

非定常圧縮性流れの高解像度衝撃波 / 渦捕獲法

山本 悟

東北大学大学院航空宇宙工学専攻

Higher-Order Shock-Vortex Capturing for Unsteady Internal and External Flows

Satoru Yamamoto

Dept. of Aeronautics and Space Engineering, Tohoku University

ABSTRACT

Some complicated unsteady flow problems involving not only shocks, but vortices are numerically investigated. Numerical methods employed in the present research are composed of the higher-resolution shock capturing schemes in space difference based on the fourth-order compact MUSCL TVD scheme coupled with an efficient approximate Riemann solver, and the maximum second-order accurate implicit schemes. Some typical calculated results are shown. The first case is the unsteady transonic flow problem through a turbine cascade tunnel. The second case is the unsteady transonic flow around NACA airfoil at high angle of attack, and the third case is unsteady hypersonic shock/shock interference flow known as the Type IV shock heating problem. Finally, the reliability of so-called the shock-vortex capturing method is discussed.

1. はじめに

ほとんどの流体现象は、もともと本質的に非定常であると言えるが、その現象が複雑であるため、詳細に解明された例はまだまだ少なく、定常(時間平均)を仮定して実験・計算が行われているのが現状である。たとえば実験においては、局所的な非定常性は把握できるものの、全体的なものを把握しようとするならば、流れを可視化する以外に方法はなく、その可視化技術はまだ未開発の部分が多い。一方、計算、特にCFDによる流れ解析技術も、ナビエ・ストークス方程式を解いて定常流れを数値解析する上ではかなりのレベルに達成したと言えるが、定常という仮定のもとでは必ずしも流れの本質を理解できるとは言えない。非定常流れ解析もいくつか行われており、層流を仮定した非圧縮性流れもしくは亜音速流れの解析では実用的段階に至っているかもしれないが、たとえば複雑な形状周りの非定常流れ、非定常翼列干渉流れ、衝撃波を伴った非定常流れ、そして乱流などの複雑な非定常流れの解析は今後の計算アルゴリズムの開発に期待するところが大きい。

著者らは、その中の一つである非定常衝撃波 / 渦干渉流れ現象の解明を目的にそれらの捕獲に優れた高解像度衝撃波 / 渦捕獲法を提案し、いくつかの典型的な流れ問題を数値解析したので報告する。

2. 高解像度衝撃波 / 渦捕獲法

この数値解法を簡単に説明すれば次のようになる。

- 1) 空間差分に、著者らが提案した4次精度コンパクトMUSCL TVD(FCMT)スキーム [1] を用いる。特に接触不連続面などの比較的弱い不連続や渦の捕獲において既存の2次精度の空間差分スキームに比べてかなりの優位性が示されている。
- 2) 対流項の離散化に、修正流束分離法 [2]、流束差分法 [3]、そして対流・圧力分離法 [4] を、流れ問題に応じて、使い分けて用いる。
- 3) 時間積分には、ニュートン反復法とクランク・ニコルソン法を組み合わせた手法を対角化近似因子化法 [5] もしくはLU-SGS法 [6] に適用し、時間方向最大2次精度を得る [2][4]。

FCMTスキームの最大の利点は、まずそのアルゴリズムの簡単さにあり、MUSCL [7] をベースにした既存のCFDコードがあれば、本スキームの高次の項のみからなる高々数行のサブルーチンを組み込めばよい。ENOスキームなどの既存の差分スキームに比べ、格段に簡単なアルゴリズムでありしかも空間精度は従来のTVDスキームより衝撃波近傍を除き高次である。一方、時間積分に用いた方法は、既存の対角化近似因子化法もしくはLU-SGS法をほとんどそのままの形で用いることができ、ベクトル化が可

能でかつ記憶容量を増やす必要がない。また、高次精度の陽解法に比べ、極めて複雑な非定常流れでも大きな時間刻み(ただし $CFL \approx 1$)で安定に計算することができる。

3. 4次精度コンパクトMUSCL TVD(FCMT)スキーム

空間方向の離散化に用いるFCMTスキームについて式を用いて説明する。簡単のため、次の1次元双曲型スカラー保存則を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

これを空間方向に離散化すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{\ell+1/2} - \hat{f}_{\ell-1/2}) = 0 \quad (2)$$

ℓ は空間座標 x に沿った格子点を表し、 \hat{f} は数値流束を意味する。 $\hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)}$ を1次精度で補間すれば

$$\hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_{\ell} + f_{\ell+1}) - \frac{1}{2}(\Delta f_{\ell+1/2}^+ - \Delta f_{\ell+1/2}^-) \quad (3)$$

ただし、 Δf^{\pm} は通常、線形化されて以下のように変形される。

$$\Delta f_{j+1/2}^{\pm} = a_{\ell+1/2}^{\pm} \Delta u_{j+1/2} \quad (4)$$

$$\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j \quad (5)$$

a^{\pm} における a は、位相速度もしくは特性速度と呼ばれ、 $a = \partial f / \partial u$ で定義される。この a の符号によって上流化が行われる。

