を増加させると軸速度と温度場のパターンは次のように変化する。(i) $Pr \ll 1$ では軸速度場は K_{LC} の値により決まるパターン (K_{LC} が小さければ粘性流型、 K_{LC} が大きければ境界層型) から ψ に相似なパターンへと変化する。温度場は直管強制対流場の分布から $K_{LB} = K_{LC}\sqrt{PrB}$ により決まるパターンに移行する。(ii) $Pr \approx 1$ では軸速度と温度場は常に相似である、(iii) $Pr \gg 1$ では軸速度場は K_{LC} によって決まるパ

ターンからポワズイユ流れのパターンに変化し、温度場は ψ に相似なパターンから K_{LB} によって決まるパターンに移行する。

以上のことからパターンの様相に着目すれば、 B が増加するにつれて (i) ポワズイユ分布のパターンは $Pr \ll 1$ の \hat{T} から $Pr \gg 1$ の \hat{w} へと移り、(ii) ψ に相似なパターンは $Pr \gg 1$ の \hat{T} から $Pr \ll 1$ の \hat{w} に移ることがわかる。

5. 速度場と温度場の基本構造

前節では二つの極限流の速度・温度場のパターンには次の4種があることを述べた。(i) K_{LC} で決まるパ

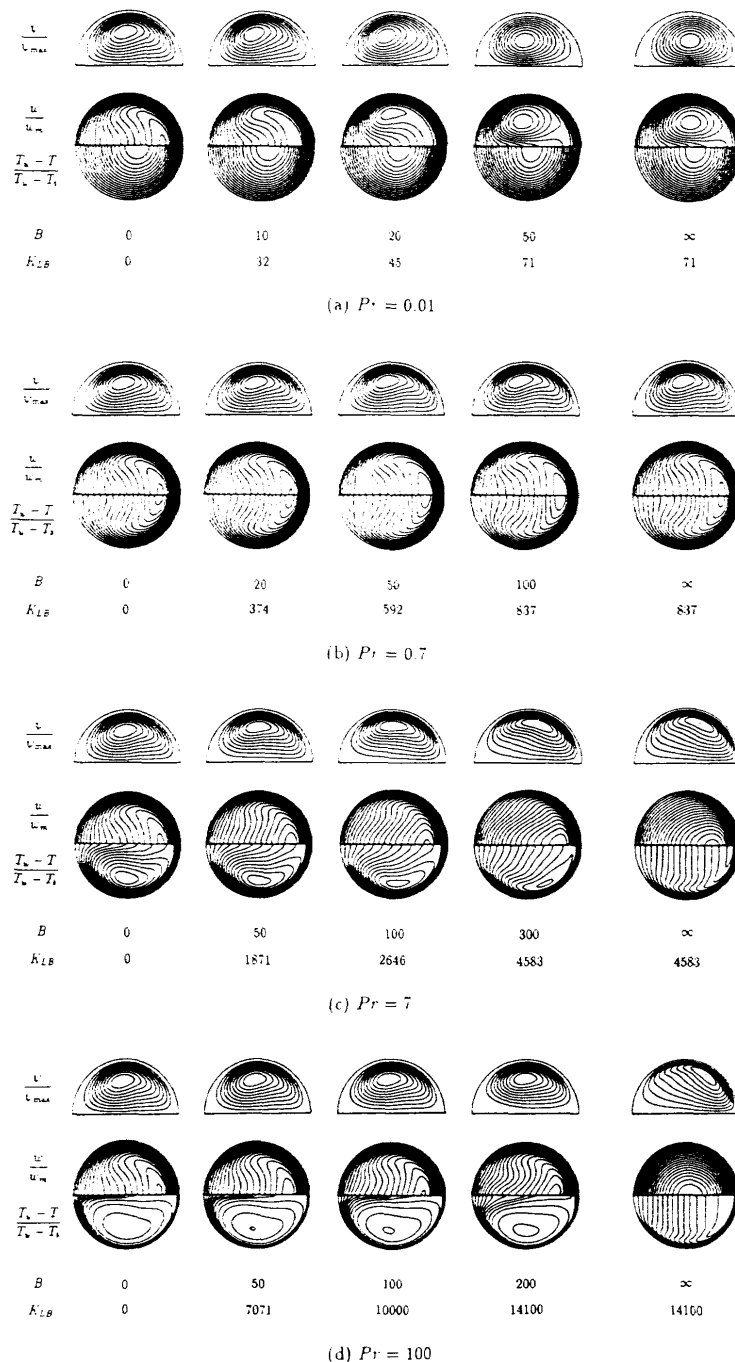


図2 浮力パラメータ B による等高線の変化 ($K_{LC} = 100, F = 2$)

ターン, (ii) K_{LB} で決まるパターン, (iii) 放物面パターン, (iv) 二次流線に類似したパターン. そして $B=0$ から B を増加させたときの曲管内複合対流のパターンは, 上の4種のパターンの一つから別のパターンに遷移する中間過程であると説明した. 本節ではこの相似性の考察から得た推論を数値計算結果により具体的に検証する.

はじめに正回転 ($F > 0$) の計算結果を示す. 図2(a)-(d) は $K_{LC} = 50$, $F = 2$, $\lambda = 20$ に固定し, $Pr = 0.01, 0.7, 7, 100$ の4種の流体について, 軸速度 w , 二次流線 ψ , 温度 T の無次元等高線分布が B の増加とともにどのように変化するかを示したものである. 温度は軸速度場 \bar{w} との対応を定量的にも維持するため, \bar{T} の代わりに $(T_w - T)/(T_w - T_b) = Nu\bar{T}$ (ここに Nu は平均ヌッセルト数) の形で示した. 左端の $B=0$ は曲管内強制対流を示し, w 分布は $K_{LC} = 100$ で決まるパターン (粘性流形) をとり, Pr によって変化しない. 他方 T の分布は $Pr = 0.01$ では放物面分布, $Pr = 0.7$ では w 分布と相似, $Pr = 100$ では2ヶ所に極値をもつ ψ に類似した分布になっている.

参考のため右端には水平直管複合対流 ($B \rightarrow \infty$) の分布を示した. このときの K_{LB} はその隣の分布と同じ値を与えているので, 同一条件における直管 (λ

$\rightarrow \infty$) の分布に相当する. このとき T 分布は K_{LB} の値によって決まるパターンをとり, Pr にはほとんど関係しない. 他方, w の分布は前節で述べたように $Pr = 0.01$ では ψ , $Pr = 0.7$ では τ , $Pr = 100$ では放物面分布にそれぞれ相似になっている.

遠心力と浮力が同時に作用する B の有限値の分布を見る. $F > 0$ のこの場合には管曲率による遠心力, 回転によるコリオリの力および遠心力が同一方向 (x 方向) にはたらき, 3種の二次流れの方向が同じになって重畳されるので, 二次流れの逆転現象は起きない. $Pr = 0.01$ の場合の w 分布の変遷を見ると, \bar{w} は $K_{LC} = 100$ の一つの極値が分岐して極大値が二つのパターンになり, $B \rightarrow \infty$ の流線に相似なパターンに漸近する. また T は放物面分布から, $K_{LB} = 71$ の値で決まるパターンに漸近していく.

$Pr = 0.7$ の場合には, w と T のパターンはつねにたがいの相似性を保持しながら変化し, 分布の様相も K_{LC} で規定されるパターンから K_{LB} で規定されるパターンへと変化していく. $Pr = 7, 100$ の場合には $Pr = 0.01$ の w とは逆に, T 分布の2つの極値が B が増加するにつれて一つに縮退する現象がおきる. $Pr = 100$ では K_{LB} が非常に大きな値になっても, 極限形の対称パターンにはなかなか近づかない. またこれ以

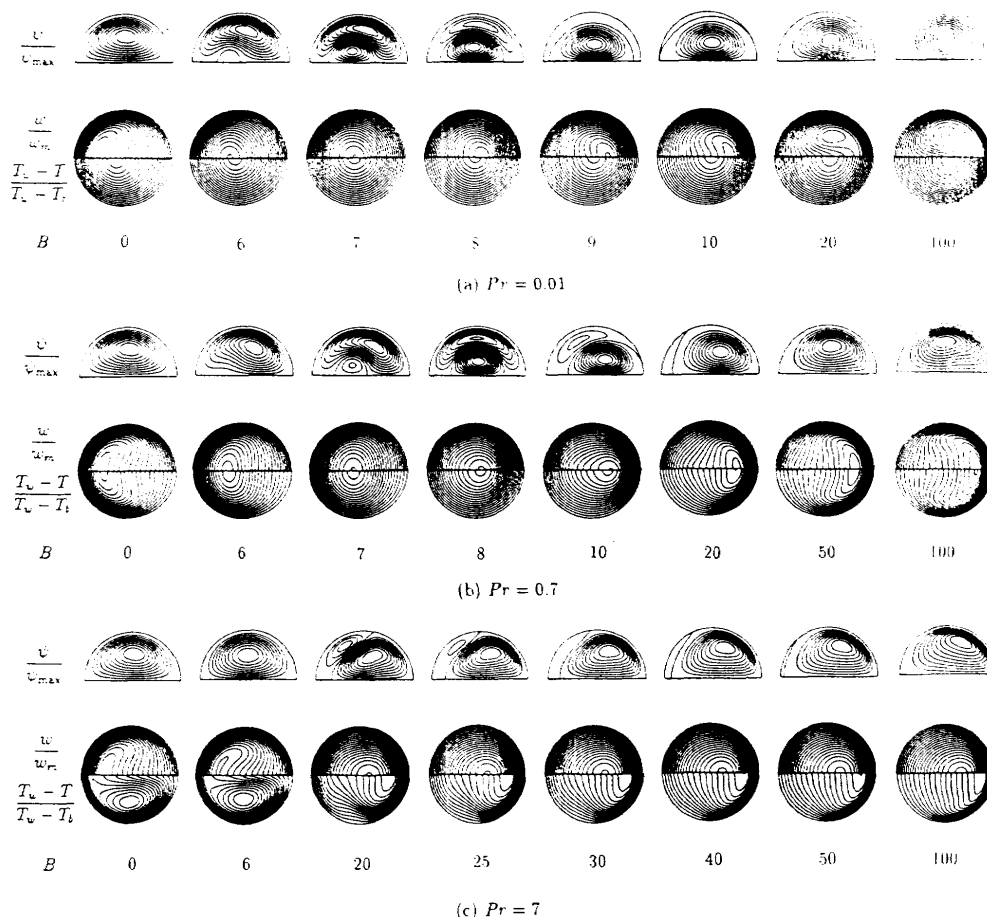


図3 浮力パラメータ B による等高線の変化 ($K_{LC} = 100, F = -2$)

上の大きな K_{LB} の値では、数値計算が不安定となって収束解が得にくくなる。現実にも K_{LB} の値が非常に大きくなれば、層流状態が維持できず、非定常あるいは乱流状態になると思われる。

これら4種の Pr についてのパターンを比較してみると、前節の最後で述べた \hat{w} と \hat{T} とのあいだのパターンの転移、すなわち B が増加するにつれて放物面パターンは $Pr = 0.01$ の \hat{T} から $Pr = 100$ の \hat{w} に移り、 ψ パターンは $Pr = 100$ の \hat{T} から $Pr = 0.01$ の \hat{w} に移るといふ予測が実現されていることがわかる。

つぎに逆回転($F < 0$)の場合の計算結果を示す。図3(a)-(c)は $K_{Lc} = 100$, $F = -2$, $\lambda = 20$ に固定し、 $Pr = 0.01$, 0.07 , 7 について等高線が B によりどのように変化するかを示したものである。 $F < 0$ のこの場合にはコリオリの力が x の負方向、他の二つは x の正方向にはたらくので、二次流れの逆転現象が見られる。 $Pr = 0.01$ の二次流れ線図で説明する。 $B = 0$ では管曲率による遠心力に比してコリオリの力が支配的であり、管曲率による二次流れ渦は打ち消されて見えない。しかし、 $B = 6$ では浮力による二次流れが管壁に沿って発生して(反時計回り)、コリオリの力による渦(時計回り)の強さを弱めるため、遠心力による二次流れ渦(反時計回り)が相対的に強くなって x 軸上に姿を現わす。 B が大きくなるにしたがって、浮力による渦はコリオリの力による渦をさらに弱める。たとえば $B = 7$ では3つの二次流れの効果は相殺して、軸速度分布への影響は実質ゼロになり、軸速度は二次流れのない(非回転非加熱直管の)ポワズイユ分布の様相を呈する。さらに B が大きくなると、たとえば $B = 10$ ではコリオリの力による渦と浮力による渦は殆ど相殺して遠心力による渦が分布を決定する。 $B = 20$ では遠心力による渦と浮力による同方向の二つの渦が重畳し、 B の値が大きくなるほど渦の強さは大きくなる。 $B = 100$ のパターンは図2($F > 0$)

の $B = 71$ のパターンとほとんど同じになっている。

$Pr = 0.7$ の場合の変化も $Pr = 0.01$ の場合と同様であり、軸速度、温度場の変化は§4の相似則で予測した特徴にしたがっている。 $Pr = 7$ では $6 < B < 20$ の区間で数値解が不安定となり、収束解が得られなかった。この区間では $Pr = 0.01$, 0.7 と同じように二次流れ渦の共存と逆転が起り、 Pr のより小さい場合に比べて浮力による渦が活発な運動をするため、全体として非定常運動となり、定常解は得られないのであろうと推測する。

引用文献

- (1) 石垣, 機論, 58-561, B, (1993), 1494-1591.
- (2) Ishigaki, H. J. Fluid Mech. (1996), 印刷中.
- (3) 石垣, 機論, 61-582, B, (1995), 672-678.
- (4) 石垣, 機論, 62-597, B, (1996), 1788-1794.
- (5) Miyazaki, H., Int. J. Heat Mass Transfer, 14(1971), 1295-1309.
- (6) Miyazaki, H., Trans. ASME, J. Heat Transfer, 95 (1973), 64-71.
- (7) 石垣, 機論, 58-550, B (1992), 1661-1667.
- (8) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 268 (1994), 133-145.
- (9) 石垣, 機論, 59-561, B (1993), 1486-1493.
- (10) 石垣, 機論, 61-585, B (1995), 1782-1789.
- (11) 石垣, 機論, 60-576, B (1994), 2736-2741.
- (12) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 307 (1996), 1.
- (13) 石垣, 機論, 59-560, B (1993), 1094-1100 (正誤表, 59-564, B, 2600).
- (14) 石垣, 機論, 61-585, B (1995), 1612-1619.
- (15) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980), 113-137, Hemisphere.
- (16) Kays, W. M. & Crawford, M. E., Convective Heat and Mass Transfer 2nd ed. (1980), 90-98.

2 重円管内乱流の数値シミュレーション

清水 康弘^{*1} 河村 洋^{*2} 山本 稀義^{*3}

Numerical Simulation of a Turbulent Annular Flow

Yasuhiro SHIMIZU^{*1}, Hiroshi KAWAMURA^{*2}, Kiyoshi YAMAMOTO^{*3}

A direct numerical simulation for an annular flow with radius ratio of 0.02 is performed. It yields the turbulent energy budget around the inner rod. Comparisons with the results of DNS for the turbulent channel flow reveal that all budget terms near the wall of the inner rod are smaller than those of the channel flow, while both are approximately the same near the outer wall. It is remarkable that the anisotropy of the turbulent energy is enhanced close to the inner wall.

1. 緒言

本研究の対象である二重円管内の乱流は、工業的に非常に重要な流れであり、これまで Satake-Kawamura^[1]により LES を用いた解析が行われている。しかし LES では、GS 成分と SGS 成分の両方を考慮に入れなければならないため、乱流エネルギー収支などの詳細な評価は困難である。

そこで本研究では、有限差分法による DNS を十分発達した二重円管内の乱流に適用し、内管と外管の径の比が 0.02 の場合について、レイノルズ応力の輸送方程式の各項の収支を求める。さらに、二重円管の内管壁面近傍での曲率の影響を調べるため、計算結果を平行平板間乱流の DNS データ^[2]と比較する。

2. 基礎方程式

連続の式及び Navier-Stokes 方程式を以下に示す。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (1) \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial rvu}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial wu}{\partial \theta} \\ & - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] + 2 \quad (2) \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial rvv}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial wv}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} \\ & - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial w}{\partial r} \right] - \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \left[2 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial rwv}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial ww}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

また、十分発達した二重円管内乱流に対するレイノルズ応力輸送方程式は、各成分について次のように表される。

$$\frac{Duu}{Dt} = P_{xx} + T_{xx} + \Pi_{xx} + \Phi_{xx} + D_{xx}^v - \varepsilon_{xx} \quad (5)$$

$$P_{xx} = -2 \cdot \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad T_{xx} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\overline{uvv})}{\partial r}, \quad \Pi_{xx} = 0$$

$$\Phi_{xx} = 2 \cdot p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad D_{xx}^v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \overline{uu} \right\}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{2}{\text{Re}_\tau} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\frac{Dvv}{Dt} = P_{rr} + T_{rr} + \Pi_{rr} + \Phi_{rr} + D_{rr}^v - \varepsilon_{rr} \quad (6)$$

$$P_{rr} = 0, \quad T_{rr} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\overline{vvv})}{\partial r} + \frac{2}{r} \overline{vww}$$

$$\Pi_{rr} = -2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\overline{vp}), \quad \Phi_{rr} = 2 \cdot p \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$D_{rr}^v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \overline{vv} \right\} + \frac{2}{r^2} (\overline{w^2} - v^2) \right]$$

^{*1} 東京理科大学 大学院 理工学研究科 機械工学専攻
(〒278 千葉県野田市山崎 2641 電話(0471)24-1501)

^{*2} 東京理科大学 理工学部 機械工学科 教授

^{*3} 航空宇宙技術研究所

$$\epsilon_{rr} = \frac{2}{\text{Re}_\tau} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 \right]$$

$$\frac{D\overline{wv}}{Dt} = P_{\theta\theta} + T_{\theta\theta} + \Pi_{\theta\theta} + \Phi_{\theta\theta} + D_{\theta\theta}^v - \epsilon_{\theta\theta} \quad (7)$$

$$P_{\theta\theta} = 0, \quad T_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\overline{vw})}{\partial r} - 2\frac{\overline{vw}}{r}$$

$$\Pi_{\theta\theta} = -\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{wp}) - \frac{2}{r} \overline{vp}, \quad \Phi_{\theta\theta} = \frac{2}{r} p \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right)$$

$$D_{\theta\theta}^v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} \right\} - \frac{2}{r^2} (\overline{w^2} - v^2) \right]$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{2}{\text{Re}_\tau} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right)^2 \right]$$

$$\frac{D\overline{uv}}{Dt} = P_{xr} + T_{xr} + \Pi_{xr} + \Phi_{xr} + D_{xr}^v - \epsilon_{xr} \quad (8)$$

$$P_{xr} = -\overline{v} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad T_{xr} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\overline{uvv})}{\partial r} + \frac{2}{r} \overline{uvw}$$

$$\Pi_{xr} = -\frac{\partial}{\partial r} (\overline{up}), \quad \Phi_{xr} = \left[p \frac{\partial u}{\partial r} + p \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$D_{xr}^v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} \right\} - \frac{1}{r^2} \overline{uv} \right]$$

$$\epsilon_{xr} = \frac{2}{\text{Re}_\tau} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right]$$

3. 計算条件

計算対象は、Fig.1 に示す二重円管内乱流であり、Table 1 に示す条件で計算を行う。主流は平均圧力勾配により駆動される。計算格子には staggered mesh を使用する。半径比 R_1/R_2 は 0.02 について計算を行い、の計算結果は Kim ら¹⁰による平行平板間乱流の DNS (半流路幅 δ を代表長さとしたレイノルズ数 $u_\tau \delta / \nu = 180$) と比較する。

本計算の格子幅を Table 2 に示す。外管側での格子幅は十分ではないが、本研究の興味の対象である内管近傍では、ほぼ十分な格子幅が確保されていると考えられる。

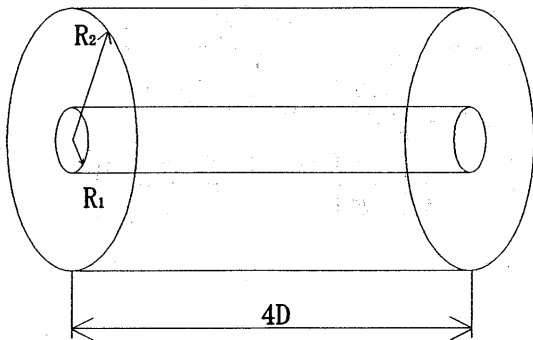


Fig.1 Calculation domain ($D=R_2-R_1$)

Table 1 Calculation condition

時間進行法	Fractional Step 法
格子分割数(x,r,θ)	64×50×128
格子形状	Staggered Mesh
使用スキーム	2次中心差分
流れ方向境界条件	周期境界条件
円周方向境界条件	周期境界条件
半径方向境界条件	Non-Slip 条件
内外径比	0.02
レイノルズ数 Re_τ	360
時間刻み	0.00001
計算ステップ数	100,000

Table 2 Spatial resolution

Δx^+	28.8
Δr^+	0.562~17.84
$(r\Delta\theta)^+$	0.35 (内管側) 18.02 (外管側)

4. 結果

Fig.2,3a,3b に平均流速分布図を示す。Fig.2 は全流路幅に対する平均流速分布であるが、流路中央より少し内管側に寄った位置にピークが存在している。また、平均流速の勾配が内管側で外管側に比べ大きくなっていることが分かる。Fig.3a,3b に注目すると、平均速度分布が外管側では普遍速度分布と良く一致しているが、内管側ではかなり小さな値を示している。これは内管曲率が小さいときに生じる、いわゆる円筒座標系効果によるものであり、破線で表したこの効果を考慮した混合長モデルによる解析値¹⁰とは十分良く一致している。

なお、二重円管内乱流では流れ場の非対称性のために、壁面せん断速度は内管と外管とで異なる。今回の場合、両者の比は $u_{\tau 1}/u_{\tau 2}=1.79$ であった。 y^+ は内外管それぞれの u_τ で無次元化している。また、平均壁面せん断速度は

$$u_{\tau av} = \frac{R_1 u_{\tau 1} + R_2 u_{\tau 2}}{R_1 + R_2} \quad (9)$$

で求められ、これによって無次元化した場合の無次元距離を y^+ とする。

乱流強度分布を各方向成分について Fig.4 に示す。各値は平均壁面せん断速度で無次元化されている。同図上には平行平板間乱流の DNS の結果をも示しているが、外管近傍では両者はかなり良く一致している。差異の原因として形状の相違、格子の粗さが考えられる。一方、内管付近では本計算の場合に各レイノルズ応力方向成分間の非等方性が大きい。また、 v の変動成分には、内管付近で極大値がみられないことが特徴的である。

Fig.5a,5b は、せん断応力を内外管それぞれの u_τ で無次元化した図である。特に、レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ のピークは、内管側で非常に小さい値をとっている。これは主に円筒座標系効果によるもので、乱流エネルギー

一の生成に大きく影響している。

乱流エネルギー (k) の収支を Fig.6,7a,7b に示す。Fig.6 の値は平均壁面せん断速度 $u_{\tau w}$ で無次元化したものである。乱流エネルギーの収支は外管側では平行平板間乱流の分布にほぼ一致している。内管側では生成項や散逸項のピークが大きく、かつ外管側に比して壁面近傍のより狭い範囲に分布が限られている。これは平均流速の勾配が内管側で大きく、最大流速点の内管側に片寄っているためである。このケースでは $\tau=0$ となる点は約 $y^{++}=160$ に生じている。

Fig.6 以降のエネルギー収支図においては、若干の残差が生じている。残差が十分にはゼロとまらないのは、一つにはやや格子幅が粗いことによる。この他、円筒座標系のため、エネルギー収支式と運動方程式は解析的な微分操作のレベルではむろん整合しているものの、差分式のレベルでは完全には整合させることが困難であることによる^[4]。

Fig.7a,7b は内外管それぞれの壁面せん断速度で無次元化した乱流エネルギー k の収支の分布である。外管壁近傍においては格子幅が十分細くないため、平行平板間 DNS との間に多少の差異はみられるが、ほぼ同様の傾向を示している。内管側の収支の分布形状は外管側と類似しているが、Fig.6 と異なりその値は小さい。前述のように内管壁近傍では円筒座標系効果のため、レイノルズせん断応力が小さくなっているためである。

各応力成分のうち \overline{uu} の輸送方程式の収支を Fig.8a,8b に示す。値は内外管それぞれの壁面せん断力で無次元化している。乱流エネルギー収支と同様、格子の粗さのため、差異はみられるが、平行平板間 DNS と同様の傾向を示している。その他の特徴としては、圧力歪相関項が他の各項に比べて非常に小さい点が挙げられる。これは、内管側において非等方性が大きいことの原因となっている。

次に、 \overline{vw} の収支を Fig.9a,9b に示す。内管側では、各項の値が非常に小さいことと、乱流拡散項の値が正の値を保っている点が注目される。後者は、前述したように、 \overline{vw} の分布に内管壁近傍で極大値が現れないことによる。また、内管側の圧力歪相関項の Gain 側のピークの大きさが、外管側のそれに比べて小さくなっ

ていることがみられる。これは、後に述べるエネルギーの再分配が \overline{vw} 成分にはあまり行われていないことを示している。

さらに、 \overline{ww} 及び \overline{uv} の輸送方程式収支を Fig.10a,10b 及び Fig.11a,11b に示す。これらも内管側で各項の値が小さくなっている。特に \overline{uv} の収支では、乱流拡散項の値が壁近傍で正値をとらないこと、及び各項の収支が相対的に小さいことに特徴がある。

最後に、乱流エネルギーの再分配を担う圧力歪相関項の値の分布を、 $\overline{uu}, \overline{vw}, \overline{ww}$ の 3 成分について Fig.12a,12b に示す。 \overline{uu} の符号が全領域において負値を示しているが、これは \overline{uu} 成分で発生した乱れのエネルギーの一部が \overline{vw} 成分と \overline{ww} 成分に振り分けられることを示している。

\overline{uu} の Loss 側のピーク値は、内管側では外管側に比してほぼ一桁小さい。また外管側の $y^+ > 30$ では、 \overline{uu} のエネルギーが \overline{vw} と \overline{ww} にほぼ均等に分配されているのに対し、内管側では \overline{vw} 成分が Gain 側に大きなピークをもたず、 \overline{ww} に選択的にエネルギーが分配されていることが注目される。また、いわゆる \overline{vw} の splatting と呼ばれる壁近傍の負のピークも相対的に大きな値となっている。

5. 結言

二重円管内乱流に対して、直接数値シミュレーションを行い、乱流エネルギー及びレイノルズ応力輸送方程式の収支を求めた。外管壁近傍の収支は平行平板間乱流と定性的にはほぼ一致する。内管側の収支には内管曲率に起因する多くの特徴が観察された。

参考文献

[1]Satake, S. and Kawamura, H., *Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows*, 1(1993), 5-5.
 [2]Kim, J., Moin, P., and Moser, R., *J. Fluid Mech.*, 177(1987), 133-166.
 [3]Vilemas, J., Cesna, B. and Survila, V., "Heat transfer in gas-cooled annular channels", A.Zukauskas, eds., Springer Verlag.,(1987), 58.
 [4]鈴木,河村,機論,60-578(1994), 3280.

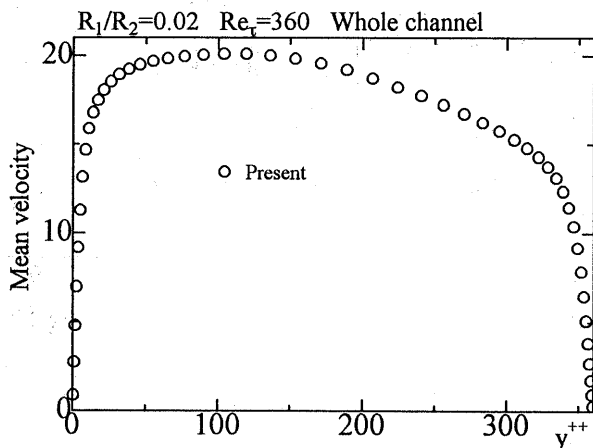


Fig.2 Mean velocity profile

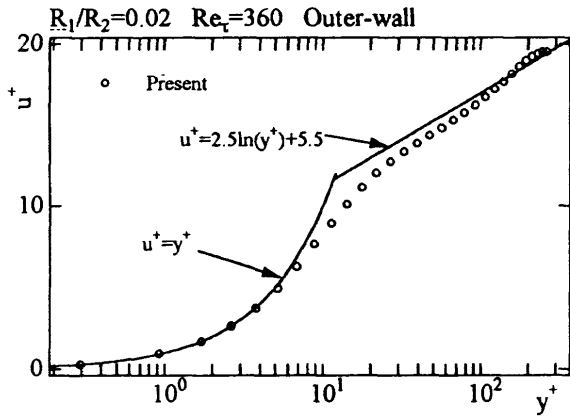


Fig.3a Mean velocity profile

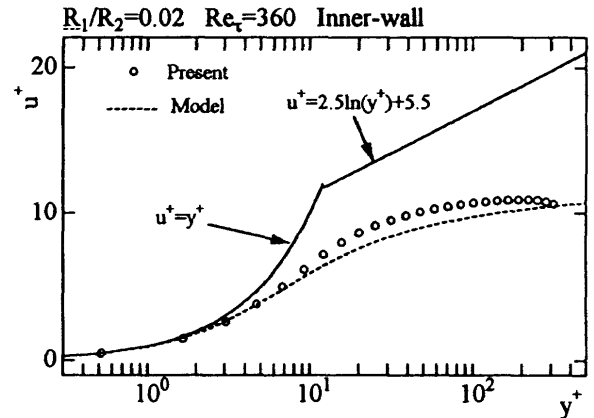


Fig.3b Mean velocity profile

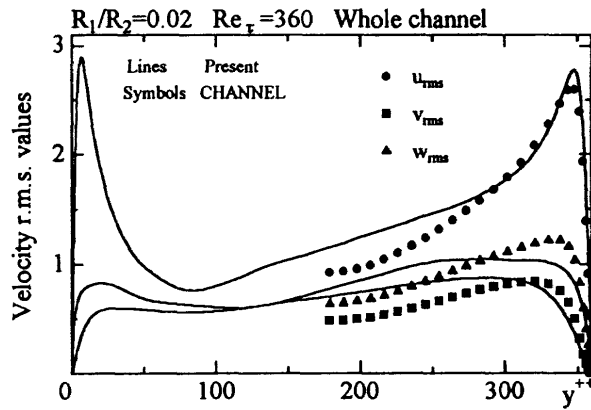


Fig.4 Turbulent intensity

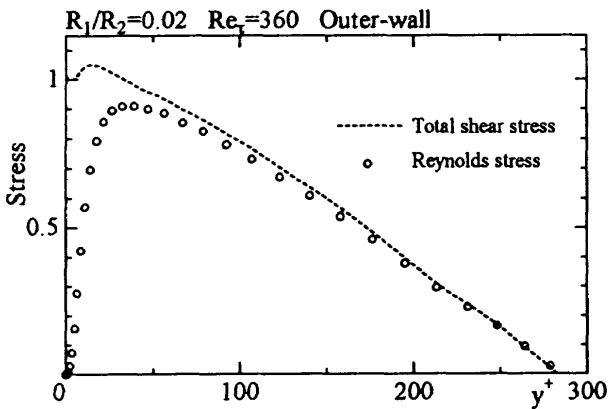


Fig.5a Shear stress profile

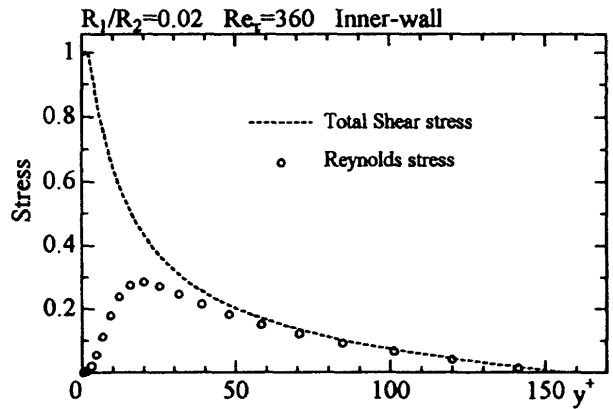


Fig.5b Shear stress profile

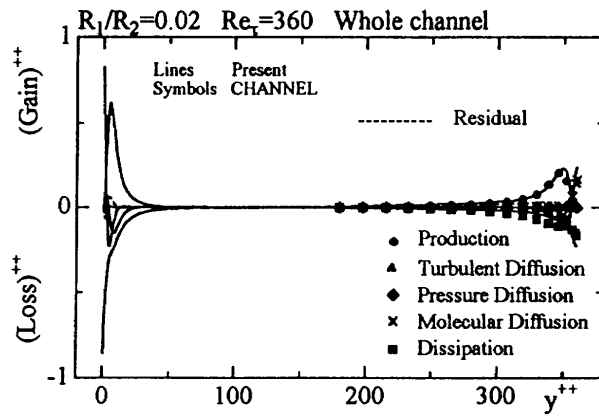


Fig.6 Budget of the Turbulent Energy

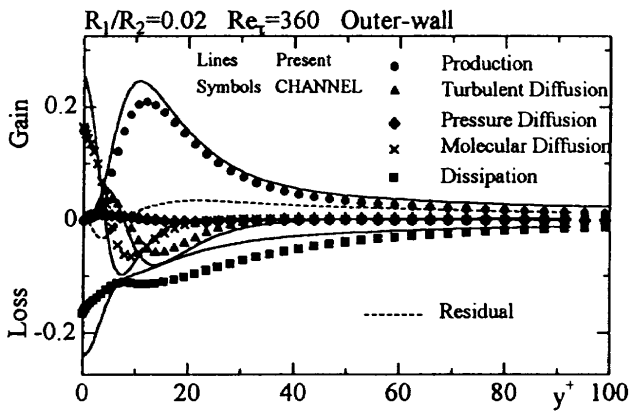


Fig.7a Budget of the Turbulent Energy

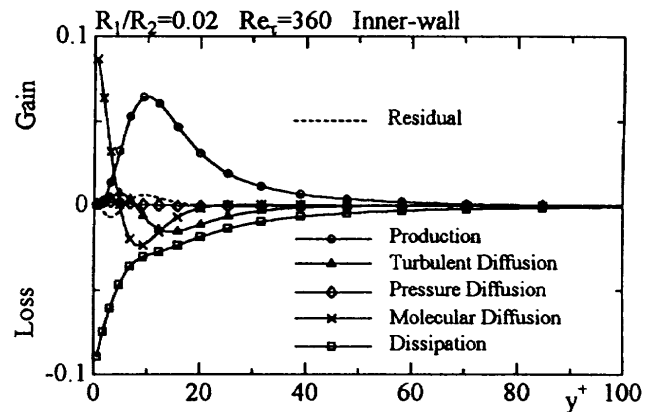


Fig.7b Budget of the Turbulent Energy

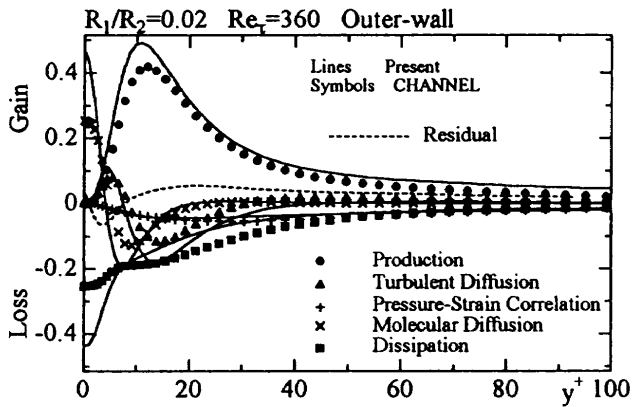


Fig.8a Budget of Reynolds stress uu

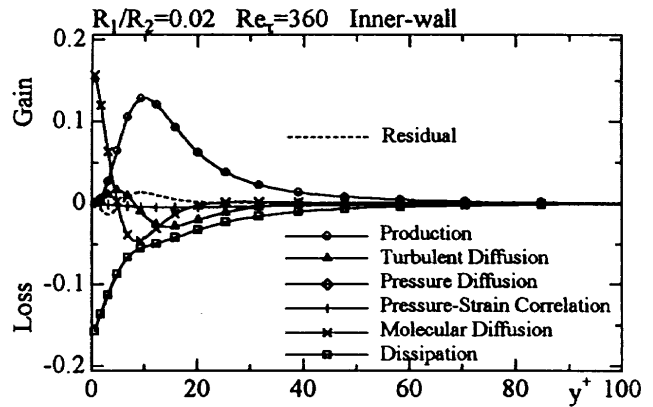


Fig.8b Budget of Reynolds stress uu

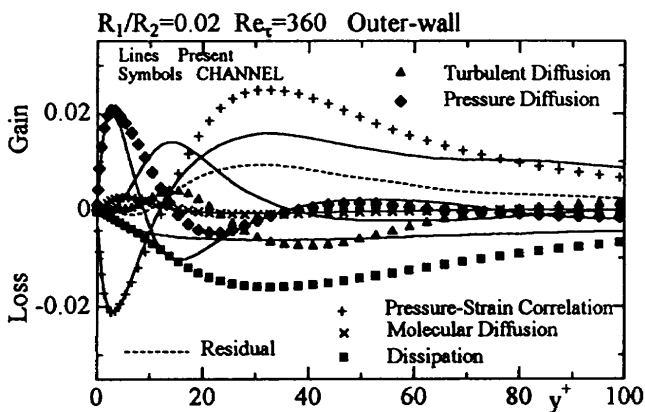


Fig.9a Budget of Reynolds stress vv

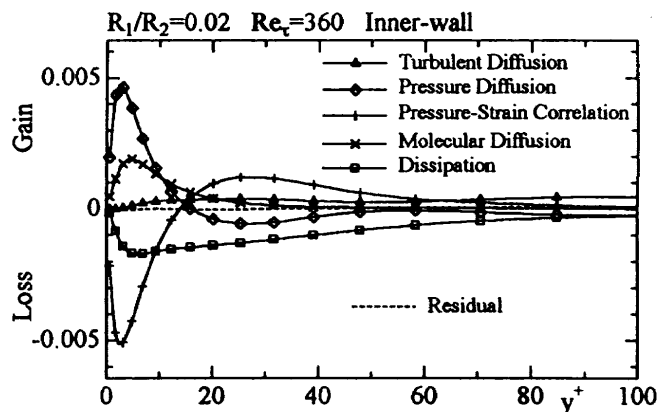


Fig.9b Budget of Reynolds stress vv

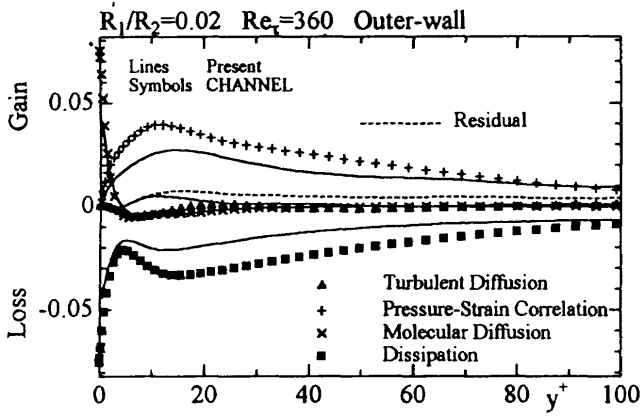


Fig. 10a Budget of Reynolds stress \overline{ww}

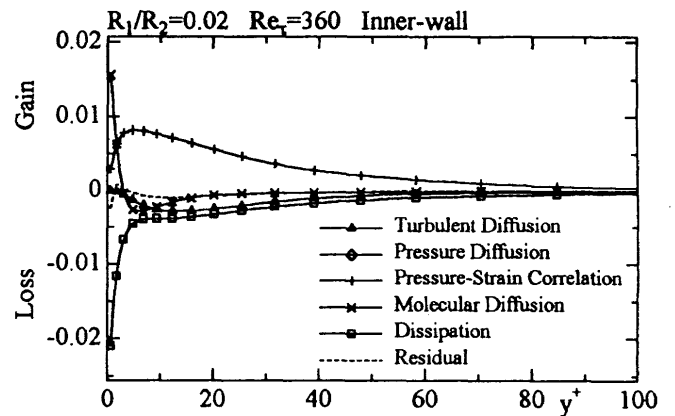


Fig. 10b Budget of Reynolds stress \overline{ww}

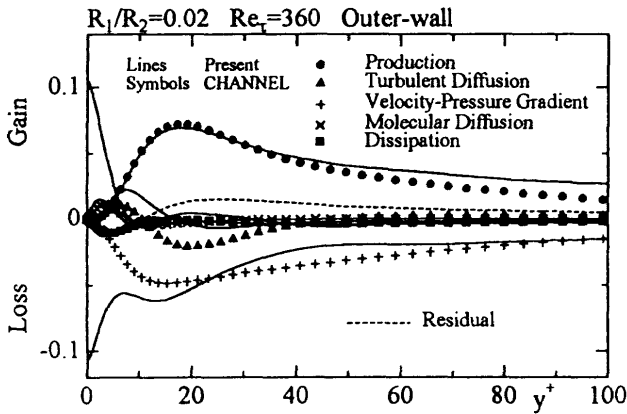


Fig. 11a Budget of Reynolds stress \overline{uv}

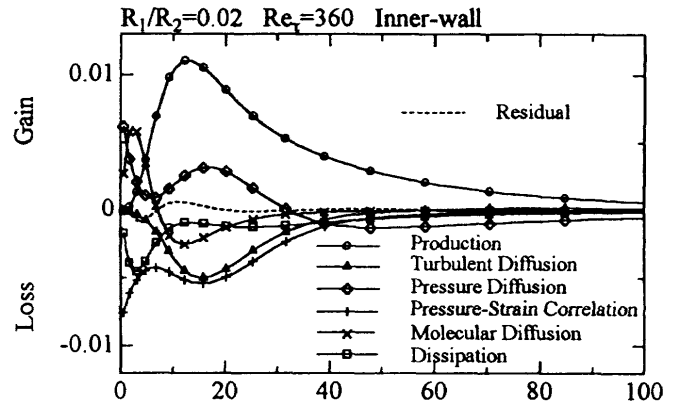


Fig. 11b Budget of Reynolds stress \overline{uv}

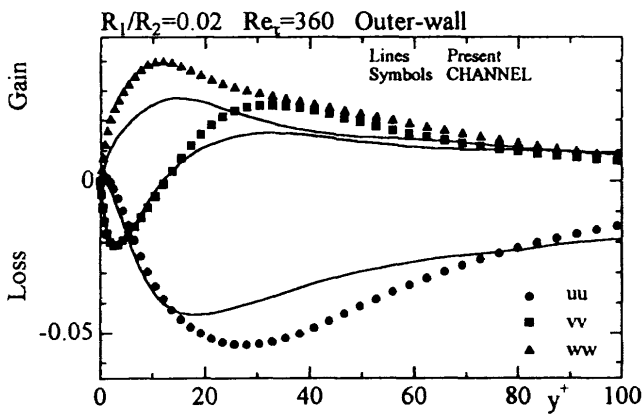


Fig. 12a Pressure-Strain Correlation Terms

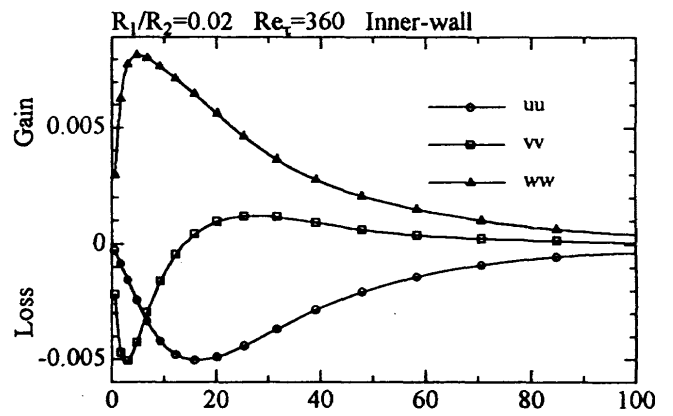


Fig. 12b Pressure-Strain Correlation Term

乱流中の worm 生成の数値シミュレーション

生出 伸一、佐藤 司、細川 巖(電通大)、
山本 稀義、末松 和代(航技研)

Direct Numerical Simulation of Worm Generation in Isotropic Turbulence

by

Shin-ichi Oide, Tsukasa Sato and Iwao Hosokawa

The University of Electro-Communications

Kiyoshi Yamamoto and Kazuyo Suematsu

National Aerospace Laboratory

ABSTRACT

The direct numerical simulation (DNS) of an isotropic turbulence decaying is performed using the NAL Numerical Wind Tunnel (NWT). The fully-developed turbulent flow and the passive scalar field are obtained through the DNS with 512^3 mesh points. The numerical analysis and visualization of the flow reveal that the intense portions of the turbulent vorticity concentrate in the sheet-like regions at the early stage. Then, the sheets roll up and finally form vortex tubes that are called worm. The tubes are also observed in the lower-vorticity regions. Furthermore, the intense portions of temperature gradient concentrate in the sheet-like regions and remain unchanged contrary to those of the vorticity.

1. はじめに

近年のコンピュータの高性能化により、乱流の直接数値シミュレーションが盛んになっている¹⁻⁵⁾。本研究は、航空宇宙技術研究所の数値風洞 (NWT) を用い、乱流の渦度場と温度場について、空間的集中構造の時間変化を追跡したものである。

2. 数値計算法

乱流場の基礎方程式として速度場 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ のナビエ・ストークス方程式と連続の式、および温度場 θ の対流拡散方程式を用いる。温度場 θ にはパッシブ・スカラーを仮定する。流れ場には長さ $L = 4\pi$ の周期性を仮定し、フーリエ・スペクトル法を用いる。この時、波数空間における基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}(k)}{\partial t} = -i \sum_{k'} \mathbf{u}(k') k \cdot \mathbf{u}(k - k') \quad (1)$$

$$-ikp(k) - \frac{k^2}{R} \mathbf{u}(k)$$

$$k \cdot \mathbf{u}(k) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(k)}{\partial t} = -i \sum_{k'} \theta(k') k \cdot \mathbf{u}(k - k') - \frac{k^2}{RPr} \theta(k) \quad (3)$$

ここで、 k は波数ベクトル、 $k = |k|$ は波数、 R は初期レイノルズ数、 Pr はプラントル数である。上式はルンゲ・クッタ・ギル法によって計算される²⁾。エイリアジング誤差の消去には位相シフト法を用いる⁶⁾。減衰等方性乱流について空間格子点を 512^3 点とり、NWT 上で数値計算を行った。その結果、最も発達した乱流において $R_\lambda \sim 160$ の乱流速度場が得られた³⁾。

3. 計算結果と考察

3.1 エネルギー・スペクトルと温度分散スペクトル

図 1 に乱流速度場のエネルギー・スペクトル $E_v(k)$ の時間変化を示す。 $E_v(k)$ は発達した乱流場において $E_v(k) = C_\varepsilon \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3}$ のようになる。ここで、 $\langle \rangle$ は空間平均を表し、 C_ε はコルモゴロフ定数、 k は波数、 ε はエネルギー散逸率： $\varepsilon = \nu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)^2 / 2$ である。

計算結果は初期に低波数成分で与えられた乱れのエネルギーが、エネルギー・カスケード機構によって高波数成分へと輸送されていく事を示している。こ

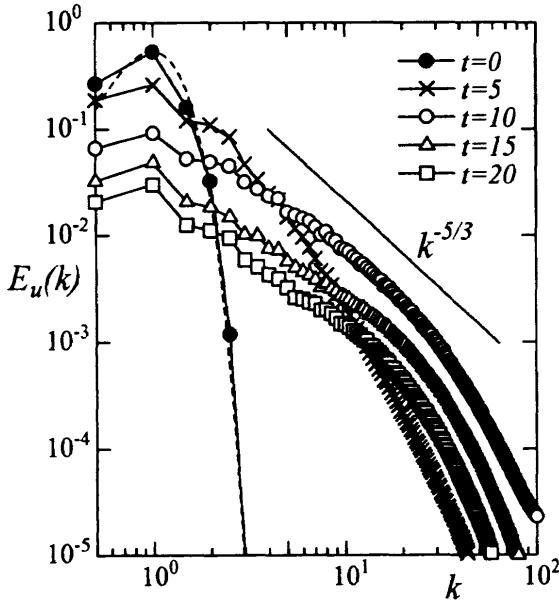


図1. 乱流速度場のエネルギースペクトルの時間的変化 (R=2000、点線は初期乱流の理論スペクトル)

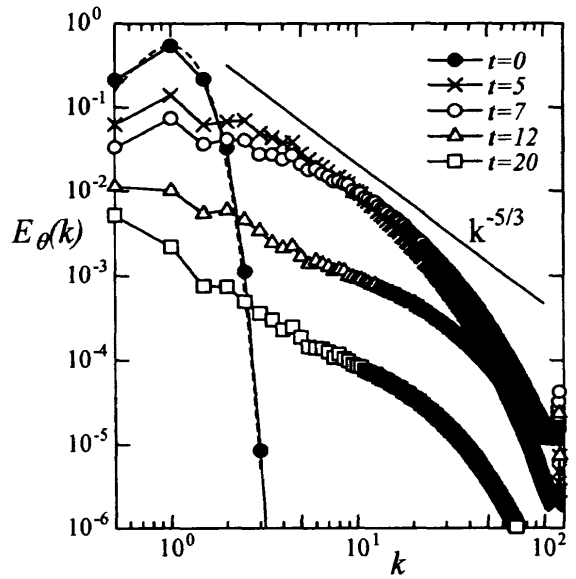


図2. 温度分散スペクトルの時間的変化 (R=2000, Pr=1.0、点線は初期乱流の理論スペクトル)

れに伴い乱流中の渦度分布などの構造もスケールが大きなものから小さなものへと変化する。また、時刻 $t=10$ において最も高波数領域までエネルギーが届いており、この時刻で乱流が最も発達しているのがわかる。そして、そのスペクトルの中間領域ではコルモゴロフ・スペクトルが観測され、コルモゴロフ定数 C_k は 2.3 となった。この値はこれまでの DNS のものと同程度であるが、実験値 1.6~1.7 と比べるとかなり大きい。

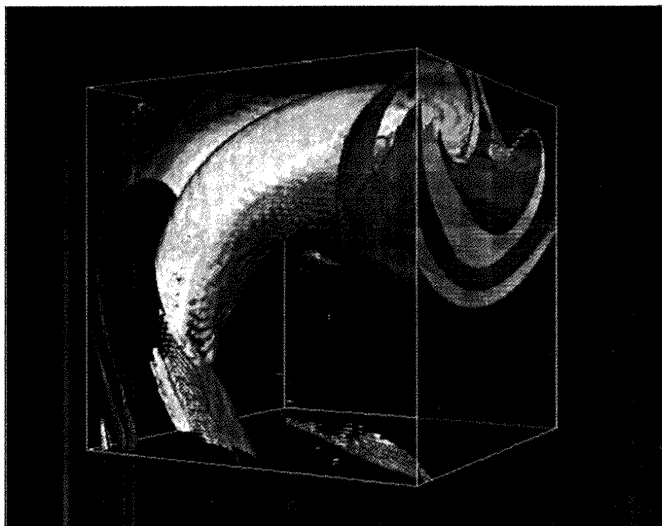
図2は温度分散スペクトル $E_\theta(k)$ の時間変化を示す。 $E_\theta(k)$ も $E_u(k)$ と同様に発達した乱流では $E_\theta(k) = \beta \langle \chi \rangle \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}$ と表される。ここで、 β はパチェラー定数、 ε はエネルギー散逸率、 χ は温度分散散逸率： $\chi = (\nu/Pr) \sum_i (\partial\theta/\partial x_i)^2$ である。この図から、乱流速度場のエネルギー・スペクトルと同様のカスケードが起こっており、小規模スケールの高波数成分へ変動が輸送されていく様子がわかる。これに伴い乱流中の温度勾配分布のような構造もスケールが大きなものから小さなものへと変化していく。また、乱流速度場よりも早い時刻 $t=7$ において最もスペクトルが発達している。乱流速度場の最大発達時 ($t=10$) でパチェラー定数 β は 1.5 となった。これは従来の実験値 0.6~0.8 と比べるとかなり高い。このようにコルモゴロフ定数やパチェラー定数が実験値より大きくなる原因としては周期境界条件のような特殊な拘束条件が考えられるが、今のところ明白ではない。

3.2 渦度集中領域の発達過程

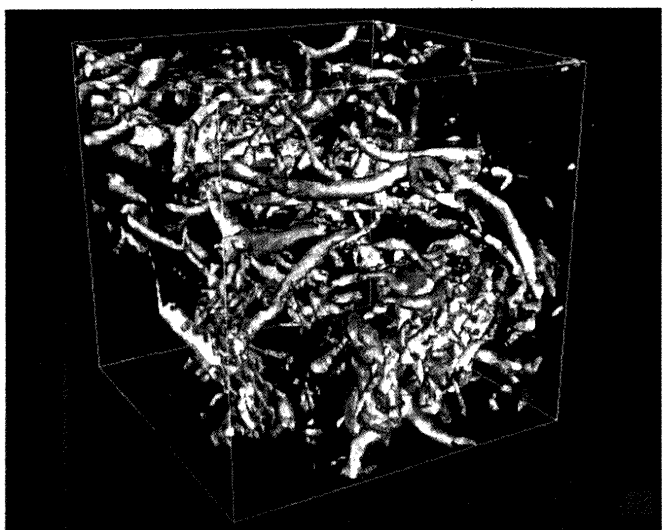
ナビエ・ストークス式に適切な操作を施すことによって次のようなエンストロフィ方程式が得られる。

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \omega_i^2 \right) = \omega_i \omega_j S_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{1}{2} \omega_i^2 \right) \right\} \quad (4)$$

ここで、 ω_i は渦度 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ の i 方向成分、 $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ は歪み速度テンソルである。この方程式に従い渦度は発達していくが、乱流中では渦度集中領域は空間的に一様には分布せず、局所的に集中するような構造を示す。これまでの研究によって発達した乱流中では渦度集中領域の空間的構造は worm と呼ばれる細い管状構造で満たされる事がわかって来た¹⁻⁵⁾。そこで、渦度の集中領域の可視化を行ったところ、次のような worm 形成の過程がわかった。DNS 初期には、与えられた初期エネルギー・スペクトルに対応する大規模な渦度分布構造が存在する。時間とともに、それが引き伸ばされてシート状構造へと変化していく。その後このシートが不安定化して次第に巻きあがり、中心部分に大きなスケールの管状構造を持つスパイラル構造が形成される(図3(a))。さらに時間が経過するとこれが引き伸ばされて、スケールの小さな worm が形成される。その結果として、最も乱流が発達した時刻 ($t=10$) では大小様々な worm がからまりあった構造になる(図3(b))。

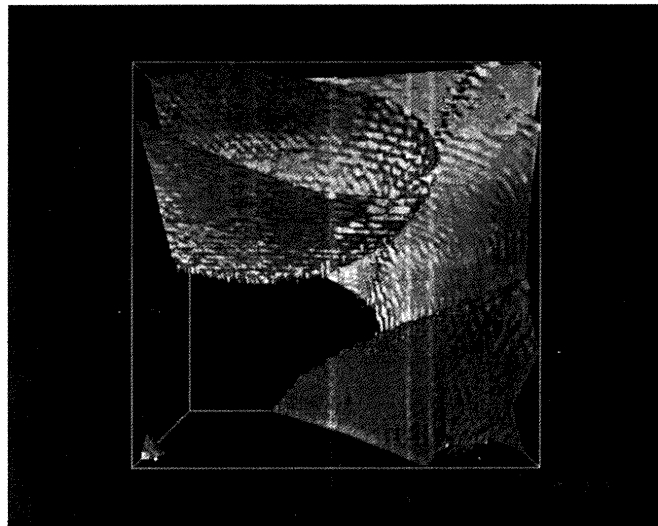


(a) 乱流発達途上 ($t=5$, $|\omega| = 2.1\sqrt{\langle|\omega|^2\rangle}$)

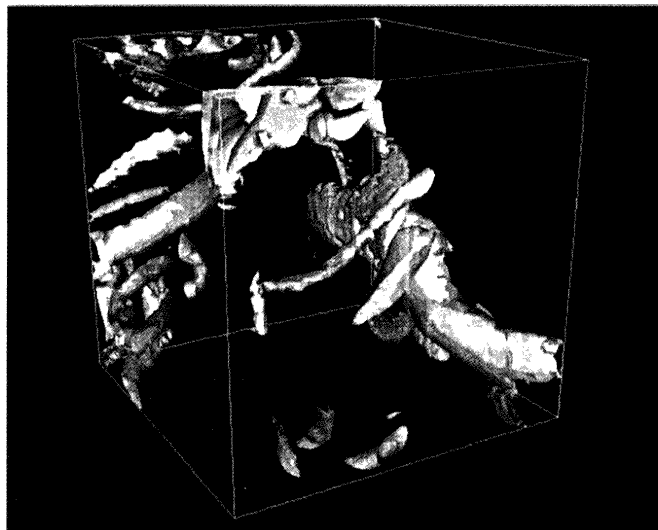


(b) 乱流最大発達時 ($t=10$, $|\omega| = 3.2\sqrt{\langle|\omega|^2\rangle}$)

図3. 高渦度サブボックスにおける渦度集中領域



(a) 乱流発達途上 ($t=5$, $|\omega| = 0.24\sqrt{\langle|\omega|^2\rangle}$)



(b) 乱流最大発達時 ($t=10$, $|\omega| = 0.78\sqrt{\langle|\omega|^2\rangle}$)

図4. 低渦度サブボックスにおける渦度集中領域

さらに、渦度の局所的な大きさによってその集中の様子が違いが現れるかどうかを調べるために、計算領域を一辺が $L/8$ の長さのサブボックスに分割し、その内部の渦度の平均値： $\omega' = \langle|\omega|^2\rangle^{1/2}$ が大きければ局所高渦度領域、小さければ局所低渦度領域とする。全計算領域は 512 個のサブボックスに分割されるが、その中から代表的なものを取り出し、空間的な渦度集中の様子を可視化して比較を行った。局所高渦度領域については前述したように図 3(a), (b) に示す構造が現れる。これに対して、同時刻の局所低渦度領域について同様の可視化を行ったものが図 4(a), (b) である。図 3 と図 4 を比較すると、図 3(a) にはスパイラル構造が見られるが、図 4(a) にはシート構造が見られる。なお、表示した等値面のレベルは前者が全空間における渦度の平均

値の 2.1 倍、後者が 0.24 倍である。次に発達した渦度場 ($t=10$) における可視化結果を比較すると、高渦度領域では小さい worm 構造が見られ(図 3(b))、低渦度領域においても大きい worm が存在することが分かる(図 4(b))。なお、表示した等値面のレベルは前者が全空間における渦度の平均値の 3.2 倍、後者は 0.78 倍である。後者について表示レベルを減らしてみると、渦管に巻き付くシート構造が見られる。これらの事から、高渦度の領域ばかりでなく低渦度の領域にも明確な構造が存在している事が分かった。また、低渦度領域では高渦度領域よりも遅れて worm 形成が起こっていると考えられる。

3.3 温度勾配集中領域の発達過程

温度拡散方程式に適当な操作を施すと次のような温度勾配方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} H_i^2 \right) = -H_i H_j S_{ij} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \left\{ \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{1}{2} H_i^2 \right) \right\} \quad (5)$$

ここで、 H_i は温度勾配 $\mathbf{H} = \nabla \theta$ の i 方向成分である。(4)式と(5)式は、 $\text{Pr}=1.0$ とすれば右辺第一項の符号を除いて同じ形になっている。そこで、温度勾配の集中過程を渦度集中過程と比較して調べることにする。

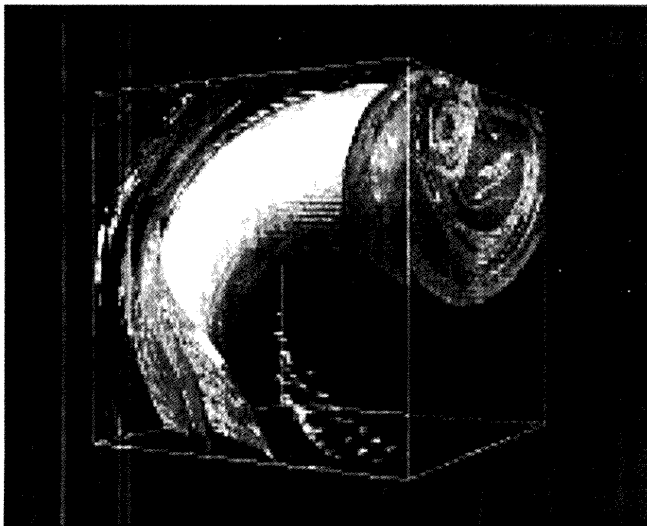
温度勾配の集中領域も渦度の空間的集中構造と同様に、空間的に一様には分布せず局所的に集中する構造を持つ。これまでの研究により、発達した乱流中では高温度勾配領域は空間的にシート状の構造を持つ事が分かっている¹⁾。この高温度勾配のシート状構造の形成過程を調べた結果を以下に示す。

図3(a),(b)と同時刻、同サブボックスで温度勾配の集中する領域を示したのが図5(a),(b)である。各時刻

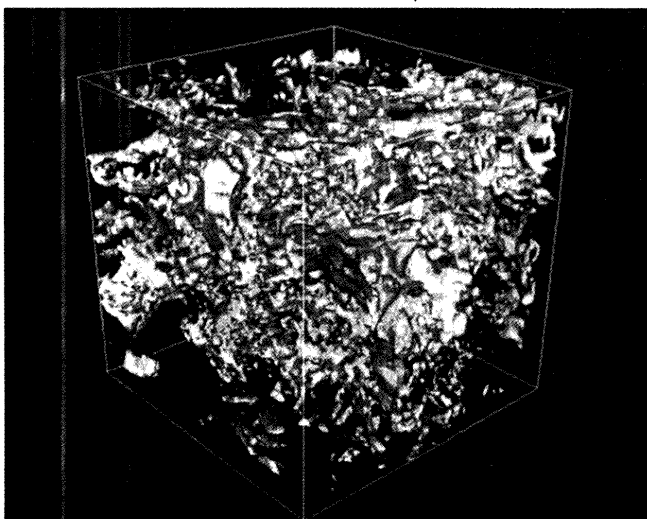
での温度勾配の平均値を $H' = \langle |\mathbf{H}|^2 \rangle^{1/2}$ として、図5(a)は $|\mathbf{H}| = 1.4H'$ の等値面を、図5(b)は $|\mathbf{H}| = 1.1H'$ の等値面をそれぞれ3次的に可視化している。

これらの図から、 $t=5$ での温度勾配集中領域はシートが巻き上がった構造をしており、 $t=10$ ではかなり変形するものの、シート構造は保たれる。図5(b)において構造の一部が切れ切れに見えるのは可視化の際のしきい値の設定が高いためである。図5(a),(b)を図3(a),(b)とそれぞれ比較してみると、図3(a)と図5(a)は殆ど同じ構造を持っている事が分かる。ただし、温度勾配は渦度構造の外のスパイラル・シート状の領域にのみ集中している。なぜ渦管構造の部分に温度勾配が集まらないのかは未だ明白でない。

図4(a),(b)と同時刻、同サブボックスで温度勾配の集中する領域を示したのが図6(a),(b)である。図6(a)は $|\mathbf{H}| = 0.34H'$ の等値面を、図6(b)は $|\mathbf{H}| = 0.89H'$ の等値面をそれぞれ3次的に可視化している。 $t=5$ の時刻

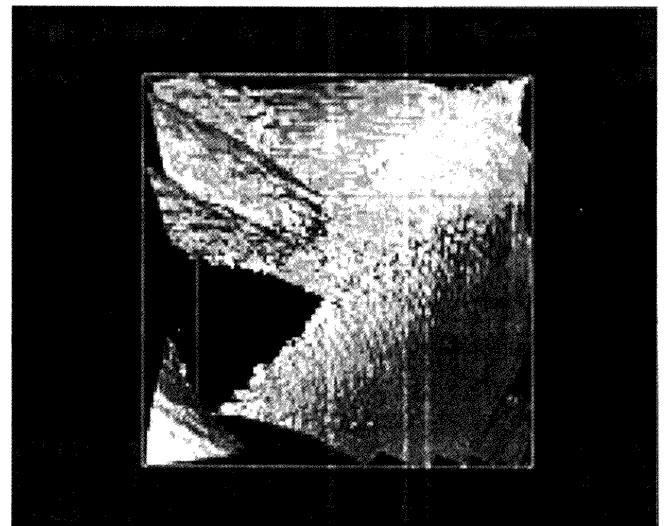


(a) 乱流発達途中 ($t=5$, $|\mathbf{H}| = 1.4 \sqrt{\langle |\mathbf{H}|^2 \rangle}$)

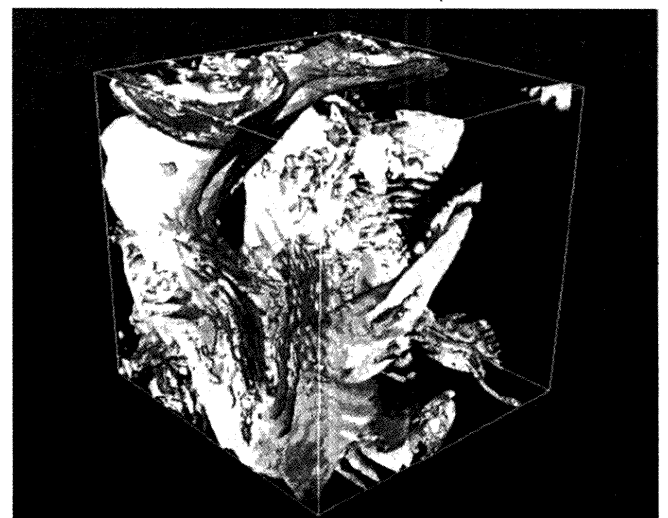


(b) 乱流最大発達時 ($t=10$, $|\mathbf{H}| = 1.1 \sqrt{\langle |\mathbf{H}|^2 \rangle}$)

図5. 高渦度サブボックスにおける温度勾配集中領域



(a) 乱流発達途中 ($t=5$, $|\mathbf{H}| = 0.34 \sqrt{\langle |\mathbf{H}|^2 \rangle}$)



(b) 乱流最大発達時 ($t=10$, $|\mathbf{H}| = 0.89 \sqrt{\langle |\mathbf{H}|^2 \rangle}$)

図6. 低渦度サブボックスにおける温度勾配集中領域

では温度勾配集中領域は大きなシートが積み重なったような構造をしており、 $t=10$ では図 5 (a), (b) と同様にかなり変形するが、シート構造自体は保存されている。また、図 4 (a), (b) と図 6 (a), (b) を比較してみると、 $t=5$ においては渦度集中領域と温度勾配集中領域は殆ど同じ構造を持っているが、乱流が発達して $t=10$ となるとそれらは異なる構造を持つようになる事がわかる。この事は高渦度領域で起こっている渦度および温度勾配の集中構造形成過程とほぼ同じであると思われる。

以上の事から、次のような温度勾配の集中構造の形成過程が判った。温度勾配集中領域は乱流の発達とともに渦度の集中領域へと集まっていき、そのシート構造と同じ構造を持つようになり早い時刻で温度勾配集中構造が出来上がってしまう。その後、渦度集中構造は worm 構造へと変化していくのだが、温度勾配のシート構造はそのまま保存される。そして、worm 形成が温度勾配場のシート構造をかき乱し、当初とは異なる形のシート構造が現れるのだと思われる。このような形成過程の結果が $t=10$ の時刻で示される可視化結果である。また、渦度が worm 構造へ変化するのに要する時間の分だけ、速度場の最大発達時刻は温度場よりも遅れると考えられる。それが 3.1 で示したような温度分散スペクトルが速度場のエネルギー・スペクトルよりも早く発達する原因であると考えられる。

4. 結言

NWTを用いた減衰等方性乱流のDNSを行った。得られたデータを可視化することで以下の事がわかった。

(1) 流れの大規模な剪断によってシート構造が形成され、それが巻きあがって中心に渦管構造を持つスパイラル・シートが出来上がる。その後渦管が引き伸ばされて worm 構造が形成される。

(2) 局所低渦度領域での worm 構造の形成は局所高渦度領域よりも遅れる。

(3) 温度勾配も渦度と同様にシート構造を形成する。このシート構造は維持されるが、渦度の worm 構造による変形を受ける。

(4) 温度勾配がシート構造で維持される一方で渦度は worm 構造へと変化する。この変化に要する時間の分だけ速度場の発達は温度場よりも遅れる。

参考文献

- 1) 生出 伸一, 山口 博, 細川 巖, 山本 稀義, 末松 和代 : 直接数値シミュレーションに基づく乱流構造の数値解析, 航空宇宙技術研究所特別資料 SP-30 (1996) 147.
- 2) 山本 稀義 : 航技研数値風洞と乱流の数値シミュレーション, ながれ 14 (1995) 353.
- 3) 山口 博, 生出 伸一, 山本 稀義, 細川 巖 : 等方性乱流の微細構造の可視化, 第 9 回数値流体力学シンポジウム講演論文集 (1995) 167.
- 4) K. Yamamoto : Direct Numerical Simulation of Isotropic Turbulence Using NAL Numerical Wind Tunnel, in *Parallel Computational Fluid Dynamics : New Algorithms and Applications, Proceeding of the Parallel CFD'94 Conference* (eds. N. Satofuka et al, Elsevier Science, 1995) 13.
- 5) 生出 伸一, 山本 稀義, 細川 巖 : DNSに基づく等方性乱流の微細構造解析, 第 26 回乱流シンポジウム講演論文集 (1994) 370.
- 6) C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni and T. A. Zang : *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1988).

超音速圧縮・膨張斜面境界層における T-S 波動の挙動

坂上昇史*, 西岡通男*

Tollmien-Schlichting Waves in Supersonic Laminar Boundary Layers under the Effects of Compression and Expansion

Shoji SAKAUE and Michio NISHIOKA

Dept. of Aerospace Eng., Osaka Prefecture University, 1-1 Gakuen-machi, Sakai-shi, Osaka 593, Japan

The instability of a supersonic flat-plate boundary-layer flow under the effects of compression or expansion is investigated through linear stability calculations and direct numerical simulations. We find that the results of the linear stability theory based on the local parallel flow approximation agree well with those of the DNS for the behavior of small amplitude Tollmien-Schlichting waves. In addition to the viscous stability calculation, we have made the inviscid calculations to clarify that the inflectional instability really governs the behavior of Tollmien-Schlichting waves even at such a low Mach number as 2.2 which is far below the often cited value $M_1 = 4.0$ for the inviscid instability.

Key Words: Supersonic flow, Linear stability theory, Boundary-layer stability, Inflectional instability, Tollmien-Schlichting waves, Compression and expansion ramp

1 はじめに

次世代超音速旅客機の空気抵抗の低減や超音速風洞の低騒音化において、境界層の層流化が重要な課題である。そのための基礎知識として、超音速境界層における微小振幅擾乱の生成条件（受容性）や、壁面の粗度や曲率、熱伝達等の種々の条件下での挙動を知ることが必要である。

微小擾乱の挙動を調べる方法として、線形安定性理論がよく用いられる。Lees と Lin¹⁾ は非圧縮流の安定性理論を低マッハ数領域の圧縮性流れに拡張し、Dunn と Lin²⁾ はそれを 3次元擾乱を含むように拡張した。これら初期の圧縮性流れの安定性解析に対し、Mack^{3, 4)} は Navier-Stokes 方程式から導きだした安定性方程式を数値的に解く手法を提案し、高マッハ数領域における圧縮性境界層の 3次元安定性解析を行った。超音速境界層は速度分布に

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

で定義されるいわゆる一般化変曲点を有し、非粘性擾乱に対し不安定であること、粘性はこの変曲点不安定を安定化する方向に働くこと、主流マッハ数が増すと一般化変曲点が壁から離れて粘性の影響が弱まり、 $M_1 \geq 4$ となる領域では、変曲点不安定が擾乱の増幅を支配するようになることなど、今日知られている超音速境界層の不安定性を明らかにしたのも Mack である。しかし、安定性問題の定式化は一般に平行流近似に依存しており、壁面の曲率や傾斜による圧縮・膨張過程など急激な流れ方向の変化を伴う場合の解析結果

の妥当性については慎重な判断が求められる。

一方、超音速平板境界層の安定性を調べた実験として、Laufer と Vrebalovich⁵⁾ や Kendall⁶⁾ による研究が知られているが、超音速境界層中の微小擾乱は風洞側壁の乱流境界層から放射される変動に影響されること、熱線流速計により 100kHz 程度の変動を正確に計測しなければならぬこと等の困難があり、微小擾乱の生成過程を実験的に明らかにすることは容易ではない。

また、最近では数値流体力学による圧縮性流れの研究が増しつつあるが、T-S 波動のような層流制御に絡む微小擾乱の挙動については 2次元擾乱の場合でさえ十分な知識が得られていると言えない。

そこで、筆者らは超音速輸送機の巡航速度に相当するマッハ数領域における超音速境界層に注目し、層流制御を行うための基礎知識を得ることを主な目的として研究を行っている。本論文では、主流マッハ数 $M_1 = 2.2$ の 2次元層流境界層に注目し、圧縮および膨張の影響によりその構造や挙動がどのように変化するか、TVD 法に基づく数値シミュレーションと局所平行流近似の線形安定性解析により調べた。

2 解析対象の流れ場

圧縮・膨張過程の影響下にある流れ場として、図 1 のような斜面を有する壁面上に形成された主流マッハ数 $M_1 = 2.2$ の 2次元層流境界層流れを考える。T-S 波動も 2次元的であるとし、支配方程式として主流密度 ρ_1 、主流音速 c_1 、主流粘性係数 μ_1 を用いて無次元化された 2次元圧縮性 N-S 方程式を用いる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

*大阪府立大学工学部(〒593 堺市学園町1-1)

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - Re^{-1} \tau_{xx} \\ \rho uv - Re^{-1} \tau_{xy} \\ (e+p)u - Re^{-1} q_x \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - Re^{-1} \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - Re^{-1} \tau_{yy} \\ (e+p)v - Re^{-1} q_y \end{pmatrix}$$

$$Re = \frac{\rho_1 c_1 L}{\mu_1}, \quad Pr = \frac{c_p \mu^*}{\kappa^*}$$

ここで、 Re はレイノルズ数、 Pr はプラントル数、 γ は比熱比を表す。応力成分については、 $(x, y) = (x_1, x_2)$ 、 $(u, v) = (u_1, u_2)$ としてテンソル表示すると

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2)$$

$$q_i = \frac{\mu}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial T}{\partial x_i} + u_j \tau_{ij}$$

である。図1において基準長さ L は $Re = 4500$ となるように設定されており、吸い込み式風洞を用いた実験に対応させると $L = 0.78\text{mm}$ である。また、主流速度 U_1 と上流境界での運動量厚さに基づくレイノルズ数は 362、下流境界でのそれは 609 である。平板と斜面の接点は $x = 60L$ の位置に設定し、傾斜角は圧縮を伴う場合を正、膨張となる場合を負とする。計算格子は直交座標系において壁面に沿う方向と垂直な方向にとり、式(2)を一般座標変換することにより計算空間で正方格子とする。格子数は 500×160 、格子間隔は $\Delta x = 0.125L$ 、 $\Delta y = 0.0125L$ である。ただし、境界層外では不等間隔格子を使用する。なお計算結果は図1のように壁面に沿う方向に x 軸、垂直な方向に y 軸をとって表示する。

数値計算は、対流項に対しては Chakravarthy と Osher⁷⁾ による3次精度の TVD スキームを、粘性項は2次の中心差分を、セル境界での物理量は Roe の近似⁸⁾ を用いて評価する。また、時間積分は2次精度の陽解法を用いる。風上差分法である TVD スキームを用いるのは、超音速流を対象としており、衝撃波などの不連続面の発生を念頭においているからである。

境界条件は、壁面については滑りなしで断熱壁とする。上方境界と下流境界は零次外挿とする。下流境界での零次外挿が境界層内の亜音速部分において上流へ伝播する特性波を精密に表現しないときには、その影響が下流境界近傍に現れるが、その影響域は緩衝領域とみなし解析の対象から除くことにする。

上流境界では平均流成分に

$$[\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{T}]^t \quad (3)$$

$$= A \times [r(y), f(y), \alpha_0(y), \pi(y), \xi(y)]^t \exp[i(\alpha x - \omega t)]$$

の形(角振動数 ω 、波数 α_r 、空間増幅率 $-\alpha_i$) の微小振幅の2次元波動型攪乱を重ね合わせる。攪乱の固有

値、固有関数は、Mack³⁾の方法に基づく線形安定性解析により得られた結果を採用した。今回解析の対象とする攪乱の固有値は、数値計算の基準量(主流密度 ρ_1 、主流音速 c_1 、長さ L) で無次元化すると、上流境界において

$$\omega = 1.2469, \quad \alpha = 0.93390 - i 1.8072 \times 10^{-2}$$

である。攪乱の初期振幅は上流境界において速度変動 \bar{u} の振幅の最大値が主流流速 U_1 の 0.1% となるように式(3)の係数 A を定めた。

輸送特性は、プラントル数 Pr を定数 (= 1) とみなし、粘性係数 μ の温度依存性のみを考慮する。ここでは数値計算と線形安定性解析の結果を比較することを考慮して、両方で粘性係数が温度に比例するものとして次式により評価する。

$$\frac{\mu}{\mu_0} = b \frac{T}{T_0} \quad (4)$$

$$\left(b = \sqrt{\frac{T_w}{T_0}} \frac{T_0 + S_1}{T_w + S_1} \right) \quad (= 1: \text{for adiabatic wall})$$

なお、添字 0 は貯気槽状態、 w は壁面の状態を表す。

3 圧縮・膨張斜面を過ぎる流れ

圧縮・膨張の影響として、圧縮の場合はコーナー近傍に剥離域が、膨張の場合はコーナーより膨張波が発生する。図2に壁面圧力 p_w と局所摩擦応力係数 C_f の x 方向変化を示す。非粘性流の場合は圧縮斜面のコーナーが斜め衝撃波の発生により不連続点となるが、粘性流の場合はコーナーが壁面近くの逆流域低速流の向きを急変させ、 C_f 分布が図2(b)のように急変するだけであり、平均流に対するコーナーの影響は顕著でない。逆に、膨張斜面の場合、境界層内の亜音速部を通してコーナーで発生する膨張波の影響が上流側へ伝わるが、その影響域は圧縮斜面に比べて狭く、圧縮の場合よりも急な変化となっている。このような平均流に関する結果は、 C_f 分布の急変部分や臨界剥離の傾斜角などについて triple-deck 理論⁹⁾ の結果と比較し、数値計算の信頼性を確認している¹⁰⁾。

4 T-S 波動の挙動

図2に示した平均流に微小攪乱を導入しその下流における挙動を数値計算と安定性解析により追跡した。図3は $\theta = 0.0^\circ$ (平板境界層)、図4は $\theta = -4.0^\circ$ の場合の (a) 平均速度 \bar{u} 、(b) 変動の振幅および (c) 位相の y 方向分布を示す。縦軸は $\delta = x/Re_x^{1/2}$ で定義される長さ δ で無次元化されている。なお、圧縮斜面の場合については文献10,11に詳しいので省略する。密度変動 $\bar{\rho}$ や温度変動 \bar{T} は一般化変曲点位置で最大値をとり、本研究の主流マッハ数 ($M_1 = 2.2$) においても T-S 波動は変曲点不安定の性格を示している。また、数値解

と安定性解析の結果は、圧縮・膨張にかかわらず、コーナー ($x = 60L$) 近傍の非平行流の影響を無視できない領域を除いて流れ場全体でよく一致している。

図5(a)は攪乱振幅が空間増幅する様子を、図5(b)は図5(a)の結果をもとに

$$-\alpha_i = \frac{\ln(A(x + \Delta x)/A(x))}{\Delta x} \quad (\Delta x = 1.25L) \quad (5)$$

として求めた局所増幅率 $-\alpha_i$ を示す。圧縮斜面の場合、一般化変曲点における $\bar{\rho}(\partial\bar{u}/\partial y)$ の増加に伴って(図6参照)、攪乱の振幅・増幅率は増加する^{10, 11)}。一方、膨張斜面の場合は $\theta \leq -2.0^\circ$ においてコーナー下流で一般化変曲点が消滅することにより、T-S波動は減衰に転じている。すなわち、攪乱は変曲点不安定に強く影響されることを示している。

図7は波数 α_r の x 方向の変化を示す。波長は圧縮による減速によっては短く、膨張による加速では長くなる。また、数値解と安定性解析の結果は、コーナー近傍の非平行流の影響が強い領域を除いて、ここでもよく一致している。

以上の結果より、安定性解析は圧縮・膨張に伴うT-S波動の挙動の変化をとらえており、攪乱の挙動予測における理論の有用性を示しているといえる。なお、図5, 7において、膨張斜面下流で数値解と安定解析の結果が大きくずれているが、これは図8のように、T-S波動の流下によりコーナーから発生する膨張波に沿って伝わる新たな攪乱が現れるためである。この攪乱はT-S波動と同じ周波数をもっており、数値解はこの影響を分離できていない。

5 超音速境界層の不安定性

前節の結果より、T-S波動の増幅率は境界層分布の一般化変曲点における $\bar{\rho}(\partial\bar{u}/\partial y)$ の値に追従して増減する。このことは変曲点不安定が攪乱の挙動を支配することを示す証拠である。変曲点不安定は非粘性であるので、非粘性攪乱に対する線形安定性解析を行う。

式(3)の形の非粘性攪乱に対する安定性方程式は、次の圧力変動 π に関する2階の常微分方程式として表される。

$$\pi'' - \left[\frac{2\bar{u}'}{\bar{u}-c} - \frac{\bar{T}'}{\bar{T}} \right] \pi - \alpha^2 \left[1 - \frac{(\bar{u}-c)^2 M_1^2}{\bar{T}} \right] \pi = 0 \quad (6)$$

ここで'は y 方向の微分を表し、複素数 c は $c = \omega/\alpha$ を表す。式(6)に境界条件として

$$\bar{v}(0) = 0, \quad \bar{v}(y) \text{ bounded as } y \rightarrow \infty \quad (7)$$

を適用することにより固有値問題を形成する。

図9は、数値解と同じ角振動数をもつ粘性・非粘性攪乱の(a)波数 α_r と(b)増幅率 $-\alpha_i$ の x 方向変化の比較である。両者の波数 α_r は驚くほどよく一致している。一方増幅率 $-\alpha_i$ は変化の傾向はよく合っているが、

その値は膨張斜面 ($\theta = -4.0^\circ$) の $x = 70L$ 近傍を除くと、非粘性攪乱の方が粘性攪乱より大である。

一般に粘性の影響は壁面近傍に限定され、変曲点不安定に対し境界層を安定化させる方向に働くことを考慮すると、今回調べた $M_1 = 2.2$ の超音速境界層におけるT-S波動の挙動は、本質的には非粘性の変曲点不安定性に由来するといえる。また、非粘性攪乱に対する安定性解析を行うことにより、圧縮・膨張過程による攪乱の挙動(振幅や波長)の変化を十分予測できる(ただし、壁面の境界条件の違いにより、当然ながら固有関数分布については予測できない)。

6 まとめ

主流マッハ数 $M_1 = 2.2$ の圧縮・膨張斜面周りの境界層におけるT-S波動の挙動について、TVD法で計算された数値解と線形安定性解析の結果を比較した。それにより、このマッハ数領域においてもT-S波動は一般化変曲点に由来する変曲点不安定に支配されることがわかった。また、圧縮・膨張過程はこの変曲点不安定に直接影響を及ぼし、圧縮の場合は境界層の不安定化に、膨張の場合は安定化の方向に働くことを明らかにした。圧縮・膨張どちらの場合についても、安定性解析は微小攪乱の挙動を予測でき、理論の有用性が示された。

本研究は部分的に文部省の科学研究費(課題番号08455465)の援助を受けた。

引用文献

- 1) L. Lees and C. C. Lin: Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid, NACA-TN1115 (1946).
- 2) D. W. Dunn and C. C. Lin: On the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid, J. Aero. Sci. **22** (1955) 455-477.
- 3) L. M. Mack: Computation of the stability of the laminar compressible boundary layer, *Methods in Computational Physics*, Vol.4 (Academic Press, 1965) 247-299.
- 4) L. M. Mack: Linear stability theory and the problem of supersonic boundary-layer transition, AIAA J. **13** (1975) 278-289.
- 5) J. Laufer and T. Vrebalovic: Stability and transition of a supersonic laminar boundary layer on an insulated flat plate, J. Fluid Mech. **9** (1960) 257-299.
- 6) J. M. Kendall: Wind tunnel experiments relating to supersonic and hypersonic boundary layer transition, AIAA J. **13** (1975) 290-299.
- 7) S. R. Chakravarthy and S. Osher: A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws, AIAA 85-0363 (1985).
- 8) P. L. Roe: Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, J. Comp. Physics **43** (1981) 357-372.
- 9) D. P. Rizzetta, O. R. Burggraf and R. Jenson: Triple-deck solutions for viscous supersonic and hypersonic flow past corners, J. Fluid Mech. **89** (1978) 535-552.
- 10) 坂上昇史, 西岡通男: 圧縮斜面周りの超音速境界層におけるT-S波動の挙動, ながれ **15** (1996) 124-132.
- 11) 坂上昇史, 西岡通男: 超音速境界層におけるT-S波動の挙動と変曲点不安定, NAL-SP (1996) (to be submitted).

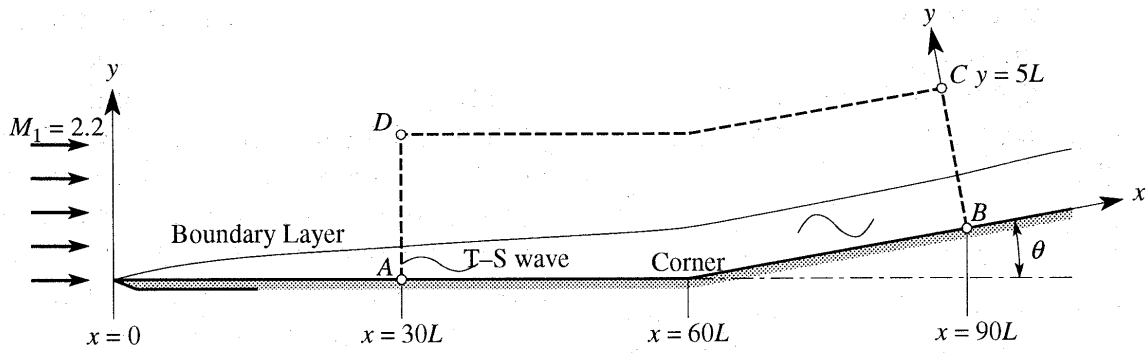


図1 計算領域.

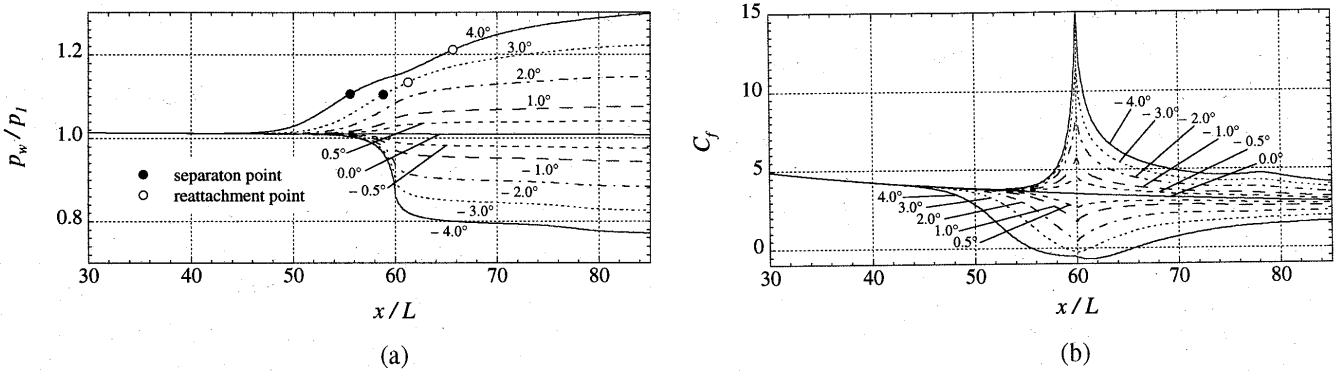


図2 斜面を過ぎる超音速境界層 ($M_1=2.2$) の (a) 壁面圧力 p_w と (b) 局所摩擦応力係数 C_f .

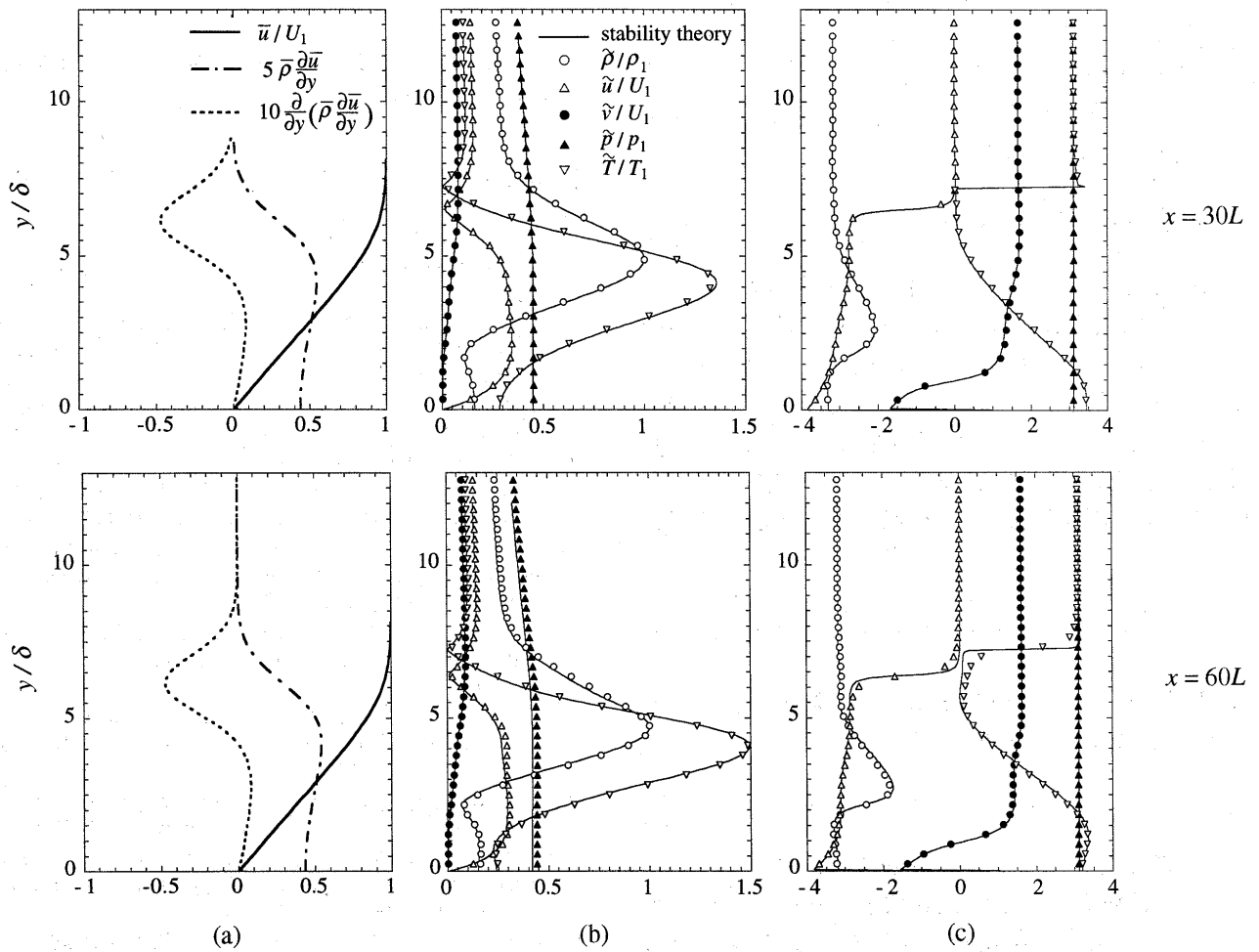


図3 平板境界層におけるT-S波動に関する数値解と線形安定性解析との比較 ($M_1=2.2$)
 (a) 平均流速, (b) T-S波動の振幅, (c) 位相 (rad) の y 方向分布.

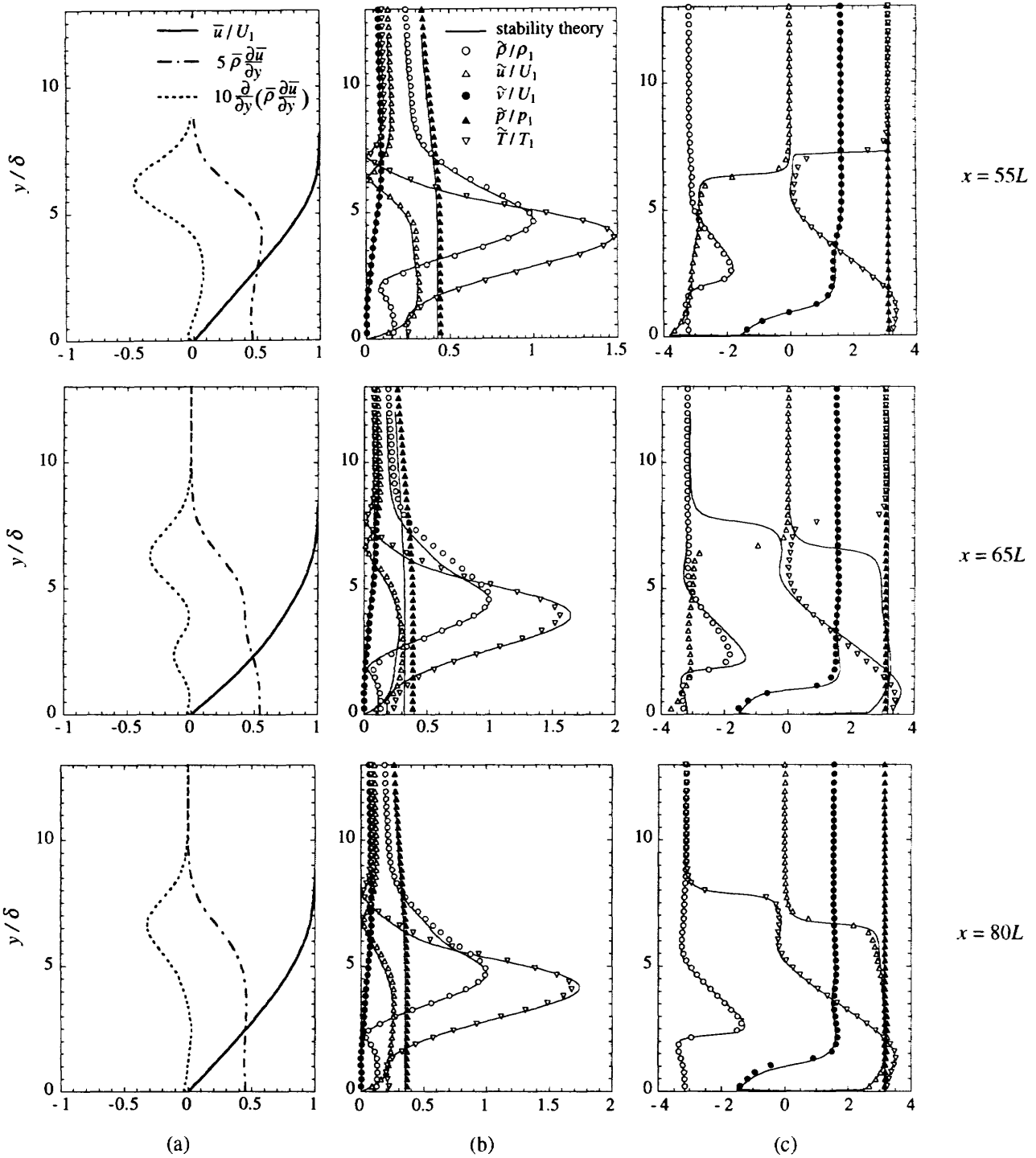


図4 膨張斜面周りのT-S波動に関する数値解と線形安定性解析との比較 ($M_1 = 2.2, \theta = -4.0^\circ$) :
 (a) 平均流速速度, (b) T-S波動の振幅, (c) 位相 (rad) のy方向分布.

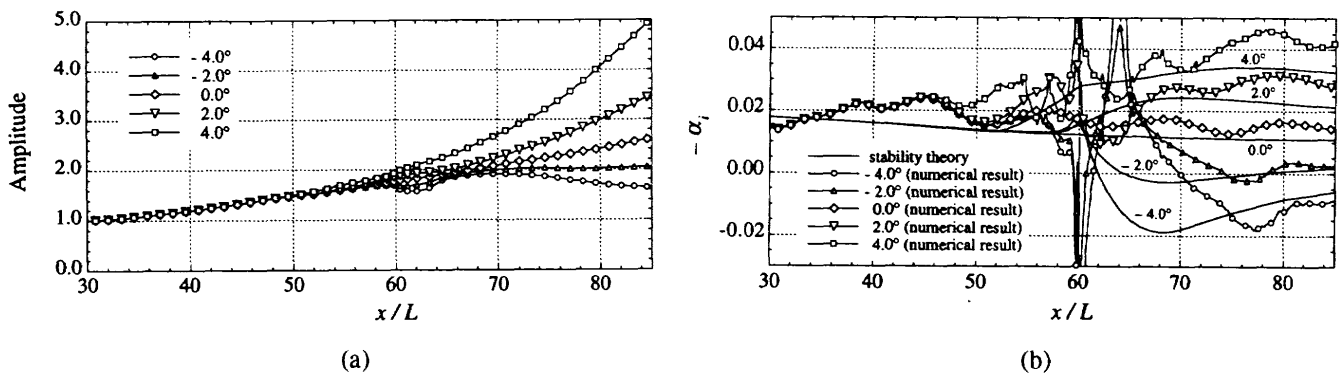


図5 圧縮・膨張過程がT-S波動に及ぼす影響: (a) 振幅比, (b) 空間増幅率 $-\alpha_i$ の流れ方向変化.

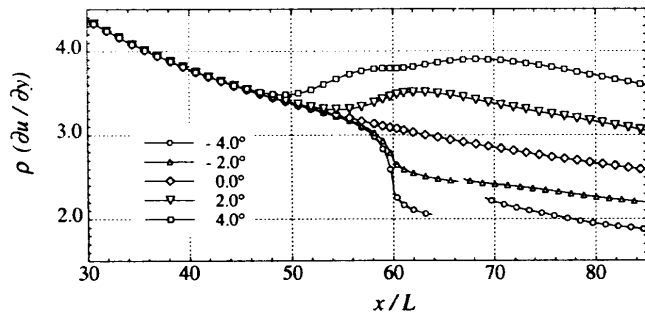


図6 一般化変曲点における $\bar{\rho} (\partial \bar{u} / \partial y)$ の大きさ.

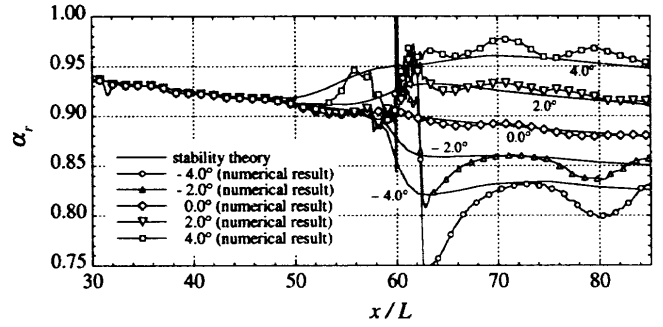


図7 圧縮・膨張過程がT-S波動に及ぼす影響：波数 α_r の流れ方向変化.

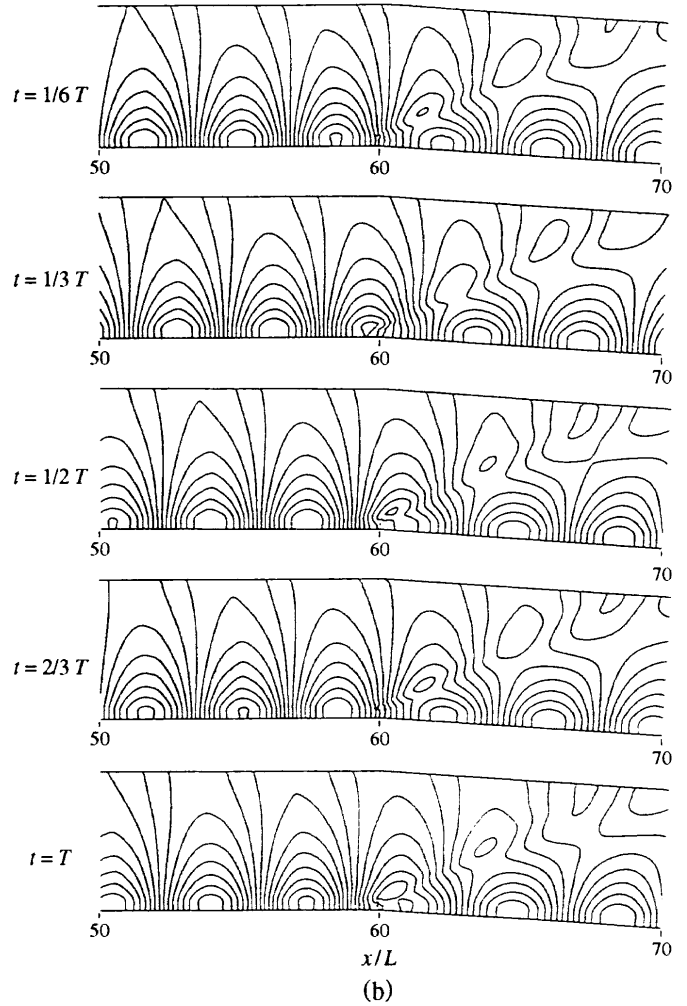
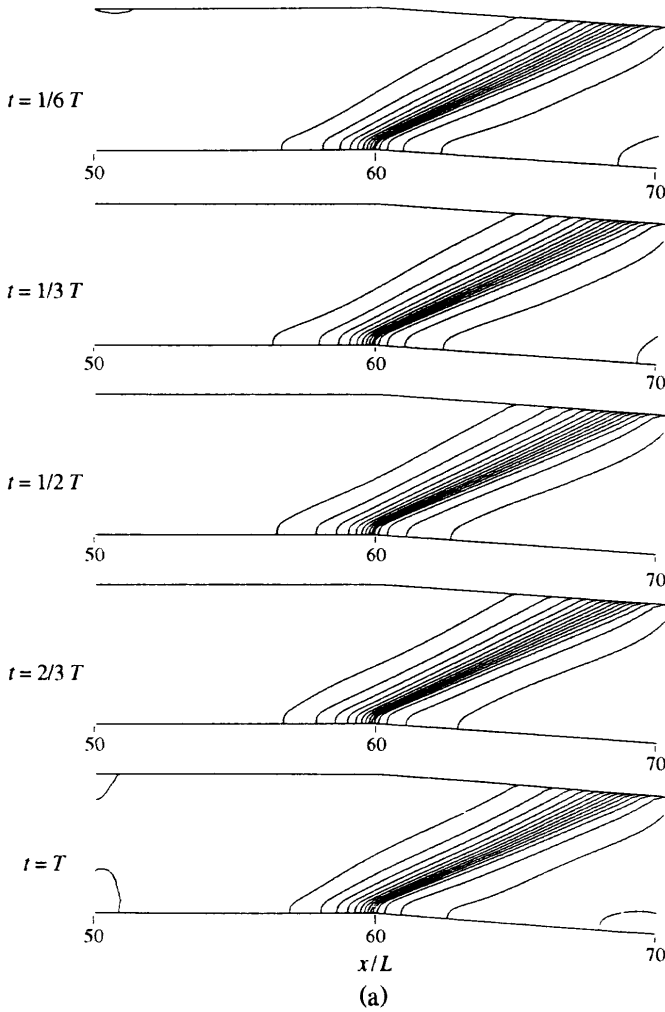


図8 膨張斜面を過ぎる流れ場：(a) コーナーで生じる膨張波，(b) 圧力変動 (\tilde{p}) の等値線図.

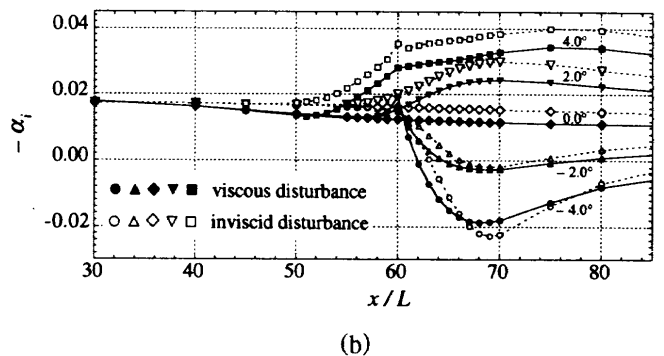
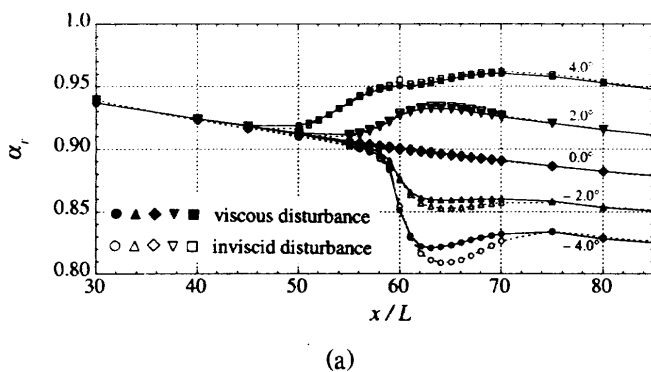


図9 粘性・非粘性攪乱に対する安定性解析：(a) 波数，(b) 空間増幅率.

圧縮性境界層における擾乱の空間的発達に対する 壁面冷却の影響について

前田一郎* 中村佳朗**

Effects of Wall Cooling on Spatial Development of Disturbance in Compressible Boundary Layer

by

Ichiro MAEDA and Yoshiaki NAKAMURA
Department of Aerospace Engineering, Nagoya University

ABSTRACT

The spatial development of a disturbance generated in the compressible boundary layer on the flat plate is simulated in the case of a Mach number of 1.5 by solving the Navier-Stokes equations. The fourth-order non-oscillatory scheme and Roe's approximate Riemann solver are utilized for space discretization and the third-order Runge-Kutta scheme for time integration. The disturbance given in the upstream region spreads in the streamwise and spanwise directions. The wall temperature is varied to examine the effects of wall cooling on the development of disturbance. It is found that the disturbance propagates in the wedge-shaped region downstream of the source. The wedge angle and magnitude of the streamwise velocity fluctuation are increased by wall cooling. Furthermore, the laterally-spreading angle is close to that of the experimental data.

1. はじめに

層流境界層が局所的に乱流へ遷移する場合、その下流には楔形の遷移領域を形成し、マッハ数が増加するとその広がり角度は減少することが実験的に知られている^{1~3)}。理論的には、超音速境界層に対して Balakumar ら⁴⁾が解析を行っている。しかし、その広がりに対する壁面冷却の影響についてはあまり研究されていない。

そこで、本研究では平板上の圧縮性境界層（一様流マッハ数 $M_\infty = 1.5$ ）に速度擾乱を与え、壁面冷却によりその擾乱の広がりがどう影響されるかを、3次元 Navier-Stokes 方程式を数値的に解くことで調べた。

2. 基礎方程式及び計算方法

基礎方程式としては、一般座標における3次元

圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いた。計算法として、本研究の問題では擾乱により衝撃波が生じる可能性があり、また擾乱の伝播をより正確に捕らえるために、セル境界での解ベクトルは数値的拡散の少ない k 次精度非振動補間法を用いて近似した⁵⁾。セル境界 $(i+1/2)$ の左側及び右側の解ベクトル $Q_{i+1/2}^L, Q_{i+1/2}^R$ は以下ようになる。

$$Q_{i+1/2}^L = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n q_i^{(n)} + O((\Delta x)^{k+1}) \quad (1)$$

$$Q_{i+1/2}^R = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n q_{i+1}^{(n)} + O((\Delta x)^{k+1}) \quad (2)$$

ここで $q^{(n)} = (\Delta x)^n (\partial^n Q / \partial x^n)$ であり、本研究では $k = 4$ つまり4次精度で近似した。また、セル境界での数値流束 (numerical flux) は Roe の方法により決定した。今回の計算は非定常であり、時間積分の精度も要求される。そこで、時間積分には以下の k 段階 k 次精度 Runge-Kutta 法を用いた⁶⁾。

*名古屋大学大学院

**名古屋大学工学部

$$\begin{aligned}
 Q^{(0)} &= Q^n \\
 Q^{(j)} &= Q^n + \lambda_j \Delta t f(Q^{(j-1)}) \\
 &\quad (j = 1, \dots, k) \\
 Q^{n+1} &= Q^{(k)}
 \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $\lambda_j = 1/(k - j + 1)$ であり, 上付添字 $n, n + 1$ はタイムステップを表す. 本研究では $k = 3$ つまり3次精度とした. これらの方法を組み合わせると容易に任意の空間及び時間の精度にできる.

3. 計算領域及び境界条件

3.1 計算領域

計算領域として第1図に示された平板上の境界層の一部を考える. 計算領域は3つの領域に分けられ, 擾乱の発達を解析する領域Bと, その上流側と下流側に流入及び流出境界からの悪影響を緩和するためのbuffer領域(領域A及び領域C)が設けられている. 計算領域の広さとしては, x 方向に領域Aは $0.1 \leq x \leq 0.2$, 領域Bは $0.2 \leq x \leq 0.26$, 領域Cは $0.26 \leq x \leq 0.36$ で, y 方向は $0 \leq y \leq 0.5$, z 方向は $-0.015 \leq z \leq 0.015$ である. また, 格子点数は x 方向に領域A及び領域Cで10点, 領域Bで80点で, y 方向は60点, z 方向は40点である. 格子は領域Aと領域Cの x 方向, 全領域の y 方向に不等間隔とし, 他は等間隔とした.

3.2 境界条件

境界条件としては, 流入境界及び上方境界では Riemann 不変量に基づく条件を用いた⁷⁾. 流入境界における上流側の値には前縁を含む平板まわりの流れの2次元計算結果を, 上方境界における計算領域外側の値には一様流の値をそれぞれ用いた. 流出境界においては, 境界層の壁面付近では必ず亜音速領域が存在するため境界条件の取扱いが困難である. この種の計算では非反射条件 (Non-reflecting condition)⁸⁾ 等が用いられることもあるが, 本研究では擾乱がbuffer領域で十分に減衰していると仮定して, 計算上安定である0次外挿とした. 壁は等温壁 ($T_w/T_{aw} = 1.00, 0.73, 0.61, 0.49, T_{aw}$: 断熱壁の温度, $T_w/T_\infty = 1.38, T_\infty$: 一様流温度 = 300K) を仮定した. また, 初期条件には上で述べた2次元計算結果を用

いた(第2図参照).

擾乱は壁からの吹き出し・吸い込みとして与えた. 具体的には壁面上の点 $(x_0, 0, z_0)$ を中心とする半径 r_0 の円形の領域で, 壁面に垂直な速度成分を角周波数 $\omega (= \omega L/u_\infty) = 100$, 振幅 $\varepsilon = 0.1$ で時間的に振動する周期関数として与えた.

$$v = \varepsilon u_\infty v_w \sin(\omega t), v_w = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \pi \frac{r}{r_0} \right) \tag{4}$$

ここで $x_0 = 0.2, z_0 = 0, r_0 = 0.003$,

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{5}$$

である.

4. 計算結果及び考察

今回の計算では一様流マッハ数 $M_\infty = 1.5, 1m$ 当たりのレイノルズ数 $Re = 1.0 \times 10^6$ で, クーラン数は $CFL = 1.0$ とした.

4.1 擾乱のスパン方向への広がり

10周期後の渦度の大きさの $x-z$ 平面での等高線を第3図に示す. 色の濃淡は渦度の大きさを示し, 黒に近い程大きい. 中心線 ($z = 0$) 付近で流れ方向に進行する2次元擾乱の波と, 流れに対してある角度をもって進行する3次元擾乱の波が存在する. このスパン方向への広がりにはこの広がりによって大きく変化するが, 第3図にはこの広がり最も大きくなる $y = 0.00085$ での分布を示した. 壁面を冷却することにより, 擾乱のスパン方向への広がりが増大し, また渦度も大きくなっていることが分かる. 壁面温度とスパン方向への広がり角の関係を第4図に示す. また, 広がり角の実験値³⁾とマッハ数の関係を示したのが第5図である. 図中には以前に計算した $M_\infty = 0.5$ の断熱壁の場合の結果も示されている. 広がり角は壁面を冷却すると増加し, マッハ数を減少させたのと同様の効果があり, いずれの計算結果も実験とよく一致した.

4.2 速度変動及び温度変動の分布

速度変動の流れ方向成分及び温度変動の中心線上 ($z = 0$) での y 方向の分布を第6図に示す. 縦軸の y は運動量厚さ θ で無次元化してある. 速度変動のピークの位置は下流に行く程壁面から離れ, またその大きさは小さくなって

る。壁面を冷却した場合に、変動が大きくなるが、特に壁面の温度が一様流温度よりも小さい場合 ($T_w/T_{aw}(T_w/T_\infty) = 0.61(0.83), 0.49(0.67)$) には温度が一様流よりも小さい領域で温度変動が大きくなっている。また、壁面の冷却により変動のピークの位置が壁面に近づく。次に、 $y = 0.00085$ における $x-z$ 平面上での速度変動の流れ方向成分の等高線を第7図に示す。いずれの場合も擾乱を与えている中心線上 ($z = 0$) で速度変動が大きくなっているが、壁面を冷却していくと、中心線から離れた位置でも大きなピークが観察される。このピークの広がる角度は渦度の場合とほぼ一致し、壁面冷却により増加する。

4.3 境界層の諸量に対する壁面冷却の影響

境界層の諸量に対する壁面冷却の影響を第8図に示す。排除厚さは壁面を冷却することにより減小し、運動量厚さは増加する。これらの厚さは下流に行くに従って増加するが、擾乱を与える $x = 0.20$ 付近から急激に増加しており、壁面温度が低い程その傾向が強くなっている。局所摩擦係数については、壁面を冷却することにより減小し、擾乱を与えている位置で大きなピークを持つが、その下流ではほぼ一定になっている。また、Stanton 数は壁面温度が低い程小さく、擾乱の影響をほとんど受けていない。形状係数も壁面温度が低い程小さく、 $x = 0.20$ 付近で極小となり、 $x = 0.24$ 付近で最大となる。

5. 結論

平板上の圧縮性境界層（一様流マッハ数 $M_\infty = 1.5$ ）に速度擾乱を与え、壁面冷却によりその擾乱の広がりがどう影響されるかを、3次元 Navier-Stokes 方程式を数値的に解くことで調べた。

壁面を冷却することにより、

- 擾乱のспан方向の広がり角が増加し、マッハ数を減小させた場合と同様な傾向がみられた。
- 速度擾乱、温度擾乱ともに増加し、速度擾乱については中心線から離れた位置で別のピークが観察された。

参考文献

- 1) Y. S. Kachanov : Development of Spatial Wave Packets in Boundary Layer, *Laminar - Turbulent Transition*, Springer (1984) 113-123.
- 2) L. M. Mack : Instability Wave Patterns From Harmonic Point and Line Sources in Laminar Boundary Layers, *Laminar-Turbulent Transition*, Springer (1984) 125-132.
- 3) M. C. Fischer : Spreading of a Turbulent Disturbance, *AIAA J.*, **10** (1972) 957-959.
- 4) P. Balakumar and M. R. Malik : Waves Produced from a Harmonic Point Source in a Supersonic Boundary Layer Flow, *J. Fluid Mech.*, **245** (1992) 229-247.
- 5) K. Itoh, H. Yanno and M. Takahashi : A Pointwise Non-oscillatory shock Capturing Scheme, *Proc. of the 5th Int. Symp. on Comput. Fluid Dynamics*, **3** (1993) 370-375.
- 6) A. Jameson, W. Schmidt and E. Turkel : Numerical Simulation of the Euler Equations by Finite Volume Method Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes, *AIAA paper No. 81-1259* (1981).
- 7) A. Jameson and T. J. Baker : Solution of the Euler Equations for Complex Configurations, *AIAA paper No. 83-1929* (1983).
- 8) K. W. Thompson : Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, *J. Comput. Phys.* **68** (1987) 1-24.

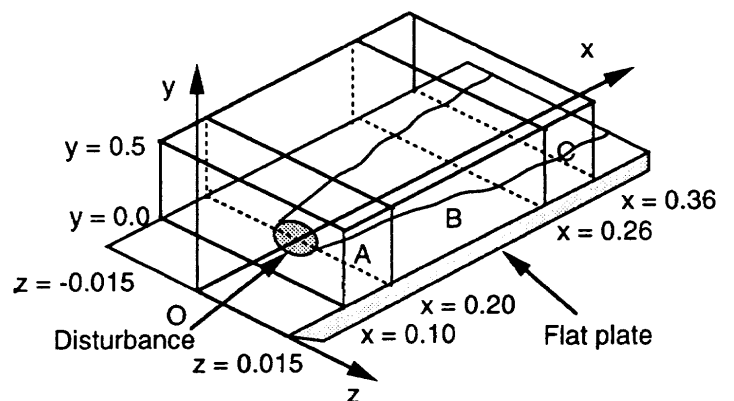


Figure 1. Computational domain

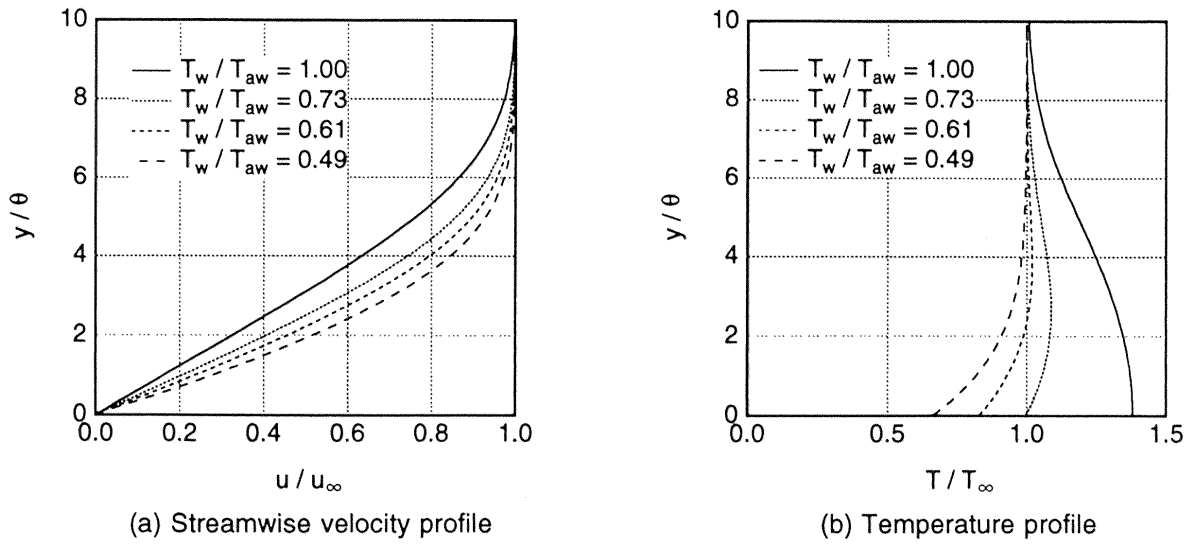


Figure 2. Boundary layer profile (non-disturbed; θ : momentum thickness)

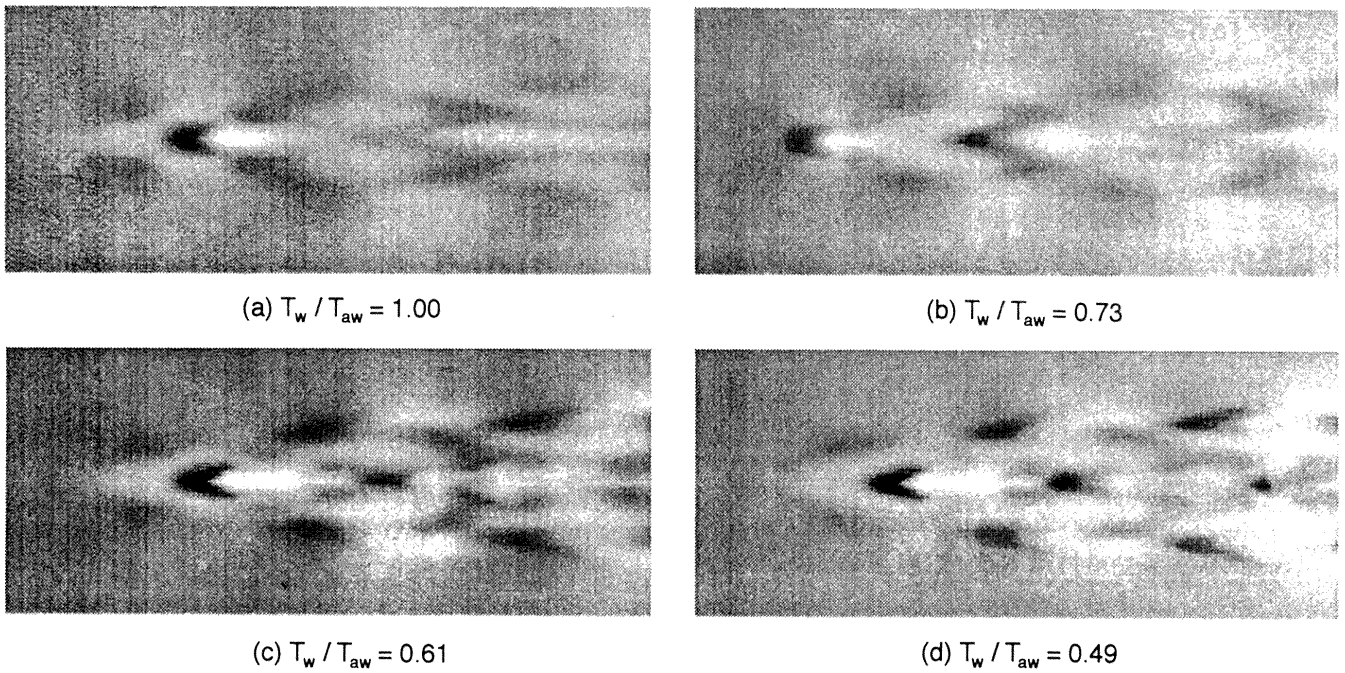


Figure 3. Contour lines of vorticity

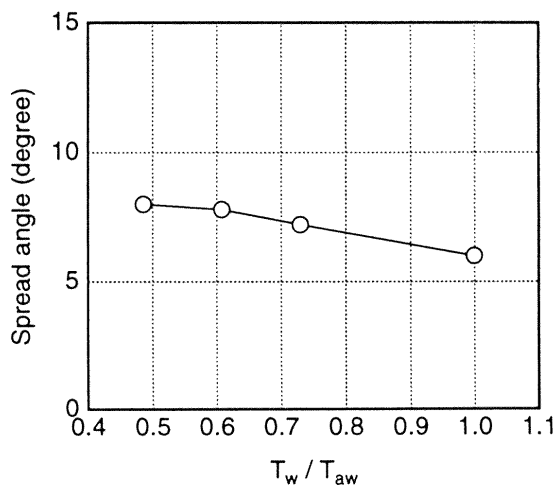


Figure 4. Wall temperature effect on spread angle

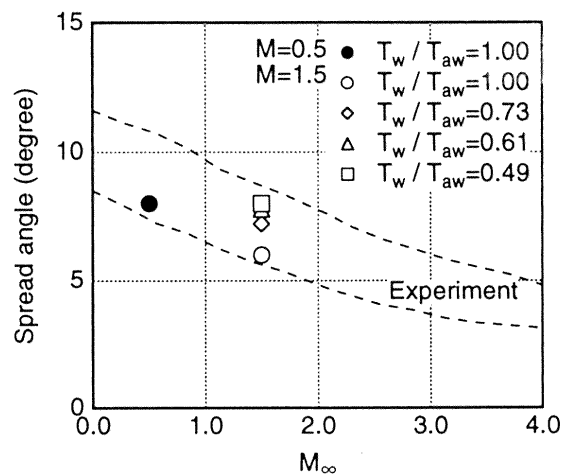
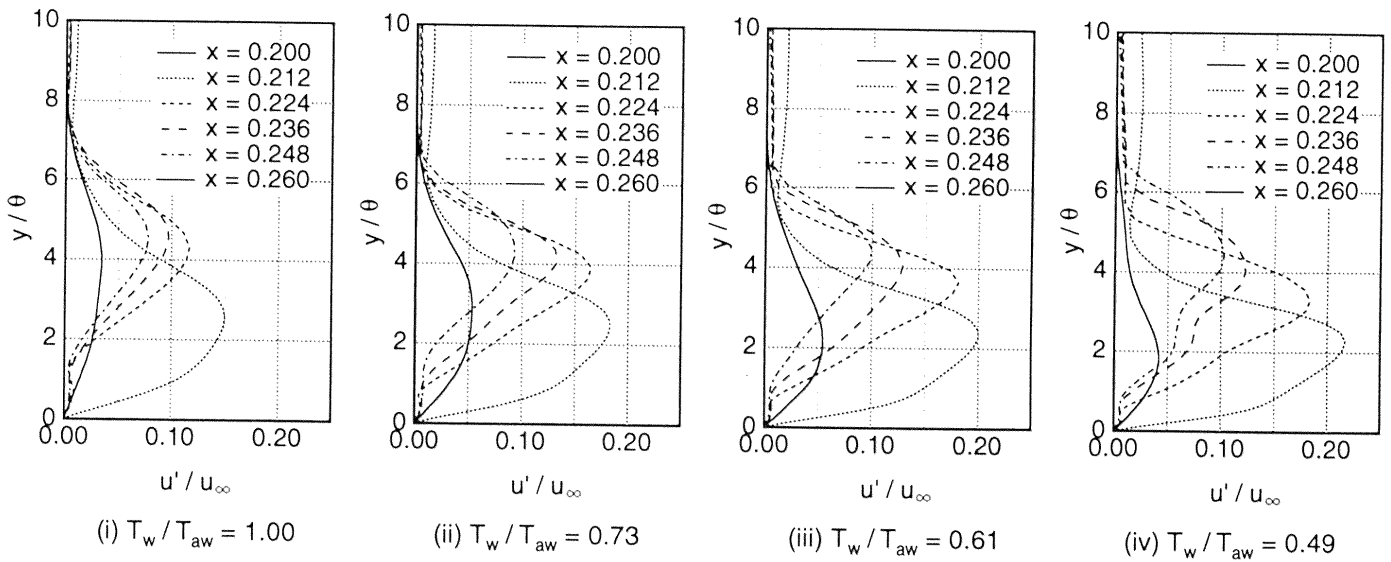
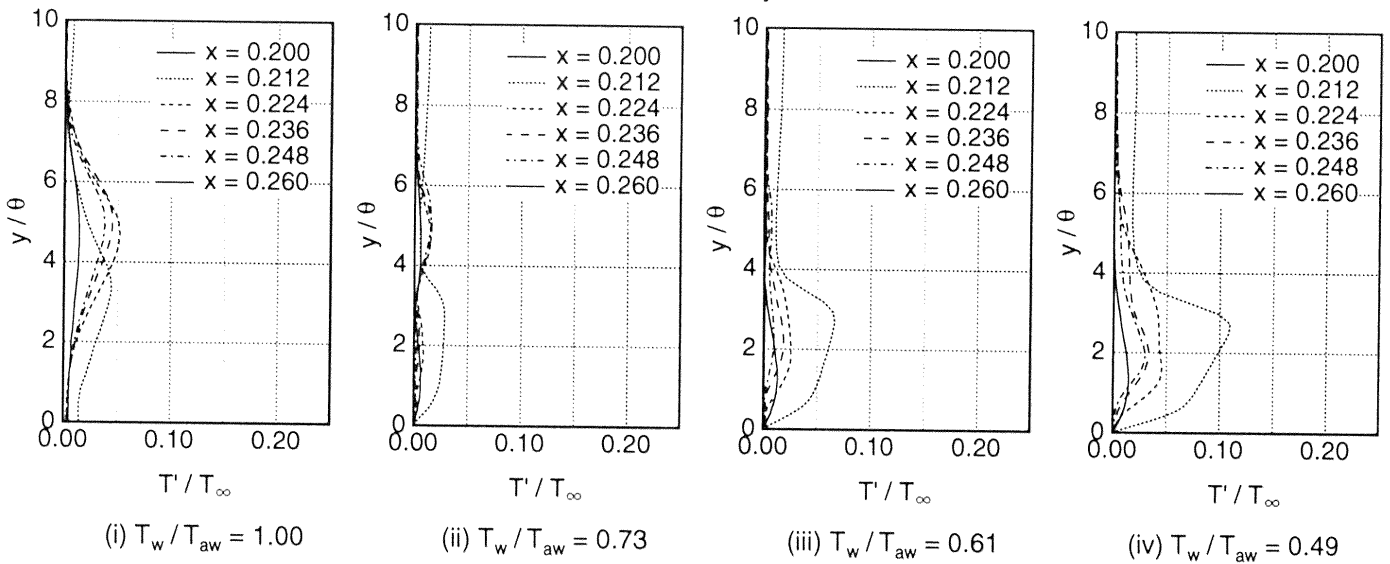


Figure 5. Mach number effect on spread angle



(a) Streamwise velocity fluctuation



(b) Temperature fluctuation

Figure 6. Fluctuation distributions

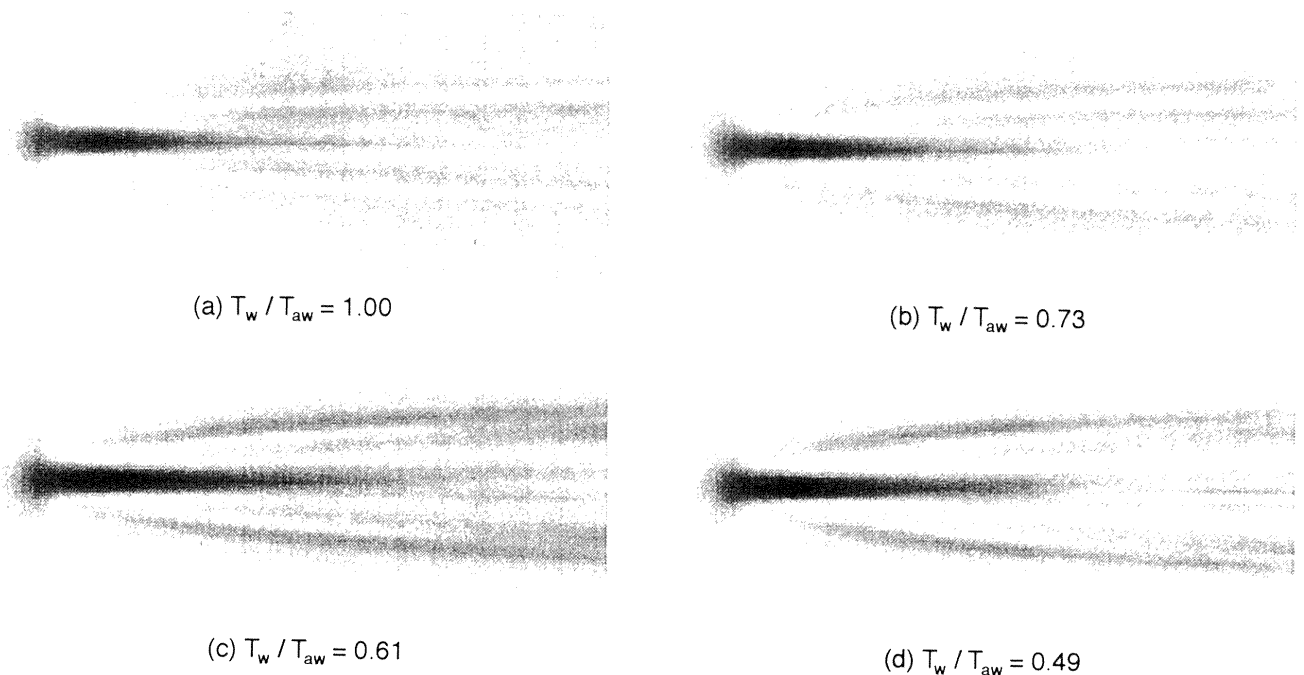
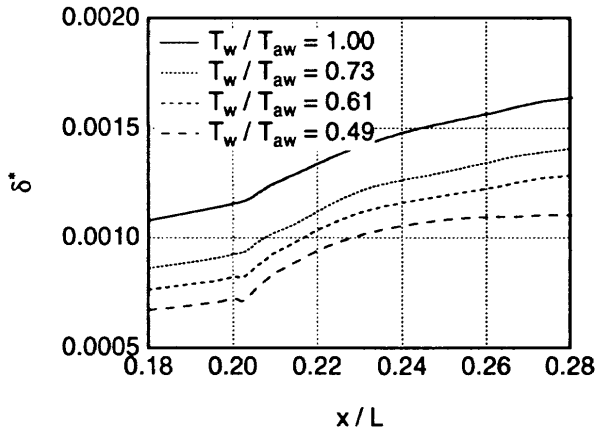
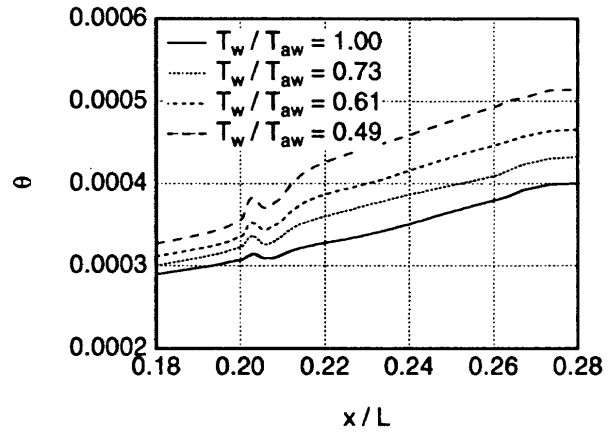


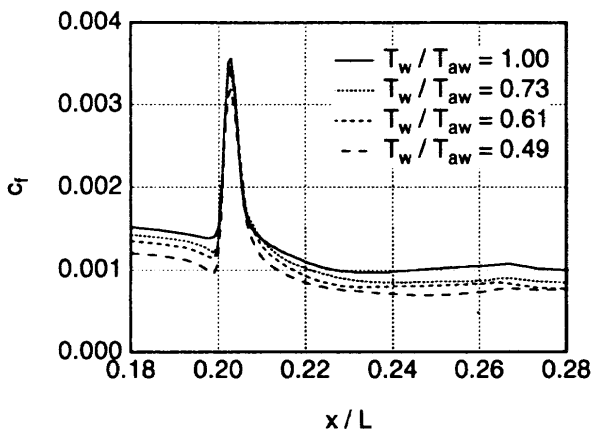
Figure 7. Contour lines of streamwise velocity fluctuation



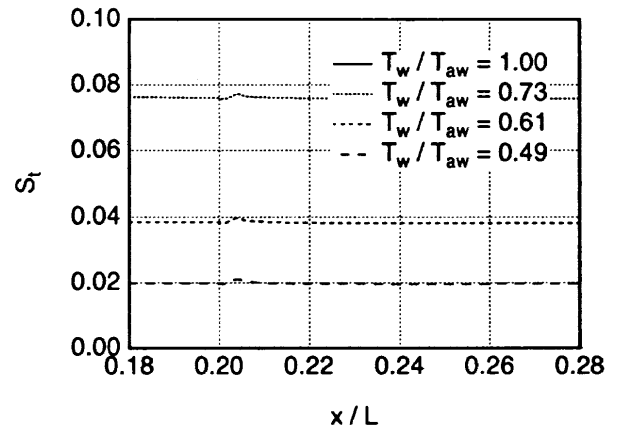
(a) Displacement thickness



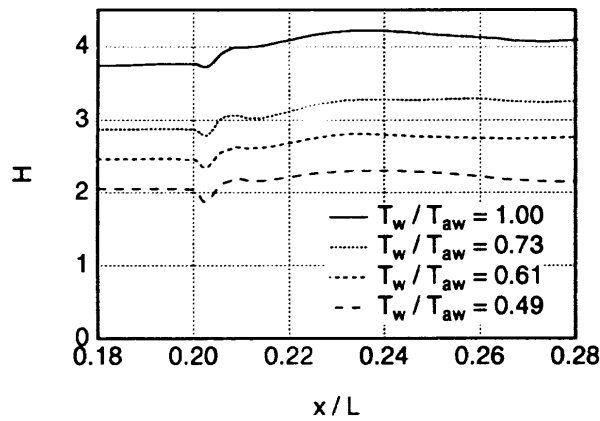
(b) Momentum thickness



(c) Local skin friction coefficient



(d) Stanton number



(e) Shape factor

Figure 8. Boundary layer parameter

ヘリコプタ・ブレードの幾何形状がBVI騒音に与える影響

中村英明, 近藤夏樹, 青木誠(ATIC*), 青山剛史, 齊藤茂(航技研)

Effect of Blade Geometry on BVI Noise of Helicopter Rotor

by

Hideaki Nakamura, Natsuki Kondo, Makoto Aoki(ATIC), Takashi Aoyama, Shigeru Saito(NAL)

ABSTRACT

A prediction method for blade-vortex interaction (BVI) noise of a helicopter rotor is developed. This method consists of following four steps: 1) trim analysis using CAMRAD II based on the lifting line theory, 2) interpolation of blade motion and the wake geometry, 3) aerodynamic analysis using a finite difference solver for the three-dimensional unsteady Euler equations, and 4) noise analysis using an aeroacoustic code based on the Ffowcs Williams and Hawkins (FW-H) formulation without the quadrupole term. The predicted acoustic waveform for the OLS model rotor is compared with experimental data and reasonable correlation is obtained. This method is applied to investigate the effect of the tip shape on the intensity of the BVI noise. For the first step, the effects of anhedral, dihedral, swept and tapered tip shapes are discussed. As a result, it is shown that the anhedral, swept-forward, and tapered tip shapes are good for the reduction of the BVI noise in a descent flight condition.

1. はじめに

近年、ヘリコプタによる旅客輸送の需要が増すにつれ、住宅密集地やヘリポート周辺におけるヘリコプタの機外騒音が問題になっている。機外騒音の中でも、メインロータのブレードが先行する他のブレードもしくは自身の発生する翼端渦と干渉することにより発生するブレード/渦干渉騒音(BVI騒音)は、一般に低速降下中に発生しやすく、ひとたび発生すると他の騒音に卓越し、極めて耳障りな騒音となる。すなわち、ヘリポートなどへの着陸時に付近住民に与える影響が大きく、都市部におけるヘリポート設置の妨げとなっている。以上の様な背景から、BVI騒音の低減指針を得るための研究が世界で盛んに行われている。

これらの研究は、実験及び解析の両面から行われており、前者の代表的な研究例としては、文献(1), (2), (3)などがある。しかし、回転翼の実験は固定翼のそれより、はるかに複雑で莫大なコストがかかるため、実験から包括的な知見を得るのはかなり困難であると思われる。従って、実験的研究の欠点を補うため、解析的な研究が重要となり、他機関でも文献(4), (5)のように研究が進められている。筆者らも、BVI騒音の低減指針を得るために、解析システムを構築し、検証を行ってきた⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

本研究では、BVI騒音の強度に影響を及ぼす要因として、ブレード幾何形状に着目した。過去に行われた類似の研究例としては、後退角、下反角、テーパ、ねじり下げを扱った文献(8)や後退角、BERP翼を扱った文献(9)などがあるが、いずれも実験によるもので解析的に研究された例はない。そこで本研究では、ブレード幾何形

状がBVI騒音に及ぼす影響を調べ、騒音低減の可能性を探ったので、その結果を報告する。

2. 解析手法

BVI騒音解析システムのフローチャートを図1に示す。本解析システムは、基本的に4つの解析コードで構成されている。以下に各解析コードについて述べる。

(1) トリム解析コード

ヘリコプタ・ロータのトリム解析には、ヘリコプタ総合解析プログラムのCAMRAD IIを用いた。本コードでは、ヘリコプタ特有の複雑な後流の形状を自由渦モデルで計算し、渦による誘導速度場はビオ・サバルの法則を用いて計算する。

(2) 補間コード

通常、CAMRAD IIの計算は収束性などの問題から、方位角方向に10度刻みで行っているが、瞬間的な干渉によって生じるBVI騒音の解析には精度が不十分である。精度を向上させるために、文献(10)を参考に以下の処理を行うコードを作成した。

- ① CAMRAD IIから得られた10度刻みのブレード及び翼端渦位置を、方位角方向に任意の刻み(本解析では1度刻み)で補間する。
- ② 補間した位置において、翼端渦による誘導速度の計算をビオ・サバルの法則により行う。
- ③ CAMRAD IIで得られる渦全体による誘導速度の垂直成分から、翼端渦による誘導速度の垂直成分を差し引いて、翼端渦以外の渦(近傍、遠方渦等)による誘導速度の垂直成分を求め、方位角方向に任意の刻みで補間する。
- ④ CAMRAD IIで得られる全ての影響を含んだ垂直速度成分から、渦による誘導速度の垂

直成分を差し引いて、ブレードの運動（フラッピング等）による垂直速度成分を求め、任意の刻みで補間する。

- ⑤②、③及び④の結果を足し合わせることにより、CAMRAD IIでは得られなかった細かい方位角位置における誘導速度が求められる。⑥⑤で得られた誘導速度を用いて、有効迎角を求める。

(3)CFDコード

補間コードにより得られたブレードの有効迎角分布をもとに、渦の影響を有効迎角の変化で近似するangle-of-attack法⁽¹¹⁾を用いて、CFDコードによるブレード周りの非定常空力解析を行う。基礎方程式は回転座標系で記述された3次元オイラー方程式であり、同式を差分法によって解くことによりブレード周りの流れ場を求める⁽¹²⁾。

(4)音響解析コード

CFDコードから得られたブレード表面上の圧力分布をもとに、Ffowcs Williams and Hawkingsの式（4極子の項を含まない）に基づく音響解析コード⁽¹³⁾を用いて任意の観測点に伝搬する圧力の擾乱、即ちBVI騒音を求める。

3. 解析条件

ブレードの基準モデルとして、矩形の翼端形状を持つAH-1/O L Sモデルロータ（1/7スケール）⁽¹⁴⁾を用いた。本ロータの諸元を表1に示す。観測点はロータ中心から3.44R前方で30°下方（図2）の場所である。その他の解析条件は表2に示す。

一般的にBVI騒音の強度に影響を及ぼすと言われている要因としては、1)ブレードと翼端渦の干渉時の距離、2)交差角度、3)渦強度とコア径が挙げられる。本解析では、それぞれの要因について影響を調べるため、20°の上/下反角、40°の前進/後退角、1/3テーパー、90%の半径位置から付けて、ブレード幾何形状の違いがBVI騒音に与える影響を検討した。

4. 解析法の検証

図3に風洞試験⁽¹⁵⁾による音圧波形と本解析システムから得られた解析結果を示す。これらと比較すると、風試結果に見られる2つのスパイク状の正のピークが解析結果でも確認できる。つまり定性的な傾向が風試結果と一致していることが示された。更に定量的に見ると、Aのピークは過小評価しているが、Bのピークは試験結果と一致している。過小評価の原因としては、Aのピークは自身の発した渦との干渉によって生じるため、Bのピークよりも干渉するまでに渦が移動してきた距離が大きく、渦位置の正確な予測が困難であることが考えられる。2つのピークが生じる原因は、次のように考察できる。観測点が前方の場合、音の大きさは前進側の翼端付近における圧力変動によるものが支配的であると言われている。ここでブレードと渦の干渉位置を示した図4を見ると、前進側の翼端付近で2回の干渉A、Bが生じている。これらの

干渉が翼面上の圧力変動を引き起こし、図3の音圧波形における2つのピークA、Bを生み出したと考えられる。以上のことを踏まえ、ブレード幾何形状を変化させた時のBVI騒音への影響を調べた。

5. 結果及び考察

(1)上/下反角

図5に上/下反角及び矩形形状のブレードから得られる音圧の時刻歴波形を示す。それぞれの波形を比較すると、上反角の場合は矩形よりピークAが大きくなり、ピークBが小さくなっている。また下反角の場合はピークA、Bともに小さくなっている。以下ではこの原因について考察する。

まず3つの形状による渦強度の変化（図6）について比較したが、大きな差異は見られなかった。次にブレードと渦の干渉時の距離（図7）について比較したところ、下反角の場合は干渉A、Bにおける渦とブレードとの距離が、矩形の時よりも大きくなっており、これが原因で両方のピークが小さくなったと考えられる。上反角の場合は、矩形よりも渦とブレードの距離が干渉Aでは小さくなり、干渉Bでは大きくなっている。これが原因で、ピークAが大きくなりピークBが小さくなったといえる。

以上のことから、上/下反角を付けた時は干渉時のブレードと渦の距離が変わり、BVI騒音の強度に大きな影響を与えることがわかった。本解析結果では、下反角を付けることがBVI騒音低減に有効であるといえるが、飛行条件が変わるとブレードと翼端渦の位置関係が変化し、上述した結果が変わることも考えられるので、他の飛行条件についても解析を行い、BVI騒音の低減につながる飛行経路とブレード幾何形状の関係を調べる必要がある。

(2)前進/後退角

図8に前進/後退角及び矩形形状のブレードから得られる音圧の時刻歴波形を示す。それぞれの波形を比較すると、前進角の場合は矩形よりピークA、Bともに小さくなっている。後退角の場合はピークAが小さくなり、ピークBが大きくなっている。以下ではこの原因について考察する。

3つの形状について渦強度（図9）及び、ブレードと渦の距離（図10）を比較したところ大きな差異は見られなかった。次に翼端付近でのブレードと渦の交差角度（図11）を比較すると、前進角の場合は矩形形状の場合よりも、交差角度が垂直に近づいていることがわかる。一般に交差角度が垂直に近くなると干渉が弱まり、平行に近くなると干渉が強くなると言われているので、これが原因で矩形よりもピークA、Bが小さくなったと考えられる。一方、後退角の場合は、交差角度が矩形形状の場合より平行に近づいているので、強い干渉が生じていると考えられる。しかし音圧波形を見ると、Bのピークは矩形形状よりも大きくなっているが、Aの

ピークは矩形形状の場合より小さくなっている。この原因は、ブレード幾何形状の変化に伴う、音の指向性の変化であると考え、図12に示すように観測点を変えて計算を行った。まず矩形と後退角を比較すると、観測点①では後退角が矩形より必ずしも大きいとは言えない。しかし、観測点②では後退角のほうが矩形より大きくなっていることがわかる。つまり、後退角をつけると、矩形よりも右側に音が強く伝搬することが示された。一方、前進角の場合は、左側に強く伝搬すると予想されるが、形状が変化している部分、すなわち指向性に影響を及ぼす部分におけるブレードと渦の干渉が弱いため、指向性の影響が顕著には見られなかった。

以上のことから、前進/後退角を付けた時はブレードと渦の交差角度が変わり、BVI騒音の強度に大きな影響を及ぼすことがわかった。また、形状を変更した部分で強い干渉が生じる後退角の場合は、指向性にも大きな影響があることがわかった。本解析結果では、前進角を付けることがBVI騒音低減に有効であるといえるが、他の飛行条件でも同様な傾向が得られるか、検討を行っていく予定である。

(3) 1/3 テーパー

図13に1/3テーパー及び矩形形状のブレードから得られる音圧の時刻歴波形を示す。それぞれの波形を比較すると、1/3テーパーの場合は矩形よりピークA、Bともに小さくなる。以下ではこの原因について考察する。

渦強度の変化(図14)及びブレードと渦の干渉時の距離の変化(図15)を比較したが、矩形形状と1/3テーパーの間には大きな差異は見られなかった。一般的に翼端をテーパー形状にすると、翼端渦のコア径が矩形時よりも大きくなり⁽¹⁵⁾、BVI騒音低減に有効的であると言われている⁽¹⁶⁾。今回の解析ではWagnerが報告している風試結果⁽⁹⁾を参考にして、1/3テーパーのコア径を矩形より大きくして(矩形ではブレードコード長の0.3倍、1/3テーパーでは0.5倍)解析を行った。その結果、1/3テーパーでは音の大小に直接影響する有効迎角の変動が矩形よりも小さくなり(図16)、音圧ピークが小さくなったと考察できる。しかし、本解析システムでは、渦コア径は外部入力により決定されるため、精度良い解析を行うためには、正確なデータ取得が不可欠である。

6. 結論

ヘリコプタのトリム解析コード、補間コード、空力解析コード、音響解析コードを組み合わせた解析システムを用いて、ブレード幾何形状がBVI騒音に及ぼす影響を解析した結果、以下のような結論が得られた。

(1) 実験値との比較により、本解析システムがBVI騒音の定性的な傾向をよくとらえていることが示された。また定量的には、Aのピークは過小評価であるが、Bのピークは実験値と一致していることも示された。

- (2) 上反角を付けると、ブレードと渦の距離が干渉Bで大きくなるが、干渉Aでは小さくなるため、ピークBが小さくなりピークAが大きくなることが示された。また、下反角を付けるとブレードと渦の距離が離れ大きくなり、BVI騒音が低減することが示された。
- (3) 前進角を付けるとブレードと渦の干渉角度が垂直に近づき、BVI騒音が低減することが示された。また、後退角を付けるとブレードと渦の干渉角度が平行に近づき、BVI騒音が増加することも示された。
- (4) 後退角を付けると音の最も強く伝搬する方向(指向性)が、矩形形状より前進方向に対して右に移動することが示された。
- (5) 大きな渦コア径を用いたテーパー形状の計算では、コア径の大きさが音の大小に直接影響し、BVI騒音が低減することが示された。

参考文献

- (1) G. K. Yamauchi et al., "Flight Measurements of Blade-Vortex Interaction Noise Including Comparisons With Full-Scale Wind Tunnel Data", 49th Annual Forum of the AHS, May 1993.
- (2) F. H. Schmitz et al., "Model- to Full-Scale Comparisons of Helicopter Blade-Vortex Interaction Noise", 38th Annual Forum of the AHS, May 1982.
- (3) W. R. Spletstoesser et al., "Rotor Blade-Vortex Interaction Impulsive Noise Source Identification and Correlation with Rotor Wake Prediction", AIAA-87-2744, Oct, 1987.
- (4) Y. H. Yu et al., "Aerodynamics and Acoustics of Rotor Blade-Vortex Interactions", Journal of Aircraft, Vol.32, No.5, 1995.
- (5) H. Tadghighi et al., "Prediction of Blade-Vortex Interaction Noise Using Airloads Generated by a Finite-Difference Technique", Journal of the AHS, Oct, 1992.
- (6) 近藤夏樹 他, 「ヘリコプタのブレード/渦干渉騒音の解析」第45回応用力学連合講演会予稿集, 1月, 1996年
- (7) 青木誠 他, 「ヘリコプタのブレード/渦干渉騒音の計算」第27期日本航空宇宙学会年会予稿集, 4月, 1996年
- (8) R. M. Martin et al., "Wind-Tunnel Acoustic Results of Two Rotor Models With Several Designs", NASA-TM-87698, 1986.
- (9) Y. H. Yu et al., "Aerodynamic and Acoustic Test of a United Technologies Model Scale Rotor at DNW", 46th Annual Forum of the AHS, May 1990.
- (10) A. A. Hassan et al., "An Assessment of Full Potential and Euler Solutions for Self-generated Rotor Blade-Vortex interactions" 46th Annual Forum of the American Helicopter Society, May, 1990.
- (11) H. E. Jones et al., "Full Potential Modeling of Blade-Vortex Interaction" 12th European Rotorcraft Forum, 1986.
- (12) T. Aoyama et al., "Effect of Blade-Tip Planform on Shock Wave of Advancing Helicopter Blade", Journal of Aircraft, Vol.32, No.5, 1995, pp.955-961.
- (13) Y. Nakamura et al., "Rotational Noise of Helicopter Rotors", Vertica, Vol.3, No.3/4, 1979, pp.293-316.
- (14) W. R. Spletstoesser et al., "Helicopter Model Rotor Blade Vortex Interaction Impulsive Noise: Scalability and Parametric Variations", 10th European Rotorcraft Forum, 1984, Paper Nr.18.
- (15) W. J. Wagner "Comparative Measurements of the Unsteady Pressure and the Tip-Vortex Parameters on four Oscillating Wing Tip Models", 10th European Rotorcraft Forum, 1984.
- (16) D. A. Boxwell et al., "Full-Scale Measurements of Blade-Vortex Interaction Noise", Journal of the American Helicopter Society, Oct 1982.

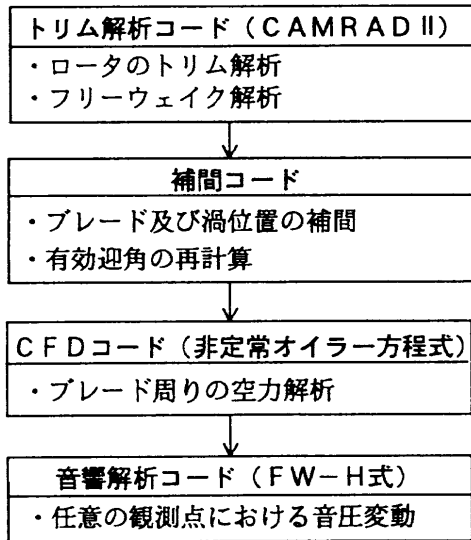


図1 BVI騒音の解析の流れ

表1 メインロータの諸元

AH-1/OLS モデルロータ	
ロータ半径	0.958 m
翼弦長	0.104 m
ソリディティ	0.056
ブレード枚数	2
翼型	modified BHT 540 (t/c = 9.71 %)
ヒンジ	シーソー
翼端形状	矩形

表2 解析条件

翼端マッハ数(ホバリング)	0.664
試験風速	72.0 kts
前進速度比	0.164
推力係数	0.0054
シャフト傾角	2.0 deg (後傾が正)

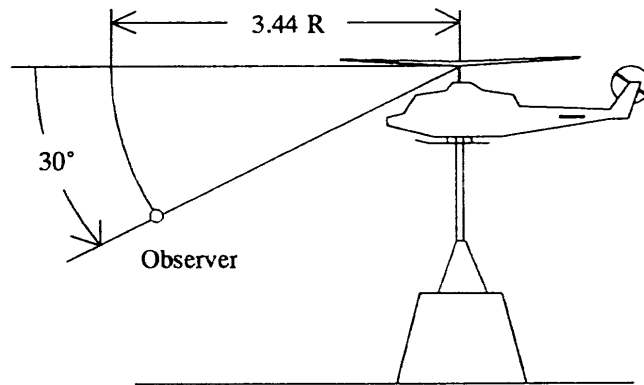


図2 観測点

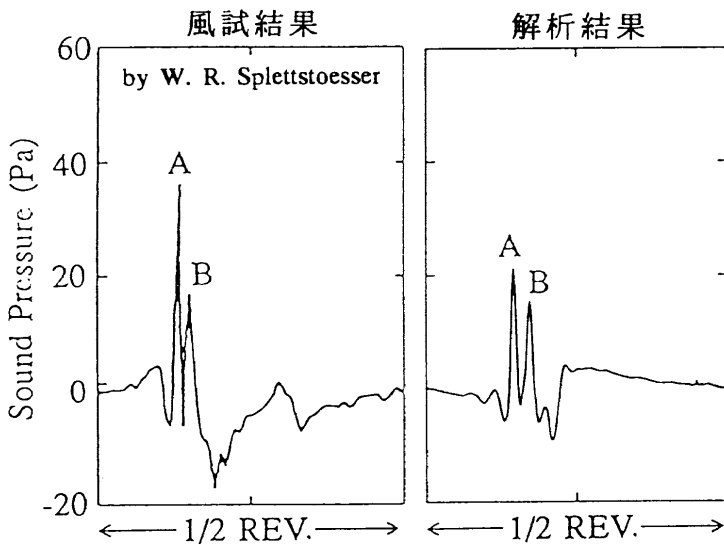
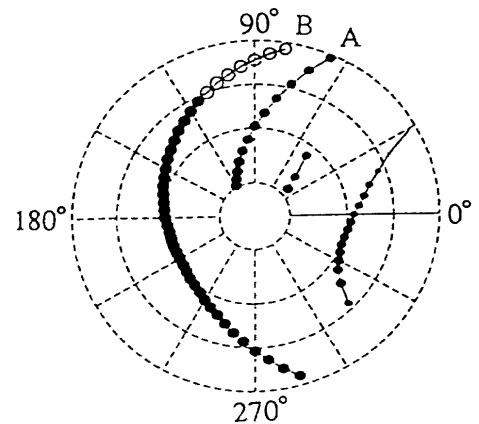


図3 BVI騒音の試験と解析の比較



○ : ロータ面の上方で干渉
● : ロータ面の下方で干渉

図4 ブレードと渦の干渉位置

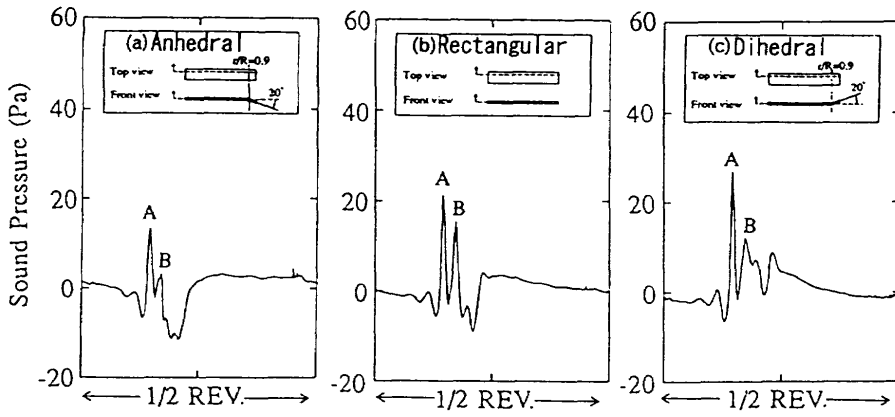


図5 音圧波形の比較（上／下反角，矩形）

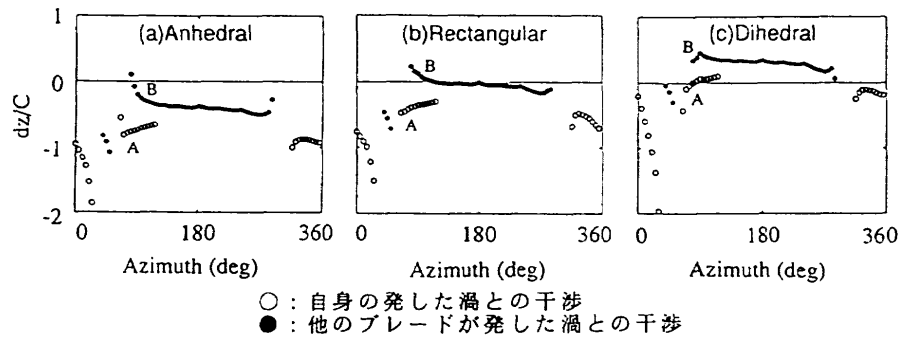


図7 干渉距離の比較（上／下反角，矩形）

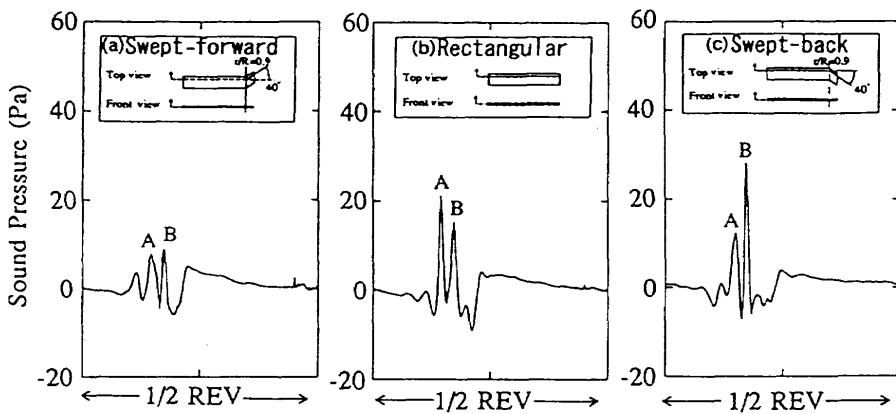


図8 音圧波形の比較（前進／後退角，矩形）

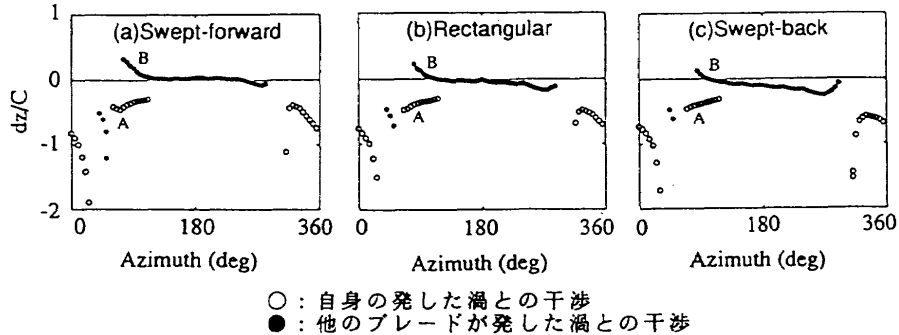


図10 干渉距離の比較（前進／後退角，矩形）

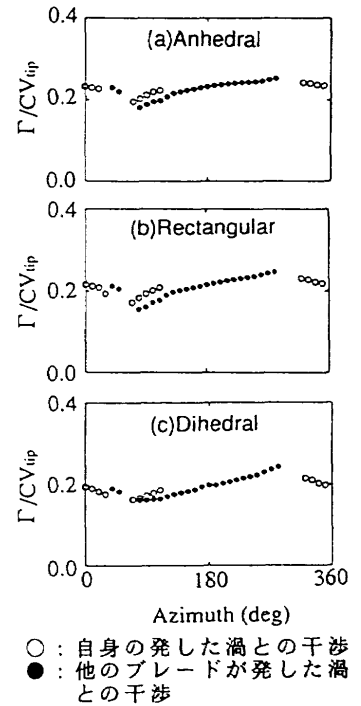


図6 渦強度の比較（上／下反角，矩形）

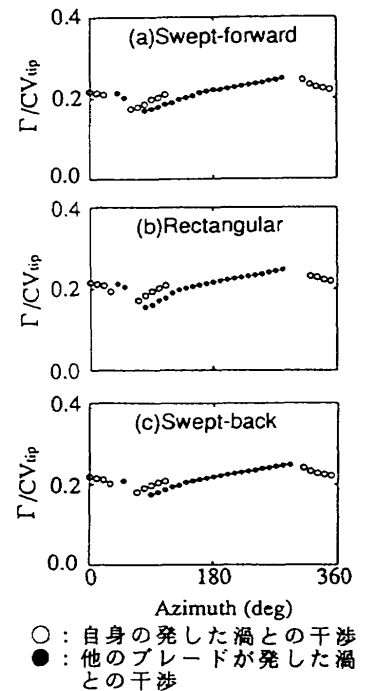


図9 渦強度の比較（前進／後退角，矩形）

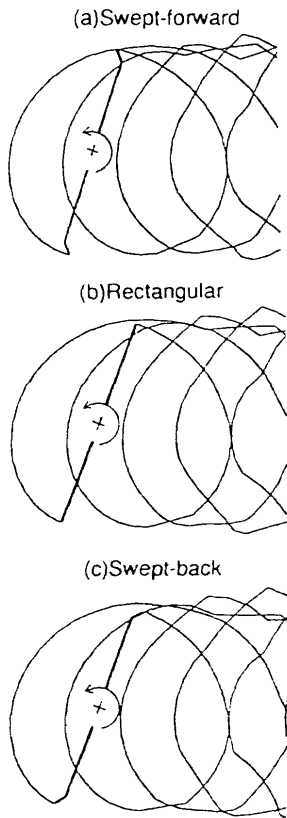


図 1 1 ブレードと渦の交差角度の比較

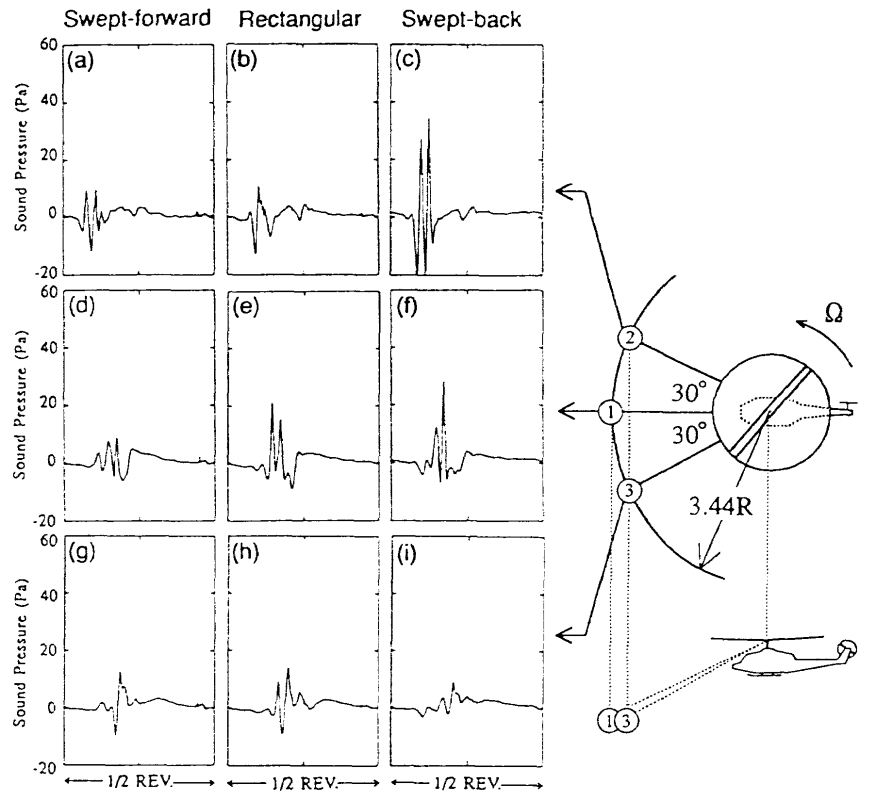


図 1 2 指向性の影響

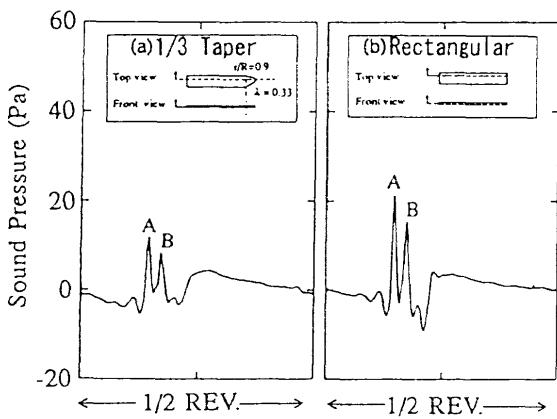


図 1 3 音圧波形の比較 (1/3テーパ, 矩形)

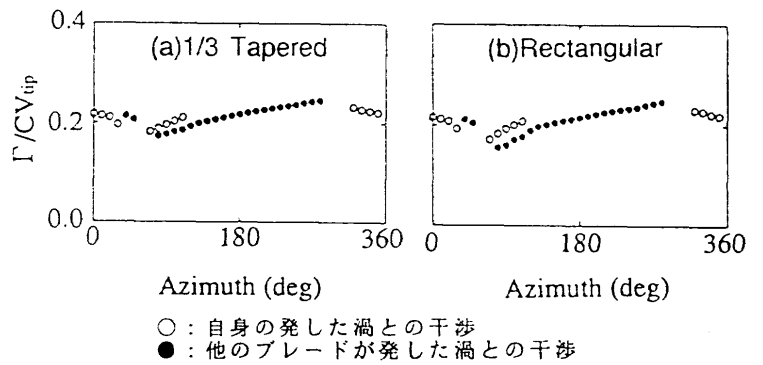


図 1 4 渦強度の比較 (1/3テーパ, 矩形)

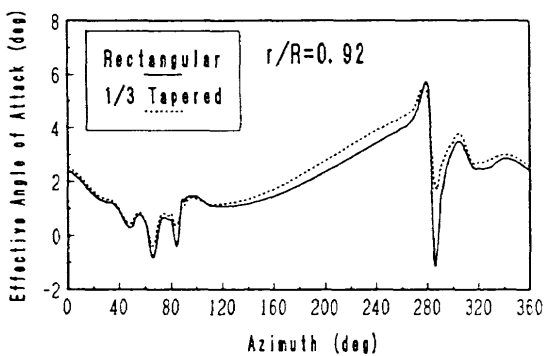


図 1 6 有効迎角の変動

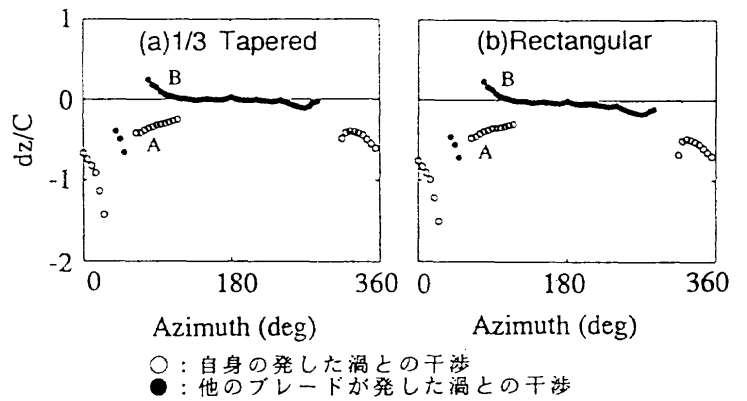


図 1 5 干渉距離の比較 (1/3テーパ, 矩形)

ヘリコプタ・ロータ空力騒音の数値解析

内山直樹*, 中尾雅弘*,
藤井孝藏**, 大村 稔***

Numerical Analysis of Aerodynamic Noise of Helicopter Rotor

Naoki Uchiyama, Masahiro Nakao,
Kozo Fujii, Minoru Ohmura

Abstract

An analysis system for predicting helicopter rotor aerodynamic noise is developed. The system consists of a Navier-Stokes solver for near rotor flowfield computation and an acoustic wave equation solver for computing sound pressure propagation. The Navier-Stokes solver is applied on a system of overset grids in order to allow realistic motion of the rotor blades. The acoustic equation used is the linear Ffowcs Williams and Hawkings equation in Farassat's 1A integral formulation.

For aerodynamic validation, results obtained from Caradonna's test rotor in hover and AH-1G OLS rotor in forward flight are presented. For aeroacoustic validation, sound pressure history obtained from 1/4 scale UH-1 rotor in hover is presented.

1. はじめに

ヘリコプタはその優れた機動性から、都市部での交通手段として今後更なる運用が期待されている。一方で、ヘリコプタ特有の騒音問題は大きな技術課題として存在している。地上の観測者が耳にするヘリコプタ機外騒音は、種々の要素音が合成されたものである。この中でもロータ・ブレード周りの非定常流に起因した空力騒音は、遠方観測者にとって特に顕著なものとなる。ロータ空力騒音はその発生機構の違いから、さらに数種に分類される。その内、特定の飛行条件下で主要な騒音源となる以下の二つが注目されている。

1) 高速衝撃音

(High-Speed Impulsive (HSI) Noise)

2) ブレード-渦干渉音

(Blade-Vortex Interaction (BVI) Noise)

1) はブレードの翼厚による流体の排除に起因した翼厚音を核とし、高速飛行に伴うブレード翼端近傍の流れ場の圧縮性効果により、さらに増大されるものである。この騒音は、ロータ回転面内にある観測点で特に顕著となり、鋭いV字状の負圧を有した音圧履歴を示す。ヘリコプタの高速化の達成にあたっては、高速衝撃音の低減対策が要求されている。

2) は先行するブレードからの翼端渦や後流が、後続のブレードと干渉する際に生じる圧力変動に起因した騒音である。ブレード-渦干渉はヘリコプタの緩降下時に特に顕著となり、この時にはBVI騒音が他を卓越する。離着陸機会の多い都市部でのヘリコプタの運用では、特に本騒音の対策が要求される。

本研究では特にBVI騒音の低減設計に寄与するロータ空力騒音解析システムの開発を最終的な目標とする。空力騒音の数値解析にあたっては、次の2つの手法が考えられる。

1) 観測点での音圧を、CFDにより流れ場の一環として直接計算する手法。

2) ロータ近傍流れ場のみをCFDで解析し、これを音場の波動方程式と組み合わせることにより、観測点での音圧を求める手法(図1参照)。

1) の手法は、音圧をNavier-StokesないしEuler方程式の解として求めようとするものであり、モデル化に仮定が少ない点で原理的に優れたものであるが、現時点では十分な計算格子がとれず、計算例も限られている。

2) の手法は音源となるロータ近傍流れ場とこれによる音圧の伝播を独立に扱う手法であるが、効率良く遠方観測点での音圧を推定できるため、現在広く用いられている手法である。本研究でもこの手法を採用し、音場の波動方程式には線形Ffowcs Williams and Hawkings(FW-H)方程式を用いる。

一方、上記のいずれの解析手法に於いても、ロータ周りの流れ場を精度良く推定できる空力コードの存在が前提となる。ロータ周りの流れ場は固定翼機のそれと比べ以下の複雑さを有する。

- ・ロータ後流等、流れ場の三次元性が強い。
- ・前進飛行時においては流れ場が本質的に非定常となる。さらに、ブレードは回転運動の他にサイクリック運動を伴う。

本研究ではこれらを考慮し、移動・複合格子を導入した三次元非定常ロータ空力解析コードを開発し、騒音解析に必要な空力データの取得にあたった。

本報では、このたび試作したロータ空力騒音解析システムについて、その構成要素である空力コード及び音場の波動方程式ソルバについて説明し、それぞれに行った検証計算結果を報告する。

* (株) 三菱重工業 名古屋航空宇宙システム製作所

** 宇宙科学研究所

*** (株) CTI

2. 解析手法

2.1 ロータ空力解析コード

計算格子系

計算格子系は、それぞれのブレードを含むC-H型境界適合格子（以下、ブレード格子）とこれを含む背景直交格子から構成される。図2(a),(b)に格子系の全体及びブレード近傍をそれぞれ示す。ブレード格子は、図3に示す回転、ピッチング及びフラッピング運動を行う。この際、ピッチ角 θ 及びフラッピング角 β はそれぞれアジマス回転角 ψ の一次の調和関数として次式で与えるものとする。

$$\theta = \theta_0 - \theta_1 \cos \psi - \theta_2 \sin \psi \quad (1a)$$

$$\beta = \beta_0 - \beta_1 \cos \psi - \beta_2 \sin \psi \quad (1b)$$

式(1a)に於いて、 θ_0 はコレクティブ・ピッチ、 θ_1 、 θ_2 はそれぞれテップ・プレーンの横及び縦のサイクリック・ピッチを表す。同様に式(1b)では、 β_0 はコーニング、 β_1 、 β_2 はそれぞれ縦及び横の傾きを表す。これらの係数には各飛行条件に応じた値が予め代入される。ブレード格子の各点の座標 (x, y, z) は、初期座標 (x_0, y_0, z_0) に対し、ピッチング、フラッピング及びアジマス回転に伴う以下の座標変換を順に施すことにより求められる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \\ z_\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \\ z_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{bmatrix} \quad (1c) \end{aligned}$$

ここで、 E はフラッピングのオフセット・ヒンジを表す。

基礎方程式

基礎方程式は計算時間の短縮を目的に、ブレード格子と背景直交格子で以下の様に別とする。

ブレード格子：粘性計算時にはレイノルズ平均薄層Navier-Stokes方程式を使用。乱流モデルにはBaldwin-Lomaxモデルを適用。非粘性計算時にはEuler方程式を使用。

背景直交格子：Euler方程式

また基礎方程式中には、ブレード格子と背景直交格子のそれぞれで求められる解が、必要個所において互いに置換されるよう、解強制置換項[1]が付加される。

以下に本計算で用いた基礎方程式の形を示す。

$$\partial_t \hat{Q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} + \partial_\zeta \hat{G} - \epsilon \text{Re}^{-1} \partial_\eta \hat{S} = \chi (\hat{Q}_I - \hat{Q}) \quad (2a)$$

式(2a)は $\epsilon=0,1$ でそれぞれEuler及び薄層Navier-Stokes方程式に切り替わる。 Re はレイノルズ数を表す。

\hat{Q} は保存変数、 $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ はそれぞれ一般曲線座標 (ξ, η, ζ, τ) 上での対流項流束を表す。また右辺は解強制置換項を表し、解の強制置換を必要とする座標値 (ξ, η, ζ, τ) においては係数 χ に十分大きな値が与えられ、保存変数 \hat{Q} が強制解 \hat{Q}_I に置換される。解の強制置換を必要としない大部分の座標値に対しては $\chi=0$ が代入される。

基礎方程式中で必要となるメトリクスの時間微分値は、次式に式(1a)~(1c)を代入して得られる解析表現により評価した。

$$\xi_t = -x_r \cdot \nabla \xi, \quad \eta_t = -x_r \cdot \nabla \eta, \quad \zeta_t = -x_r \cdot \nabla \zeta \quad (2b)$$

計算スキーム

対流項の評価に関しては、MUSCL法により高次精度化したRoeの風上スキームを適用した。

時間進行法は計算時間の短縮を目的に、ブレード格子と背景直交格子で以下の様に別とした。

ブレード格子：LU-ADI陰解法[2]

背景直交格子：Euler陽解法

この選択は以下の考察による。非定常計算では全格子系を通して共通の時間刻みを用いる必要がある。この時間刻みはブレード格子内の最小格子間隔を基準にしたCFL条件から決められるものであり、ブレード格子上ではCFL数を大きくとれる陰解法の適用が不可欠である。一方、背景直交格子においては格子間隔がブレード格子に対して非常に大きいため、同一の時間刻みを用いた場合のCFL数は非常に小さな値となり、計算量の少ない陽解法の適用が可能となる。

例として、ブレード・コード長を1とした粘性計算の場合、ブレード格子の最小間隔は $\Delta S_{\text{blade}} = 10^{-5} \sim 10^{-4}$ 程度である。これに対し背景直交格子の最小格子間隔は $\Delta S_{\text{back}} = 10^{-1}$ である。これよりブレード格子と背景直交格子でのCFL数の比は以下のオーダとなる。

$$\text{CFL}_{\text{back}} / \text{CFL}_{\text{blade}} = 10^{-4} \sim 10^{-3} \quad (3a)$$

ただし、

$$\text{CFL} = \lambda \Delta t / \Delta S \quad (3b)$$

(λ : 物理空間での特性速度, Δt : 時間刻み)

ブレード格子系ではLU-ADI陰解法を用い、

$\text{CFL}_{\text{blade}} \approx 10^1$ 程度とするため、背景格子でのCFL

数は以下のオーダーとなり、安定な陽解法が可能となる。

$$CFL_{back} = 10^{-3} \sim 10^{-2} \ll 1 \quad (3c)$$

計算領域及び境界条件

各計算領域の大きさを以下に記す。

ブレード格子：スパン方向に関し、翼根側は1コード長、翼端側は3コード長の領域を確保。放射方向は5コード長。

背景直交格子：ロータ中心から上下に3ロータ半径長、前後左右に4ロータ半径長とした。

上記寸法を図4に示す。

各計算領域に課す境界条件を以下に記す。

ブレード格子

翼面境界：粘着条件(Navier-Stokes) / すべり条件(Euler)

外部境界：背景格子から解強制置換法を用いて、各タイム・ステップに逐次補間。

背景直交格子

内部格子：ブレード格子に覆われる格子点について、ブレード格子から解強制置換法を用いて各タイム・ステップに逐次補間。

遠方境界：一様流で固定。

2. 2 音場波動方程式ソルバ

基礎方程式

音場の波動方程式には以下のFW-H方程式を用いる。同方程式は、Navier-Stokes方程式を移動境界面を考慮して、一定音速 a_0 を特性速度とした線形波動方程式に変形することにより導出される。

$$\left(\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p' = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_0 v_n |\nabla f| \delta(f) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[l_i |\nabla f| \delta(f) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[T_{ij} H(f) \right] \quad (4a)$$

ただし、

p' ：音圧。観測点圧力 p の一様流圧力 p_0 からの差。

ρ_0 ：一様流密度。

v_n ：ブレード局所移動速度の法線成分。

f ：ブレード面等高値。面上 $f=0$ ，外部 $f>0$ 。

l_i ：単位面積当たりの流体力。i方向成分。

$\delta(f)$ ：デルタ関数。

T_{ij} ：Lighthillの応力テンソル。

$H(f)$ ：ヘビサイド関数。

式(4a)右辺の3項はそれぞれ音響学的に単極子、双

極子及び四極子に分類され、物理的にはそれぞれ翼厚音、荷重音及び乱流や衝撃波等の流体の非線形現象に起因した音源項に対応する。

本研究は亜音速域でのBVI騒音の推定を目的とするため、寄与の小さい第3項を無視した。式(4a)は、右辺をCFDから求めた数値解で評価して既知のものとして扱うことにより、その解析解を積分型で記述することができる。本研究では以下に示すFarassatの1A型[3]と称する積分型を用いた。

$$p'(\mathbf{x}, t) = p'_T(\mathbf{x}, t) + p'_L(\mathbf{x}, t) \quad (4b)$$

$$4\pi p'_T(\mathbf{x}, t) = \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 v_n}{r(1-M_r)^2} \right]_{ret} ds + \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 v_n (rM_r \hat{r}_i + a_0 M_r - a_0 M^2)}{r^2(1-M_r)^3} \right]_{ret} ds \quad (4c)$$

$$4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{a_0} \int_{f=0} \left[\frac{l_i \hat{r}_i}{r(1-M_r)^2} \right]_{ret} ds + \int_{f=0} \left[\frac{l_r - l_i M_i}{r^2(1-M_r)^2} \right]_{ret} ds + \frac{1}{a_0} \int_{f=0} \left[\frac{l_r (rM_r \hat{r}_i + a_0 M_r - a_0 M^2)}{r^2(1-M_r)^3} \right]_{ret} ds \quad (4d)$$

ただし、

r ：音源から観測点までの距離。

\hat{r}_i ：音源から観測点方向に向かう単位ベクトル。

M ：ブレードの局所移動マッハ数。

M_i ：局所移動速度のマッハ数表示。i方向成分。

M_r ： $M_i \cdot \hat{r}_i$

l_r ： $l_i \cdot \hat{r}_i$

ds ：ブレード微小面積要素。

ret ：遅延時刻 τ による被積分項の評価。

式(4c), (4d)において、 p'_T , p'_L はそれぞれ翼厚音及び荷重音を示す。上式は、時刻 t 、観測者位置 \mathbf{x} に届く音圧がブレードの各微小面積要素 ds からそれぞれ異なる遅延時刻 τ に発せられた音圧の総和であることを示す。遅延時刻 τ は各微小面積要素 ds に対し、以下の方程式の解として求められる。

$$\tau - t + \frac{r}{a_0} = 0 \quad (4e)$$

計算方法

実際の計算においては、ブレード面上の要素分割をCFDの計算格子による分割と等しくとり、式(4c), (4d)を数値積分により計算した。このとき、各要素

に対する遅延時刻 τ は式(4c)をニュートン法を用いて解くことにより求めた。また式(4c), (4d)中に現れる時間微分値に関しては、遅延時刻 τ を挟むデータの差分により評価した。

3. 検証計算

3.1 ロータ空力解析

ロータ空力解析コードの検証を目的に以下に示す2ケースの計算を行った。

1) モデル・ロータを用いたホバ粘着計算

本ケースではCaradonna等[4]によるロータ空力試験と同条件の計算を行う。低アスペクト・モデル・ロータを用い、ブレード運動は回転のみとする。ロータ諸元、ホバリング条件、計算格子数を下表に示す。

ロータ諸元

ブレード枚数	2
ブレード形状	矩形
翼型	NACA0012
ねじり下げ	なし
アスペクト比	6

ホバリング条件

翼端マッハ数 M_{tip}	0.794
翼端レイノルズ数 Re	3.55×10^6
コレクティブ・ピッチ θ_0	12°
コーニング β_0	0°

計算格子数

	ξ	η	ζ
ブレード格子	81 (ブレード上 61)	21	45 (ブレード上 31)
背景直交格子	81	81	45

図5(a)~(d)に本計算結果によるコード上圧力分布をスパン位置 50, 68, 80, 89% について示す。同図中、翼根側前縁のサクシオン・ピークが過大評価され、翼端側では逆に過小評価される傾向にあるが、概ねにおいてCaradonnaの実験値とよい一致を示している。

本計算結果はロータ1回転後の解であり、所要CPU時間は富士通VXで約30時間である。ブレード格子の翼面近傍の最小格子幅は約 $\Delta S_{blade} = 6 \times 10^{-4}$ である。

2) AH-1G OLSロータ前進飛行時の非粘性計算

本ケースはAH-1Gヘリコプタの実機試験[5]に対応した条件での計算である。ブレードは9.71%の翼厚を有したOLS対称翼型である。本飛行条件はロータ迎角が正值をとり、BVIが特に顕著となる場合で

ある。また前進飛行であるため、ブレード運動は回転の他、ピッチング及びフラッピングを含む。下表にロータ諸元、前進飛行条件、計算格子数を示す。

ロータ諸元

ブレード枚数	2
ブレード形状	矩形
翼型	OLS対称翼
ねじり下げ	-10° 線形
アスペクト比	9.2

前進飛行条件

翼端マッハ数 M_{tip}	0.65				
前進比 μ	0.19				
ロータ迎角 α	4°				
コレクティブ・ピッチ θ_0	横サイクラフ・ピッチ θ_1	縦サイクラフ・ピッチ θ_2	コーニング β_0	縦の傾き β_1	横の傾き β_2
6°	-1.7°	5.5°	4°	0.15°	-2.1°

計算格子数

	ξ	η	ζ
ブレード格子	101 (ブレード上 81)	21	45 (ブレード上 27)
背景直交格子	81	81	45

図6(a)~(c)に本計算結果によるスパン位置91%での圧力分布をアジマス角 $\psi = 90^\circ, 270^\circ, 300^\circ$ について示す。いずれの位置においてもブレード前縁上面のサクシオン・ピークが過小評価される傾向にあるが、非定常性の強い本ケースにおいても概ねにおいて圧力分布が実験値と良い一致を示していることがわかる。

本計算結果はロータ1回転以降のデータを用いたものであり、ロータ1回転に要したCPU時間は約8.5時間である。ブレード格子の翼面近傍の最小格子幅は約 $\Delta S_{blade} = 5 \times 10^{-3}$ である。

3.1 空力騒音解析

音場波動方程式ソルバの検証を目的に1/4スケールUH-1ロータのホバリング状態での空力騒音の計算を行った。下表にロータ諸元を示す。

ロータ諸元

ブレード枚数	2
ブレード形状	矩形
翼型	NACA0012
ねじり下げ	-10.9° 線形
アスペクト比	13.7

また空力計算は下表のホバリング条件に対し行われた。

ホバリング条件

翼端マッハ数 M_{tip}	0.73
コレクティブ・ピッチ θ_0	15°
コーニング β_0	2.75°

空力騒音の観測点は、いずれもロータ中心より $1.64R$ (R :ロータ半径)の距離にある次の3点とした。

点A: ロータ回転面内, x 軸上
座標位置 $(1.64R, 0., 0.)$

点B: x - z 平面内。
座標位置
 $(1.64R \cos(30^\circ), 0., -1.64R \sin(30^\circ))$

点C: z 軸上。
座標位置 $(0., 0., -1.64R)$

図7に本計算により得られた音圧履歴を示す。点Aの音圧履歴より、ロータ回転面内で顕著となる翼厚音による負圧と、これに先だって観測される荷重音による正圧が捕らえられていることがわかる。また点Bでの結果より、BVI現象が反映される荷重音について、その指向性がロータ回転面の斜め下方に強いことが確認できる[6]。ロータ回転軸上にある点Cにおいては、ブレード運動の対称性から翼圧音が相殺され、荷重音についてはほぼ一定値になっていることが確認できる。

4. まとめ

ヘリコプタの空力騒音の低減を目的とした、ロータ空力騒音解析システムを試作した。本システムの構成要素である空力解析コードと音場波動方程式ソルバについて、それぞれ検証計算を行った。空力解析コードについては、サイクリック運動を含むロータの空力を良好な精度で推定できることが確認できた。一方、音場波動方程式ソルバについては、ホバリング時の空力騒音を計算することにより、翼厚音及び荷重音が定性的に捕らえられていることが確認できた。

参考文献

- [1] Fujii, K., "Unified Zonal Method on the Fortified Solution Algorithm," J. Comp. Phys., Vol. 118, 1995.
- [2] Obayashi, S., Matsushima, K., Fujii, K. and Kuwahara, K., "Improvements in Efficiency and Reliability for Navier-Stokes Computations Using the LU-ADI Factorization Algorithm," AIAA Paper 86-338, Jan., 1986.
- [3] Farassat, F. and Succi, G.P., "The Prediction of Helicopter Rotor Discrete Frequency Noise," Vertica, Vol.7, No.4, 1983.
- [4] Caradonna, F.X. and Tung, C., "Experimental and Analytical Studies of a Model Helicopter Rotor in Hover," NASA TM-81232, Sep., 1981.
- [5] Cross, J.L. and Watts, M.E., "Tip Aerodynamics and Acoustics Test," NASA RP-1179, Dec., 1988.
- [6] Boxwell, D.A. and Schmitz, F.H., "Full-Scale Measurements of Blade-Vortex Interaction Noise," J.AHS, Vol.27, No.4, Oct. 1982.

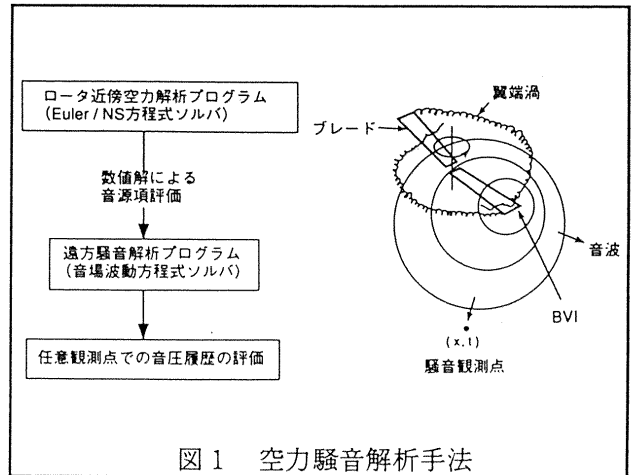


図1 空力騒音解析手法

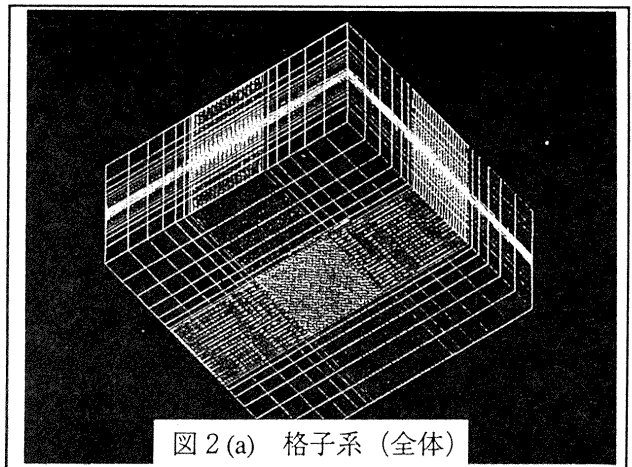


図2(a) 格子系 (全体)

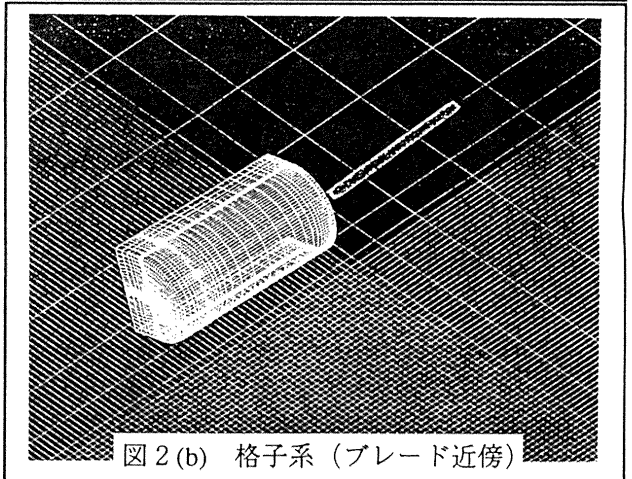


図2(b) 格子系 (ブレード近傍)

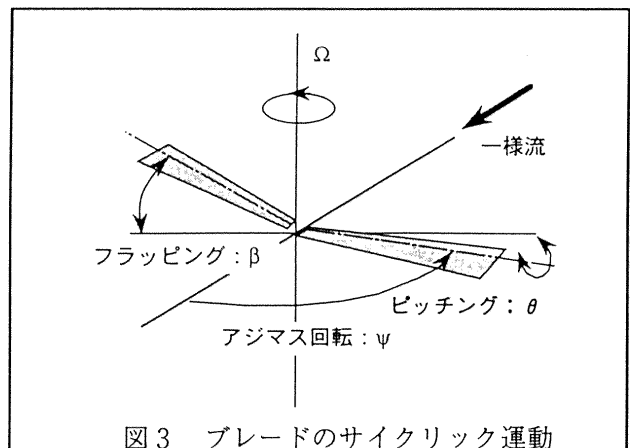
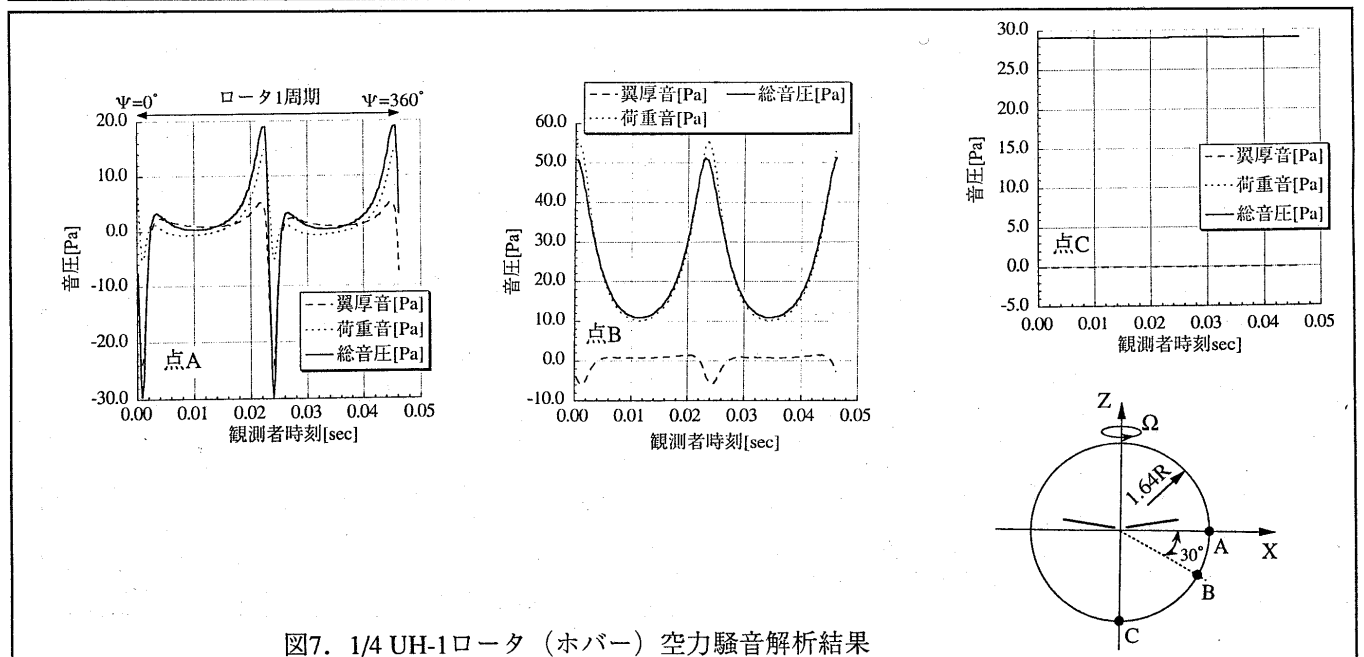
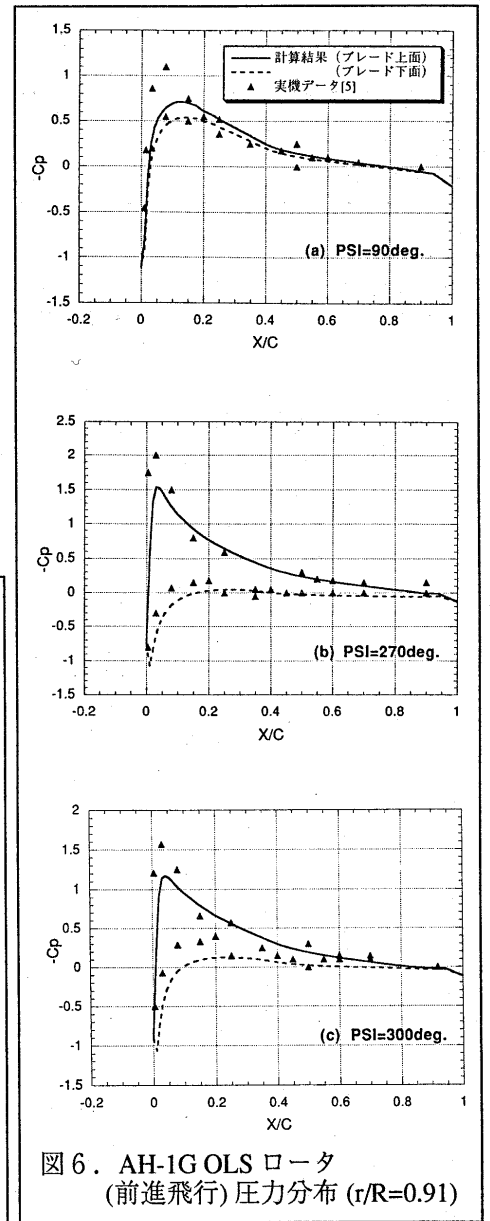
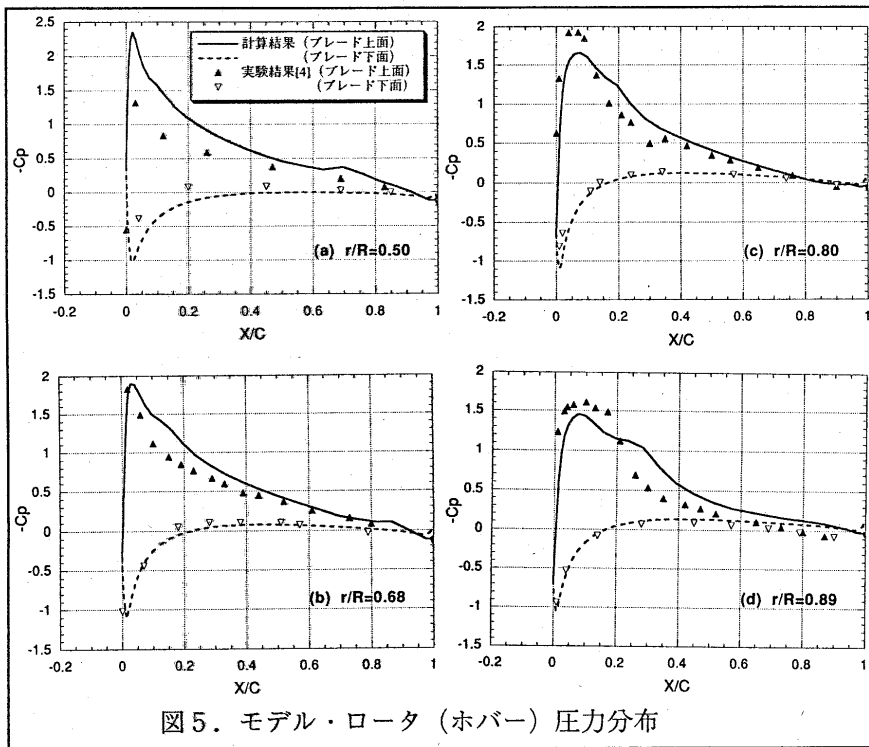
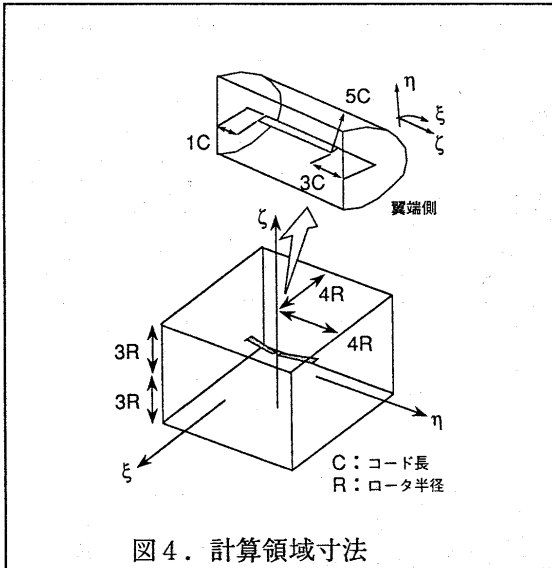


図3 ブレードのサイクリック運動



近傍場におけるソニックブームの数値推算

牧野 好和*, 杉浦 貴明*, 綿貫 忠晴*,
久保田 弘敏*, 青山 剛史†

Numerical Prediction of Sonic Boom Intensity in Near-field

by

Yoshikazu MAKINO*, Takaaki SUGIURA*, Tadaharu WATANUKI*,
Hiroto KUBOTA*, Takashi AOYAMA†

Abstract

The sonic boom intensity generated by the low-boom designed airplane is estimated numerically. The airplane is designed by using Darden's low-boom design method in order to generate a flat-top type pressure signature on the ground. The near-field pressure signatures of the airplane are calculated by using 3-dimensional Euler equations. The sufficient number of grid points to capture the shock waves in the near-field is checked. Then these calculated near-field pressure signatures are extrapolated to the ground by waveform parameter method. As a result of the calculation, it is shown that the airplane generates a flat-top type pressure signature and its sonic-boom intensity is under 1 psf on the ground.

1. はじめに

ソニックブームとは、超音速で飛行する航空機の各部から発生した衝撃波が大気中を伝播する間に整理統合され、地上においてN波(図1)として観測される現象であり、環境適合性の観点からその低減が次世代超音速輸送機(SST)開発の重要課題の一つとされている。地上で観測されるソニックブームの強度は一般にN波の立ち上がりの最大圧力上昇量(peak pressure level)と立ち上がり時間(rise time)、持続時間(duration time)などで評価される。1960年代に英仏共同で開発されたコンコルドのソニックブーム強度は、最大圧力上昇量でおよそ2~3[psf]であり、その音は近くで起こる落雷に相当すると言われている。

次世代SSTでは、ソニックブーム強度を1[psf]以下にすることが必要とされており、その実現を目指して様々な機体形状・設計法が提案されている。ブーム低減の基本的な考え方は、機首を鈍頭にして強い衝撃波を発生させることで後方の衝撃波の強度を弱め、衝撃波の整理統合を遅らせるというものであり、これにより地上で観測される圧力波形を一般のN波ではなく、低ブーム波形(図2)と呼ばれる波形にすることが可能となる。

本研究では、地上において台形型圧力波形(flat-top type pressure signature)と呼ばれる低ブーム波形を実現するように設計された機体形状に対して、計算格子の格子点数を変化させ、機体近傍場において圧力波形を正

確に推算するのに必要な格子点数を調べた上で、3次元Euler方程式を基礎方程式とする数値計算を用い、機体近傍でのソニックブームの圧力波形を求めた。また、その近傍場波形を入力データとして波形パラメータ法により地上でのソニックブーム強度を推算し、ソニックブーム低減の効果を調べた。

2. 計算対象

本研究で計算対象とした低ブーム機体形状は、Dardenの方法[2]を用いて低ブーム設計されたものである。図3にDardenの設計法の概念図を示す。この方法はWhithamのF関数法[3]を基礎としている。F関数法では、まず対象となる機体をそれと等価な断面面積分布を有する軸対称物体に変換する。等価軸対称物体はF関数と1対1に対応しており、幾何音響理論を用いてF関数から地上での圧力波形を求めることができる。

Dardenの方法は、F関数をいくつかのパラメータを用いて表し、目標とする圧力波形を実現する様にそれらのパラメータを決定することで、そのF関数に対応する等価軸対称物体を求める方法である。図3に示されるように、Dardenの方法ではF関数の先端部がスパイク状になっている。これは等価軸対称物体の先端が鈍頭であることを示しており、低ブーム波形を実現するF関数の特徴である。このスパイク状の突起の幅は y_f というパラメータで表されるが、この幅が狭いほど機首は鈍頭となり、ソニックブーム強度を低下させることができる。

*東京大学大学院

†航空宇宙技術研究所

しかし、当然機首の鈍頭度が増せば抵抗も増加することとなるため、Dardenの方法ではこの y_f の値を変化させることによって抵抗とソニックブーム強度とのトレードオフを行えるようにしている。今回計算に用いた低ブーム機体はソニックブーム強度の低減のみを考え、 y_f の値は非常に小さい0.00001として設計されている。

Dardenの方法により得られた等価軸対称物体に対応する3次元の機体形状は無限に存在するが、本計算では文献[4]の中で設計された機体を用いている。文献[4]の方法は、まず翼形状を低抗力設計により求め、低ブームとしての拘束はすべて胴体形状に負わせる設計法である。本研究で計算対象とした低ブーム機体形状(設計マッハ数1.4)を図4に示す。

3. 数値計算法

近傍場波形推算

まず機体近傍場におけるソニックブームの圧力波形を、機体周りの3次元CFD解析により求める。

計算格子は機体軸に垂直な断面内で2次元的に作成した平面格子を軸方向に重ね合わせるにより生成する。計算領域は主流方向に機体全長の12倍とし、機体軸に垂直な方向に機体全長の10倍($H/L=10.0$, H :機体軸からの距離, L :機体全長)までとれる様にする。また機体が左右対称であることから周方向は機体の半分を計算領域とし、境界においては対称条件を与える。外部境界は機体先端から発生する衝撃波の角度で広げてゆき、衝撃波を計算領域内に捕えられるようにする。内部境界(機体表面格子)も機体後方(機体全長分だけ後方)からは外部境界にあわせて広げてゆき、機体から離れても格子が粗くならないようにする。一例として、予備計算に用いたダブルデルタ翼機体形状周りに作成した計算格子を図5に示す。

基礎方程式は3次元圧縮性Euler方程式とし、数値解法としては空間差分にChakravarthy-Osherの高次風上TVD法、時間積分に対角ADI法を用いる[5]。

格子点数については、各方向に点数を変化させて計算結果の圧力波形が変わらなくなる点数を見つけるために予備計算を行った。予備計算の計算対象としては図6に示すダブルデルタ翼機体形状を用い、主流マッハ数は2.0とした。格子点数を機体軸と垂直方向(外方向)、周方向、機体軸方向にそれぞれ変化させて計算を行い、得られた近傍場圧力波形を比較した。一例として、最も格子点数の違いが圧力波形に与える影響が大きかった、外方向に格子点数を変化させた場合の $H/L=1.0$ での圧力波形を実験結果と比較したものを図7に示す。実験は東京大学大学院工学系研究科(航空宇宙工学専攻)の超音速風洞において、一様流マッハ数2.0で行われたものである。周方向に83点、軸方向に150点は固定とし、外方向への点数を120点、240点、360点と変化させると、120点ではすべての圧力のピークが鈍ってしまっているが、240点と360点では2つの波形はほとんど一致しており実験値と

も良い一致を示している。よって、外方向への格子点数は240点とした。周方向、軸方向に関しても同様の比較を行いそれぞれ102点、156点とした。

ソニックブーム強度推算

CFD解析によって得られた近傍場圧力波形を波形パラメータ法を用いて地上まで外挿し、その圧力波形から地上でのソニックブーム強度を推算する。

波形パラメータ法は、機体近傍での圧力波形をいくつかのパラメータで数値的に表し、幾何音響理論に等エン트로ピ仮定による波形の歪みの効果を取り入れた方法で地上まで外挿するものである。数学的にはWhithamのF関数法と同等の方法だが、等面積則を用いた衝撃波の位置決めが不要である点でF関数法よりも自動計算に向いている。

波形パラメータ法では、飛行条件や大気の状態などの条件を与える必要がある。本研究では飛行マッハ数を1.4、飛行高度を42,000[feet]とし、大気はU.S.標準大気を仮定し、風は考えないこととする。

4. 計算結果及び考察

計算結果の一例として、図8に迎角 3.0° で計算された機体まわりの等圧力線図を示す。機体側方の等圧力線図を見ると、鈍頭の機体先端から強い衝撃波が発生しており、その後方では翼の後退角変化部から衝撃波が発生しているのが分かるが、これらに挟まれた部分では目立った圧力の変化は見られない。そして、さらに後方でも急激な圧力変化が見られるが、これは翼後縁から発生する膨張波によるものである。迎角 3° で計算した場合の機体鉛直下方の近傍場ソニックブーム波形が、機体から離れるに従って変化してゆく様子を図9に示す。機体に近い $H/L=1.0$ や $H/L=2.0$ の波形の前部には低ブーム波形の特徴であるスパイク状の突起が見られる。この突起は鈍頭先端から生じた衝撃波によるものであり、その後方の2つのピークは翼の始まりや後退角変化部から発生した衝撃波による圧力上昇である。距離が離れるにつれてこれら3つの圧力のピークは低くなって滑らかな波形を形成し、 $H/L=8.0$ ではほぼ台形型の圧力波形となっている。後述するように、地上での波形を求めるために $H/L=6.0$ の位置で得られた近傍場波形を波形パラメータ法の入力データとして用いるが、図10には迎角を 1.0° から 4.0° まで変化させた場合の $H/L=6.0$ の位置での圧力波形の変化の様子を示す。前方の先端衝撃波によるピークにはあまり変化は見られないが、翼部分からの衝撃波による圧力のピークは迎角の上昇とともに高くなってゆく。これは揚力により機体下方に発せられる衝撃波の強度が強められた結果である。この図では、迎角が 2° 及び 3° においては波形の前方部($x/L=0.0\sim 0.8$)がほぼ平らで台形型の低ブーム波形が形成されているのが分かる。

次に地上での圧力波形の推算であるが、波形パラメータ法は等価軸対称物体に修正線形理論を適用した方法な

ので、入力として与える近傍場圧力波形は非線形性や3次元性を含んだデータであってはならない。図11に、CFD解析によって得られた様々な距離での近傍場波形を波形パラメータ法の入力データとして与えた場合の、地上での圧力波形の違いを示す。この図によれば、 $H/L=1.0$ と $H/L=2.0$ での波形を入力データとして与えた場合は地上での圧力波形に多少の違いが見られるが、 $H/L=5.0$ と $H/L=6.0$ とでは地上の圧力波形はほぼ等しく、 $H/L=2.0$ での波形を与えた場合とあまり変わらない。よって、本計算では $H/L=6.0$ での近傍場波形を入力データとして用いることにした。迎角を変化させた場合の地上での圧力波形を設計圧力波形とともに図12に示す。実線で示された設計圧力波形と計算で得られた波形とを比べると、最前部の圧力上昇量は $0.8\sim 0.9[\text{psf}]$ で設計値($1[\text{psf}]$ 以下)とはほぼ一致している。また、地上でも近傍場と同じように迎角が 2° 及び 3° においては、波形の前方部 ($\text{time}=0\sim 200[\text{ms}]$)は多少の凸凹はあるものの台形型の波形を形成している。ただし、図13に示すCFD解析により得られた揚力係数のグラフで分かるように、巡航時に必要とされている $C_L=0.1$ を達成するためには迎角を 4° 以上にする必要があり、そのときの地上の圧力波形は翼部分の圧力のピークが上昇し、最大圧力上昇量は $1.8[\text{psf}]$ 程度と高くなっている。

表1に今回の計算に用いた低ブーム機体とコンコルドの諸量を比較して示す。低ブーム機体は全長で約1.5倍、総重量で約1.7倍コンコルドより大きくなっているが、ソニックブーム強度は半分以下の $1[\text{psf}]$ 以下となった。ただし、今回の低ブーム機体は飛行マッハ数1.4で設計されているため飛行マッハ数2.02のコンコルドと直接比較するのは難しいが、ソニックブーム強度は飛行マッハ数よりも飛行高度に大きく依存するといわれており、飛行高度がコンコルドの約 $2/3$ である低ブーム機体でソニックブーム強度を $1[\text{psf}]$ 以下にすることが出来たことで、飛行マッハ数を上げた場合の低ブーム設計の効果も期待出来るであろう。

5. まとめ

3次元 Euler 方程式を解くことにより、低ブーム機体の近傍場における圧力波形を調べた。その結果、近傍場においては低ブーム圧力波形の特徴である先端部の高い圧力のピークが得られ、 $H/L=8.0$ 程度の距離ではほぼ台形型の圧力波形が得られた。また近傍場で得られた波形を入力波形として、波形パラメータ法を用いて地上での圧力波形を推算した結果、迎角 3° までは概ね台形型の低ブーム波形となり、ソニックブーム強度を $1[\text{psf}]$ にすることが出来た。

謝辞

なお、本研究にあたって、川崎重工業株式会社のご厚意により、低ブーム機体形状を提供していただきました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Huglund,G.T.,'HSCT Designs for Reduced Sonic Boom', AIAA paper 91-3103,1991.
- [2] Darden,C.M.,'Sonic-Boom Minimization with Nose-Bluntness Relaxation',NASA TP-1348,1979.
- [3] Whitham,G.B.,'The Flow Pattern of a Supersonic Projectile',Communication on Pure and Applied Mathematics,Vol.5,No.3,pp.301-348,1952.
- [4] Yoshida,K.,'Experimental and Numerical Study for Aerodynamics of Low Boom Configuration.',AIAA paper 94-0052,1994.
- [5] Aoyama,T.,Kawachi,K.,and Saito,S.,'Unsteady Calculation for Flowfield of Helicopter Rotor with Various Tip Shape',18th European Rotorcraft Forum paper B03,1992.

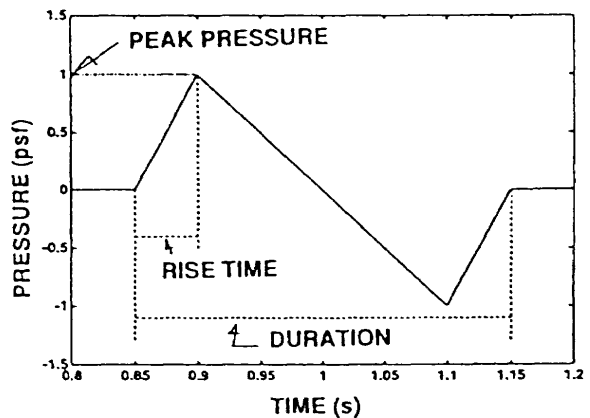


図1.N型圧力波形

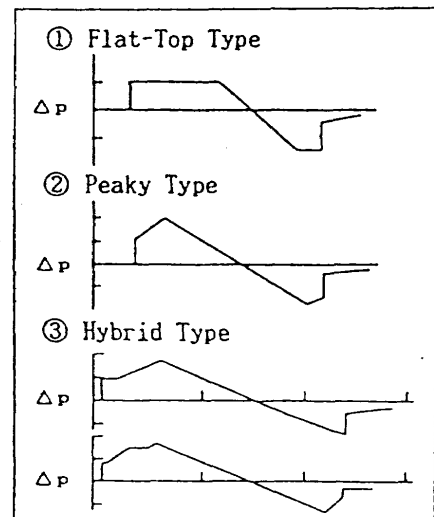


図2.低ブーム圧力波形 [1]

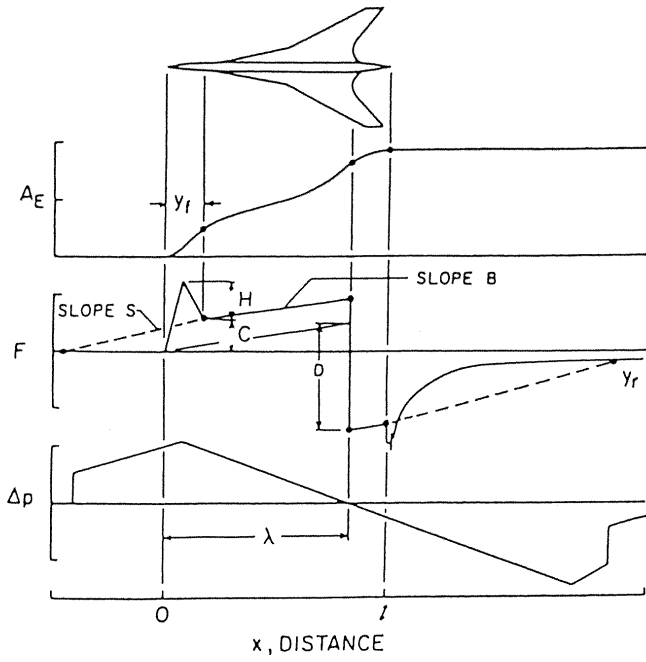


図 3. Darden の低ブーム設計法 [2]

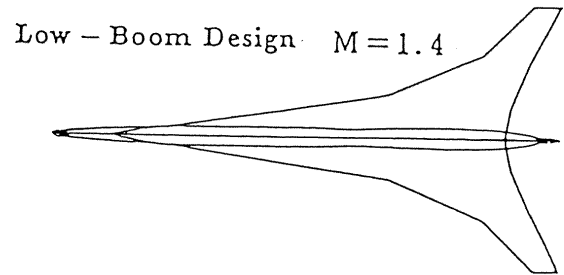


図 4. 低ブーム機体形状 [4]

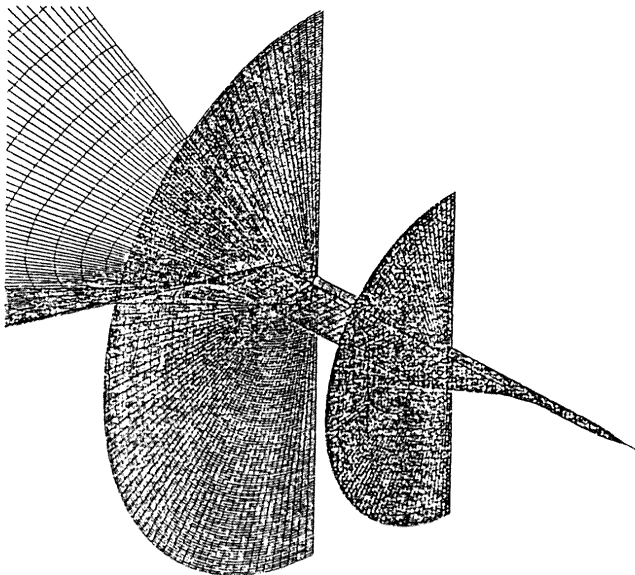


図 5. 計算格子

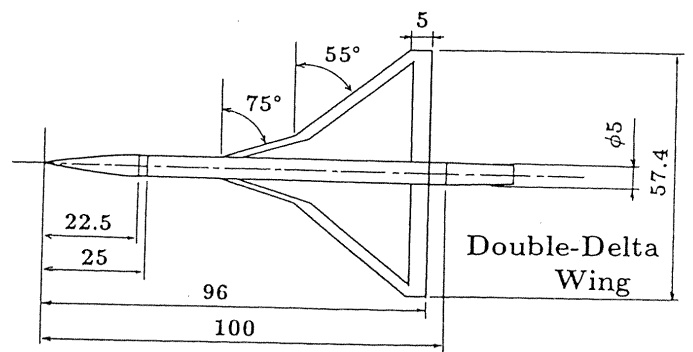


図 6. ダブルデルタ翼模型

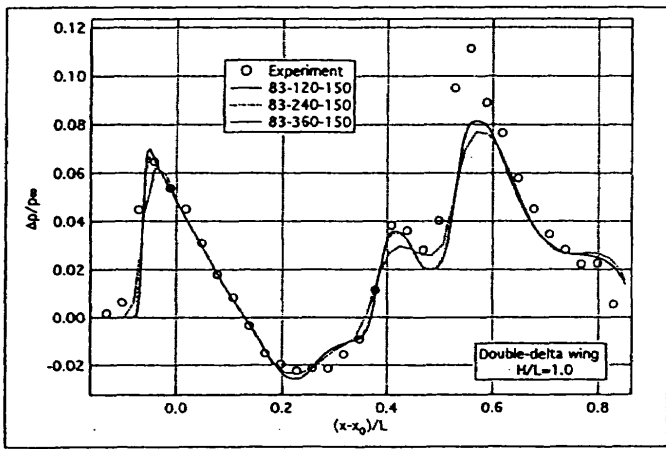


図 7. 近傍場波形に与える格子点数の影響

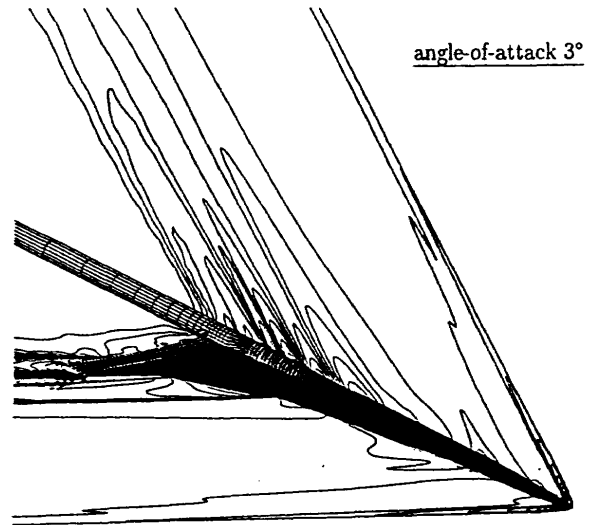


図 8. 等圧力線図

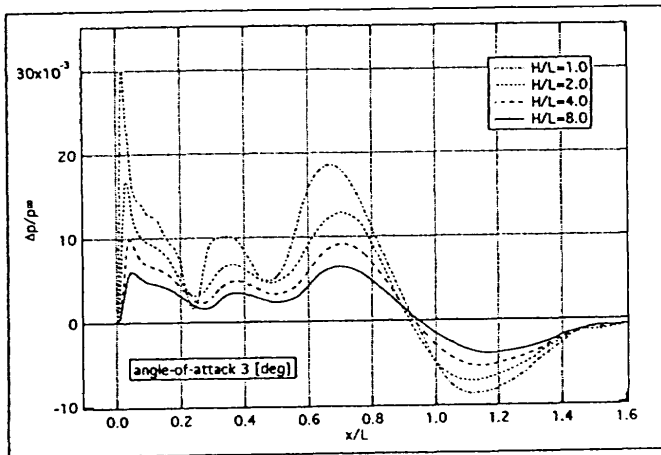


図 9. 近傍場圧力波形

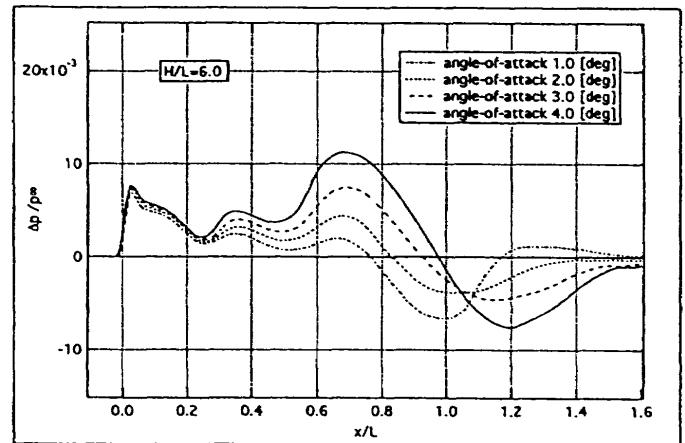
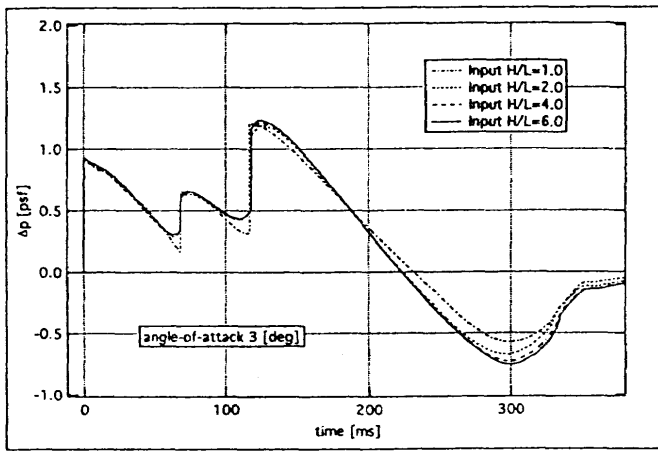


図 10. 近傍場波形に与える迎角の影響



M=1.4, H=42,000feet

図 11. 地上の波形に与える入力波形の影響

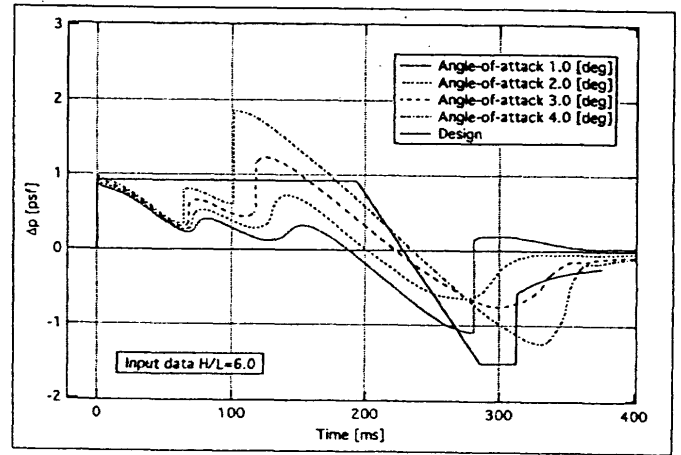


図 12. 地上での圧力波形

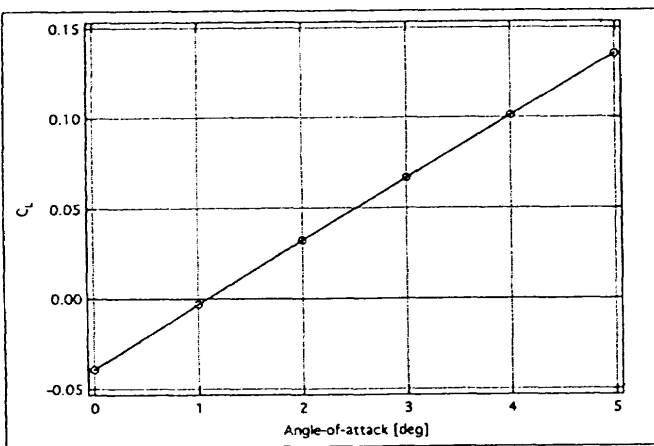


図 13. 揚力係数

コンコルド		低ブーム機体
62 m	全長	91 m
25.6 m	全幅	48.9 m
185,000 kg	総重量	318,000 kg
M=2.02	巡航速度	M=1.4
18 km	飛行高度	12.8 km
360 m ²	主翼面積	1100 m ²
1.82	アスペクト比	2.19
2 ~ 3 psf	ブーム強度	1 psf

表 1. コンコルドとの諸量の比較

3次元境界要素法による地面上を移動する物体周りの流れ解析

菊地勝浩* 元栄文則** 柳澤三憲***

Analysis of Flow-field around a Moving Body on the Ground using the Boundary Element Method

by

Katsuhiko KIKUCHI, Fuminori MOTOE, Mitsunori YANAGIZAWA
Science University of Tokyo

ABSTRACT

Analysis of pressure change generated by an object passing over the ground was made using the three-dimensional boundary element method. At first, a simple fluid dynamic model is conceived to understand the characteristics of the pressure change. Numerical results are compared with the results of simulation using the simple dynamic model to confirm the validity of the numerical simulation. At the next stage with an aim of grasping the influence of the physiognomy exercised on the pressure change at the passage of the body, calculation was made with respect to four types of physiognomy, i.e. level land, fill-up ground, half-fill-up ground, and cutting. Thus qualitative characteristics have been obtained.

1. はじめに

最近の地上交通機関の速度向上にともない、これまであまり問題とならなかった空力的な現象が、いろいろ研究されている。その一つに、列車が高速で明かり区間（トンネル以外の区間）を通過する時に生じる、圧力変動が注目されている^[1]。物体が移動するとその周りには圧力場が発生するが、この圧力場は物体とともに移動するため、地上で観測していると圧力変動として観測される（図1）。この圧力変動は、付近の家屋の建具を振動させるなどの環境問題を引き起こしつつある。

地面上を物体が移動すると、物体周りに生じる流れは地面の影響を受ける。航空機の場合この現象は、地面効果としてよく知られており、これまでも広く研究されている。また、自動車の分野でも、粘性抵抗低減の観点から地面効果を入れた研究が行われている。しかし、物体通過時の圧力変動の解析例はほとんど見あたらない。そこで、本報告では、地面上を通過する物体によって生じる圧力変動を、3次元境界要素法を用いて解析を行った。数値計算を行うに先立って、数値計算結果の妥当性を判断するため、流体力学モデルの定式化を行い、これと数値計算結果との比較を行った。このときの地面は、無限に広がる平面を仮定した。

* 東京理科大学大学院

** 東京理科大学元卒研究生

*** 東京理科大学理学部

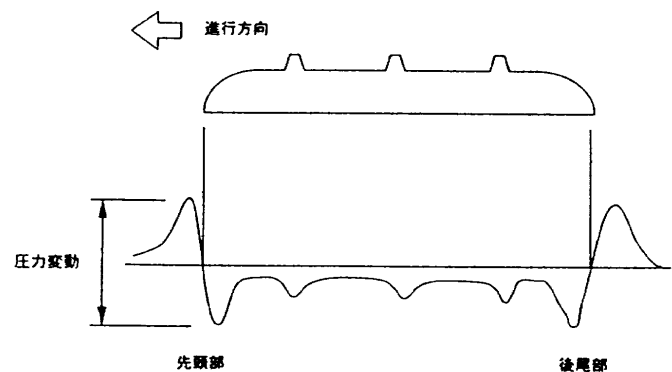
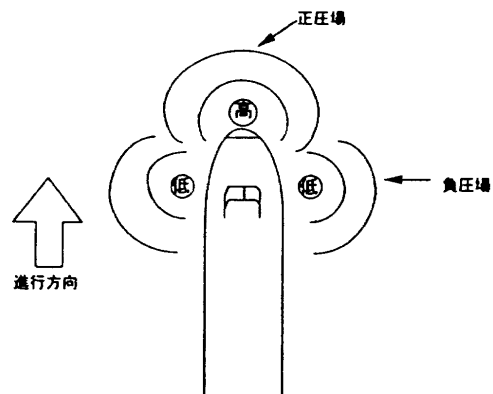


図1 移動物体周りの圧力分布と物体通過時の圧力変動

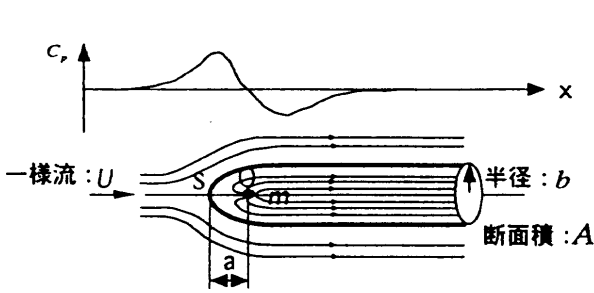


図2 一様流中にあるわき出しによる流体力学モデル

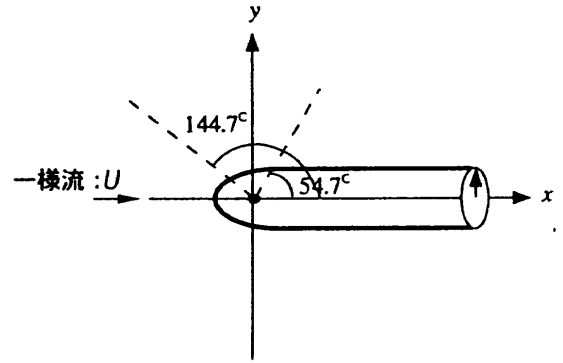


図4 圧力変動波形が最大となる位置

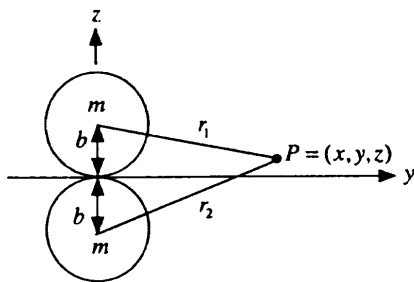


図3 鏡像法による地面効果の表現

航空機の地面効果を解析する場合、地面とはおもに滑走路などの平面に近い形状の地形であるが、地上を移動する交通手段の場合、平面地形だけではなく、盛土、切土、高架橋など様々な地形上を移動することになる。この地形によって、物体周りの圧力場も影響を受けるであろうことは、容易に予想される。そこで、地面上を移動する物体周りの流れに対する、地形の影響に関して計算を行い、その定性的特性を明らかにした。

2. 物体通過時の圧力変動の流体力学モデル

初めに数値計算の妥当性を確認するため、流体力学モデルを考え、数値計算結果とこの流体力学モデルとの比較を行う。そこで、ここではまず流体力学モデルの定式化を行う。細長い物体が移動するときの流れは、流体力学的には図2に示すように一様流中にある一点のわき出しによって近似的に表現できる。また、地面の効果を取り入れるには、鏡像法を用いればよい(図3)。すなわち、原点Oから高さ b 、 $-b$ の位置にわき出しがあり、一様流は x 軸に平行で速度が U であるとすると、流れを表す速度ポテ

ンシャル Φ は

$$\Phi = Ux - \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} \quad (1)$$

によって表される[2]。第1項が一様流を、第2項がわき出し、第3項がわき出しの鏡像である。ここで、 m : わき出しの強さ、 r_1, r_2 : それぞれのわき出しが置かれている位置と流れを求めると点Pを結んだ距離である。流速 $u = (u, v, w)$ は速度ポテンシャルを空間に関して微分することで得られる。また、圧力係数 C_p はBernoulliの式から求められる。ただし、 b は移動物体の最大断面積 A より $b = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ とする。また、わき出しの強さ m と、わき出し点とよどみ点の距離 a はそれぞれ、

$$m = \frac{b^2 U}{4}, \quad a = \frac{b}{2} \quad (2)$$

となる。

物体から横方向に y だけ離れた位置での、 x 方向の圧力分布を考える。この圧力分布は、移動する物体から見ると一様流中を移動する物体周りに出来る圧力分布であるが、地上から見ると静止流体中を物体が移動するときを観測される圧力変動となる。地面上 ($z=0$) でこの圧力変動波形を考えると

$$C_p = -\frac{4mx}{U} \frac{1}{r_1^3} \quad (3)$$

となる。この式より $x < 0$ の領域で正圧が、 $x > 0$ の領域で負圧が生じ、 $x=0$ の位置で圧力が0となることが分かる。圧力変動波形の最大振幅の発生する位置は、

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{y^2 + b^2}}{x} = \pm \sqrt{2} \quad (4)$$

となり、図4の $\theta = 54.7^\circ$ の線上に負圧のピークが、また $\theta = 144.7^\circ$ の線上に正圧のピークが来ることがわかる。すなわち、圧力変動の正圧と負圧のピーク

の間隔は、物体から離れるにつれて広がっていく。圧力変動の最大値は最大振幅の発生する位置の座標を式(3)に代入して、

$$(C_p)_{\max} = \mp \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{b^2}{y^2 + b^2} \quad (5)$$

となる。通常考える範囲内では $(b/y)^2 \ll 1$ なので、圧力変動の最大値は物体からの距離の2乗に反比例して小さくなる。

圧力は圧力係数に動圧をかけて、

$$p = \mp \frac{\rho A U^2 \cos \theta}{2\pi r_1^2} \quad (6)$$

となる。移動物体によって生じる圧力は、一様流中のわき出しで近似出来る場合、移動する物体の最大断面積に比例し、物体の移動速度の2乗に比例することが分かる。逆に言うと、地面上で観測される圧力は物体の移動速度が決まると、移動する物体の最大断面積だけで決定されることになる。

3. 数値計算法

実際に地面上を移動する細長い物体周りの流れは、図5のように大きく3つに分けられる。すなわち、先頭部付近のわき出し流、中間部の境界層流、後尾部の後流である。物体通過時の圧力変動は、おもに先頭部と後尾部で観測される。しかし、後尾部の圧力変動は、はく離の影響を受けて先頭部でのそれより小さな値となる。したがって、物体通過時の圧力変動の最大値は、先頭部が通過するとき観測される。この部分の流れは、ポテンシャル流として近似出来る。2ではこの部分の流れを一様流中にあるわき出しで近似した。しかし、わき出しだけでは実際の物体の形状の効果は取り入れることが難しい。そこで、この部分の流れがポテンシャル流として扱えること、さらに物体の形状を忠実に表現することができること等を考慮に入れ、ここでは3次元境界要素法を用いて解析を行うことにした。

流れを、非圧縮、非粘性、非回転とする。流れは非圧縮であるから、連続の式は擾乱速度ポテンシャル ϕ に対して Laplace の方程式となる。

$$\Delta \phi = 0 \quad (7)$$

式(7)に次のGreen関数を適用する。

$$\Delta G = -\delta(x-x_1, y-y_1, z-z_1) \quad (8)$$

ここで、 δ は Dirac の δ 関数である。式(7)と式(8)を組み合わせ、さらに Green の公式を用い若干の変形を行った後、式(8)の解である $G = \frac{1}{4\pi r}$

を代入する。擾乱速度ポテンシャル ϕ に対する内部積分方程式は

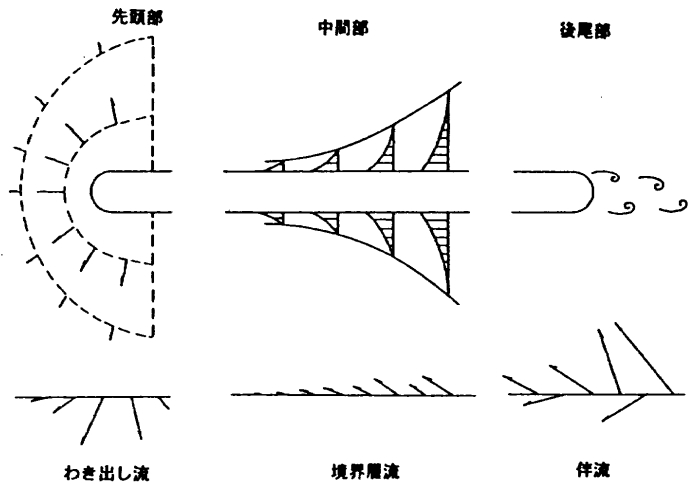


図5 細長い移動物体周りの流れの様子

$$\begin{aligned} \phi(P) - \frac{1}{2\pi} \int_{S_b} \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n(Q)} \frac{1}{r(P,Q)} dS \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_b} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n(Q)} \frac{1}{r(P,Q)} dS \end{aligned} \quad (9)$$

$$r(P,Q) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

で与えられる。ここで、 r は選点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と積分点 $Q(x, y, z)$ との間の距離、 S_b は物体表面を表す。

境界条件として次式を課す。

B.C.1: 流れは物体表面 S_b に沿って流れる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{U \cdot n}{U} \quad (10)$$

B.C.2: 流れは無遠点で一様流と等しくなる。

$$\phi = 0 \quad (11)$$

ここで、 U は一様流の速度ベクトル、 n は物体表面に立てた外向きの法線ベクトルである。

擾乱速度ポテンシャル ϕ を未知数としてこの積分方程式を解けば流れ場が決定される。ここでは、Morinoの方法^[3]にしたがい、物体表面を四角形要素で分割し、各要素上の変数 ϕ 、 n は要素の中心における値で代表させ、要素内での分布は一定と仮定し、離散化を行う。この方法により物体表面 S_b 上の擾乱速度ポテンシャル ϕ は要素の分割数 N に分割されて、次の連立一次方程式が得られる。

$$[\delta_{nk} - C_{nk}] \{\phi_k\} = -[B_{nk}] \left\{ -\frac{U \cdot n_k}{U} \right\} \quad (12)$$

ここで、 δ_{nk} は Kronecker のデルタである。空力的影響係数 C_{nk} と B_{nk} は Morino によって解析的に求められている^[3]。

こうして得られた擾乱速度ポテンシャル ϕ を空間に関して微分し、速度を求め、さらに Bernoulli の定理から圧力を計算する。物体上での微分は柳澤の方法^[4]を用い、空間上での微分は Suciu の方法^[5]で行う。

4. 計算結果

4.1 流体力学モデルとの比較

はじめに数値計算の妥当性を確認するため、流体力学モデルとの比較を行う。比較は図6に示す3種類のモデルに関して行った。無次元化は次のようにしている。

$$\text{時間} : \frac{t}{(L/U)}$$

$$\text{圧力} : C_p = \frac{p - p_{atm}}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

ここで、 t : 時間、 L : 代表的長さ1m (通常、環境問題では代表的長さとして地上構造物に関する量をとるが、ここでは、地上側に適当な代表的長さが無いので L として1mとした)、 U : 一様流速、 C_p : 圧力係数、 p : 圧力、 p_{atm} : 大気圧、 ρ : 密度である。

モデルの全長は400とした。流体力学モデルとの比較を行うとき、数値計算での地面の効果は鏡像法を用いることで取り入れた。各モデルの最大断面積 A 、およびこれから計算される半径 b 、よどみ点位置 a 、わき出し強さ m は表1のとおりである。

表1 流体力学モデルの各値

	A	b	a	m
Model 1	13.2	2.05	1.03	1.05
Model 2	11.5	1.91	0.955	0.912
Model 3	10.9	1.86	0.930	0.865

図7に圧力変動の最大値の距離減衰を示す。Model 2とModel 3については流体力学モデルの結果と数値計算の結果が良く一致している。Model 1に関しては、物体から離れている部分では両者はよく一致しているが、物体に近づくと数値計算結果が流体力学モデルの値より小さくなっている。これは、Model 1の先頭部形状がほかのModel 2やModel 3と比較して、横方向からの絞りが小さく、くさび形の形状となっており、流れが上方に跳ね上げられ横方向への流れが少なくなっているためと考えられる。このことから、物体から離れた位置での圧力変動を検討の対象にする場合は、流体力学モデルで評価が可能であるが、物体に近い部分での圧力変動を考慮する場合は、物体の形状を正確に取り込める手法で解析する必要があると言える。

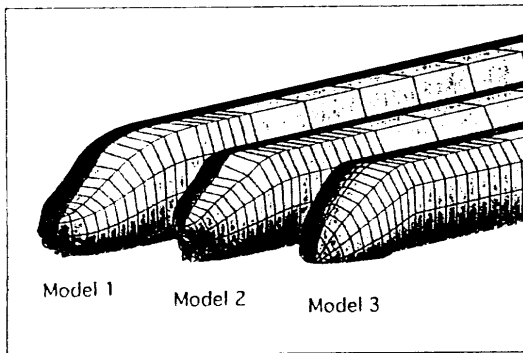


図6 流体力学モデルと数値計算結果の比較用の数値モデル

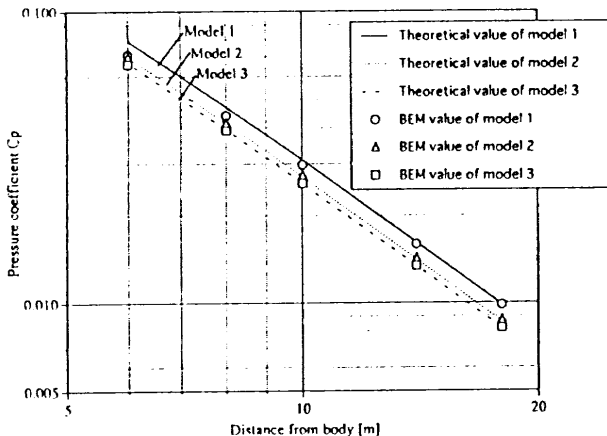


図7 流体力学モデルと数値計算による圧力変動の最大振幅の距離減衰

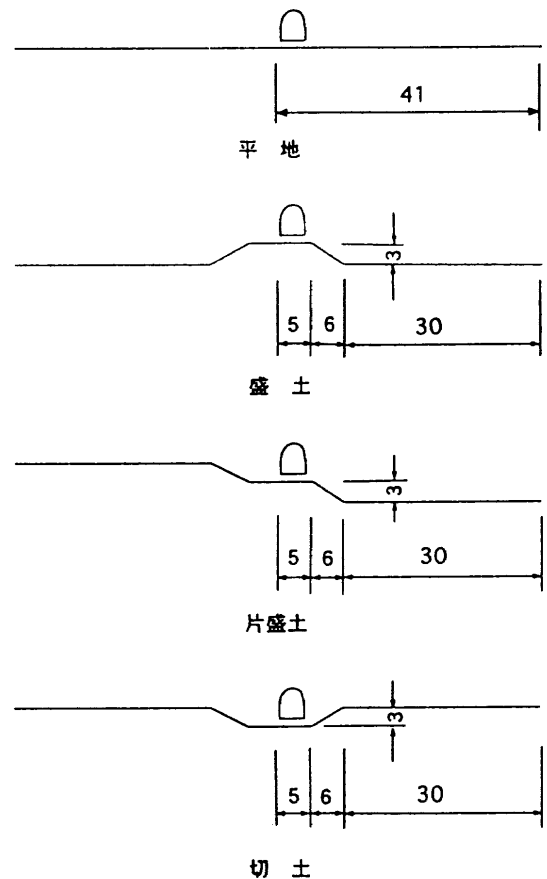


図8 計算に用いた地形

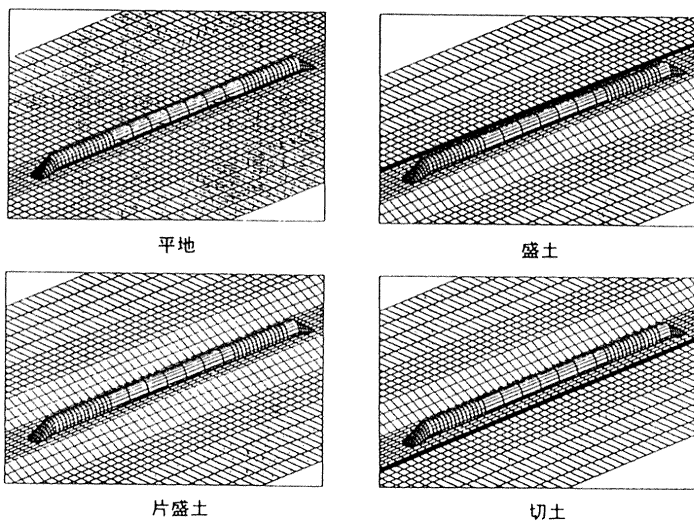


図9 地形を考慮に入れた数値モデル

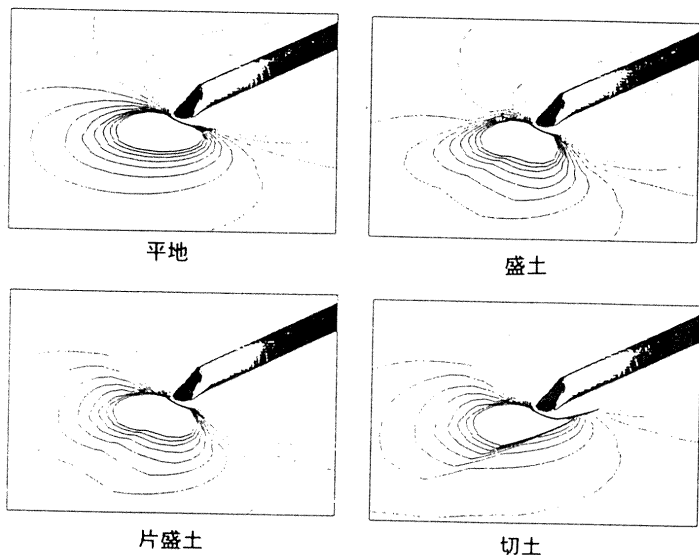


図10 物体上および地面上の圧力分布

4.2 地形の効果

次に、物体通過時の圧力変動に対する、地形の効果について検討する。地面の効果を取り入れるとき、無限に広い平地を表す場合には、鏡像法を用いればよいが、他の地形については鏡像法では難しい。そこで、ここでは地面の効果を取り入れるため、地面上にもパネルを張った。

地形は図8に示すように、平地、盛土、片盛土、切土の4種類について計算を行った。圧力の測定点は、切土以外は施工基面（モデルが置かれている平面）を基準に、また切土はのり面を上がった位置での平面を基準とした。

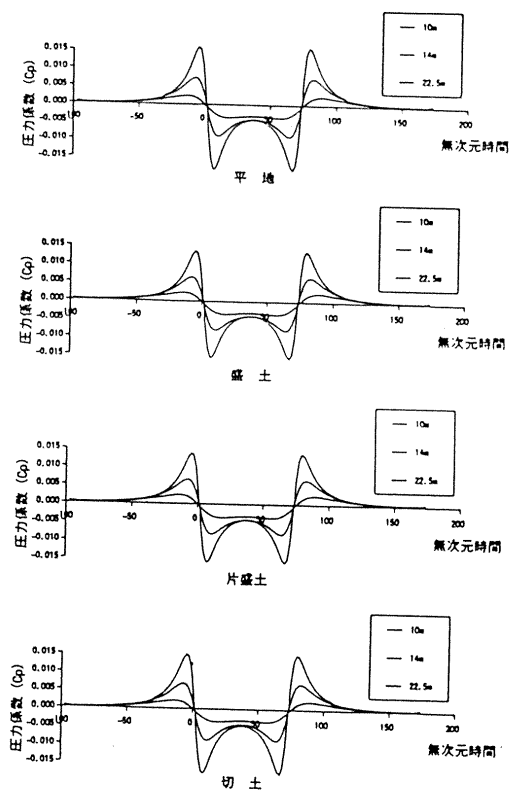


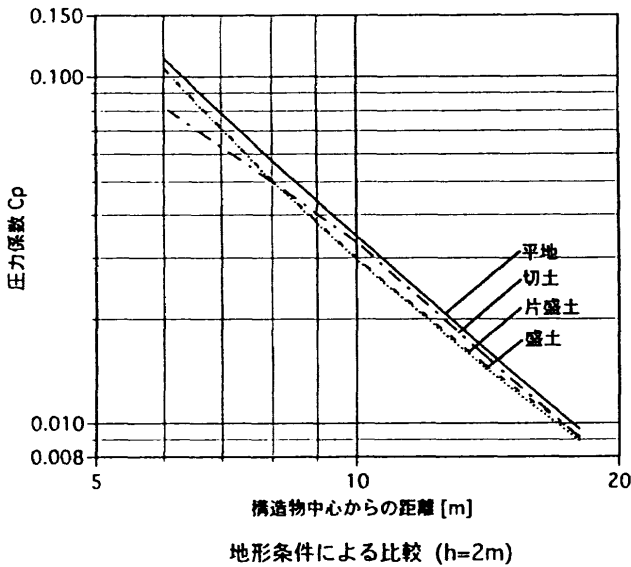
図11 各地形における圧力変動波形

数値モデルを図9に示す。物体先端部の断面積変化部分の長さは5、全長は75、地面は物体の先端部と後尾部にそれぞれ100つけ加えている。地面の横方向の長さは片側41とした。

物体上および地面上での圧力分布を図10に示す。物体先端部で正圧が、また物体の肩部で負圧が生じているのが分かる。この先端部の場合、正圧場と負圧場の境はほぼ物体の先端部から左右に伸びている。

地面中心からの距離が、10、14、22.5の位置での圧力変動波形を図11に示す。どの地形でも先端部で正・負圧が、後尾部で負・正圧が生じている。正圧と負圧のピークを比較すると負圧のピークがやや大きい。中間部は先端部と後尾部がもっと離れていると0に近づくが、今回のモデルの長さでは0とはなっていない。また、当然ではあるが、どの地形でも物体から離れるにつれて圧力変動のピーク値が小さくなっている。

圧力係数最大振幅（p-p値）の距離減衰を図12に示す。前に述べた流体力学モデルを使うと、圧力係数最大振幅の距離減衰は距離のほぼ2乗で減衰する。図を見ると平地の場合、約2乗で減衰していることがわかる。それに対して、平地以外の地形の場合は、物体から離れた位置では平地の曲線と同じ傾きとなっているが、物体に近づくにしたがい、盛土や片盛土では、圧力の測定点に地面が近づいて来るため圧力



地形条件による比較 (h=2m)

図12 各地形における圧力係数最大振幅の距離減衰

係数が大きくなり、逆に切土では圧力の測定点から地面が遠ざかるため圧力係数が小さくなり、距離減衰が2乗に従わなくなっている。地形中心から10より離れた位置での最大振幅の大きさは、地面の効果により、平地、切土、片盛土、盛土の順番になっている。切土では物体が置かれている部分がチャンネル状になっているため、流れが他の地形より早くなり一番大きな圧力係数が得られるとの予想があったが、計算結果を見るとそのような状況にはなっていない。

次に各位置での高さ方向の圧力係数の分布を図13に示す。移動物体は約4の高さを持ち、高さ2付近で横方向に一番大きな膨らみを持っている。圧力係数の分布を見ると、物体に近い地面中心から6の位置では、物体形状のような圧力分布となり、高さ2の辺りで一番大きな値となり、それより低いところや高いところでは圧力係数が小さくなっていく。それに対して、地面中心から14離れた位置での分布を見ると、ほぼ高さ方向に一定の圧力係数の分布となっている様子が見られる。分布の様子は、平地、盛土、片盛土はほぼ同様の分布となっている。それに対して、切土は物体に近い位置で、他の3つの地形とは異なった分布となっているように見える。しかしこれは、切土の場合高さを測っている基準が3だけ高い位置からとっているため、このことを考慮すると図のような傾向を示すのもうなづける。切土の場合も物体から離れた位置では、高さ方向にほぼ一定の分布となっている。

5. まとめ

以上、物体通過時の圧力変動を3次元境界要素法を用いて解析した。解析を行うに際して、はじめに、

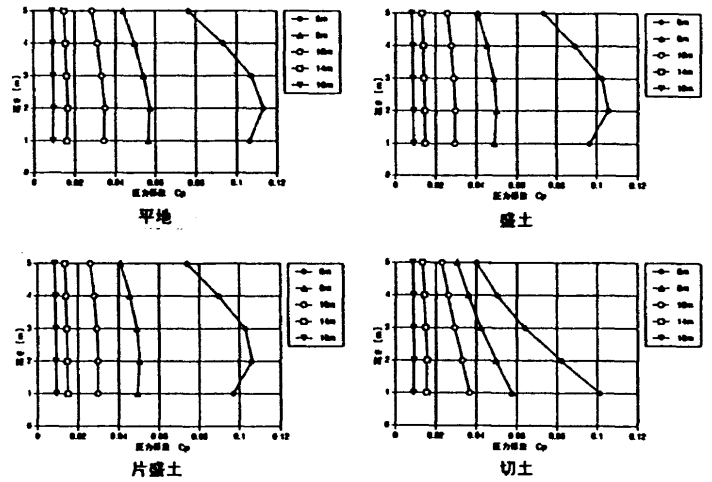


図13 高さ方向の最大振幅の分布

数値解析法の妥当性を確認するため、流体力学モデルの定式化を行い、これとの比較を行った。その結果、物体から離れた位置では流体力学モデルと数値解析結果がよく一致した。また、物体に近いところでは、数値解析では物体の形状による効果も捕らえられていることが分かった。

つぎに、物体通過時の圧力変動に対する地形の効果を見るため、平地、盛土、片盛土、切土の4種類の地形に関して解析を行った。その結果、物体通過時の圧力変動に対する、地形の効果の特性が明らかとなった。

最後に本研究を進めるにあたり、(財)鉄道総合技術研究所空力・騒音のみなさまから貴重な助言と示唆を頂きました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1]前田達夫、鉄道総研報告 Vol.10 No.2、1996
- [2]今井功、流体力学(前編)、裳華房(1973)
- [3]L.Morino, L.T.Chen and E.O.Suciu, AIAA Journal Vol.13 No.3 March (1975)
- [4]柳澤三憲、菊地一雄、航空宇宙技術研究所報告、TR-724(1982)
- [5]E.O.Suciu and L.Morino, AIAA Paper 76-64, 1976

連成モードで振動する翼のダイナミック・ストール

磯貝 紘二*¹ 新本 康久*¹ 渡部 洋八郎*²

Numerical Simulation of Dynamic Stall Phenomena for an Airfoil Oscillating in Coupled Pitching and Heaving

by

Koji Isogai, Yasuhisa Shinmoto

Department of Aeronautics and Astronautics, Kyushu University

and

Yohachirou Watanabe

Mitsubishi Heavy Industries Ltd.

ABSTRACT

Numerical simulation of dynamic stall phenomena around an airfoil oscillating in a coupled mode, where the pitching and heaving oscillations have some phase differences, has been performed using the Navier-Stokes code. The propulsive efficiency and the thrust have been calculated for various combinations of the phase difference and the reduced frequency for two different feathering parameters, and the effects of the dynamic stall phenomena on the behaviors of the propulsive efficiency and thrust are also discussed in detail by examining each flow pattern obtained. The highest efficiency has been observed for the case where the pitching oscillation advances 90 deg. over the heaving oscillation, for which the flow separation is confined in the small region on the airfoil surface near the trailing edge in spite of the large amplitude oscillations. For phase angles other than 90 deg. the efficiency is degraded by the occurrence of the large scale leading edge separation.

1. はじめに

振動する翼に発生する非定常的な失速現象 (Dynamic-Stall) は、大迎角で作動するヘリコプタ・ブレードやコンプレッサ・ブレード等で問題になるストール・フラッタや動的応答等と密接に関連することから、これまで多くの実験的および理論的研究がなされてきた。最近では、ナビエ・ストークス (NS) コードを用いた数値シミュレーションによる研究も幾つか発表されている^{1)~4)}。

しかしながら、これらのNSシミュレーションで計算されたケースは、すべて、ピッチング振動のモードに対する計算であった。翼のフラッタ現象やヘリコプタ・ブレードの非定常運動は、主として上下振動とピッチング振動がある位相差をもって連成したモードで振動していて、この場合にはピッチング振動のみによるダイナミック・ストール現象とは大幅に異なる現象が起こっている可能性が考えられる。さらに、この問題は鳥の羽ばたき運動による推進の問題とも密接に関連している。すなわち、鳥は、翼のあるスパン位置にお

ける流れ方向の翼断面の運動に注目した場合、上下運動とピッチングの運動との間に、ある位相差をもたせることによって、下流側に伝播する進行波のモードを作り出し、推進力を発生している。鳥の羽ばたき運動による推進力に関する研究は過去に多くの理論的および実験的研究が行われ、一つの大きな研究分野を形成している。

2次元翼の羽ばたきによる推進力の理論的研究は、Garrick⁵⁾、Lighthill⁶⁾、Wu⁷⁾等によって、ポテンシャル理論が展開され、推進力や推進効率に関する議論がなされた。これらの理論は、羽ばたきによる推進力の問題に対して、基本的な理解を与える上で大きな貢献をしたが、ポテンシャル理論でなおかつ平板翼理論であるために、現実の流れとはかなりかけ離れたものとなっている。例えば、ポテンシャル理論では、平板翼の推進力のかなりの部分が、前縁の特異点に作用する吸引力の寄与に負うところが大きい。これは、Garrick⁵⁾も指摘しているように、前縁が丸みを持った通常の翼断面に対しては、非現実的なものである。また、次節でも議論するように、高効率で推進力を発生するためには、ピッチング振動に対して、相対的に大きな振幅で上下振動を行う必要があるが、この大振幅の上下振

*¹ 九州大学 工学部*² 三菱重工業 (株)

動による有効迎角は容易に失速迎角を超えた大きなものになってしまうために、実際の流れは、剥離を伴った非定常な流れ、すなわち、ダイナミック・ストールの領域になる。この場合には当然ポテンシャル理論は非現実的である。羽ばたき翼の推進力や推進効率の推定において、ダイナミック・ストール現象を考慮すべきことは、DeLaurier⁸⁾, Fairgrieve and DeLaurier⁹⁾も指摘しているところである。

本報告は、ナビエ・ストークス・コード⁴⁾を用いた数値シミュレーションによって、羽ばたき運動する2次元翼に対して、ダイナミック・ストールを考慮した解析を行い、上下振動とピッチング振動の振幅比や位相角、無次元振動数等のパラメータが推進効率や推進力に与える効果やそれらのフローパターンとの対応等を検討したものである。

2. 数値計算法

今回の数値シミュレーションに使用したナビエ・ストークス・コード（以降、NSコードと呼ぶ）は、筆者の一人が既に開発し、実験との比較等による信頼性の評価を十分に行ったコードである（コード評価については文献4を参照されたい）。

本コードは振動する翼と伴に動く物体適合座標を用い、差分スキームとしてはTVD (Total Variation Diminishing) スキーム¹⁰⁾を用いた圧縮性NSコードである。

図1に、今回計算を行った2次元振動翼が定義されている。今後、翼の semichord 長は1として議論を進める。図1で、 α はピッチ軸位置 $x=a$ 点まわりのピッチ角であり、 h は a 点の y 方向変位である。一様流は x 軸の正の方向に流れているものとする。計算を行ったレイノルズ数は中型の鳥を想定して 1.0×10^3 程度とし、ほとんどの計算は Baldwin & Lomax の乱流モデル¹¹⁾を用いて行った（一部比較の為に層流計算も行っている）。また、今回のシミュレーションでは、翼の平均迎角は零として（すなわち、平均の揚力は零）、羽ばたき運動による推進力、推進効率の計算を主な目的とした。したがって、 h と α の時間変化としては、次のように設定した、すなわち、

$$h = h_0 \sin kt \quad (1)$$

$$\alpha = \alpha_0 \sin (kt + \phi) \quad (2)$$

ここで、 h_0 は上下振動の振幅（semichord 長 b で無次元化されている）、 α_0 はピッチング振動の振幅、 k は semichord 長を基準とした無次元振動数（reduced frequency $k = b\omega/U$; ω は翼の振動数、 U は一様流の流速）であり、 t は無次元時間（ U と b で無次元化されている）である。したがって、(2)式における ϕ はピッチング振動の上下振動に対する位相の進みを表わす。(1)式と(2)式より、翼の任意点 x における y 方向変位 $f(x,t)$ は次式で表わすことができる、すなわち、

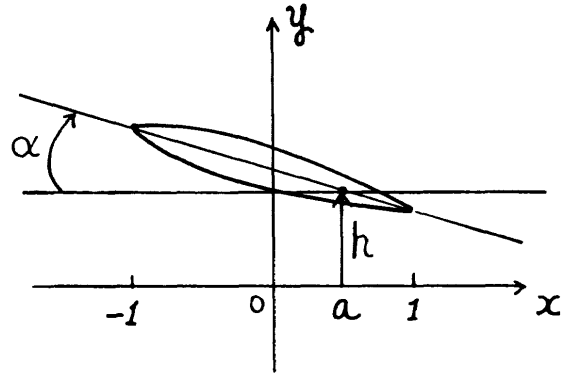


図1 翼の運動の定義

$$f(x,t) = h_0 \sin kt - (x-a) \alpha_0 \sin(kt + \phi) \quad (3)$$

このように、上下振動とピッチング振動がある位相差をもって連成した運動は、進行波モードを生成することが、以下のように容易に示される、すなわち、(3)式を若干変形すれば、

$$f(x,t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(kt - \psi) \quad (4)$$

ただし、

$$A = h_0 - (x-a) \alpha_0 \cos \phi$$

$$B = (x-a) \alpha_0 \sin \phi \quad (5)$$

$$\psi = \tan^{-1}(B/A)$$

さらに(4)式は、近似的に次のように書くことができる、すなわち、

$$f(x,t) \doteq \sqrt{A^2 + B^2} \sin(kt - \overline{(d\psi/dx)} x) \quad (6)$$

ここで $\overline{(d\psi/dx)}$ は ψ の x 方向微分の翼弦にわたっての平均値であって、次式で与えられる、

$$\begin{aligned} \overline{(d\psi/dx)} &= (1/2) \int_{-1}^1 (d\psi/dx) dx \\ &= (1/2) \left[\psi \Big|_{x=1} - \psi \Big|_{x=-1} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

(6)式より、この運動によって生成される進行波の伝播速度 c は

$$c/U = k / \overline{(d\psi/dx)} \quad (8)$$

であたえられる。

Bschorr¹²⁾は、 $c > U$ の場合には、推進力が発生し、逆に $c < U$ は、フラッタ現象に対応することを準定常（非剥離流）空気力に基づき議論によって指摘している。これは、以下のように解釈できる、すなわち、準定常空気力は、図1に示す運動の場合、

$$L = (1/2) \rho U^2 (2b) C_{L\alpha} \alpha_e \quad (9)$$

$$M = L (a + (1/2)b) \quad (10)$$

で与えられる。ただし、Lは揚力、Mはa点周りに働くピッチング・モーメント(Lは25%翼弦点に作用すると仮定している)であり、 $C_{L\alpha}$ は揚力傾斜である。また、(9)式における α_e は有効迎角で、

$$\alpha_e = -\dot{h} + \alpha \quad (11)$$

で与えられる。このとき、1サイクルの振動の間に空気が翼の運動に対して成す仕事Wは

$$W = \oint (L d(bh) + M d\alpha) \quad (12)$$

で与えられるから、 $w > 0$ はフラッタ現象に対応し、逆に $W < 0$ は翼の運動が流体に対して仕事をすることを意味するので、推進力の発生に対応することになる。(12)式に(9)~(11)式を代入して、 $W = 0$ の条件(この時のkの値を $k|_{w=0}$ とする)を求めると、

$$k|_{w=0} = (\alpha_0/h_0) \sin \phi / (1 + (\alpha_0/h_0)(a + (1/2)b) \cos \phi) \quad (13)$$

を得る。すなわち、 $k > k|_{w=0}$ であれば推進力を発生し、 $k < k|_{w=0}$ であればフラッタ(または、抵抗)の発生領域になることを意味している。

一方、(8)式より $c/U=1$ の条件を満たすk(これを k_{cr} とする)の値は、

$$k_{cr} = \overline{(d\psi/dx)} \quad (14)$$

である。

(13)式と(14)式は厳密には一致しないが、数値的にはほとんど一致する結果を与えることができる。

以上の議論から、(非剥離流)準定常空気力の仮定の基では、推進力を発生するためには $k > k_{cr}$ でなければならないことになる。しかしながら、実際の流れは準定常ではなく、非定常効果さらにダイナミック・ストールの効果のために、 $k > k_{cr}$ の条件は修正されなければならない。

しかしながら、(14)式で与えられる k_{cr} は、今回行う非定常効果およびダイナミック・ストールの効果を考慮した解析において、解析の指針を与える上で、また、シミュレーションの結果を理解する上で大いに参考になる。このため、図2に k_{cr} の振舞いを、今回シミュレーションを行った2つのケースすなわち、

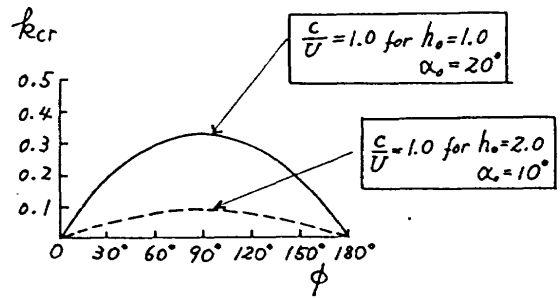


図2 k_{cr} の振る舞い

CASE A : $h_0 = 1.0, \alpha_0 = 20^\circ, a=0$

CASE B : $h_0 = 2.0, \alpha_0 = 10^\circ, a=0$

の場合について $k \sim \phi$ 平面上にプロットした。図からわかるように、 k_{cr} の値は h_0 と α_0 の比に依存して大きく変わる。

次節に数値シミュレーションの結果を示すが、ここで使用される推進効率 η_p と推力係数 C_T の定義は以下のとおりである⁶⁾。

$$\eta_p = (\bar{T}U) / \bar{W} \quad (15)$$

ここで、 \bar{T} は1サイクルの間の平均推力、 \bar{W} は翼がまわりの流体に対して成す仕事率の1サイクル間の平均値である。推進係数は

$$C_T = \bar{T} / ((1/2)\rho U^2 (kh_0)^2 (2b)) \quad (16)$$

である。また、 \bar{T} は

$$\bar{T} = -(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \left\{ (1/2)\rho U^2 b \int C_p (dy/dx + f_x) x_\xi d\xi \right\} d\tau \quad (17)$$

で与えられる。

ただし、 $\tau = kt$ 、 C_p は翼面上の圧力係数、 $y=y(x)$ は翼型形状、 f_x は(3)式で与えられる f を x で微分したもの、 ξ は翼型に沿ってとった差分計算空間上の独立変数⁴⁾である。また、 \oint は翼上下面にわたる積分を意味する。(17)式からも分かるように今回の計算では、翼表面に作用する摩擦力は考慮していない。

一方、 \bar{W} は次式で計算される。すなわち、

$$\bar{W} = (U/2\pi) \int_0^{2\pi} \left\{ (1/2)\rho U^2 b \int C_p f_x x_\xi d\xi \right\} d\tau \quad (18)$$

(18)式で、 f_x は(3)式を t で微分したものである。

3. 計算結果

今回のシミュレーションの対象とした翼型は NACA0012 である。また、マッハ数は 0.10 で行っている。数値シミュレーションは、2 節で述べたように、ピッチ軸が翼弦中央 ($a=0$) の場合について、 h_0 と α_0 の二つの組み合わせ、すなわち CASE A ($h_0 = 1.0, \alpha_0 = 20^\circ$), CASE B ($h_0 = 2.0, \alpha_0 = 10^\circ$) の二つのケースのそれぞれについて、パラメータとして、無次元振動数 k と位相角 ϕ の種々の組み合わせについて計算を行った。以下に、それぞれのケースの結果について述べる。

i) CASE A ($h_0 = 1.0, \alpha_0 = 20^\circ$)

図3に、数値シミュレーションを実施した各 k と ϕ の組み合わせが $k - \phi$ 平面上の点として、図2で示した k_{cr} の曲線と伴にプロットされている。図中、○印は推進力が発生した場合 ($\bar{T} > 0$) で、その下の () の中は得られた推進効率 η_p の値が示されている。また、●印は、抵抗となった場合 ($\bar{T} < 0$) を示している。

図からまず言えることは、 $k > k_{cr}$ であっても推進力ではなく抵抗が発生する場合のあることである。特に $\phi = 30^\circ$ の場合、シミュレーションを行った $k = 0.50, 0.70, 1.0$ のすべてに対して、抵抗を発生している。これが、ダイナミック・ストールの効果によることは、フローパターンを調べて見ると明らかになる。図4に $\phi = 30^\circ, k = 0.50, 1.0$ における等渦度分布を示す。いずれも翼全面にわたる大規模な流れの剥離が認められる。一方、 $\phi = 90^\circ$ の場合は、 $k=0.5$ 以上では推進力が発生し $k=0.5$ で最大の推進効率 ($\eta_p = 0.66$) が得られている。図5に $\phi = 90^\circ, k=0.5, 1.0$ におけるフローパターンを示す。 $\phi = 90^\circ$ の場合、振動の各時刻におけるフローパターンを調べたが、剥離した領域は、図5に示されたように翼の 3/4 翼弦長点から後縁付近までの限られた領域に常に局所化されていることがわかった。図6には、 $\phi = 60^\circ, k=0.5, 1.0$ のそれぞれに対応するフローパターンを示す。この場合、 $k=0.5$ では、 $\phi = 90^\circ$ の場合と同様に、剥離域は 3/4 翼弦長点から後縁付近までの限られた領域に常に局所化されているが、 $k=1.0$ では、大規模な剥離が認められる。しかしながら、 $k=1.0$ でも推進力(ただし、推進効率は0.30 でありよくない)が生じている点は、 $\phi = 30^\circ$ の場合と異なる。何故、 k と ϕ の値によって、ダイナミック・ストールの様相がこのような大きく異なるのであろうか? このことを理解するためには、準定常的ではあるが、有効迎角の振る舞いを調べてみる必要がある。2 節で述べたように、有効迎角は (11) 式で与えられる。(11) 式を変形して、結局

$$\alpha_e = A \sin(kt + \Phi) \quad (19)$$

ここで、 $A = \sqrt{(h_0 k)^2 + \alpha_0^2 - 2kh_0\alpha_0 \sin \phi}$ (20)

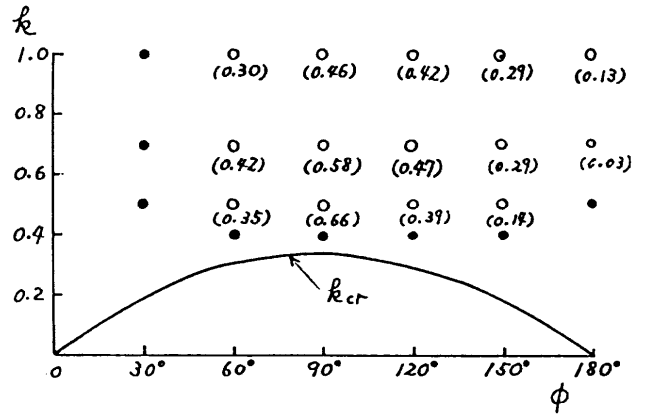


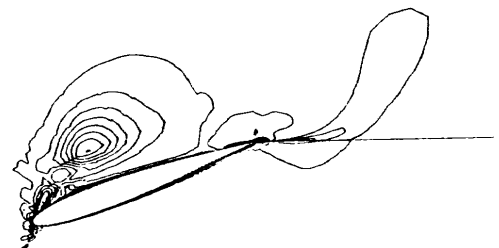
図3 数値シミュレーションの結果 (CASE A : $h_0 = 1.0, \alpha_0 = 20^\circ, a=0$)

t=0.52



(a) $k=0.5$

t=3.93



(b) $k=1.0$

図4 等渦度線図 ($\phi=30^\circ$)

$$\Phi = \tan^{-1}((-h_0 k + \alpha_0 \sin \phi) / (\alpha_0 \cos \phi)) \quad (21)$$

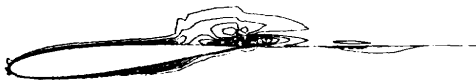
を得る。

t=3.14



(a) k=0.5

t=1.83



(b) k=1.0

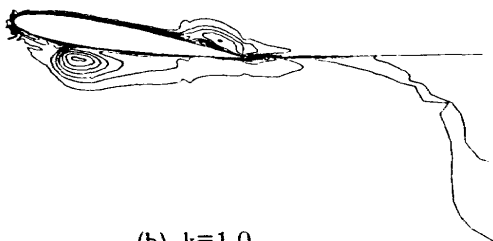
図5 等渦度線図 ($\phi=90^\circ$)

t=9.95



(a) k=0.5

t=1.57



(b) k=1.0

図6 等渦度線図 ($\phi=60^\circ$)

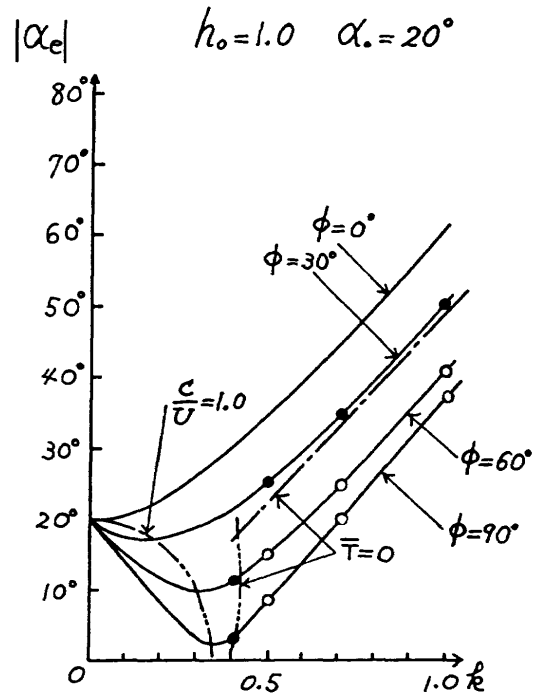


図7a 有効迎角の振る舞い ($\phi=0^\circ \sim 90^\circ$)

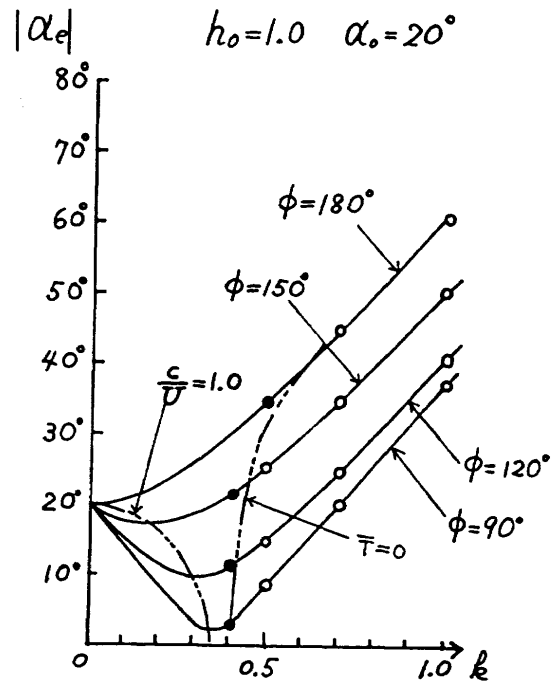


図7b 有効迎角の振る舞い ($\phi=90^\circ \sim 180^\circ$)

図7(a), (b)に、 $|\alpha_c| \equiv A$ の振る舞いを、横軸に k をとりパラメータとして ϕ をとって、示した。本図には、図3と同様に、今回シミュレーションを行った($|\alpha_c|$ - k 平面上の)点が○印と●印で示されている。さらに同図には、 $c/U=1.0$ の線が2点鎖線で、また、今回のシミュレーション結果から内挿によって求めた $\bar{T}=0$ の線が一点鎖線および3点鎖線で示されている。この図から、 $\phi=90^\circ$ の有効迎角は、 90° 以外のどの位相角に対するものより小さいことがわかる。一方、今回シミュレーションを行ったすべての k の値に対して抵抗の発生を示した $\phi=30^\circ$ は、(今回シミュレーションを行った) ϕ の中では最も大きな有効迎角($k=1.0$ では、 $|\alpha_c|$ は約 50° に達する)をとっていること等がわかる。また、 $\bar{T}=0$ になる線は2種類(1点鎖線と3点鎖線)あり、1点鎖線は、ほぼ k に直線的に比例して増加していることから、ダイナミック・ストール現象に支配されて決まってくるものと思われる。一方、3点鎖線で示された $\bar{T}=0$ の線は、推進力を発生させるための k の下限を与える線と考えられ、準定常非剥離流における $c/U=1.0$ に対応するものと思われる(ただし、実際の流れは、図5に示された様に局所化された流れの剥離と非定常効果(準定常では無視された)によって、 $c/U=1.0$ の線とは一致せず、3点鎖線の位置にシフトしたと考えられる)。また、図7aにおける $\phi=30^\circ$ の $|\alpha_c|$ の曲線と図7bにおける $\phi=150^\circ$ に対する $|\alpha_c|$ の曲線は同一であるにもかかわらず、 $\phi=150^\circ$ では $k=0.5$ 以上で、推進力を発生しているのは(別の言い方をすれば、位相角 ϕ に対する $|\alpha_c|$ の振る舞いが $\phi=90^\circ$ を中心にして左右対称であるにもかかわらず、推進力発生領域が 90° より右側にシフトしているのは)準定常的な考え方では考慮されていない非定常的な効果によるものと思われる。

図8に η_p の ϕ に対する振る舞いを k をパラメータとして示した。 $k=0.5$ の場合 $\phi=90^\circ$ で最大の推進効率($\eta_p=0.66$)を示し、 $k > 0.5$ では最大の推進効率を与える位相角は 180° 側に若干ずれることがわかる。

図9には、 C_T の ϕ に対する振る舞いを k をパラメータとして示した。 C_T の最大値を与える位相角は 90° ではなく、 $\phi=110^\circ \sim 140^\circ$ 付近になることがわかる。

図10と図11には、 $\phi=90^\circ$ における η_p および C_T の k に対する変化を示した。同図には比較のために、Lighthill⁶⁾のポテンシャル理論(平板翼)による値も示されている。また、今回行ったシミュレーションの結果としては、乱流モデル(Baldwin & Lomaxの代数モデル)付の場合と乱流モデル無し、すなわち層流の場合の結果の両方が示されている。今回のシミュレーション結果は、ポテンシャル理論より η_p で20%~30%低い値を与えている。この理由としては、今回のシミュレーションでは、翼の後縁近傍で剥離が起こっていることおよび前縁の吸引力が平板ポテンシャル理論で予測される値より小さいこと等が考えられる。

また、今回のシミュレーション結果によると、乱流モデル付と層流計算とで、 η_p および C_T の値にほとんど差が無かったが、これは大変興味深いことである。

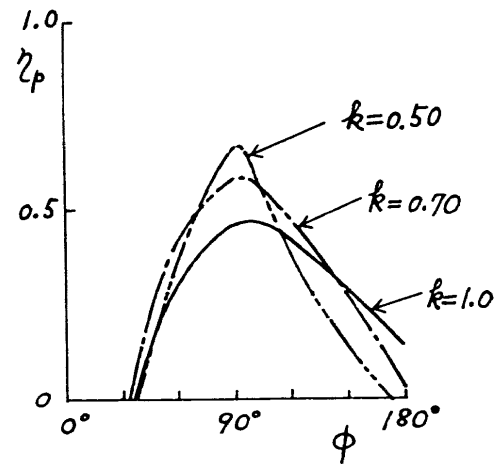


図8 推進効率の位相角に対する振る舞い

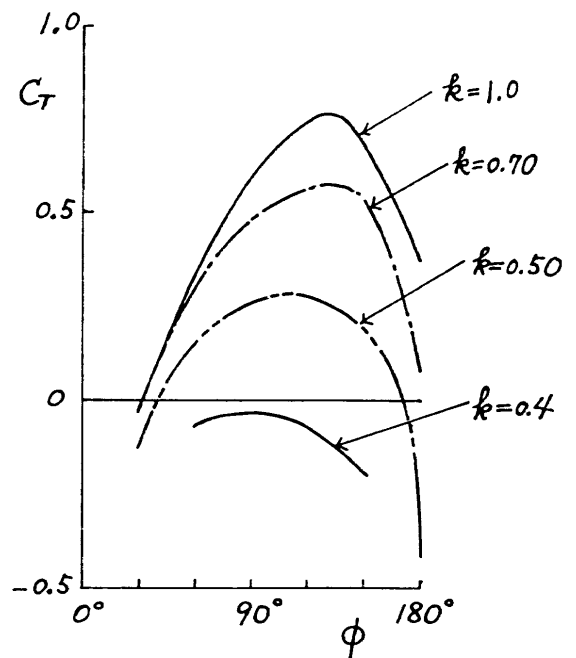


図9 推進係数の位相角に対する振る舞い

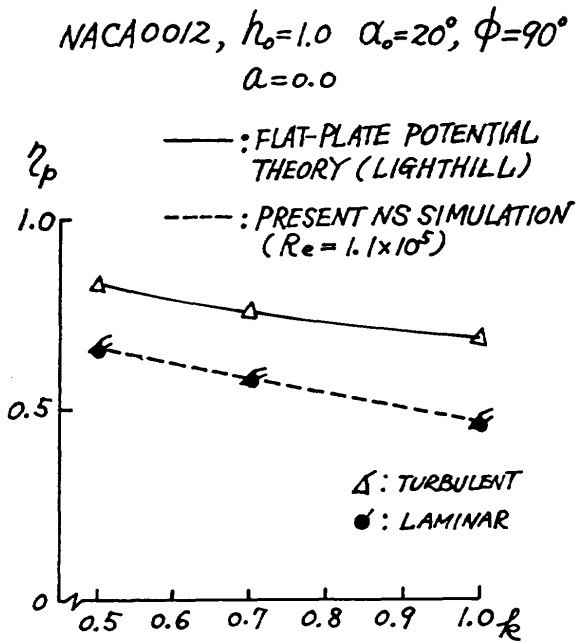


図10 推進効率のポテンシャル理論との比較

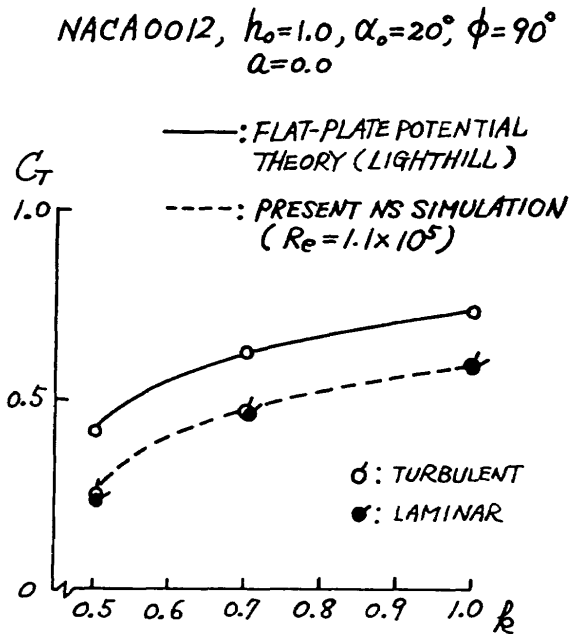


図11 推進係数のポテンシャル理論との比較

ii) CASE B ($h_0=2.0$, $\alpha_0=10^\circ$)

図12に、シミュレーションを行なった k と ϕ の組み合わせを、 $k \sim \phi$ 平面上に、 k_{cr} と併に示した。このケースでは、 k_{cr} の値は CASE A に比較して大幅に小さくなる、例えば、 $\phi = 90^\circ$ に対する k_{cr} の値は約 0.0873 である (CASE A では $\phi = 90^\circ$ に対する k_{cr} の値は約 0.335 である)*。図で () の中の値は推進効率である。このケースについてのシミュレーションは、 $\phi = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ のそれぞれについて $k=0.15, 0.30, 0.50$ の各値に対して行っている。CASE A の場合と同様に、 $\phi = 90^\circ$ で、 k が k_{cr} に最も近い $k=0.15$ で最大の効率 $\eta_p=0.73$ が得られている。

*文献12によれば、中～大型の鳥は $k \approx 0.1 \sim 0.2$ で飛んでいる。

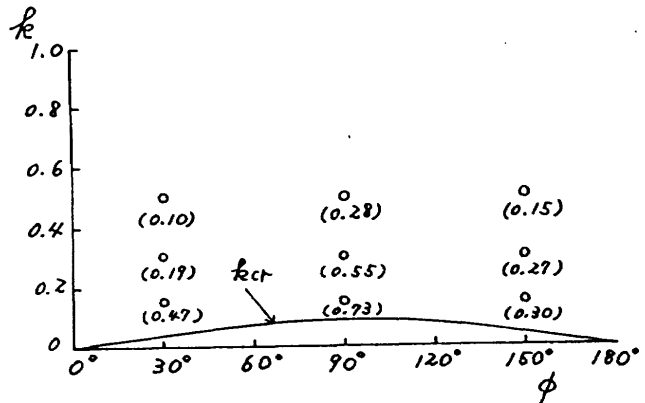


図12 数値シミュレーションの結果 (CASE B: $h_0=2.0$, $\alpha_0=10^\circ$, $a=0$)

図13には、CASE A と同様に、 $|\alpha_c| \sim k$ 平面上に今回シミュレーションを行った点を $c/U=1.0$ (k_{cr}) になる曲線 (2点鎖線) と併に示している。後に示すように各点に対応するフローパターンを調べてみると、 $|\alpha_c|$ が 30° 以上の点では、すべて、大規模な前縁剥離渦の発生が認められる。一方、 $|\alpha_c| \leq 25^\circ$ 以下のケース、すなわち、 $\phi = 90^\circ$ で $k=0.15$ および 0.30 、 $\phi = 30^\circ$ および $\phi = 150^\circ$ のそれぞれにおける $k=0.15$ では、大規模な流れの剥離は認められなかった。図14a, b, c にそれぞれ $\phi = 90^\circ$, $k=0.15, 0.30, 0.50$ の等渦度線図を示す。 $|\alpha_c|$ が 50° に達する $k=0.50$ では、大規模な前縁剥離渦の発生が認められる。図15a, b, c にそれぞれ $\phi = 30^\circ$, $k=0.15, 0.30, 0.50$ の等渦度線図を示す。 $k=0.30, 0.50$ では、大規模な前縁剥離渦の発生が認められる。図16a, b, c にそれぞれ $\phi = 150^\circ$, $k=0.15$ 、

0.30, 0.50 の等渦度線図を示す。 $k=0.30, 0.50$ では、大規模な前縁剥離渦の発生が認められる。図 17 および図 18 には、 η_0 および C_T の ϕ に対する振る舞いが k をパラメータとして示されている。今回シミュレーションを行った中では、 $\phi = 90^\circ$ が最も良い効率を与えていることがわかる。また、 $\phi = 30^\circ, k=0.15$ で、 $C_T=0.84$ と比較的大きな値が得られているが、これは CASE A には無かった傾向であり、この理由は今のところ不明である。

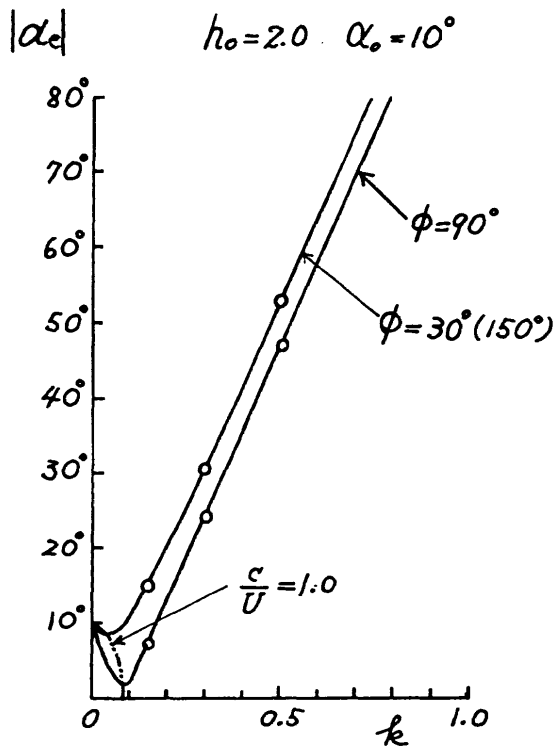


図 13 有効迎角の振る舞い

$t=10.47$



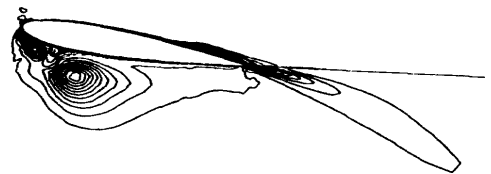
(a) $k=0.15$

$t=6.11$



(b) $k=0.30$

$t=1.57$



(c) $k=0.50$

図 14 等渦度線図 ($\phi=90^\circ$)

t=20.94



(a) k=0.15

t=33.16



(a) k=0.15

t=0.87



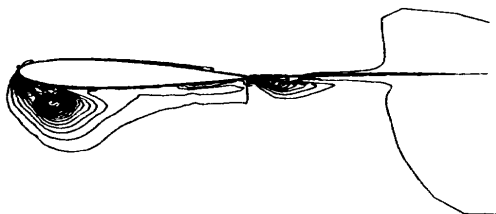
(b) k=0.30

t=4.36



(b) k=0.30

t=12.04



(c) k=0.50

t=1.57



(c) k=0.50

図15 等渦度線図 ($\phi=30^\circ$)

図16 等渦度線図 ($\phi=150^\circ$)

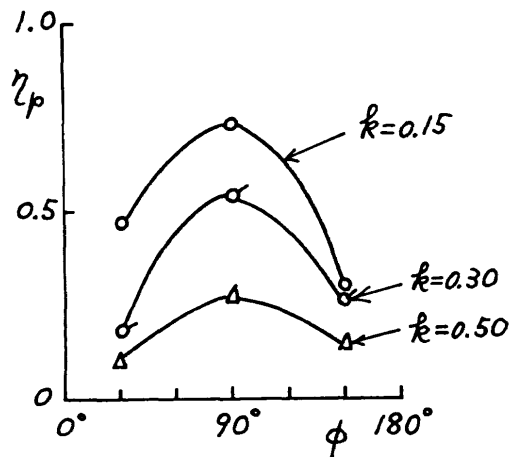


図17 推進効率の位相角に対する振る舞い

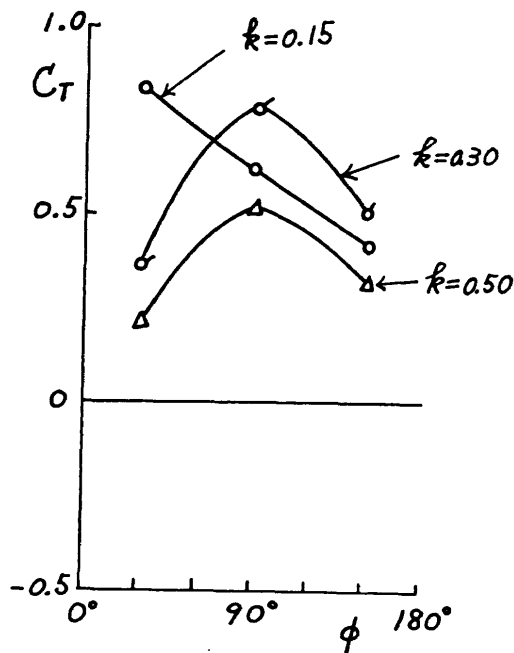


図18 推進係数の位相角に対する振る舞い

4. 結語

上下振動とピッチング振動の間に、ある位相差をもって連成振動（いわゆる羽ばたき運動）する2次元翼まわりの流れをナビエ・ストークス・コードを用いて、シミュレーションを行った。シミュレーションは上下振動とピッチング振動の2種類の振幅比のそれぞれについて、無次元振動数と位相角の種々の組み合わせに対して行われ、推進効率や推進力に与えるダイナミック・ストールの効果がそれらのフローパターンとの対応とともに詳細に検討された。その結果、位相差が90度の場合に最大の推進効率を得られ、そのとき翼面上の剥離域は後縁付近の極限られた領域に局所化されていることが明らかとなった。また、90度以外の位相差をもつ大部分のケースに対して、大規模な前

縁剥離渦の発生が認められ、これが推進効率の低下、ひいては抵抗の発生を招いていること等が明らかになった。

参考文献

1. Tuncer, I. H., Wu, J. C., and Wang, C. M., "Theoretical and Numerical Studies of Oscillating Airfoils," AIAA Journal, Vol. 28, No. 9, Sep. 1990, pp. 1615 - 1624.
2. Visbal, M. R., and Shang, J. S., "Investigation of the Flow Structure Around a Rapidly Pitching Airfoil," AIAA Journal Vol. 27, No. 8, Aug. 1989, pp. 1044 - 1051.
3. Visbal, M. R., "Dynamic Stall of a Constant-Rate Pitching Airfoil," Journal of Aircraft, Vol. 27, No. 5, May 1990, pp. 400 - 407.
4. Isogai, K., "Numerical Simulation of Dynamic Stall of NACA0012 Airfoil Oscillating near Static Stall Angle Using the Navier-Stokes Equations," NAL TR-1141T, March 1992.
5. Garrick, I. E., "Propulsion of Flapping and Oscillating Airfoil," NACA Report No.567, 1936, pp. 419 - 427.
6. Lighthill, M. J., "Aquatic Animal Propulsion of High Hydromechanical Efficiency," J. Fluid Mech. Vol 44, part 2, 1970, pp. 265 - 301.
7. Wu, T. Y., "Hydromechanics of Swimming Propulsion, Part 2. Some Optimum Shape Problems," J. Fluid Mech. Vol. 46, part 3, 1971, pp. 521 - 544.
8. DeLaurier, J. D., "An Aerodynamic Model for Flapping-Wing Flight," Aeronautical Journal, 1993, pp. 125 - 130.
9. Faigrieve, J. D., and DeLaurier J. D., "Propulsive Performance of Two-Dimensional Thin Airfoils Undergoing Large-Amplitude Pitch and Plunge Oscillations," UTIAS Technical Note No. 226, 1982.
10. Yee, H. C., and Harten, A., "Implicit Scheme for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates," AIAA Paper 85-1513, 1985.
11. Baldwin B. S., and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA 78-257, AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting, Huntsville, Alabama, Jan. 16 - 18, 1978.
12. Bschorr, O., "Propulsive Mechanics in Animal Swimming and Flying Locomotion," Aeronautical Journal Feb. 1988, pp. 84 - 90.

弾性モードで振動する翼周りの非定常粘性流の数値シミュレーション

ケイランディシュ ハミドレザ、別府 護朗、中道 二郎

Numerical Simulation of Viscous Unsteady Flow Around Wing Oscillating in Elastic Modes

Hamidreza KHEIRANDISH¹⁾, Goro BEPPU²⁾ and Jiro NAKAMICHI³⁾

An aeroelastic version of CFD code was developed and applied to numerical simulations of unsteady transonic flows around a rectangular wing with bioconvex airfoil section oscillating in bending mode and a wind tunnel model of a high aspect-ratio (YXX) wing which is also oscillating in first bending mode. A numerical simulation of transonic flutter of the YXX wing considering first six modes has been performed as well. The code is based on Navier-Stokes (N-S) equations coupled with the structural equations. The N-S equations are integrated by Yee-Harten TVD scheme on dynamic grid, while the structural side is integrated by Wilson θ method.

Key Words Unsteady Flow, Oscillating Elastic Wing, Viscous Flow,

1. INTRODUCTION

The computation of aeroelastic characteristics in the transonic speed is of much current interest. Aeroelasticity is concerned with those phenomena which involve mutual interaction among inertial, elastic, and aerodynamic forces. Since high performance modern aircraft tends to possess a high level of flexibility in order to satisfy low weight and maneuverability requirement, the avoidance and prediction of aeroelastic problems such as flutter, buffet and, buzz are very important in aircraft design. To clarify these nonlinear problems, CFD tools based on Navier-Stokes(N-S) equations including turbulence model are needed. The remarkable progress in computing resources in the last decade, tied with advances in computational methods, has motivated the development of aeroelastic CFD codes. Prediction of flutter boundaries of a 3-dimensional elastic wing based on N-S equations is the final goal of this research.

In the present study, the time averaged N-S equations coupled with Baldwin-Lomax¹⁾ (B-L) turbulence model, were integrated by Yee-Harten²⁾ implicit TVD scheme. An ADI form which is of second order accuracy both in space and in time has been used.

To describe the effects of elastic oscillation of a wing on the flow stream and aerodynamic forces, the following two numerical simulations have been performed in advance:

a) numerical flow simulation around a rectangular wing oscillating in first bending mode with reduced frequency of .13 (based on the root half-chord and free stream velocity). The numerical results are compared with the experimental results³⁾ of wind tunnel tests.

b) numerical solution of the YXX wing oscillating in the first bending mode with reduced frequency of .381.

Finally numerical simulation of flutter of YXX wing in transonic region is presented. The flutter boundary is investigated and compared with experimental ones.

2. NUMERICAL IMPLEMENTATION

To calculate aeroelastic response of an elastic wing, it is needed to integrate the governing equations for the flow field and structural dynamic equations simultaneously. In the

present study, the governing equations are the unsteady N-S equations coupled with B-L turbulence model. The structural equations are derived by employing modal approach. Introducing generalized coordinates, so called flutter equations can be written in a nondimensional form as;

$$m_i \ddot{q}_i + k_i^2 m_i q_i = Q \iint_{\Delta} C_p \Phi_i n_z dS \quad (2.1)$$

where q_i are generalized coordinates, Φ_i and m_i are fundamental modes and generalized masses with respect to the i 'th mode, and where k_i and Q are the reduced frequencies and nondimensionalized dynamic pressure, respectively. The nonlinear aerodynamic loads of right hand side obtained by integrating N-S equations are substituted. The left hand side of Eqs.(2.1) is integrated by Wilson θ method⁴⁾.

The computation is proceeded in a time dependent manner with a specified dynamic pressure and the time histories of generalized coordinates are obtained. At a dynamic pressure, every q_i converges with respect to time. At another condition, it diverges statically or dynamically. In the former case, the static aeroelastic deformation of the wing can be obtained. In the latter cases, the system is unstable and divergence velocity or flutter dynamic pressure can be captured by looking at the time histories of the generalized coordinates.

In the present calculations, the following procedures are considered to update grid points at each time step. Having computed generalized coordinates, wing surface grid points are renewed by superposing the fundamental modes. To update the flow field grid points as fast as possible, moving grid strategy⁵⁾ is used at each time step. The deformation of wing, however, becomes too large after some amount of iterations and the above mentioned strategy no longer works well. Overlapping or skewness of grid lines occurs. So a grid generator, alternatively, was employed to renew the whole grid, in accordance with the new position of the wing surface, at every reasonable number of steps.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS

Firstly, numerical solution of a rectangular wing oscillating in the first symmetric bending mode is presented. The wing is of aspect ratio 3 with bioconvex airfoil section (5% thickness-chord ratio). The mean angle of attack is 0 degree

1) Graduate Stud., Dept. of Aeronautics and Astronautics, Tokai Univ.

2) Prof., Dept. of Aeronautics and Astronautics Tokai Univ.

3) Head, Structural Mechanics Div., NAL

and Mach number is 0.9. The frequency is interpreted in terms of reduced frequency of 0.13. Reynolds number was settled to be 5×10^6 . The nondimensional wing tip amplitude is 0.011 based on the root chord length. The first bending mode shape is obtained from reference(3). The comparisons of unsteady pressure (upper/lower) difference distributions between the numerical results and experimental ones are given at four span positions in Fig. 1, which are shown in terms of magnitudes and phase angles. The results are relatively in good agreements with each other. The discrepancies between computed and experimental results at the wing root is due to boundary layer of the side wall of tunnel which wing is installed. Since the wall effect is not taken into account in this study, a shock also appears at wing root position, whereas in the experiment it does not.

In the second example, numerical solution of YXX wing oscillating in first bending mode is presented. The planform of this wing is given in Fig. 2. The aspect ratio of the wing is 10.0, the taper ratio is 0.324 and the quarter chord sweep angle is 18° . It has supercritical wing section, and a built-in nose down twist of 3.5° at the wing-tip. The angle of attack and Mach number of this case are 0 degree and 0.7, respectively. Reynolds number is 10^6 . The reduced frequency is set to be 0.381 which corresponds to frequency of 168 Hz(experimental flutter frequency). The steady state pressure distributions are given in Fig. 3. The amplitude of oscillation at the wing tip is about half root chord length. A C-H mesh with $179 \times 60 \times 51$ grid points was used. Real and imaginary parts of unsteady pressure distributions at four span positions, which are normalized by magnitude of oscillatory angle of attack at wing tip, are given in Fig. 4. To get some idea of the effect of this oscillation, pressure distributions on upper and lower surfaces are shown in Fig. 6. for 26 time sequence steps in the third cycle. The closer to the wing tip, the more variation of pressure distributions can be observed in a cycle. This comes from the changes of effective angles of attack due to the motion of wing surface. The time histories of lift and drag coefficients are given in Fig. 5. for the first three cycles.

Finally flutter simulation of YXX wing in transonic region is presented. The fundamental frequencies which are calculated theoretically and experimentally⁶⁾ are given in table 1. The shapes of wing deformations are approximated by superposing the first six fundamental modes obtained by vibration analyses of the wing. Classically, the linear theory was used to obtain the flutter velocity and the problem was reduced to an eigenvalue one. In the modern CFD aeroelasticity, the phenomena are simulated using high level of nonlinear flow modeling on computers. The procedure of the present flutter simulation is as follows;

- 1) set a low dynamic pressure
- 2) integrate Eqs.(2-1) and obtain the converged solutions; that is, static aerodynamic deformation
- 3) increase dynamic pressure and integrate Eqs.(2-1) using the solution of step (2) as an initial conditions
- 4) investigate the time histories of the wing responses
- 5) repeat (3)-(4) and find the flutter point

The Mach number range is 0.7 to 0.85, The Reynolds number based on the root-chord length is 2.4×10^6 and the steady state angle of attack is 0.0° . In this study the dynamic pressure is swept at a fixed Mach number and the wing responses for many cycles obtained. The cases studied in the present numerical simulations are summarized in a plan of dynamic pressure vs Mach number in Fig. 7. The flutter frequencies are also shown in Fig. 8. For the Mach numbers 0.7, 0.75. and .85 the wing responses converged at dynamic pressures 150,78, 120kPa, respectively. They entered to unstable area with increasing the dynamic pressures upto 190, 100, 128kPa, respectively. However, for Mach number 0.8, where the wing responses converged at dynamic pressures 110kPa, the wing responses never diverged with increasing dynamic pressure for a large range upto 195kPa. It was found that the wing penetrated to low-damping(L-D)

area. The generalized coordinates $q_1, q_2,$ and q_3 at dynamic pressures 110, 140, 160 and 195 kPa, and Mach number 0.8, are shown in Fig. 9. In low damping area the amplitude of generalized coordinates decreased rapidly after a few cycles of oscillations, specially q_1 , but they never tended to converge. The flutter test has only been conducted at two points for angle of attack, 0° . There is no report of low damping area in experiment at this angle of attack. However it was found in the numerical simulations at Mach number 0.8. The frequencies of the current results are in good agreement with the experimental ones. It is also found that the frequencies of oscillation in low damping area were higher than that of flutter point.

4. CONCLUSION

The developed computer codes have been already used to simulate, unsteady flows about oscillating NACA0012 airfoil, flutter of the same airfoil and, unsteady flows about YXX wing. It has been also applied to mentioned problems in this report. The comparisons of numerical results with experimental ones show that these codes are valid and powerful to clarify unsteady aerodynamic phenomena.

All simulations presented here were done on NWT parallel computer at NAL.

REFERENCES

- 1) Baldwin, B.S. and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA paper, 78-257 (1978)
- 2) Yee, H. and Harten, A., "Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Law in Curvilinear Coordinates," AIAA paper, No.85-1513 also AIAA Journal Vol.25, No.2,(1987), pp.266-274
- 3) Lessing, H.C., "Experimental Determination of the Pressure Distribution on a Rectangular Wing Oscillating in the First bending Mode for Mach Number From 0.24 to 1.3", NASA TND-344.
- 4) Bate, K.-J. and Wilson, E.L "Numerical Methodes in Finite Element Analysis," Prentice-Hall (1976)
- 5) Nakamichi, J., "Calculation of Unsteady Navier-Stokes Equations Around an Oscillating 3-D Wing Using Moving Grid System," AIAA paper, 87-1158-CP
- 6) Kwasaki Heavy Industry KR-14465(written in Japanese)

Table 1. Fundamental Frequencies of Flutter Model

Mode	Frequency Hz	
	Nastran	Experiment
First Bending	60.6	61.9
Second Bending	200.6	206.1
First Torsion	429.4	413.2
Third Bending	448.2	453.7
Second Torsion	702.4	-----
Third Torsion	816.9	-----

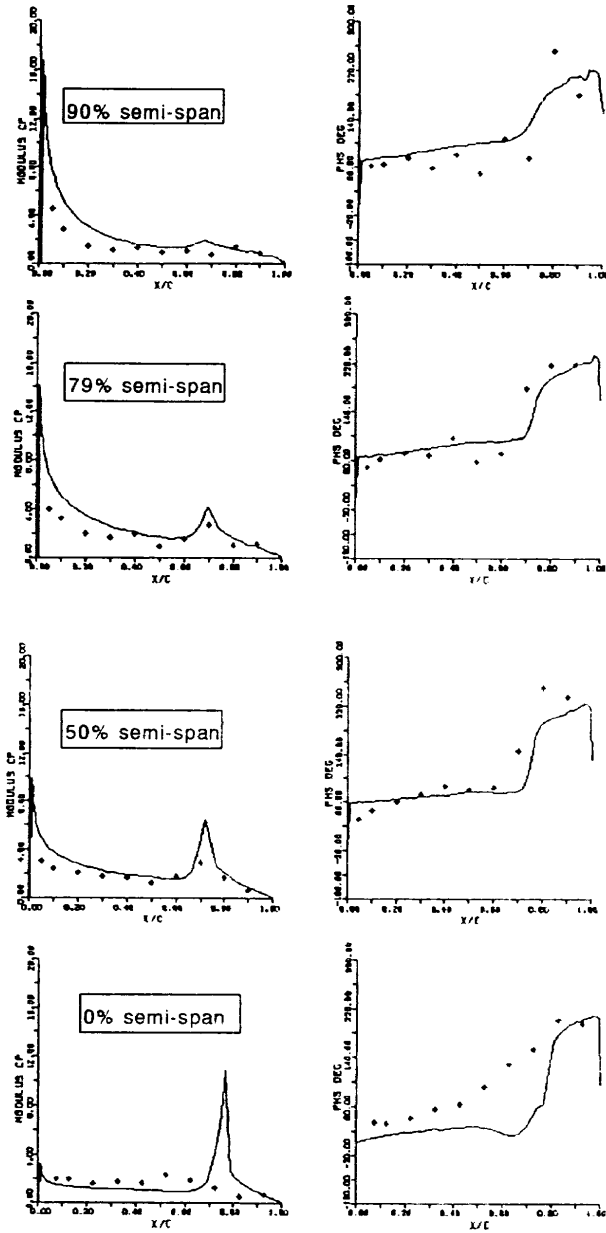


Fig. 1. Comparison of Magnitudes and Phase Angles Between Present Results and Experimental Ones (lines are present results)
 $\alpha=0.0$, $M=0.9$, $Re=5 \times 10^6$, $K=.234$

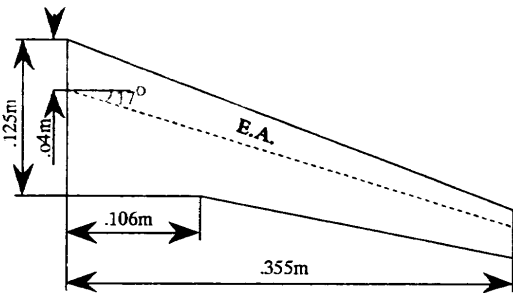


Fig. 2. Planform of YXX Wing Model

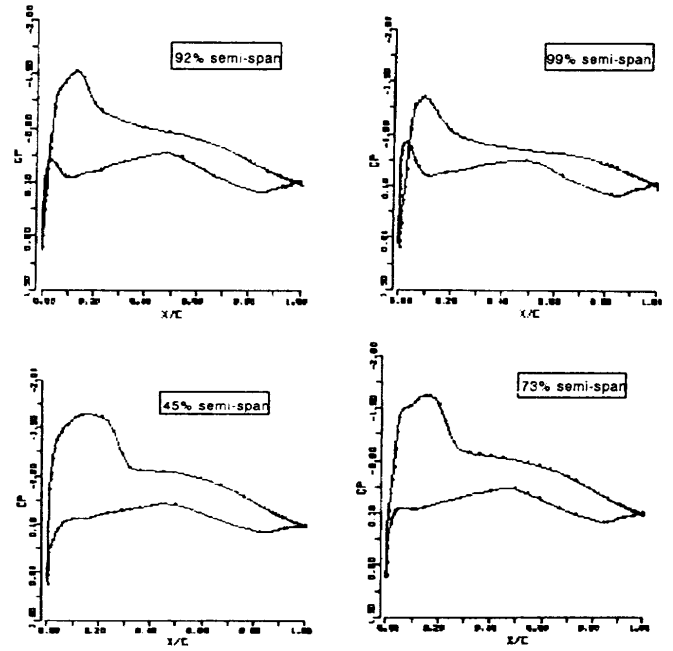


Fig. 3. Steady State Pressure Distributions
 $\alpha=0.0$, $M=0.7$, $Re=10^6$

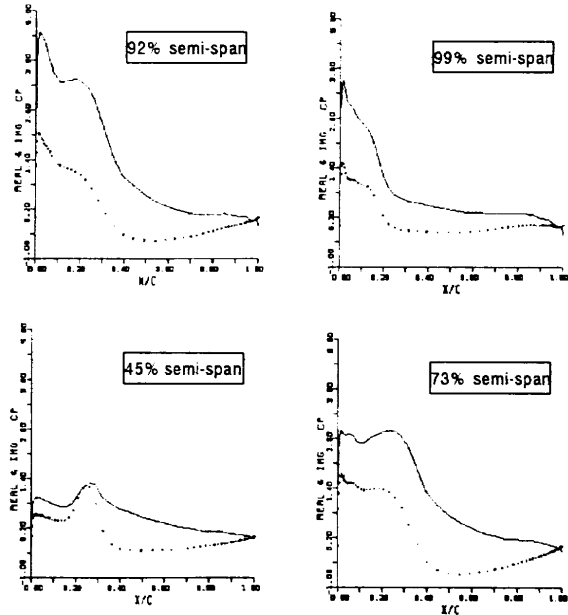


Fig. 4. Real and Imaginary Parts of Unsteady Pressure Distributions (lines are real part)
 $\alpha=0.0$, $M=0.7$, $Re=10^6$, $K=.381$

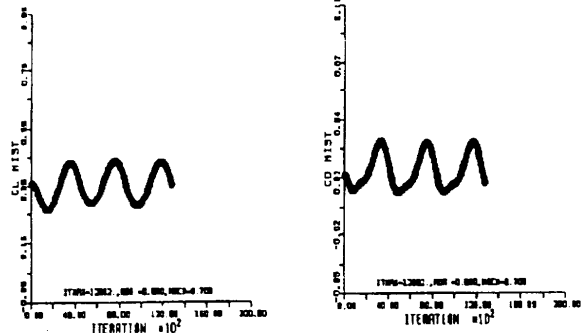


Fig. 5. Time Histories of Aerodynamic Forces

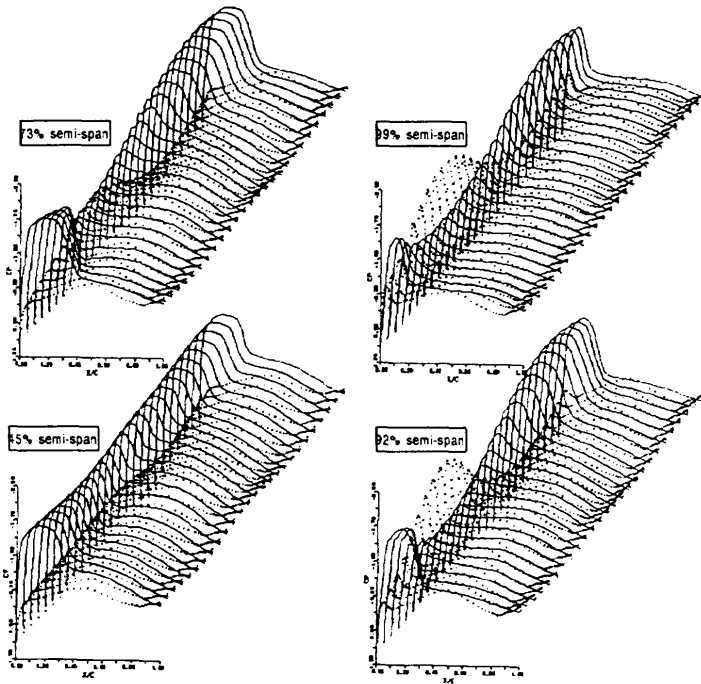


Fig. 6. Pressure Distributions of Upper and Lower Surfaces for One Cycle $\alpha=0.0$, $M=.7$, $R_e=10^6$, $K=.381$

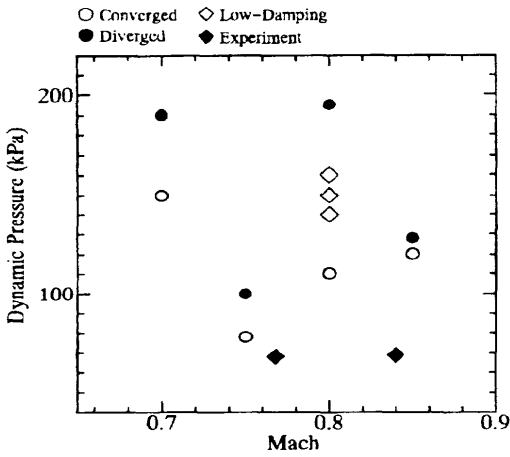


Fig 7. Flutter Boundary of YXX Wing Model ($\alpha=0.0^\circ$)

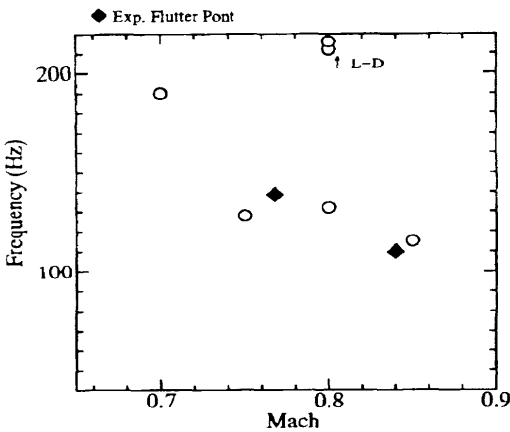


Fig 8. Frequency of Wing Response in Unstable Region ($\alpha=0.0^\circ$)

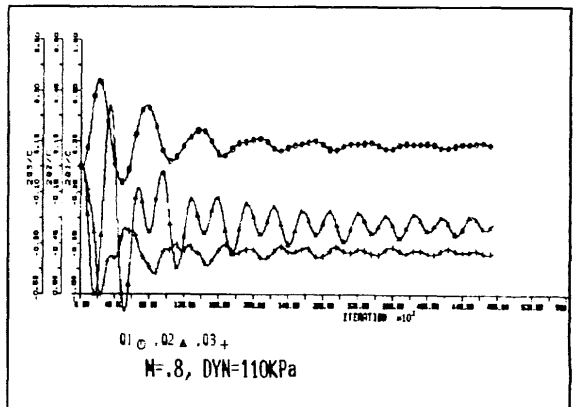
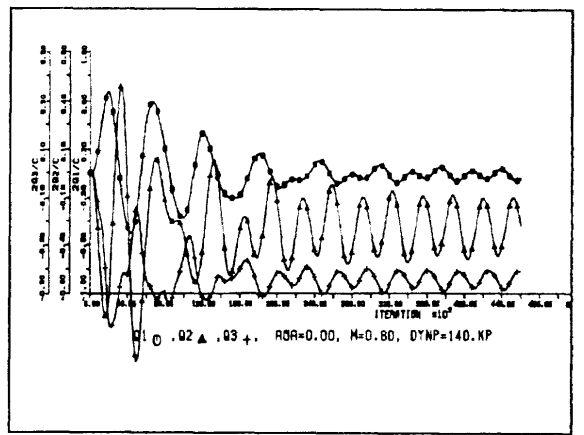
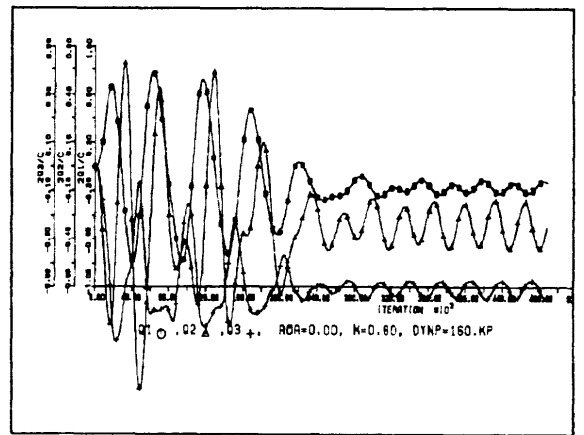
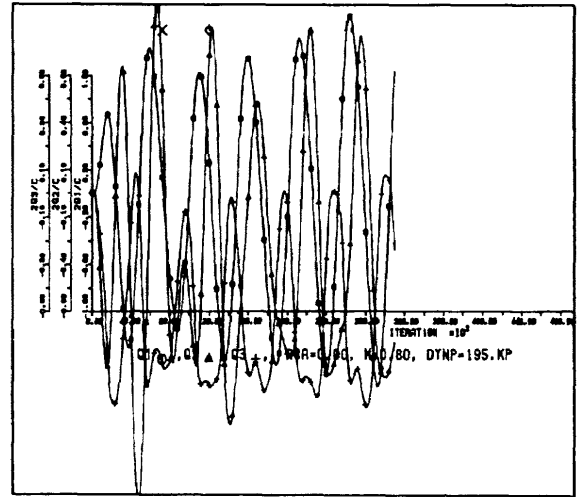


Fig. 9. Time Histories of Wing Responses $\alpha=0.0$, $M=.8$, $R_e=2.4 \times 10^6$

COMPUTATIONAL STUDY OF INCOMPRESSIBLE FLOW BY FINITE-DIFFERENCE METHOD

Kunio Kuwahara
Institute of Space and Astronautical Science
Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan

Incompressible high-Reynolds-number flows are simulated by solving the Navier-Stokes equations. A finite-difference method with third-order upwinding are employed without using any turbulence model. Validity of this method is discussed.

Also, a newly developed multi-directional formulation is applied for improved accuracy. Examples are presented to show the applicability of the present approach to variety of problems.

INTRODUCTION

Many of the high-Reynolds-number, turbulence simulations have been based on Reynolds-averaged Navier-Stokes equations using a turbulence model. Some use a large-eddy simulation based on a Smagorinsky-type model. However, a turbulence model or a large-eddy simulation is not suitable for high-Reynolds-number-flow computation because, there, the effect of turbulence mixing is usually replaced by second-order diffusion. This diffusion is similar to viscous diffusion. It means that we are simply computing a locally low-Reynolds-number flow.

There are some real direct numerical simulation in which most of the small-scale structure are resolved, but the computations can be done only at relatively small Reynolds numbers. It demands too much computer resources. We can not use enough grid points for high-Reynolds-number flows of practical interest. We have rather to use a very coarse grid system. In many applications, large structures are most important and we are not interested much about in small structures. What we want to do is to capture the large-scale structure using a coarse grid system.

On the other hand, quit a few simulations (see Kuwahara, 1992), show that large structures of high-Reynolds-number, turbulent flow can be captured using relatively coarse grid, if the numerical instability, usually unavoidable for high-Reynolds-number-flow simulation, is suppressed. Most successful simulations in these approaches are based on the third-order upwind formulation (Kawamura and Kuwahara, 1984). An approach similar in philosophy but different in method is adopted by Boris et. al. (1992).

In the present paper, we summarize the third-order upwind scheme for high-Reynolds-number-flow computations. To increase the accuracy, we have developed a new finite-difference scheme named as multi-directional finite-difference method. Most of the results in the present paper is based on this new scheme.

Following examples are presented in this paper to show the validity of the approach.

- 0) One-dimensional Burgers turbulence.
- 1) Two-dimensional flow around a circular cylinder at the Reynolds numbers from 0.1 to 1000000.
- 2) Three-dimensional transitional flow in a square channel at Reynolds numbers 12500.
- 3) Three-dimensional flow around a car at Reynolds number 1000000.
- 4) Three-dimensional thermal convection in a box at Rayleigh number 17000000..

COMPUTATIONAL METHOD

The governing equations are the unsteady incompressible Navier-Stokes equations and the equation of continuity as follows:

$$\text{div} u = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \text{gradu} = -\text{grad}p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u \quad (2)$$

where u , p , t and Re denote the velocity vector, pressure, time and the Reynolds number respectively. For high-Reynolds-number flows, time-dependent computations are required owing to the strong unsteadiness. These equations are solved by a finite-difference method. The numerical procedure is based on the MAC method. The pressure field is obtained by solving the following Poisson equation:

$$\Delta p = -\text{div}(u \cdot \text{gradu}) + \frac{D^n}{\delta t} \quad (3)$$

$$D = \text{div} u \quad (4)$$

where n is the time step and δt is the time increment. D^{n+1} is assumed to be zero, but D^n is retained as a corrective term.

In cases 1, 2, 4, a generalized coordinates system is employed, so that enough grid points can be concentrated near the body surface where the no-slip condition is imposed.

All the spatial derivative terms are represented by the central difference approximation except for the convection terms. For the convection terms, the third-order upwind difference is used. This is the most important point for high-Reynolds-number computations and the detail is given below.

Strong numerical instability caused by the aliasing error occurs at high Reynolds numbers, owing to the non-linear convection terms, if enough grid points are not used to resolve the small-scale structures. When digitizing a continuous function into a finite number of the values, it is very important to filter out the high-frequency part of the original function which can not be resolved by the digital system. If not, aliasing error makes the approximation meaningless.

Usually a turbulence model or a large eddy simulation is used to get rid of this instability. The diffusion coefficients increased by the added turbulent viscosity reduce the aliasing error and suppress the numerical instability. In most of the models, this diffusion has the same form as the viscous diffusion and the diffusion coefficient is usually much larger than that of the viscous diffusion. Therefore, the effect of physical diffusion is concealed, resulting no dependency of the flow on the Reynolds number is captured.

Another way to stabilize the computation is to use an upwind scheme. The first-order upwind scheme is widely used because of the very good stability but the leading numerical error caused by this upwinding is second order and similar to the physical diffusion. This should be avoided because of the same reason just mentioned above.

The second-order upwind scheme has a dispersion type leading error, which makes the computation unstable generally.

For the discretization of the non-linear convection terms, the order of accuracy is odd or even has special importance for stable computation. In case of even order of accuracy, the leading numerical-error term is the odd-order derivative which is dispersive. Once some error is created, the error never diffuses but moves around in the computational domain until the computation blows up. Eventually no stable solution can be obtained in this case. On the other hand, in case of odd order of accuracy, the leading error term is the even-order derivative which is diffusive. This makes the computation very stable by reducing the aliasing error well.

A third-order upwind scheme has been found to be most suitable for high-Reynolds-number-flow computation. The leading numerical error terms are the fourth-order derivative terms, where the effects of the second-order numerical diffusions are carefully removed. The numerical diffusion of fourth-order derivatives is of short range and does not conceal the effect of molecular diffusion but well stabilizes the computation.

One simple explanation why the fourth-order diffusion does not conceal the effect of second-order diffusion is as follows. A finite-difference representation of the fourth-order diffusion term is as follows:

$$(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) / \delta x^4 \quad (5)$$

This can be written as,

$$4\delta x^2 \left(\frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{(2\delta x)^2} - \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\delta x^2} \right) \quad (6)$$

The two terms in Eq.6 represent the second-order diffusion and their effects cancel each other except near the point i . This means fourth-order diffusion is very independent from second-order diffusion. In general, the effects of lower-order diffusion are not concealed by higher-order diffusion.

Similarly, fifth-order upwinding is possible and some computations have been done but it requires seven points in each direction to approximate the local derivative. This means to require a wider range of analyticity to the solution of the equations. High-Reynolds-number flows are not so analytical, therefore it is not necessarily better than third-order unwinding.

There are several third-order upwind schemes. We use the following scheme. Initially, the one-sided second-order finite difference approximation is employed for the convection terms.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i \left(\frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\delta x} \right), u_i > 0 \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i \left(\frac{-3u_i + 4u_{i-1} - u_{i-2}}{2\delta x} \right), u_i \leq 0 \quad (8)$$

We can rewrite the above equations to a symmetrical form as follows:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i (-u_{i+2} + 4(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}) / 4\delta x + |u_i| (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) / 4\delta x \quad (9)$$

If the first term of Eq.(9) is developed into Taylor series, it becomes

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \delta x^2 u \frac{\delta^3 u}{\delta x^3} + O(\delta x^4) \quad (10)$$

Similarly the second term becomes

$$\delta x^3 u \frac{\delta^4 u}{\delta x^4} + O(\delta x^5) \quad (11)$$

Therefore, the leading error of Eq.(9) is order δx^3 and its coefficient includes third-order derivative. As mentioned above, odd order-derivative is not desirable, but this error term is eliminated if the term is replaced by

$$|u_i| (-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}) / 12\delta x \quad (12)$$

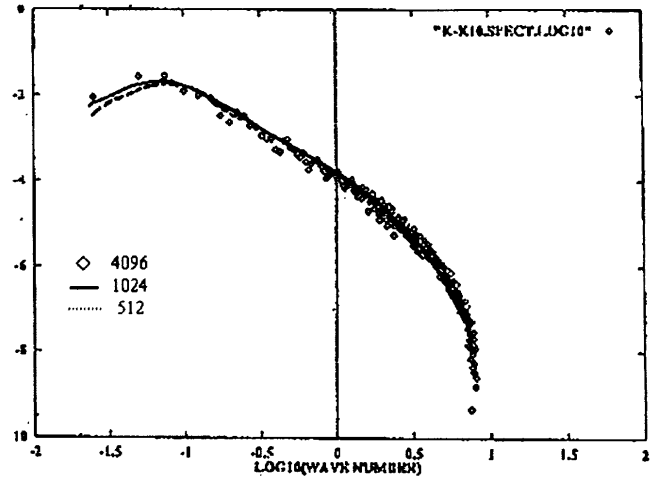
As a result, the present third-order upwind scheme is represented by five grid points as follows:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i (-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}) / 12\delta x + |u_i| (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) / 4\delta x \quad (13)$$

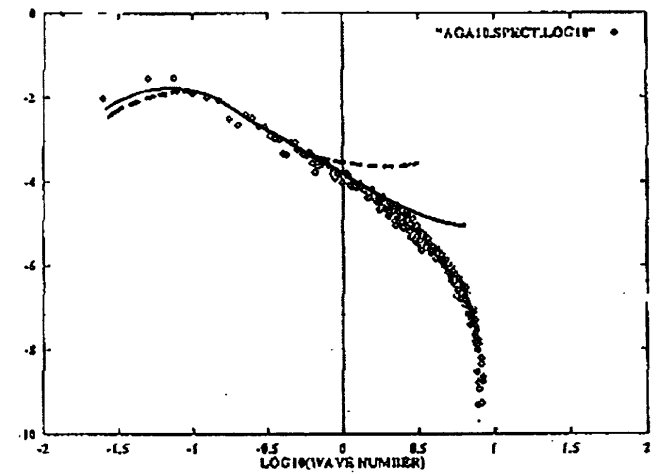
There is another version of third order upwind schemes for example as follows.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_i (-u_{i+2} + 8(u_{i+1} - u_{i-1}) + u_{i-2}) / 12\delta x + \alpha |u_i| (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) / 4\delta x \quad (14)$$

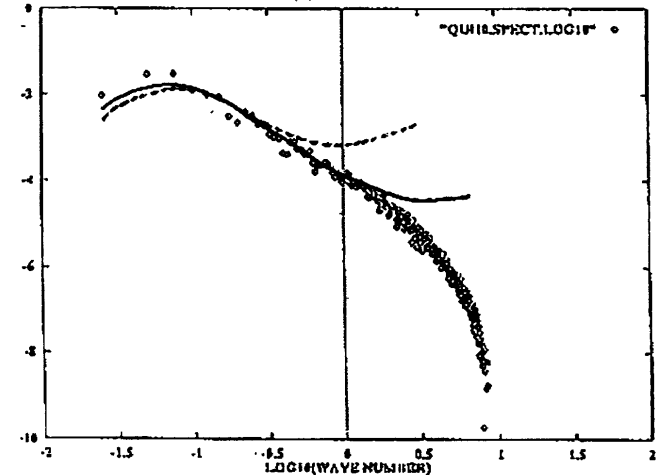
where $\alpha = 1/3$ is called UTOPIA scheme by Leonard. We compared these schemes and as well as QUICK scheme by comparing the energy spectrum in one-dimensional Burgers turbulence and found the above Kawamura-Kuwahara scheme is the best (Fig.1). When we use a very fine grid as 4096 points, the three schemes agree completely with each other and theoretical prediction. However, with reducing the number of grid points, the difference becomes clear. Only the present method gives the good agreement with the result of very fine computations. For the theoretical validation based on the digital-filter theory has been given by Hashiguchi (1997).



(a) The present scheme (Kawamura-Kuwahara)



(b) UTOPIA

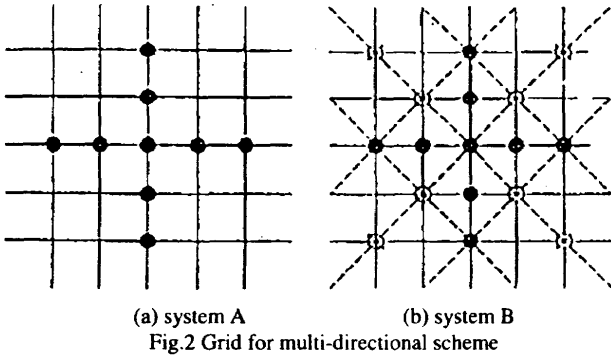


(c) QUICK

Fig.1 Energy spectrum for Burgers turbulence

There is another important problem in high-order upwind schemes. That is, the accuracy decreases when the flow direction is not well parallel to one of the coordinate lines. If we use generalized coordinate system, near the boundary, the flow direction and one of the coordinate lines are almost parallel, and this problem is not serious. However, in general, flow direction is not always parallel to a coordinate line and the problem becomes very important.

To overcome this problem we introduced the multi-directional upwind method. This method is summarized as follows;



When structured grid points are given, the black points in Fig.2-a are usually used to approximate the derivatives at the central point (system A).

If we introduce the other 45 degrees-rotated local grid points, the white ones in Fig.2-b, which can be used to approximate the derivatives at the central point (system B).

In order to improve the derivative value at the central point, we mix the derivative values calculated from both systems (A and B) at a proper ratio. We adopt the ratio $A : B = 2/3 : 1/3$. Using this ratio, for example, resulting finite-difference scheme for the Laplacian coincides with the well-known 9-points formula with forth-order accuracy. This method improves the rotational invariance of the coordinate system. Then those flows where flow direction is not parallel to the grid direction are better simulated.

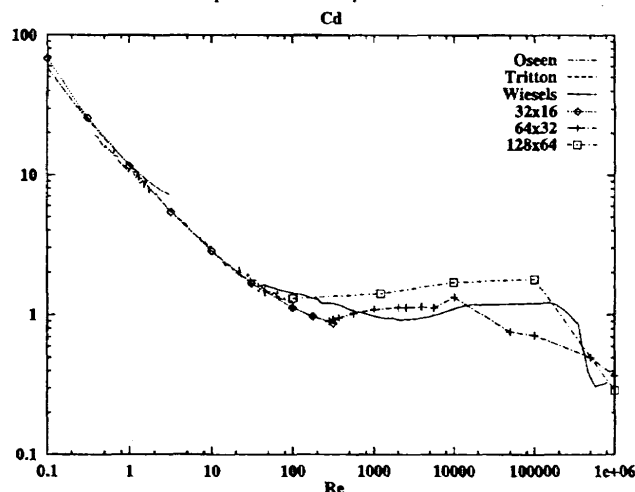
For all the spatial derivatives, the multi-directional finite-difference method is used. This method has another advantage. In MAC method, usually staggered mesh is used to remove the unphysical oscillation of the pressure. This oscillations is caused by the decoupling of the computed values within the nearest two points. These values couples more tightly with the second nearest points. This decoupling become less if we use third-order upwind scheme because of the five-point differencing, but there remains some. However, if we use multi-directional finite-difference method, every point becomes tightly coupled and the oscillation disappears. Therefore, a non-staggered mesh system is employed where the defined positions of velocity and pressure are coincident.

For the temporal integration of the Navier-Stokes equations, the Crank-Nicolson implicit scheme is utilized. This scheme has second-order accuracy in time. These equations and the Poisson equation are iteratively solved at each time step by the successive overrelaxation (SOR) method.

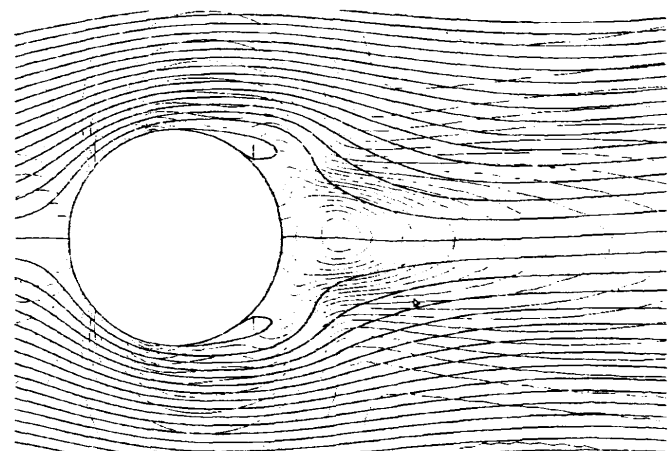
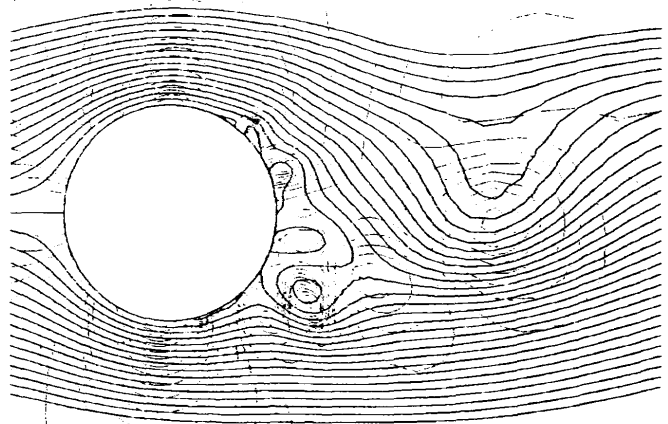
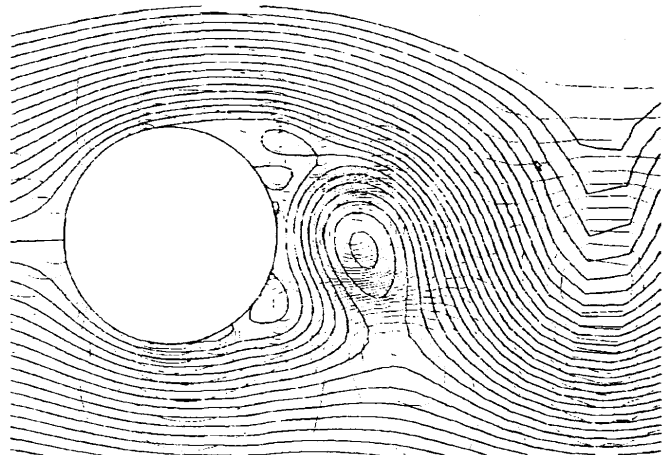
COMPUTATIONAL RESULTS

1) Flow past a circular cylinder

The dependence of the drag coefficients on Reynolds numbers is shown in Fig.3. The number of grid points are 32×16 , 64×32 , 128×64 . If the Reynolds number is less than 100, all the computations and experiments agree very well. At high Reynolds numbers even 64×32 computation can capture the drag crisis qualitatively. The 128×64 computations agrees much better with the experiments as expected.



The drag sharply decreases at about Reynolds number 400000, which is called drag crisis, is well captured even using this coarse grid. Instantaneous and time-averaged flow patterns clearly show the difference as shown in Figs. 4-7. After drag crisis, flow separation delays and the wake becomes narrower, which makes the drag less.



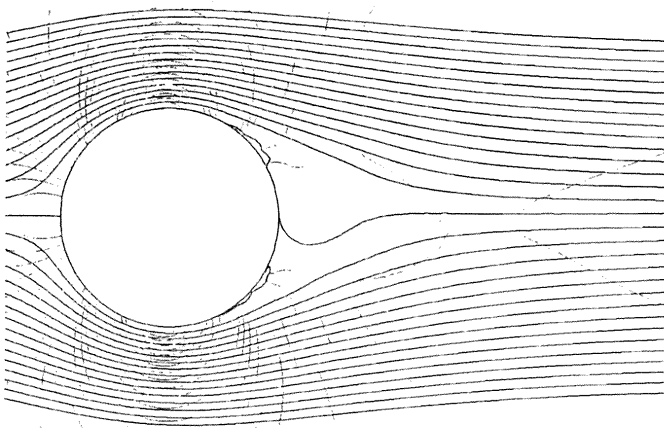


Fig.7 Flow past a circular cylinder at $Re=1000000$, before drag crisis
Streamlines and pressure contours
Time averaged flow field, 128×64 grid

2) Transitional flow in a square channel

It is impossible to compute transitional flow by using turbulence model. Even large-eddy simulation can not handle this type of problem, because it assumes the flow is turbulent from the beginning. However, transition phenomena is very important at high-Reynolds number flow. In the present approach, this is nothing special, we can compute any transitional flow with no special consideration. In Fig.8, development of turbulence behind an obstacle is shown. The visualization was done by showing equi-temperature surface. The temperature at the inlet is only 0.1 degree higher than the initial condition in the channel. This does not affect the computed flow field. However it is very effective for the flow visualization.

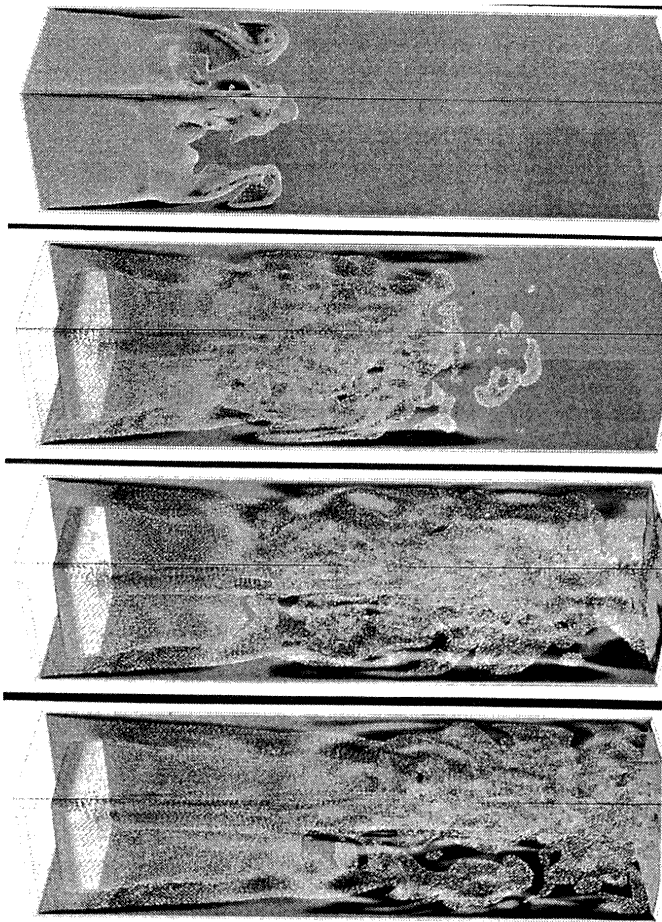


Fig.8 Development of turbulence behind an obstacle in a square channel at $Re=12500$, $256 \times 64 \times 64$ grid

3) Flow around a car

For car aerodynamics, evaluation of drag and lift coefficients is most important. For this purpose the separation zone should be calculated accurately. At high-Reynolds numbers, as shown in the case of circular

cylinder, drag crisis takes place which has decisive effect on the drag. At this moment almost only way which can capture the drag crisis is to use the present upwind method (Fig.9). By using this, drag can be calculated within 5% difference with the experiments (Hashiguchi,1996).

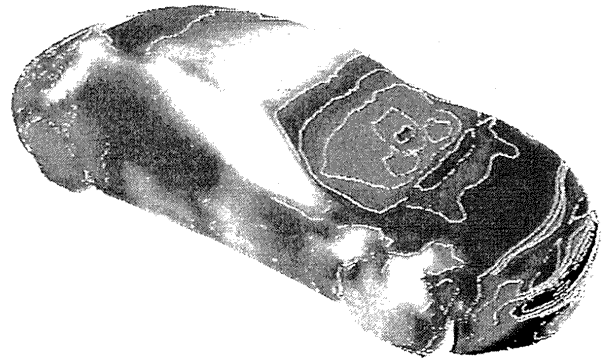


Fig.9 Flow around a car at $Re=1000000$

4) Thermal convection

Thermal convection is another good example where the transition plays an essential role (Fig.10) (Tsuchiya and Kuwahara 1997). Figure 10 shows equi-temperature surface in the initial stage of the development.

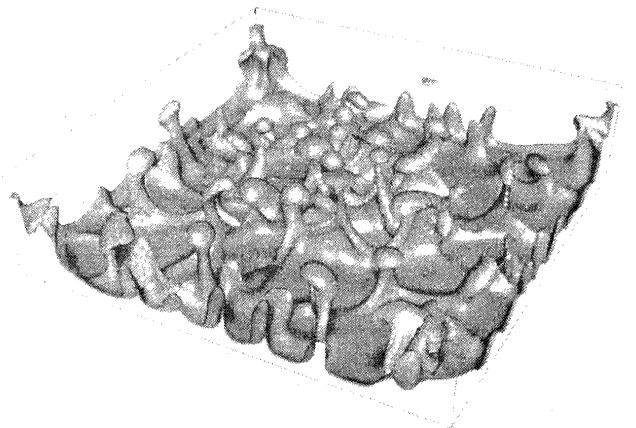


Fig.10 Natural convection in a box heated below, equi-temperature surface. Rayleigh number 17000000, $128 \times 128 \times 32$ grid

VISUALIZATION

The computed data is becoming bigger and bigger and without visualization system understanding of underlying flow mechanism is very difficult. What is needed is a means of properly visualizing the computed flow field. The key points are real-time visualization and animation.

A flow simulation takes a large amount of CPU time, therefore it is desirable to visualize it while computing it. This saves a lot of time especially while debugging. This should be called real-time visualization.

Moreover, a still picture is insufficient when flows become essentially unsteady as those at high Reynolds numbers, since it is impossible to understand the transient flow in total only from a set of instantaneous flow pictures. Visualization by animated graphics is a necessity in this case. Only by using such a system it becomes possible to observe the essentially unsteady flow field and to understand the fundamental flow mechanism underlying it.

The visualization software used here is Globe2D and Globe3D developed by Institute of Computation Fluid Dynamics, which satisfies the above requirements (Kuzuu, Kaizaki, Kuwahara 1997).

CONCLUSIONS

It is becoming clear that we need not resolve the small-scale structure of high-Reynolds-number flow to capture the large structure, which is most important for application. We should not use standard models to

simulate any high-Reynolds-number, turbulent flows. Only without using turbulence models we are able to capture the dependence of the flow on the Reynolds number. To avoid the numerical instability we can simply use a third-order upwind difference. Multi-directional finite-difference makes the dependence of the solution on the flow direction less and the computation more reliable.

ACKNOWLEDGEMENTS

The author would like to thank for the cooperation of Mr. M. Hashiguchi for the case 0 and 1, Dr. K. Kuzuu for case 3 and all of the visualization, Mr. T. Tsuchiya for the case 4.

REFERENCES

Boris, J.P., Grinstein, F.F., Oran, E.S., and Kolbe, R.L., 1992, "New insights into large eddy simulation," Fluid Dynamics Research 10, pp 199-228

Hashiguchi, M., 1996, "Turbulence simulation in the Japanese automotive industry," Engineering Turbulence Modeling and Experiments 3, pp291-308.

Hashiguchi, M., 1997 to appear

Kawamura, T., and Kuwahara, K., 1984, "Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness," AIAA Paper 84-0340.

Kuzuu, K., and Kaizaki, H., and Kuwahara, K., 1997, "Real Time Visualization of Flow Fields Using Open GL System," AIAA Paper 97-0235.

Kuwahara, K., 1991, "Flow Simulation on Supercomputers and Its Visualization," International Journal of High Speed Computing, Vol.4, No.1, pp49-70.

Tsuchiya, T., and Kuwahara, K., 1997 "Three-Dimensional Computation of Natural Convection in an Enclosure at High Rayleigh Numbers", AIAA Paper 97-0436

SIMULATION OF SUBSONIC FLOW PAST AN AIRFOIL

Kunio Kuwahara
Institute of Space and Astronautical Science
Yoshinodai, Sagamihara, Kanagawa, Japan

Incompressible high-Reynolds-number flows are simulated by solving the Navier-Stokes equations. A finite-difference method with third-order upwinding are employed without using any turbulence model. Also multi-directional method is used. Unsolved problems in computation around an airfoil are attacked and new results are presented, which will make the possibility of computational approach widen substantially. Using the same approach we introduce a concept of an airfoil of negative thickness. Application of this concept is suggested.

INTRODUCTION

Flow around an airfoil is one of the most fundamental problems in aerodynamics. Many simulations have been done but there are some important problems still remain unsolved. Those are very unsteady impulsively started flow and a flow at very high angle of attack and also computation using O-grid. In this paper, those difficult problems are attacked and solved and new results are presented, which will make the possibility of computational approach widen substantially. Using the same approach we introduce a concept of an airfoil of negative thickness. To increase the accuracy, we have developed a new finite-difference scheme named as multi-directional finite-difference method.

COMPUTATIONAL METHOD

The governing equations are the unsteady incompressible Navier-Stokes equations. For high-Reynolds-number flows, time-dependent computations are required owing to the strong unsteadiness. These equations are solved by a finite-difference method. The numerical procedure is based on the MAC method. The pressure field is obtained by solving the Poisson equation.

A generalized coordinates system is employed, so that enough grid points can be concentrated near the body surface where the no-slip condition is imposed.

False separation occurs if the grid is not well concentrated in the boundary layer, especially near the leading edge, where the flow velocity takes its maximum value.

All the spatial derivative terms are represented by the central difference approximation except for the convection terms. For the convection terms, the third-order upwind difference is used. This is the most important point for high-Reynolds-number computations.

There is another important problem in high-order upwind schemes. That is, the accuracy decreases when the flow direction is not well parallel to one of the coordinate lines. In generalized coordinate system, near the boundary, the flow direction and one of the coordinate lines are almost parallel if the flow is well attached, and this problem is not serious. However, if the flow separates, the flow direction becomes no more parallel to a coordinate line and the problem become very serious

To overcome this problem we introduced the multi-directional upwind method. A non-staggered mesh system is employed where the defined positions of velocity and pressure are coincident.

For the temporal integration of the Navier-Stokes equations, the Crank-Nicolson purely implicit scheme is utilized. This scheme has second-order accuracy in time. These equations and the Poisson equation are iteratively solved at each time step by the successive overrelaxation (SOR) method.

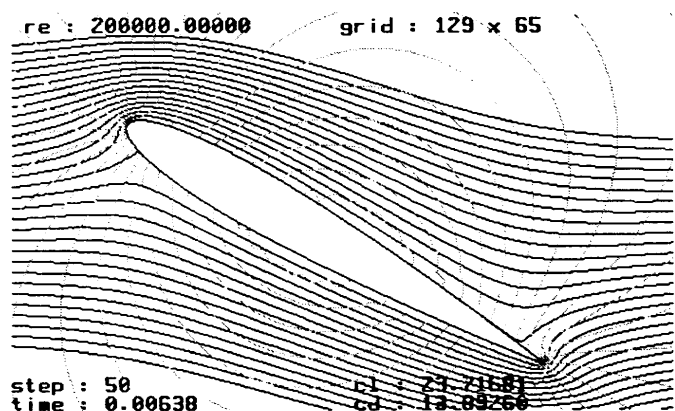
COMPUTATIONAL RESULTS

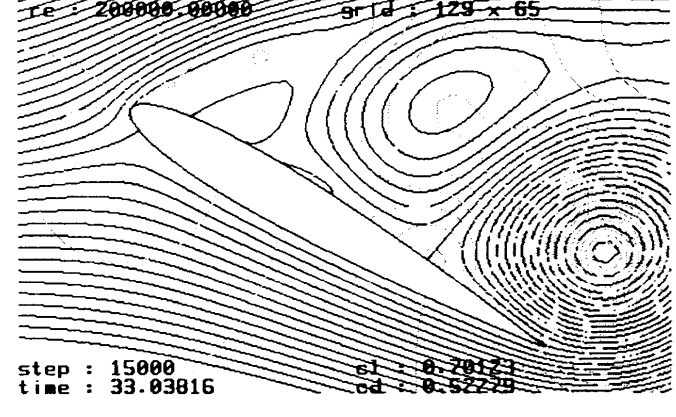
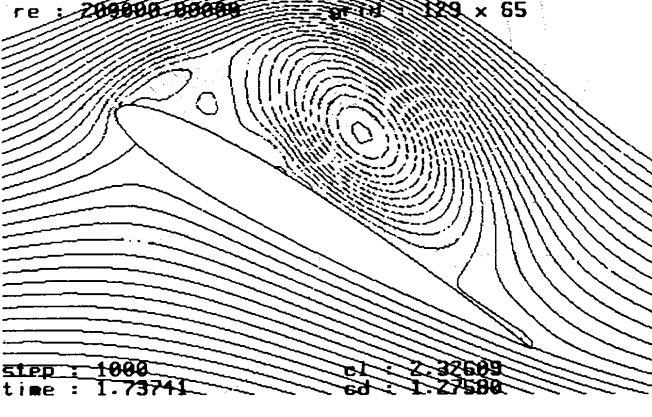
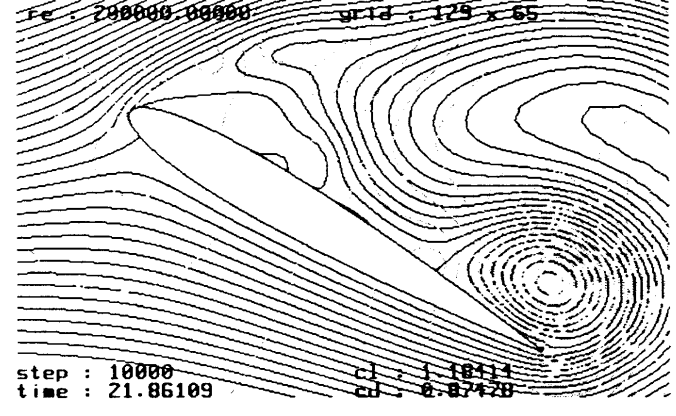
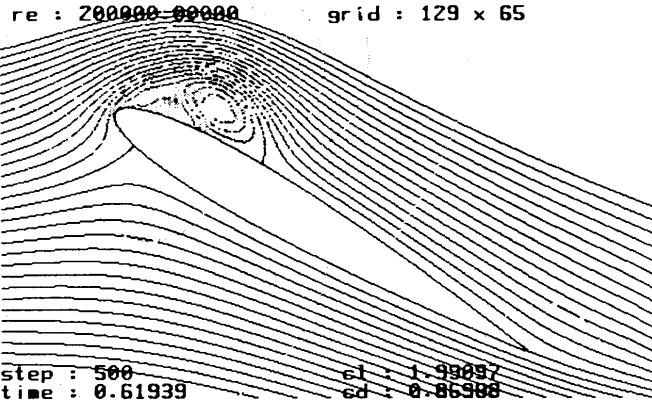
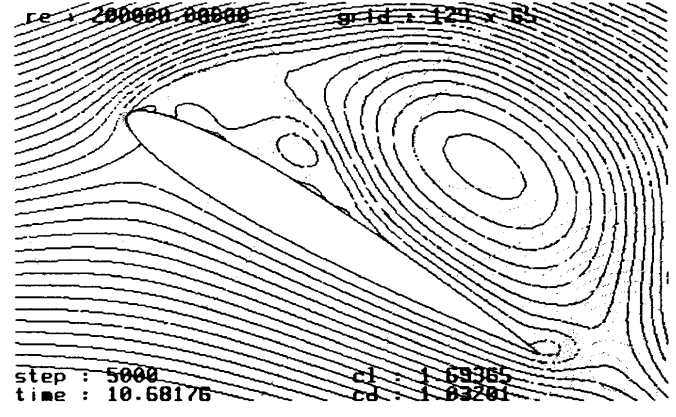
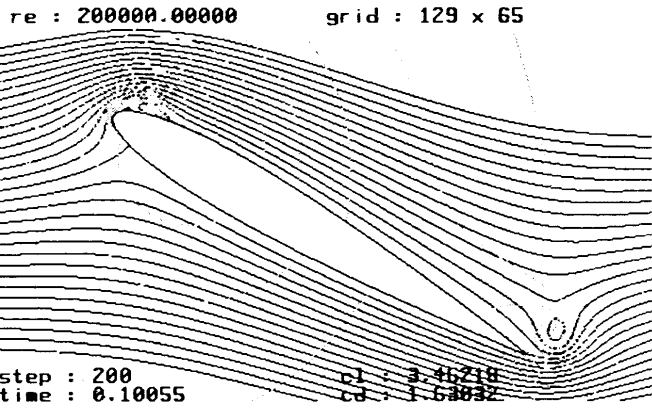
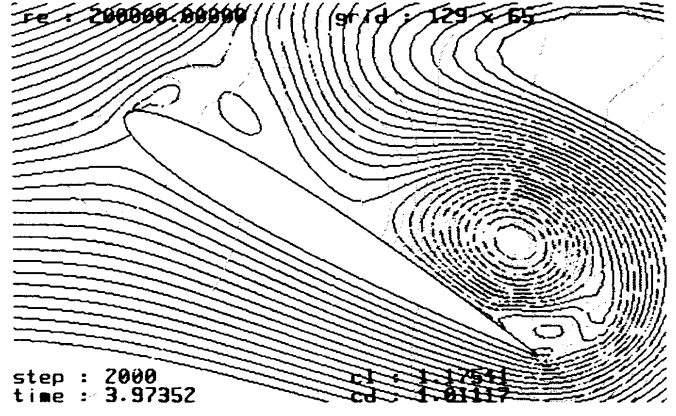
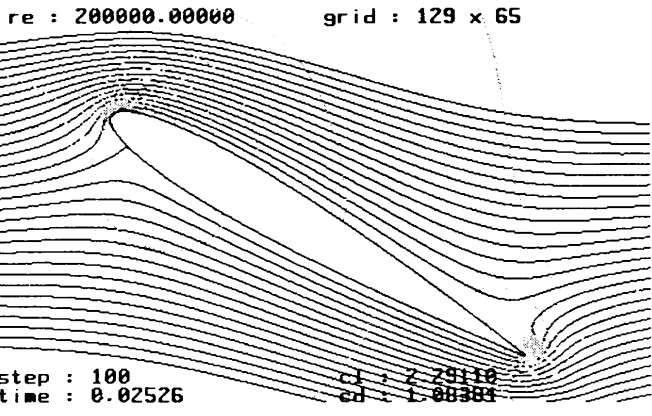
Flow around an airfoil is a standard problem, but unsteady computations have rarely been done. At high angle of attack, the flow becomes very unsteady and to understand the flow well we need an unsteady simulation.

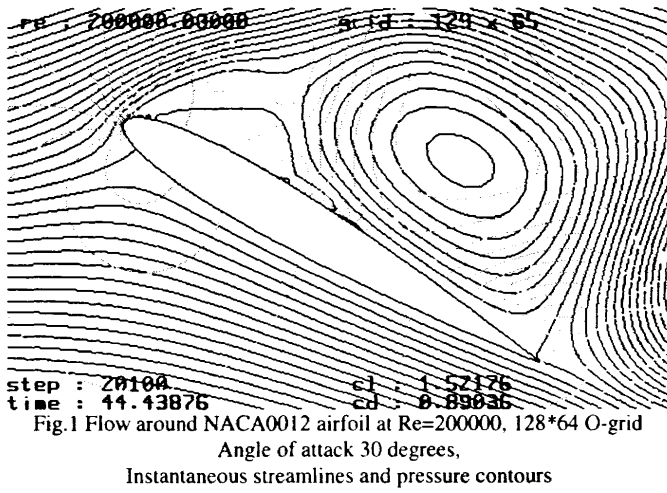
For airfoil simulation, C-grid is usually used to avoid the trailing edge singularity. To make C-grid is not easy for very high angle of attack, and this is another reason of the difficulty to simulate the flow at very high angle of attack. Also C-grid needs unnecessarily concentrated grid points in the near wake region beginning from the trailing edge. This make the computation more unstable.

On the other hand O-grid is, in every sense, much better if the computation converges. The multi-directional finite-difference method makes the computation very stable even near the singular points.

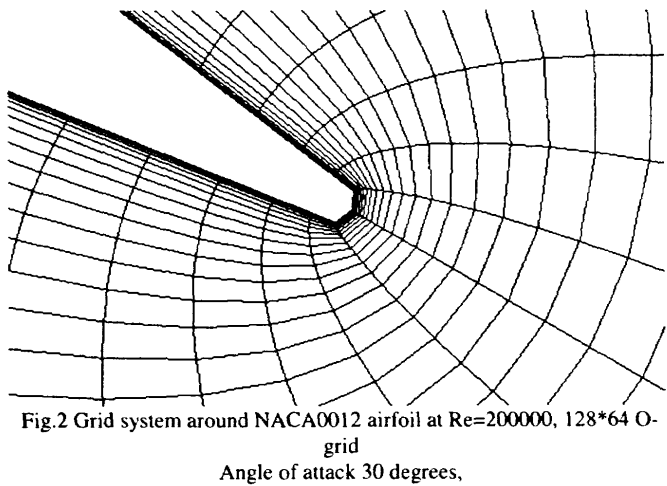
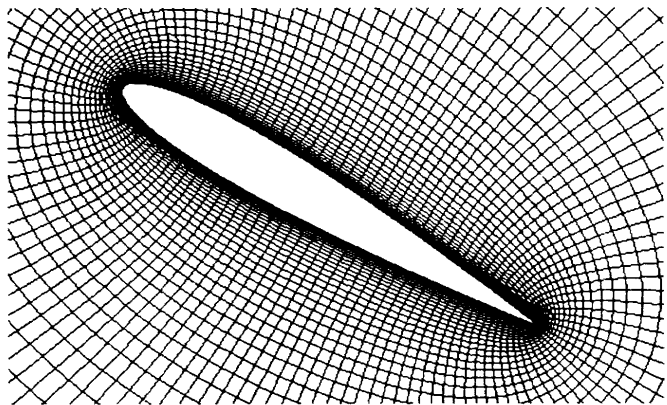
- 1) The first example is a impulsively started flow around an NACA0012 at angle of attack 30 degrees. Figure 1 shows the development of the flow field. At initial stage almost potential flow is formed. Then, to cancel the singularity at the trailing edge, a small in size but strong vortex appears. Then Kutta condition is satisfied there. At the same time leading separation begins. This separation becomes larger until next trailing separation takes place. Finally Karman vortex street is formed.







In this computation and all of the following ones, the Reynolds number is fixed as 200000. O-grid system is employed.



2) As an extreme case of high angle of attack computation, 90 degree attack angle case is simulated. Even in this case computation is very stable, and reasonable results are obtained.

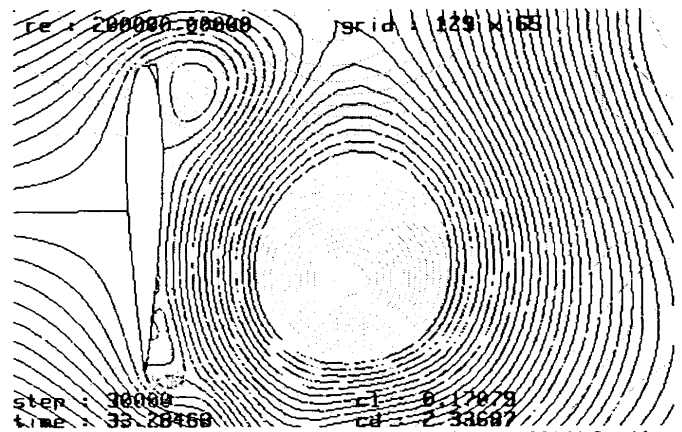
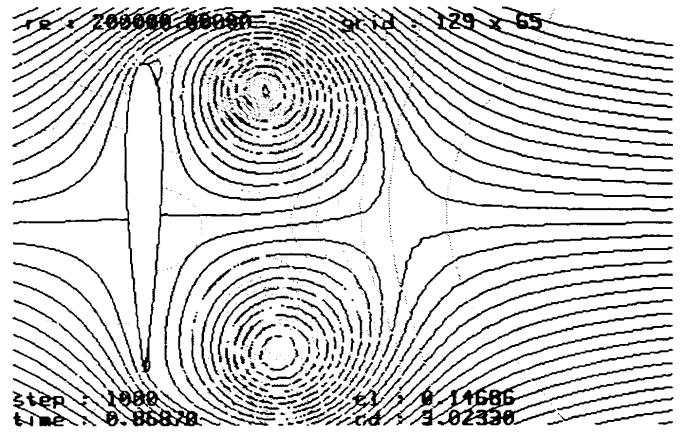
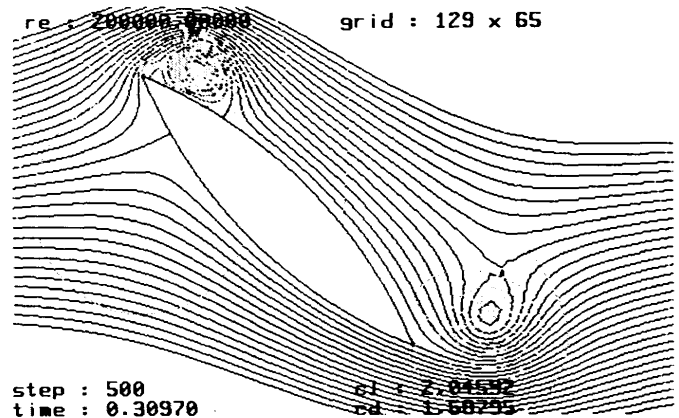
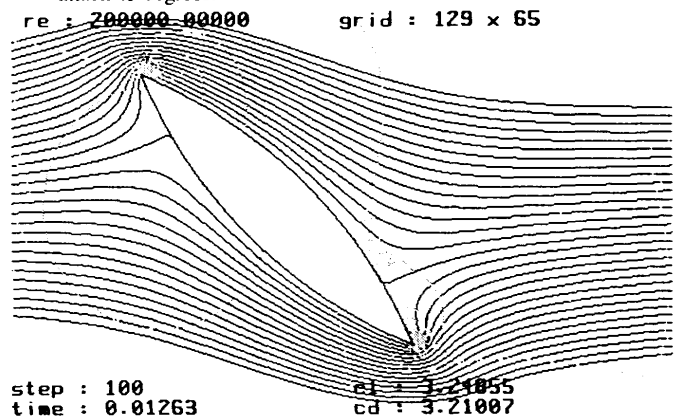


Fig.3 Flow around NACA0012 airfoil at Re=200000, 128*64 O-grid Angle of attack 90 degrees, Instantaneous streamlines and pressure contours

3) The above results suggest that even singular leading edge can be handled. Then impulsively started flow around a circular-arc airfoil is computed. Initially almost potential flow is formed, and flow developed as expected. The thickness is 20% and the angle of attack 45 degrees.



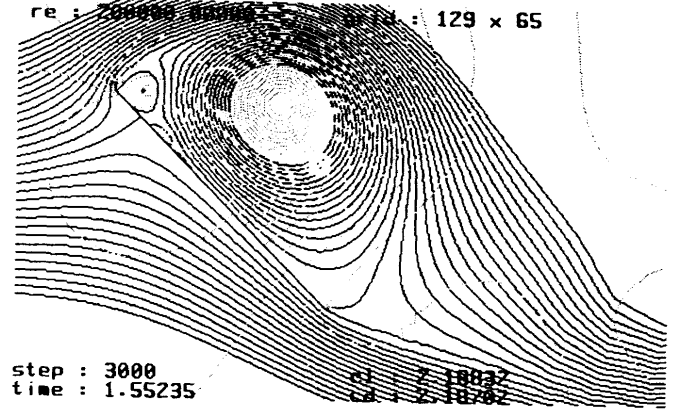
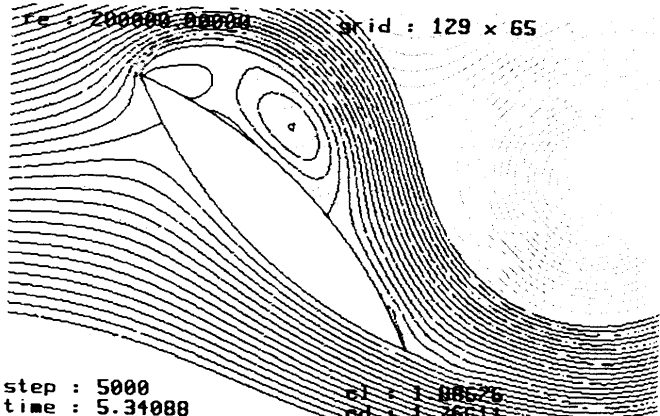
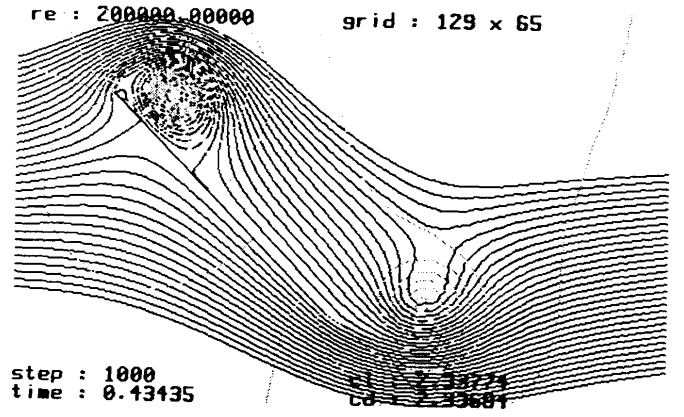
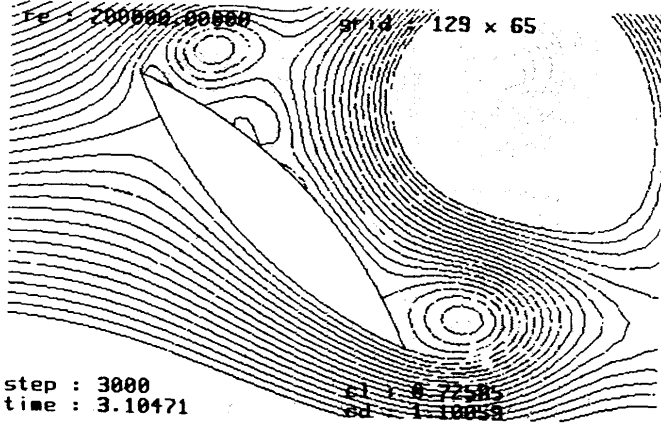
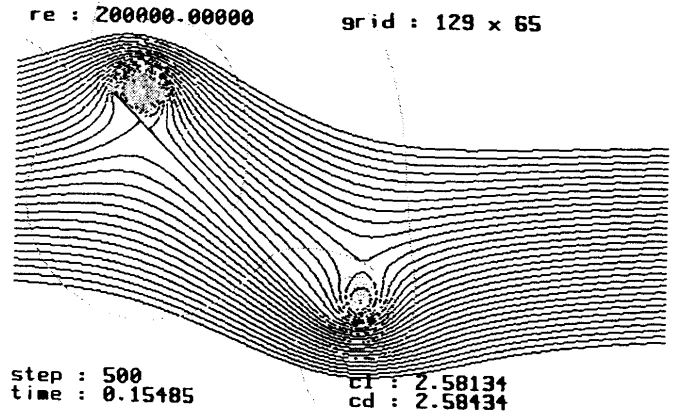
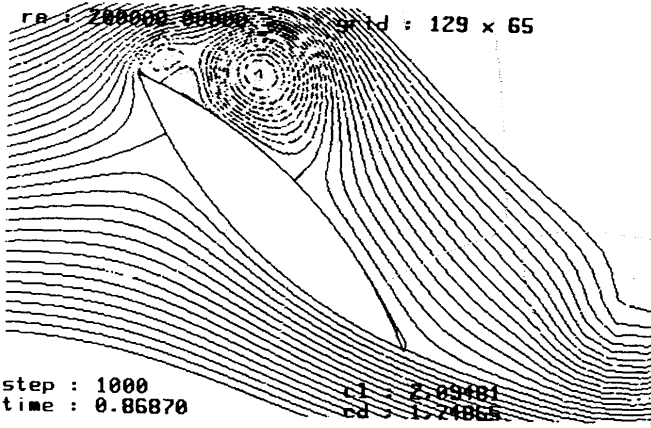


Fig.4 Flow around a circular-arc airfoil at $Re=200000$, 128×64 O-grid
 Angle of attack 45 degrees,
 Instantaneous streamlines and pressure contours

4) If circular arc airfoil can be treated, the thickness can be zero. This means that flow around a pure flat plate can be computable. The results is the following:

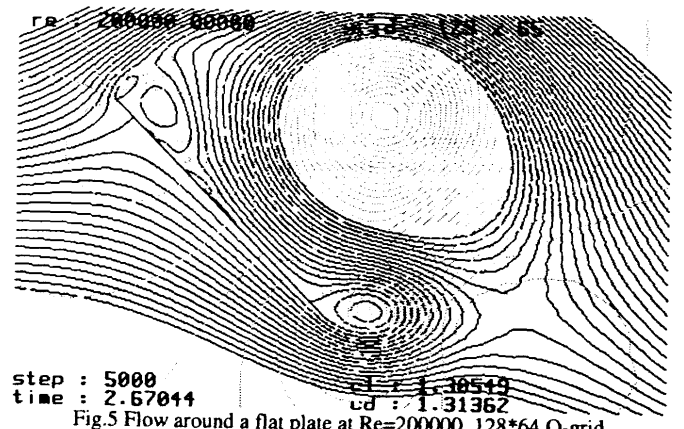
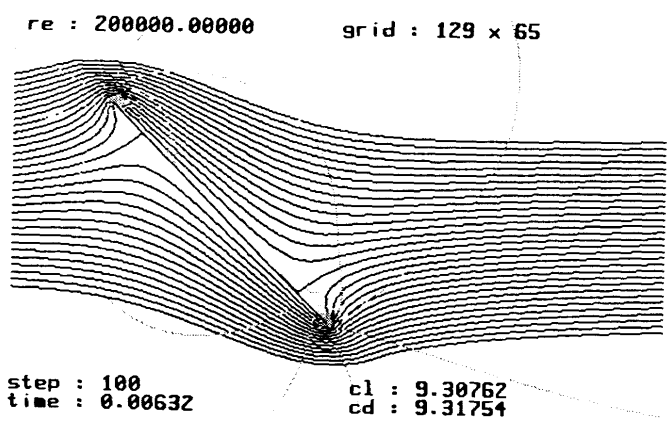


Fig.5 Flow around a flat plate at $Re=200000$, 128×64 O-grid
 Angle of attack 45 degrees,
 Instantaneous streamlines and pressure contours

5) Moreover, the thickness can be negative.

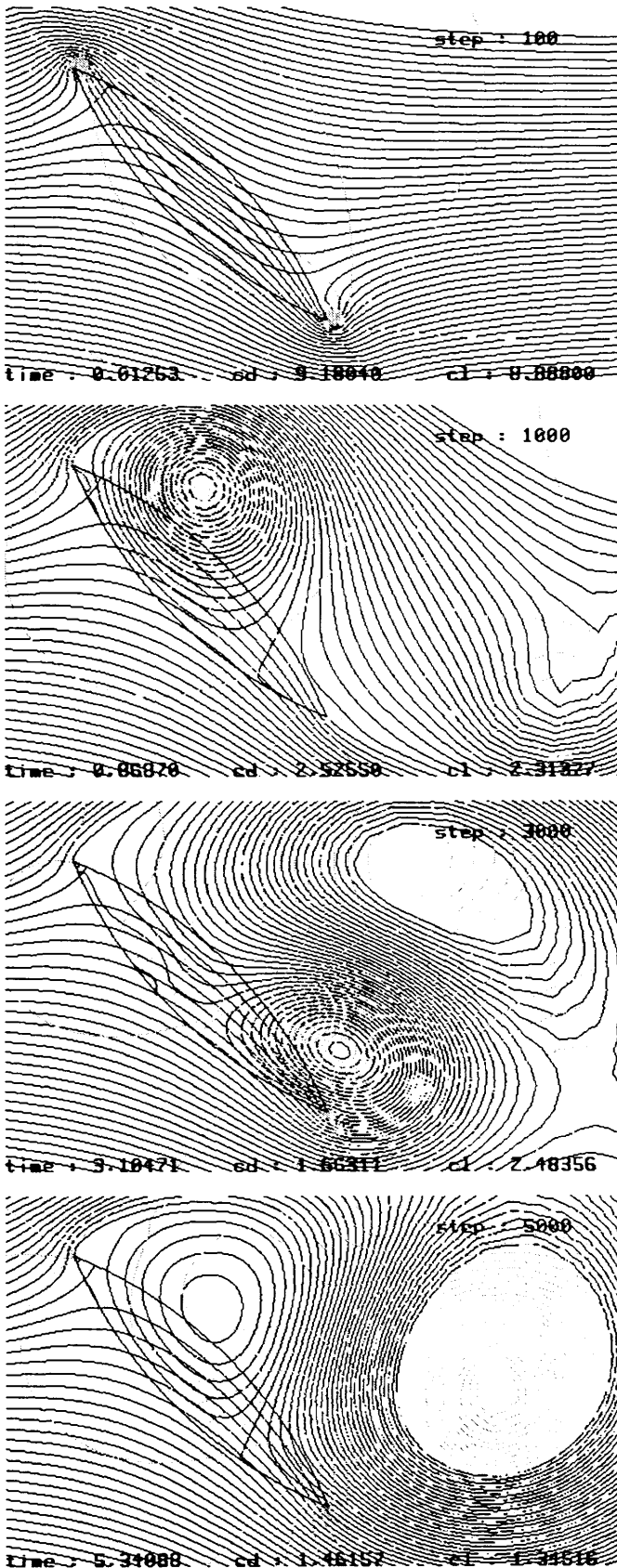


Fig.6 Flow around a circular-arc airfoil of 20% negative thickness at $Re=200000$, 128×64 O-grid, angle of attack 45 degrees, Instantaneous streamlines and pressure contours

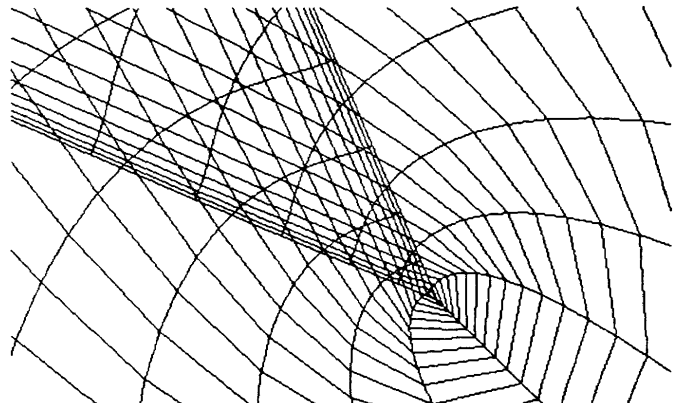
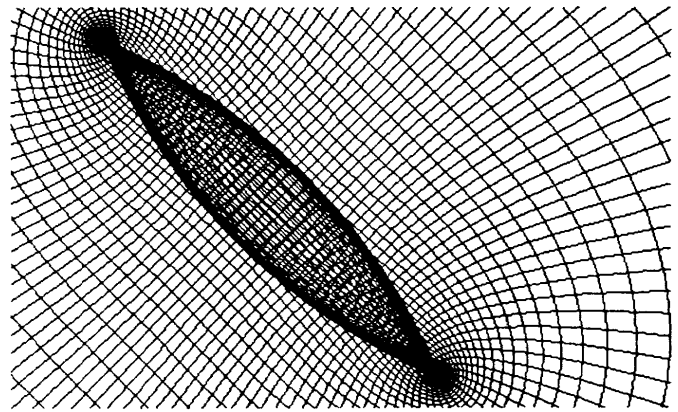
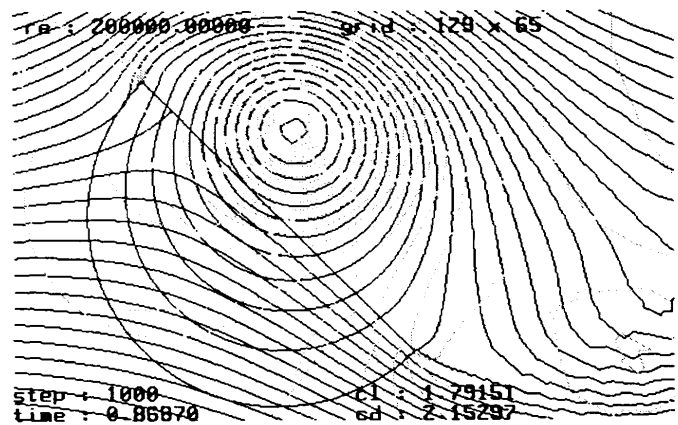


Fig.7 Grid system around a circular-arc airfoil of 20% negative thickness at $Re=200000$, 128×64 O-grid, angle of attack 45 degrees,

From the figures of the grid system, what negative thickness means can be easily understandable.

- 6) One of the interesting application of the negative thickness concept is illustrated by the following example. This is the flow past a flat plate but there is no plate in the lee side. There hemicircle is attached in the negative side, therefore oncoming flow interacts strongly with the flat plate but in the lee side flow does not interact with the plate. By pursuing these type of flow we would be able to understand the interaction of flow with an obstacle more deeply.



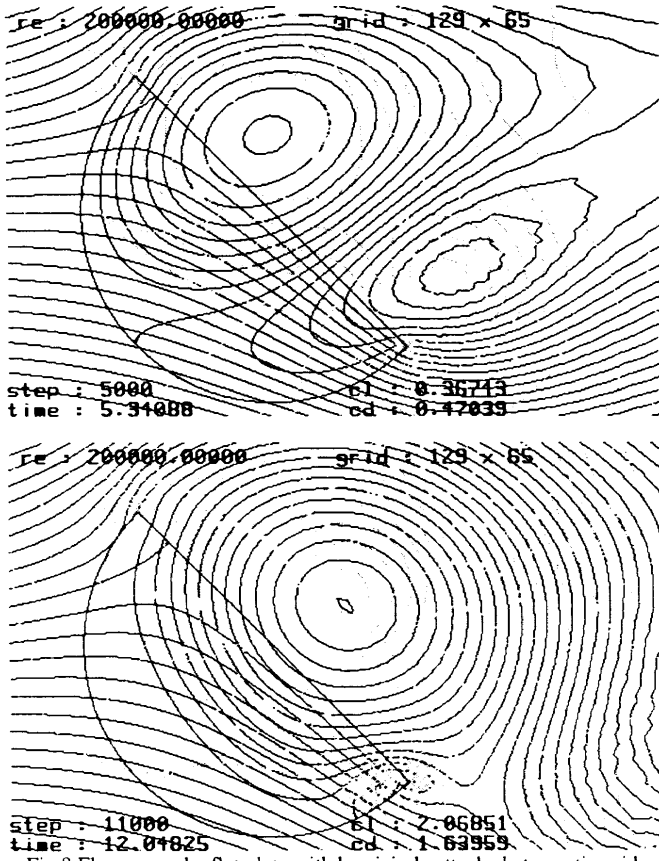


Fig.8 Flow around a flat plate with hemicircle attached at negative side
 at $Re=200000$, 128×64 O-grid, angle of attack 45 degrees,
 Instantaneous streamlines and pressure contours

This flow is very different from that around a simple flat plate. This suggests that even the lee side of a body plays a very important role to determine the wake structure.

CONCLUSIONS

It has been found that, by using the present finite difference method, most of the difficulties of the incompressible flow around an airfoil has been overcome.

REFERENCES

- 1) K. Kuwahara: 'Computational Study of Incompressible flow by Finite-Difference Method', Proc. 14th NAL Symposium on Computational Aerodynamics, 1996.

極超音速化学平衡コードの検証

田頭 英臣*¹ 澤田 恵介*²

Development of a Numerical Scheme for Hypersonic Chemically Equilibrium Flows

by

Eishin Dendou*¹ Keisuke Sawada*²

ABSTRACT

An inviscid hypersonic flow field over a sphere is numerically simulated by solving the Euler equations with an equilibrium flow assumption. A detailed comparison of the stand-off distance as well as the shape of a detached bow shock wave with the available ballistics-range data is carried out. It is shown that the present chemically equilibrium flow solver can give reasonably accurate predictions of hypersonic flow fields in equilibrium range.

1.はじめに

近年、計算機や計算手法の発達によって、極超音速流の数値計算は飛躍的な進歩を遂げ、今日では平衡化学反応を仮定した流れのみならず、非平衡化学反応を仮定した流れも日常的に解かれるようになった。特に平衡流れの計算は非平衡流れの計算に比べ計算量が少なく、既存の数値解析コードの簡単な修正で求めることができるため、1960年代に衛星再突入時の流れ場解析に用いられて以来、重要な設計ツールとして多用されている。しかし、化学平衡流れの数値解析結果と実験データとの詳細な比較は、今日に至るまで一度も報告されておらず、平衡流れの計算に関する検証が十分に成されているとは言い難い。

検証計算を行うには上流側の気体組成等が明らかでなければならない。バリスティックレンジは静止気体中に試験体を打ち出すので、実際の飛行状態を最も正確に再現できると共に、計算に必要な上流条件も完全に記述できる。

本研究では平衡化学反応を仮定した極超音速流れに対する数値解法を開発し、鈍頭物体周りに生じる衝撃波の離脱距離とその形状に関して、計算結果とアメリカのバリスティックレンジ実験データ[1]との詳細な比較を行い、化学平衡流解析コードの検証を試みた。

2.数値計算法

支配方程式は軸対称のオイラー方程式で、平衡気体に拡張した Steger-Warming の流束ベクトル分離法を用いたセル中心定義の有限体積法で離散化し、得られた差分方程式を陽的方法で解いた[2]。

時間積分法は、2段階2次精度のルンゲクッタ法で時間発展解を求めた。計算効率を高めるためにセルグループ分割法を用いている。また、高精度を維持するために原始関数に対して van Albada の勾配制限関数を適用した MUSCL 法を用いた。

*¹ 東北大学大学院 *² 東北大学工学部機械航空工学科

平衡気体への拡張にはヘルムホルツ自由エネルギー最小化法、curve fit 法、テーブル参照法の3つの方法があるが、本研究ではテーブル参照法を適用して、平衡気体の諸量を求めている。

3. 平衡気体状態量の参照

密度及び単位質量当たりの内部エネルギーによって張られる状態空間を密度 ρ が 10^{-6}kg/m^3 から 10kg/m^3 まで、内部エネルギー ϵ が $2.0 \times 10^5\text{J/kg}$ から $5.26 \times 10^7\text{J/kg}$ までの範囲を対数軸上で 71×94 に分割した(図 1)。次に格子点上での平衡状態の諸量(圧力、エンタルピ)と微分値(密度の圧力微分、密度のエネルギー微分)を自由エネルギー最小化法で求めた。

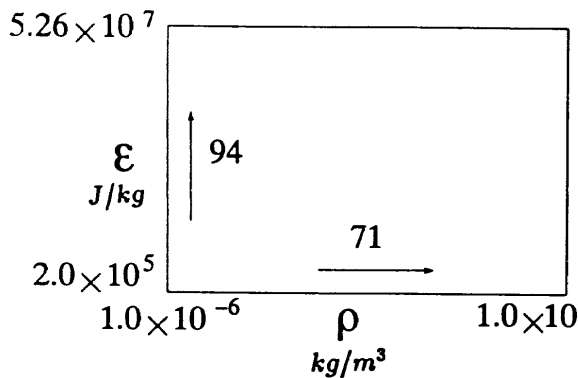


図 1 テーブルの与え方

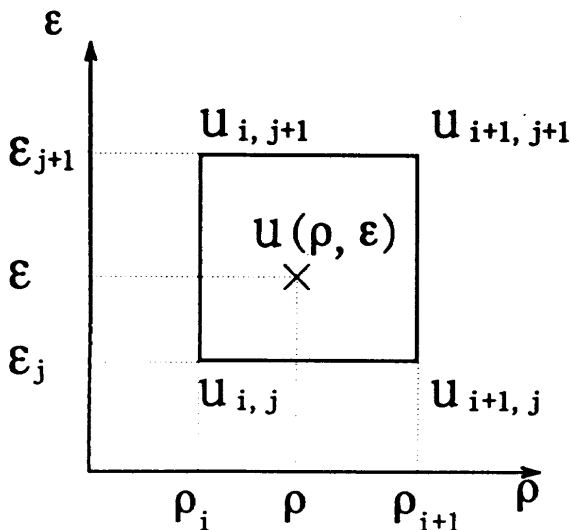


図 2 補間法

図2に示すように格子点上以外での平衡状態の諸量は格子点上で定義されている値を補間して求めた。すなわち、密度 ρ とエネルギー ϵ がそれぞれ領域 $\rho_i \leq \rho < \rho_{i+1}, \epsilon_j \leq \epsilon < \epsilon_{j+1}$ を満たすとき 2 変数関数 $u(\rho, \epsilon)$ を次式で与える。

$$u(\rho, \epsilon) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N c_{i,j}^{m,n} (\rho - \rho_i)^m (\epsilon - \epsilon_j)^n$$

本研究では $M=1, N=1$ の場合、すなわち双線形補間を用いて周囲の格子点における値から平衡状態の諸量を決定した。格子点 (i, j) における $c_{i,j}^{m,n}$ の値は以下のように与えられる[3]。

$$c_{i,j}^{0,0} = u_{i,j}$$

$$c_{i,j}^{1,0} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta \rho_i}$$

$$c_{i,j}^{0,1} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta \epsilon_j}$$

$$c_{i,j}^{1,1} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}}{\Delta \rho_i \Delta \epsilon_j}$$

$$\Delta \rho_i = \rho_{i+1} - \rho_i, \quad \Delta \epsilon_j = \epsilon_{j+1} - \epsilon_j$$

4. バリステックレンジ

計算結果との比較には AEDC での実験結果を用いた[1]。図 3 に AEDC のバリステックレンジの概略図を示す。

バリステックレンジは巨大な空気銃のようなもので、その作動原理を図 4 に示す。まず、火薬室の内部に点火する。このとき燃焼ガスによる圧力が隔膜 1 の破断圧をこえると、隔膜 1 が破れピストンを駆動する。ピストンはポンプ管内部に充填してある軽ガス(ヘリウム)を圧縮する。軽ガスの圧力が隔膜 2 の破断圧をこえると隔膜 2 が

破れ飛行体が加速され、観測部に高速で飛び込む。に刺さり込みながら止まり、高压ガスが後方に漏れた、ピストンは高压カップリングのテーパ部れるのをくいとめる。

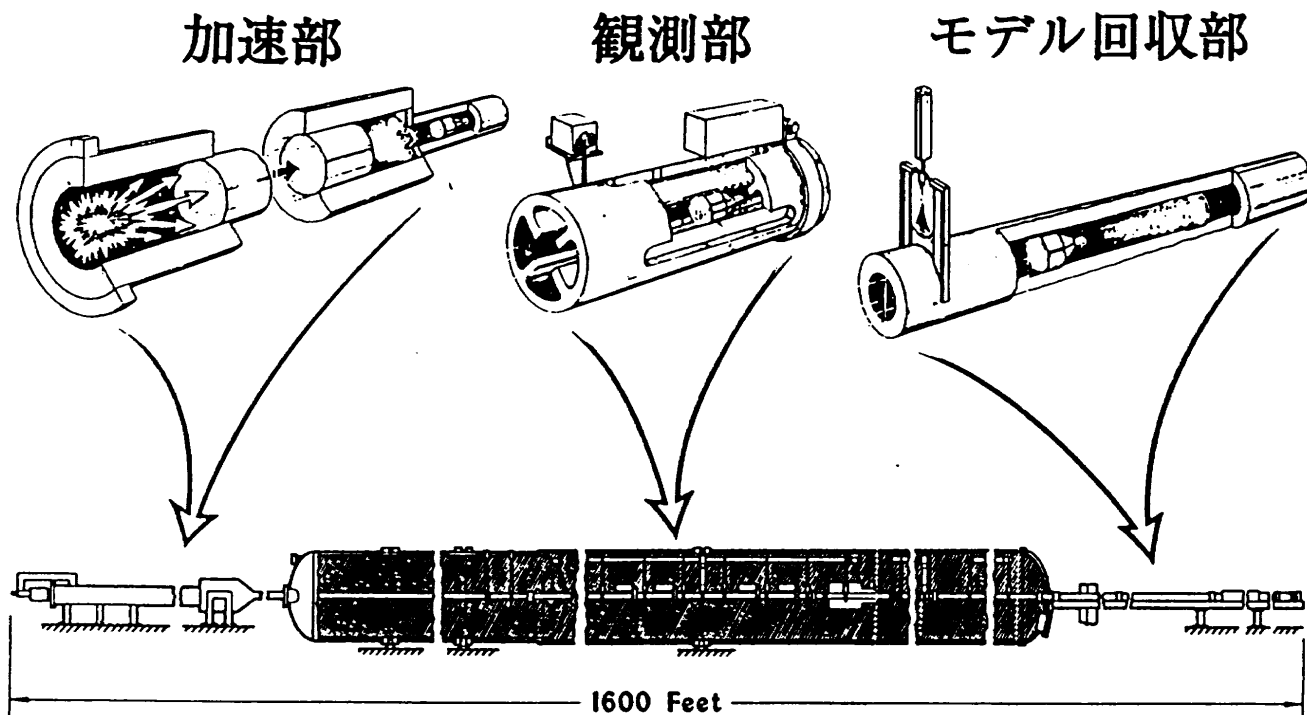


図3 バリステックレンジ概略図[1]

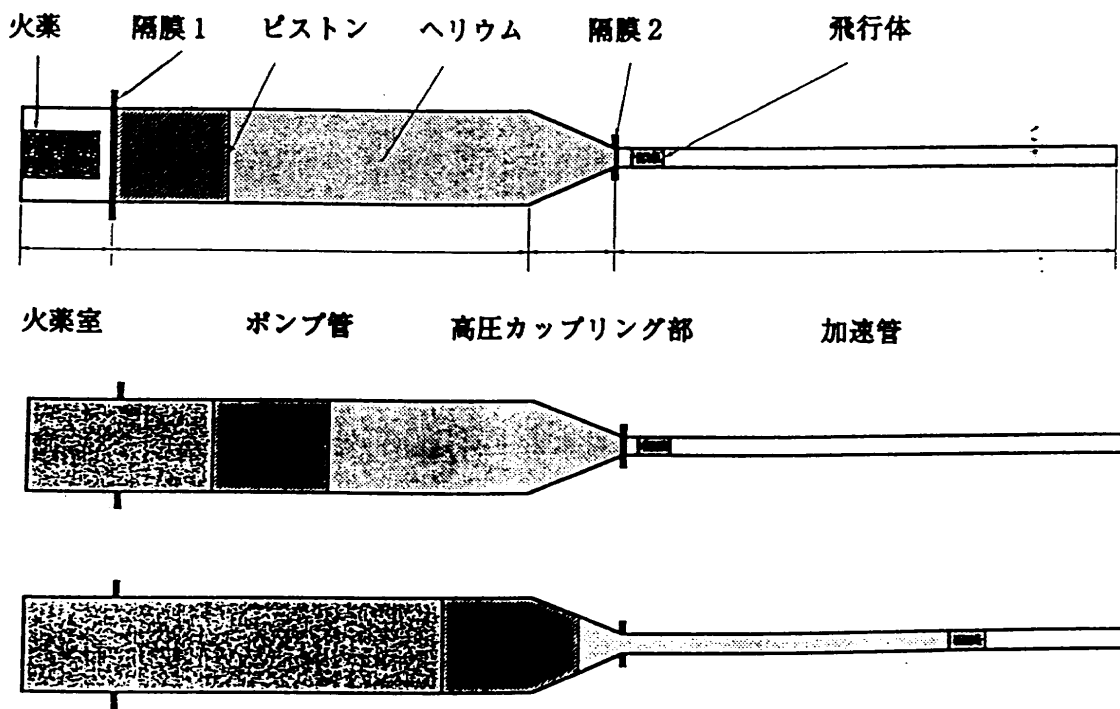


図4 バリステックレンジ作動原理[4]

5. 計算条件

平衡気体の計算条件を表1に、対応する理想気体の場合を表2に示す。表2中の比熱比 γ は実験データと計算結果の衝撃波離脱距離が一致するように決定した。

表1 計算条件 (平衡気体)

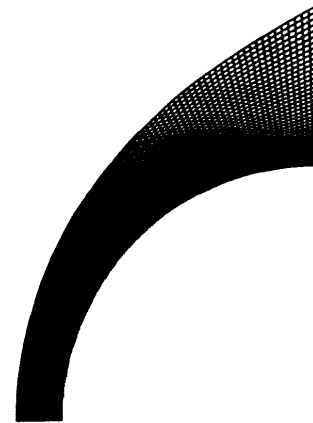
実験番号	密度 (kg/m ³)	温度 (K)	マッハ数	NOSE 半径 (cm)
NO.1	0.469	296.5	12.1	2.86
NO.2	0.235	296.7	12.3	2.86
NO.3	0.235	295.8	13.6	2.86
NO.4	0.157	294.1	13.5	2.86
NO.5	0.195	297.8	13.6	2.86
NO.6	0.235	297.8	13.7	2.03

表2 計算条件 (理想気体)

実験番号	マッハ数	比熱比 γ	NOSE 半径 (cm)
NO.1	12.1	1.21	2.86
NO.2	12.3	1.22	2.86
NO.3	13.6	1.22	2.86
NO.4	13.5	1.22	2.86
NO.5	13.6	1.22	2.86
NO.6	13.7	1.22	2.03

6. 計算結果

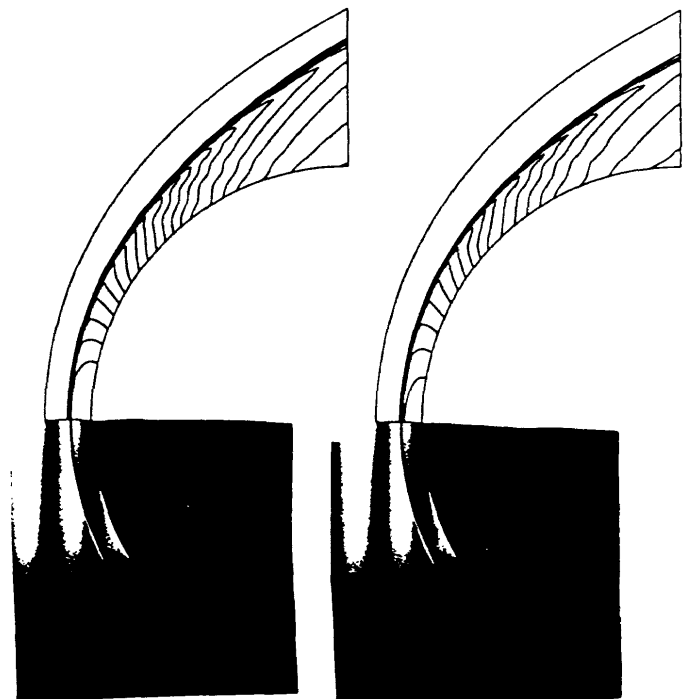
図5に計算格子を示す。計算格子は構造格子で91×51である。図6,7,8には写真に写った衝撃波形状が比較的良好に判別できるNO.1, NO.4, NO.6の実験データと計算結果の比較を示す。計算結果は等圧線であり、実験はシュリーレンによって可視化されている。図6,7,8(a)は平衡気体の計算結果(上半分)と実験結果(下半分)の比較である。また、図6,7,8(b)に理想気体の計算結果(上半分)と実験データ(下半分)との比較を示す。



(91×51)

図5 計算格子 (構造格子)

NO.1の実験におけるマッハ数は12.1, 飛行体のノーズ半径は2.86cmで、観測部における静止空気の密度は0.469kg/m³, 温度は296.5 Kである。



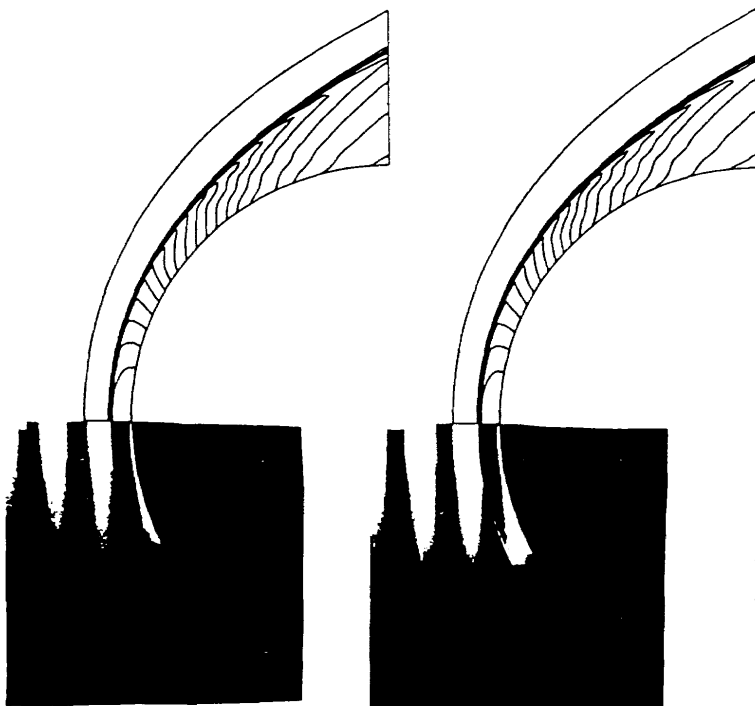
(a) 平衡気体

(b) 理想気体

図6 NO.1の実験結果と計算結果の比較

図6から実験結果に比べ平衡気体計算結果の衝撃波離脱距離がわずかに長くなった。理想気体の計算では $\gamma = 1.21$ のとき衝撃波離脱距離が実験データと一致した。

NO.4 でのマッハ数は 13.5, ノーズ半径は 2.86cm で、観測部における静止空気の密度は 0.157kg/m^3 , 温度は 294.1 K である。

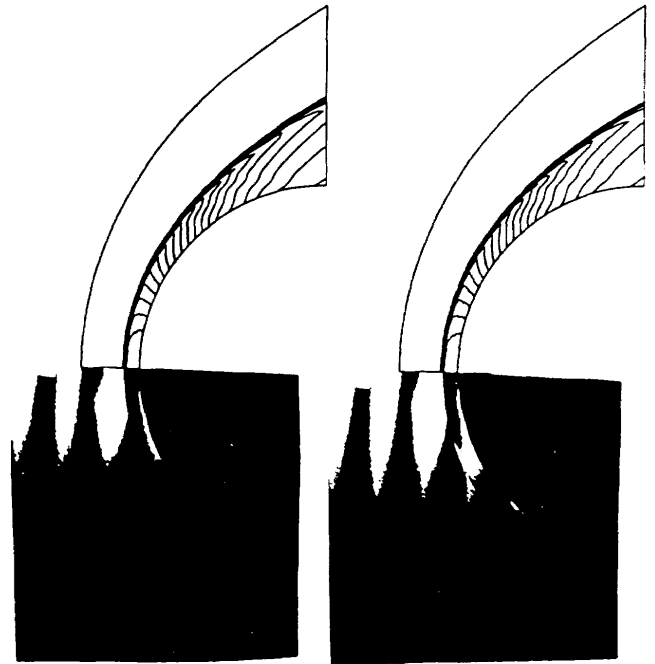


(a)平衡気体 (b)理想気体

図7 NO.4の実験結果と計算結果の比較

図7から実験結果と平衡気体の計算結果の衝撃波離脱距離がだいたい一致した。理想気体の計算では $\gamma = 1.22$ のとき衝撃波離脱距離が実験データと一致した。

NO.6 でのマッハ数は 13.7, ノーズ半径は 2.03cm で、観測部における静止空気の密度は 0.235kg/m^3 , 温度は 297.8 K である。



(a)平衡気体 (b)理想気体

図8 NO.6の実験結果と計算結果の比較

この場合も実験結果と平衡気体の計算結果の衝撃波離脱距離がだいたい一致した。理想気体の計算では $\gamma = 1.22$ のとき衝撃波離脱距離が実験データと一致した。

次に、NO.4 の条件に対する平衡気体、及び理想気体の計算で求めた衝撃波形状と、衝撃波離脱距離の比較を図9に示す。

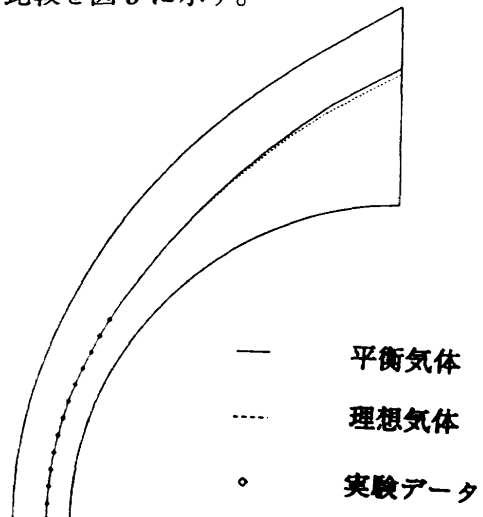


図9 NO.4の衝撃波形状の比較

実線は平衡気体、点線は理想気体、シンボルは実験データを示す。平衡気体と理想気体の衝撃波形状を比較すると、よどみ点付近ではだいたい一致しているが、よどみ点から離れるにしたがって平衡気体の衝撃波の方が広がっている。これは理想気体の計算では全場で $\gamma=1.22$ としたのに対し、平衡気体の計算ではよどみ点を離れるにしたがって衝撃波が弱くなり γ の値が大きくなるからである。

実験データと計算結果の衝撃波形状を比較すると、写真に写った範囲では平衡気体、理想気体共に実験データとよい一致を示している。

7. 議論

前章で示した計算結果から平衡計算で得られた衝撃波離脱距離は実験データと比較するとよい一致を示した。しかし、NO.1の計算結果は実験データと比べて衝撃波離脱距離がわずかに長くなった。

実験データと計算結果の衝撃波離脱距離が一致しない原因として以下の可能性が考えられる。まず第一に、正確な衝撃波の位置をとらえるには本研究で使用した格子では粗いと思われる。衝撃波の位置をより正確にとらえるには、より密な格子か解適合格子を使用する必要がある。第二に、密度及び単位質量当たりの内部エネルギーによって張られる状態空間を本研究では 71×94 に分割したが、これが十分な分割数であるかを確かめる必要がある。第三に、粘性を無視していることが挙げられる。本計算条件ではレイノルズ数が $O(10^7)$ で、十分に発達した層流境界層でもその厚さは衝撃波離脱距離の高々0.3%にすぎない。しかしながら、粘性を無視できるかは今後の研究の中で明らかにする必要がある。

以上は計算上で考えられる誤差の原因であるが、実験上の誤差も考えられる。露光時間は有限であるので、この時間内にも飛行体は移動する。そのため写真には露光終了直後の飛行体が写り、衝撃波は露光開始直前と露光終了直後の平均的

イメージとして写真に写るため、衝撃波離脱距離を短く見積もってしまう恐れがある。AEDCの実験では光源としてルビーレーザーを使用しているので、本実験データでは最悪の場合0.1mm程度、衝撃波離脱距離が短く見積もられてしまう可能性がある。これは衝撃波近傍の計算格子間隔の約50%にあたる。

現在、東北大学流体科学研究所のバリステックレンジに露光時間の短いYAGレーザーを組み合わせ、露光時間の影響を抑えた実験が計画されており、得られた実験結果との比較を今後進めていく予定である。また、この実験では飛行体周囲を広範囲に写すことができるので、より詳細な衝撃波形状の比較・検討を行い、化学平衡コードの定量的な検証を行いたい。

8. 結論

平衡化学反応を仮定した極超音速流れに対する数値解法を開発し、計算結果とバリステックレンジによる実験結果との比較を行った。平衡気体計算結果と実験データの衝撃波離脱距離はよい一致を示した。平衡気体コードと理想気体コードでは衝撃波形状がわずかに異なった。

参考文献

- [1] Daniel C. Reda, "Correlation of Boundary-Layer Transition Data Measured in Ballistics-Range Experiments," Sandia Laboratories.
- [2] M. Vinokur and Y. Liu, "Equilibrium Gas Flow Computations II. An Analysis of Numerical Formulations of Conservation Laws," AIAA paper 88-0127, 1988.
- [3] Y. Liu and M. Vinokur, "Equilibrium Gas Flow Computations I. Accurate and Efficient Calculation of Equilibrium Gas Properties," AIAA 89-1736, 1989.
- [4] 小越教雄, "高速飛行体発射装置を用いた凝縮媒体中の衝撃波伝播に関する研究," 平成7年度東北大学大学院修士学位論文.

超音速輸送機の前縁ボルテックス・フラップ周りの流れの数値解析

檜垣 郷子*¹, 前川 昭二*²

Numerical Analysis of Supersonic Transport's Leading-Edge Vortex Flaps

by

Kyoko Higaki*¹, Shoji Maekawa*²

ABSTRACT

The supersonic transports often have a delta or delta-like wing for the main wing. It is known that the lift to drag ratio of a delta or delta-like wing at a take-off and landing condition is not so good. The leading-edge vortex flap can improve the lift to drag ratio of the wing by forming a leading-edge vortex on the flap. The 3-D Navier-Stokes calculation was carried out to clarify the flow field around the supersonic transport cranked arrow wing equipped with leading-edge vortex flaps.

1. はじめに

次世代超音速輸送機のように高速飛行する航空機には、超音速飛行時の空力特性の向上のため、デルタ翼、または類似形状の主翼が用いられる。このような主翼が迎角を取ると前縁剥離渦が発生し、渦による吸引力により揚力が増加する（これを渦揚力という）。しかし、この吸引力は迎角を取ることにより後ろ向き成分も持ち抗力を発生するため、揚抗比は低下する。渦揚力の全揚力に占める割合は迎角が増えるに従い大きくなり、高迎角域に於いては全揚力の1/3以上となる。このため離陸上昇時の様に高迎角を取る必要のある場合は揚抗比の低下が著しく、機体規模が大きくなる原因となる。

離陸上昇時の揚抗比を改善するには、翼面上から剥離渦を完全に取り除く前縁フラップなどが考えられるが、渦を完全に取り除くには前縁フラップ舵角をかなり大きくとることとなるため、フラップのヒンジ線後方で剥離を起こし、結局空力特性を悪化させてしまうこととなる。逆に、積極的に渦を利用し揚抗比を改善しようというのが、ボルテックス・フラップの発想である。ボルテックス・フラップとは、主翼前縁に取付けられた下方に折り曲げることのできるフラップであり、フラップ面を下方に適切な角度だけ折り曲げることによりフラップ面上に前縁剥離渦を形成することができる。この時渦による吸引力がフラップ面上に垂直に働くことにより前向きの力が発生し、揚抗比が改善される。特に、ボルテックス・フラップ面上にフラップ幅とほぼ等しい大きさの前縁剥離渦が生じている時に最大の吸引力が働き、揚抗比が最も向上するとされている¹⁾。

今回、このボルテックス・フラップを次世代超音速輸送機主翼に取付けた形状について、3次元ナビヤ・ストークス解析を行ったので報告する。

2. 解析モデル

解析に用いる形状は、次世代超音速輸送機として設計されたクランクト・アロー翼とし、ボルテックス・フラップは後縁フラップ取付け時のトリム変化を緩和できると考えられるコード長一定のものとした²⁾³⁾。フラップ舵角は20°、40°、及び60°の3舵角とした。図1に、機体の平面形、及び主要諸元を示す。なお、解析は主翼のみで行った。

3. 解析方法

今回解析に用いた計算格子は、格子点数 約150万点(93×155×101)のC-H型構造格子である。図2にフラップ舵角20°の計算格子を示す。

解析に使用したN. S. コードは、近似的LU分解によるLU-ADI解法により時間積分を行い、Fluxの計算にはChakravarthy-Osher型の風上差分法を用いたもので、乱流モデルにはBaldwin-Lomaxを用いている。

解析条件は、マッハ数:M=0.29、レイノルズ数:Re=1.855×10⁸である。

4. 解析結果

各形態の、表面圧力分布を図3に示す。図より、ボルテックスフラップなしのケースでは、主翼第一キック部分から後方に存在する負圧の強い領域により、渦の発生が分かる。この負圧領域は、ボルテックスフラップを取付けることにより主翼第一キックより上流を除いては主翼上に存在しなくなるため、渦のフラップ面への移動が考えられる。これは、図4に示した主翼上面のオイルフローからも同様である。

各形態の空間圧力分布と総圧分布を図5、6に示す。図

*¹富士重工業株式会社 Fuji Heavy Industries LTD.

*²日本航空機開発協会 Japan Aircraft Development Corporation

より、ボルテックスフラップなしのケースでは、かなり強い渦が主翼上面の全領域にかけて存在するが、この渦はボルテックスフラップのあるケースでは、主翼面からフラップ面に徐々に移動していくことが分る。舵角 $\delta f = 20^\circ$ においては、渦のかなりの部分がフラップ面上に形成されており、 L/D の向上が期待されるが、舵角の大きい $\delta f = 60^\circ$ の場合は、フラップヒンジラインにおける剥離によりフラップ面への翼面上の渦の移動が妨げられており、 L/D の向上はあまり期待できないと考えられる。図7に示した断面総圧分布、及び図8に示した断面速度ベクトルからも同様のことが言える。

図9に、ナビア・ストークス解析によるの C_L 、 C_D 、 C_M 、及び L/D を示す。図より、離陸評定 C_L において L/D が最も向上するのは、渦がほぼフラップ面上に形成されている舵角 $\delta f = 20^\circ$ であり、この時に C_D の値は最も小さくなっている。また、渦による上向きの力が、モーメント中心よりも前方に位置するフラップ面上に発生することから、他舵角に比べ C_M は頭上げ側となる。しかし、実際の機体では後縁フラップにより頭下げ側の C_M が発生するため、ボルテックスフラップと後縁フラップのスケジューリングにより、トリム変化の低減を達成できるという利点があると考えられる。

5. さいごに

今回行った3次元ナビア・ストークス解析により、ボルテックス・フラップが L/D 向上に有用であることの確認とボルテックス・フラップ周りの複雑な流れ場の把握をすることができた。今後は、風洞試験等により計算の検証を行っていきたいと考えている。

なお、本検討は通産省が(社)日本航空宇宙工業会に委託した「超音速輸送機開発調査」の一環として実施したものである。

6. 参考文献

- [1] K.Rinoie, J.L.Stollery, "Experimental Studies of Vortex Flaps and Vortex Plates", Journal of Aircraft, Vol.31, No.2, 1994, pp322-329
- [2] J.F.Marchman, III, "Leading Edge Vortex Flap Aerodynamics", Israel Journal of Technology, Vol.20, 1982, pp176-181
- [3] J.F.Marchman, III, A.C.Grants, "Trailing Edge Flap Influence on Leading Edge Vortex Flap Aerodynamics", AIAA-82-0128

主要諸元	
主翼面積	854.7m ²
翼幅	43.4m
MAC	27.5m
アスペクト比	2.2

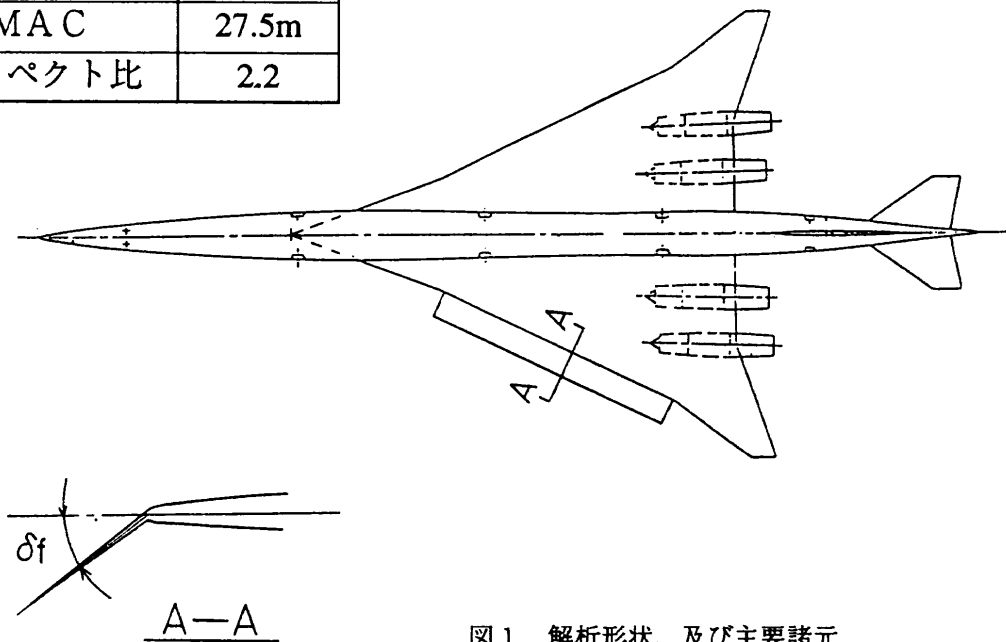


図1 解析形状、及び主要諸元

解析条件

JADC CADより
 $V_2 = 119 \text{ ktCAS}$

$M = 0.29$

$Re = 1.855 \times 10^8$

格子点数 : $93 \times 155 \times 101 = 150$ 万点

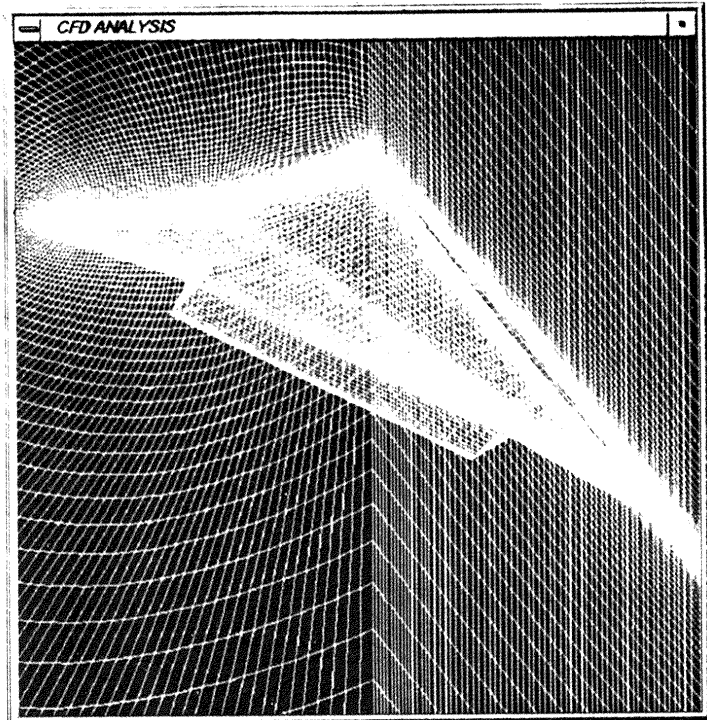


図2 計算格子 ($df = 20^\circ$)

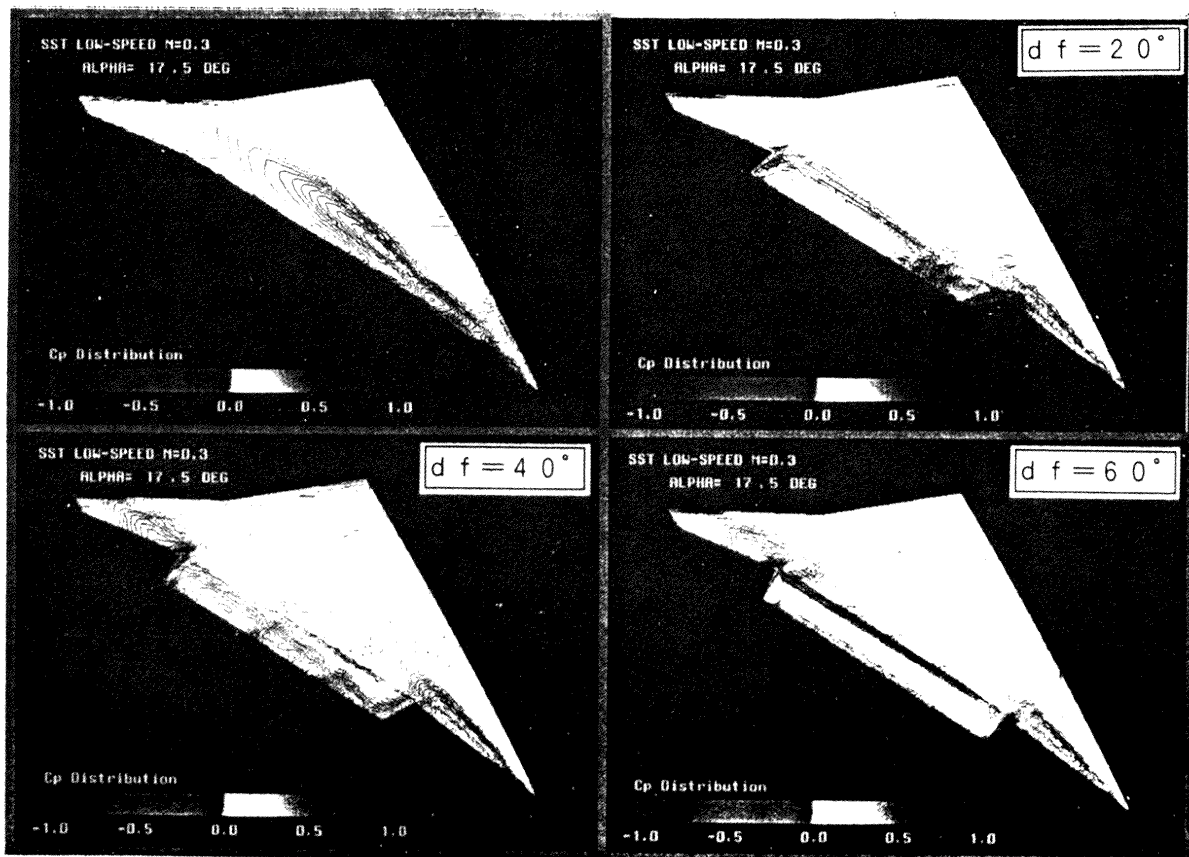


図3 3次元N. S解析結果 ~機体表面圧力分布

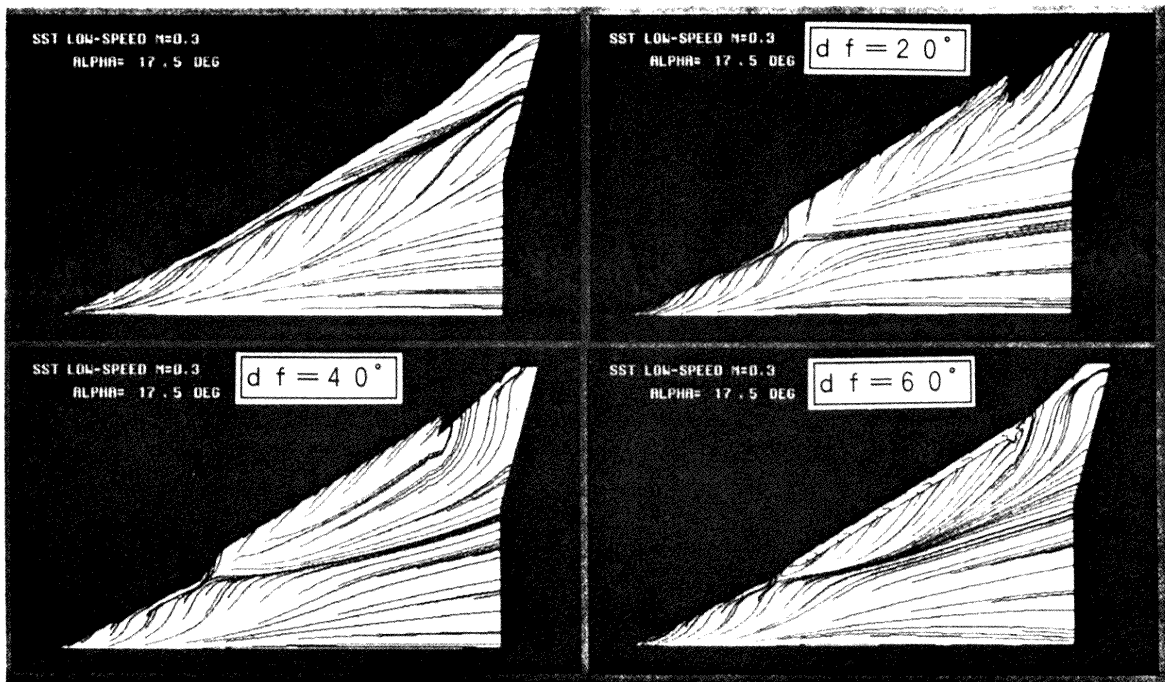


図4 3次元N. S解析結果 ～オイル・フロー・イメージ

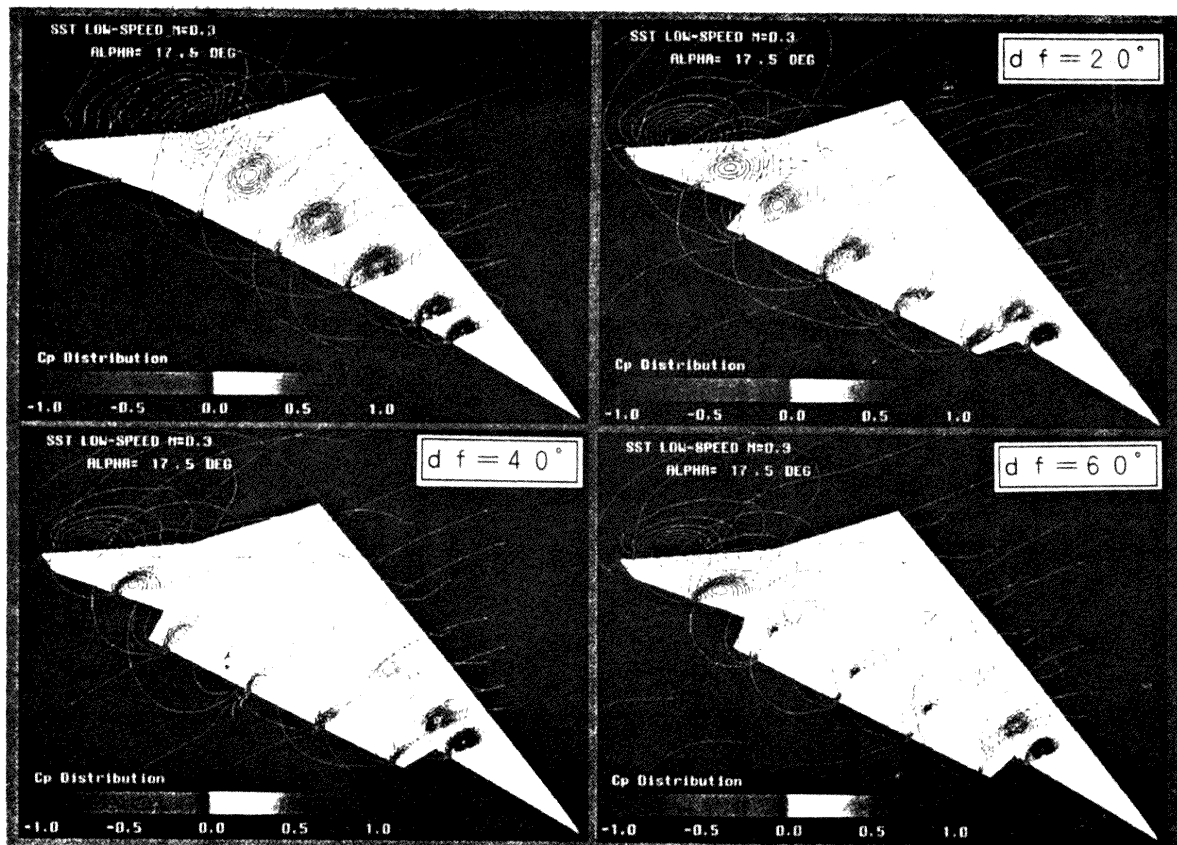


図5 3次元N. S解析結果 ～空間圧力分布

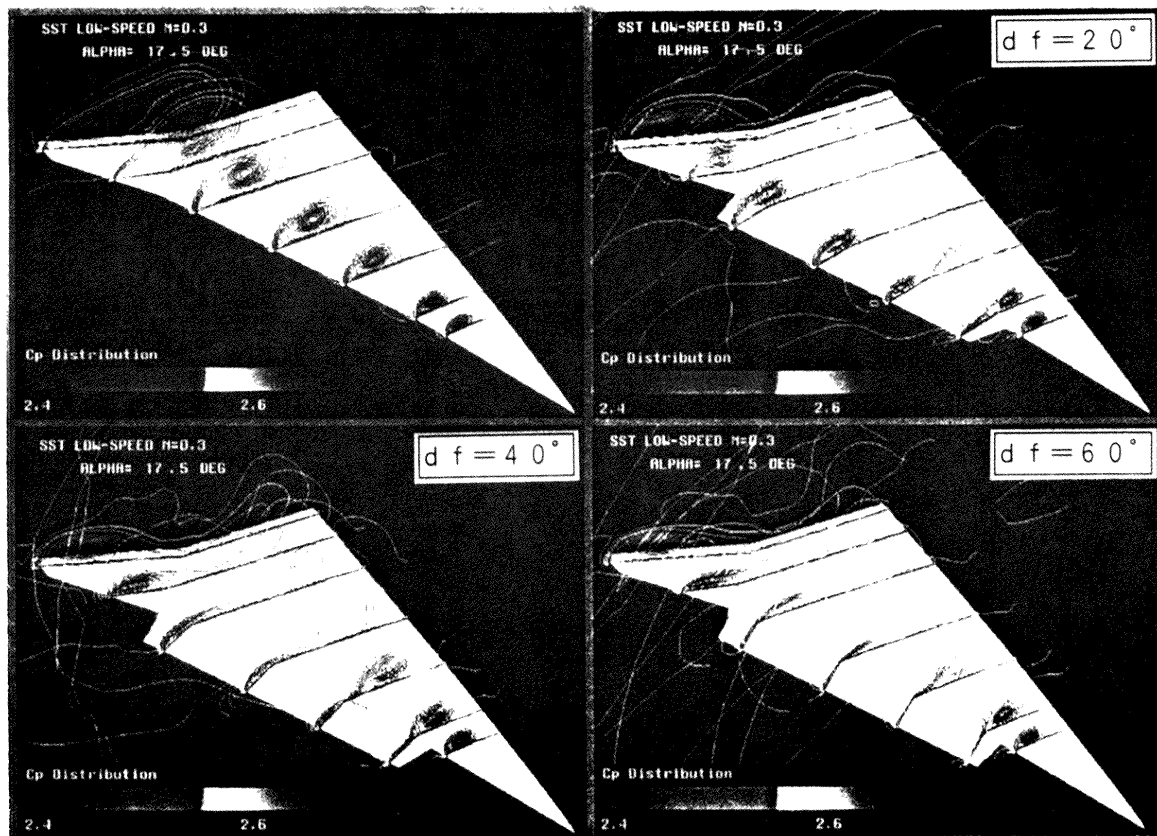


図6 3次元N.S解析結果 ～空間総圧分布

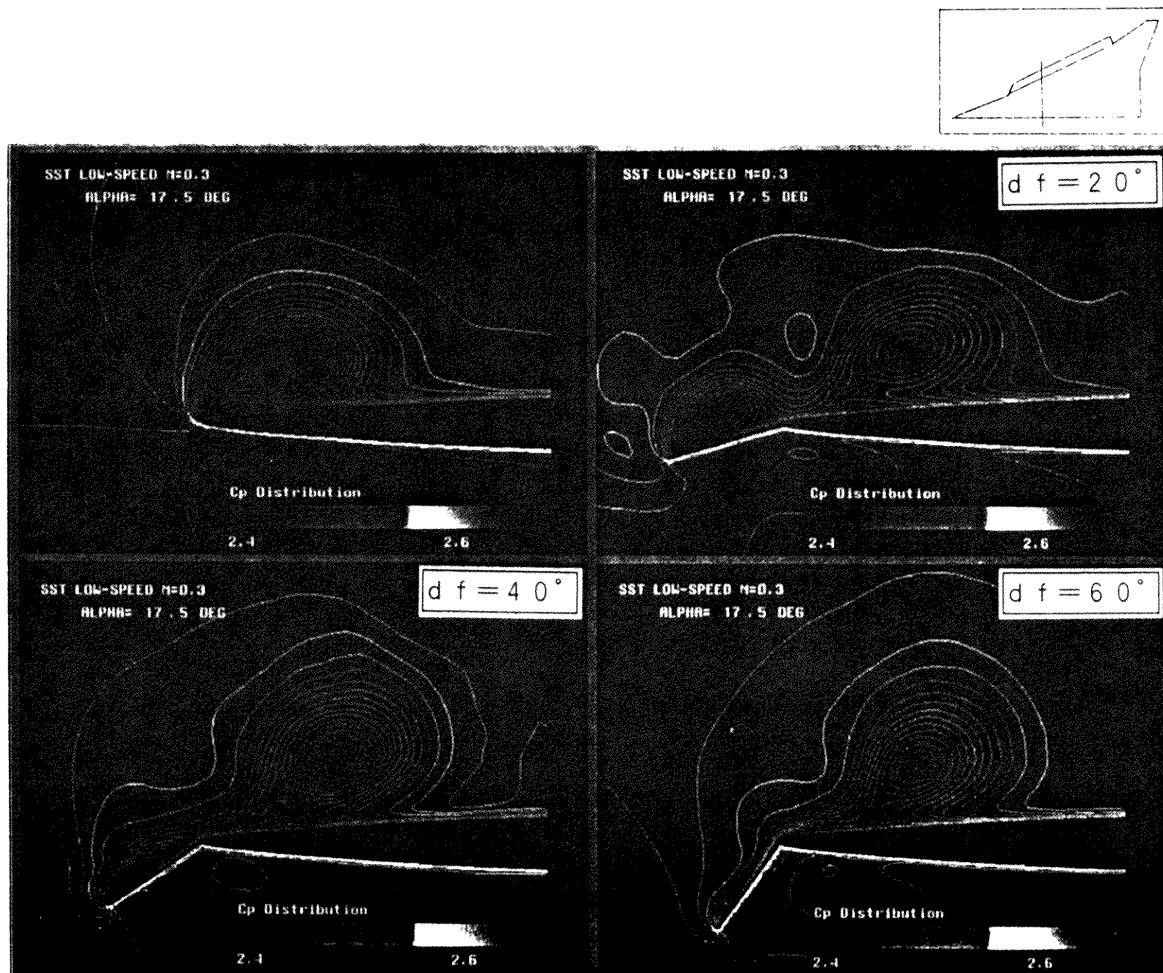


図7 3次元N.S解析結果 ～断面総圧分布

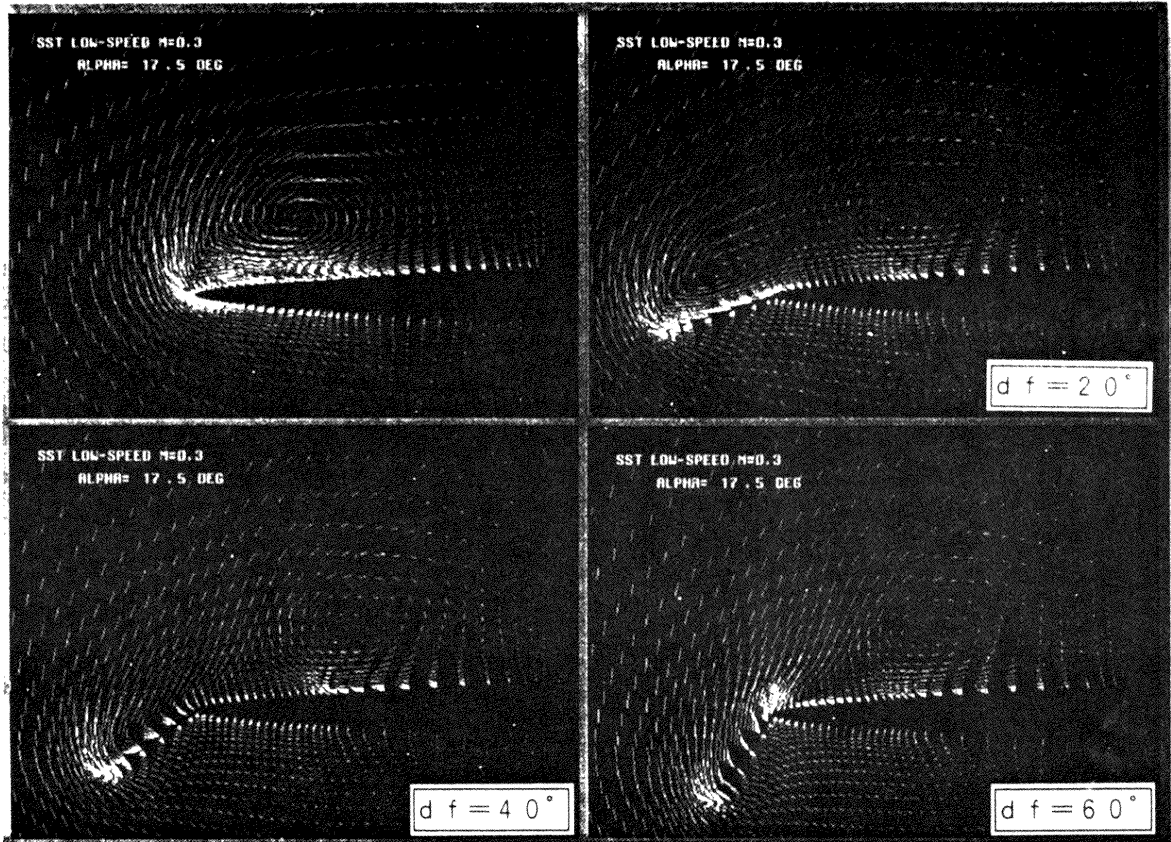
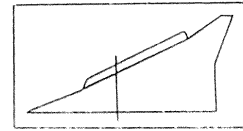


図8 3次元N. S解析結果 ~断面速度ベクトル

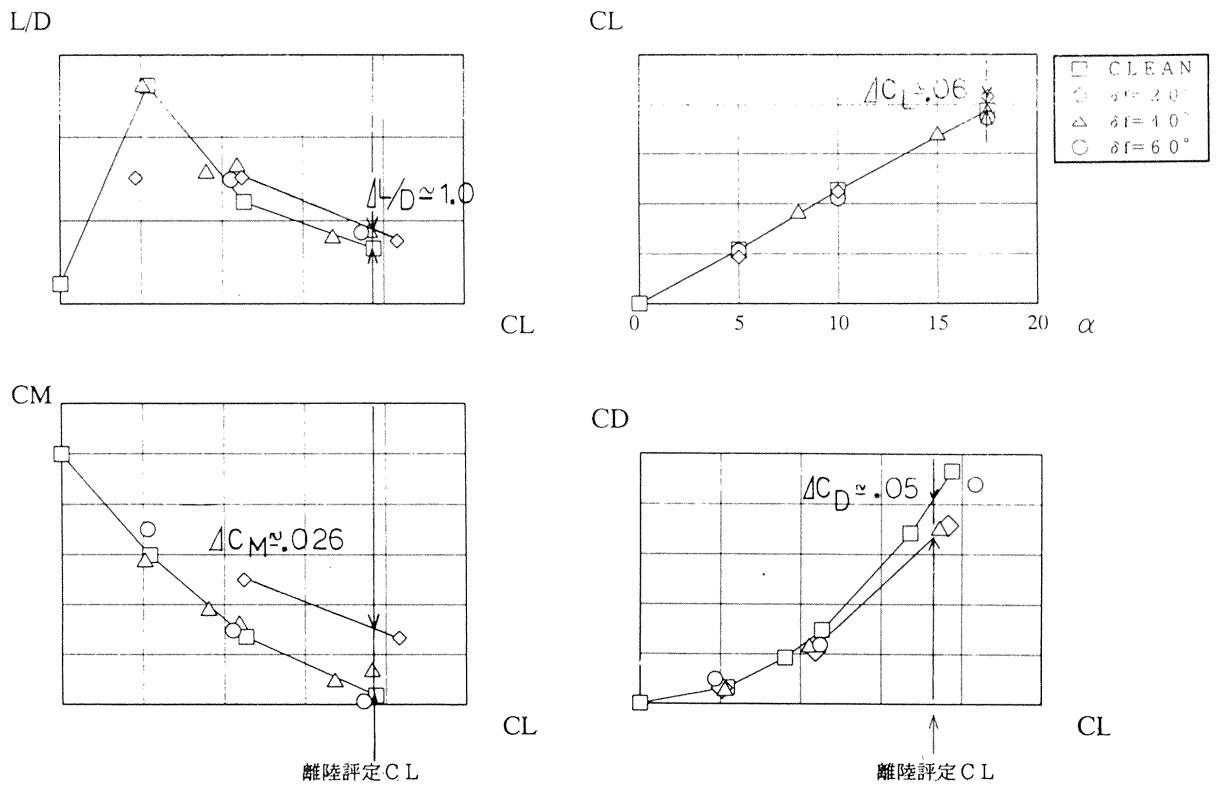


図9 3次元N. S解析結果 ~L/D vs CL,CM vs CL,CL vs α ,CD vs CL

第14回航空機計算空気力学シンポジウム運営委員会委員

	氏 名	(所属部)
委 員 長	曾 我 國 男	(空気力学部)
委 員	◎山 本 稀 義	(空気力学部)
	山 本 行 光	(空気力学部)
	中 道 二 郎	(構造力学部)
	◎江 尻 宏	(構造力学部)
	牧 田 光 正	(熱流体力学部)
	小 川 哲	(数理解析部)
	福 田 正 大	(数理解析部)
	廣 瀬 直 喜	(数理解析部)
	野 村 聡 幸	(空力性能部)
	山 本 武	(原動機部)
	齋 藤 茂	(空力性能部)
	◎末 松 俊 二	(新型航空機研究グループ)
	舞 田 正 孝	(宇宙研究グループ)
	石 垣 博	(ロケット推進研究部)
伊 藤 勝 宏	(ラムジェット推進研究部)	

[◎印：幹事]

航空宇宙技術研究所特別資料34号

平成9年1月発行

発行所 科学技術庁航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺東町7-44-1
電話(0422)47-5911 〒182
印刷所 株式会社実業公報社
東京都千代田区九段北1-7-8

© 禁無断複写転載

本書(誌)からの複写、転載を希望される場合は、企画室
調査普及係にご連絡ください。