次に、Chakravarthy-Osher TVD(C-O)スキーム [8] は以下のように書き表せる。

$$\hat{f}_{\ell+1/2} = \hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)} + \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{(2)} \quad (6)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{(2)} &= \frac{1-\kappa}{4} \Delta f_{\ell-1/2}^+ + \frac{1+\kappa}{4} \Delta f_{\ell+1/2}^+ \\ &\quad - \frac{1+\kappa}{4} \Delta f_{\ell+1/2}^- - \frac{1-\kappa}{4} \Delta f_{\ell+3/2}^- \end{aligned}$$

$$\Delta \hat{f}_{j+1/2}^{\pm} = m(\Delta f_{j+1/2}^{\pm}, b_1 \Delta f_{j-1/2}^{\pm})$$

$$\Delta \hat{f}_{j+1/2}^{\pm} = m(\Delta f_{j-1/2}^{\pm}, b_1 \Delta f_{j+1/2}^{\pm})$$

$$m(x, y) = s \cdot \max\{0, \min\{(x), s \cdot y\}\}$$

$$s = \text{sign}(x)$$

b_1 の値は、通常その最大値 $(3-\kappa)/(1-\kappa)$ に設定され、空間方向は2次精度となるが、 $\kappa = 1/3$ の時のみ3次精度になる。

一方、4次精度の上流差分スキーム [1] は、次のように記述することができる。

$$\hat{f}_{\ell+1/2} = \hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)} + \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{(3)} + \Delta^3 \hat{f}_{\ell+1/2}^{(4)} \quad (7)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f}_{\ell+1/2}^{(3)} &= \frac{1}{6}(\Delta f_{\ell-1/2}^+ + 2\Delta f_{\ell+1/2}^+ \\ &\quad - 2\Delta f_{\ell+1/2}^- - \Delta f_{\ell+3/2}^-) \\ \Delta^3 \hat{f}_{\ell+1/2}^{(4)} &= -\frac{1}{6}\left(\frac{1-\phi}{4}\Delta^3 f_{\ell-1/2}^+ + \frac{1+\phi}{4}\Delta^3 f_{\ell+1/2}^+ \right. \\ &\quad \left. - \frac{1+\phi}{4}\Delta^3 f_{\ell+1/2}^- - \frac{1-\phi}{4}\Delta^3 f_{\ell+3/2}^- \right) \\ \Delta^3 f_{j+1/2} &= \Delta f_{j-1/2} - 2\Delta f_{j+1/2} + \Delta f_{j+3/2} \\ &= \Delta^2 f_{j+1} - \Delta^2 f_j \end{aligned}$$

これは、3次精度上流差分と高精度化するための付加項の和で表されており、 $\phi = 1/5$ のとき5次精度となる。著者らによって提案された4次精度コンパクト TVD スキーム [1] は $\phi = 1/3$ とすることにより、以下のように導出される。

$$\hat{f}_{\ell+1/2} = \hat{f}_{\ell+1/2}^{(1)} + \Delta^* \hat{f}_{\ell+1/2}^{(3)} \quad (8)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta^* \hat{f}_{\ell+1/2}^{(3)} &= \frac{1}{6}(\Delta^* \bar{f}_{\ell-1/2}^+ + 2\Delta^* \bar{f}_{\ell+1/2}^+ \\ &\quad - 2\Delta^* \bar{f}_{\ell+1/2}^- - \Delta^* \bar{f}_{\ell+3/2}^-) \\ \Delta^* \bar{f}_{j+1/2}^\pm &= m(\Delta^* f_{j+1/2}^\pm, b_1 \Delta^* f_{j-1/2}^\pm) \\ \Delta^* \bar{f}_{j+1/2}^\pm &= m(\Delta^* f_{j+1/2}^\pm, b_1 \Delta^* f_{j+3/2}^\pm) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)における $\Delta^* f_{j+1/2}^\pm$ は二つの項からなる次式で定義される。

$$\Delta^* f_{j+1/2}^\pm = \Delta f_{j+1/2}^\pm - \frac{1}{6}\Delta^3 f_{j+1/2}^\pm \quad (10)$$

式(10)の右辺第1項が3次精度のC-O TVDスキームであり、第2項は、4次精度の付加項である。すなわち、3次精度のC-O TVDスキームを用いたCFDコードがあれば、この第2項を付加するだけで簡単に高精度化できることを意味している。さらに、TVD条件を満足するために、この第2項にも以下のような流束制限を施す。

$$\Delta^3 \bar{f}_{j+1/2}^\pm = \Delta \bar{f}_{j-1/2}^\pm - 2\Delta \bar{f}_{j+1/2}^\pm + \Delta \bar{f}_{j+3/2}^\pm \quad (11)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta \bar{f}_{j-1/2}^\pm &= m(\Delta f_{j-1/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j+1/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j+3/2}^\pm) \\ \Delta \bar{f}_{j+1/2}^\pm &= m(\Delta f_{j+1/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j+3/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j-1/2}^\pm) \\ \Delta \bar{f}_{j+3/2}^\pm &= m(\Delta f_{j+3/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j-1/2}^\pm, b_2 \Delta f_{j+1/2}^\pm) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} m(x, y, z) &= s \cdot \max\{0, \min\{|x|, s \cdot y, s \cdot z\}\} \\ s &= \text{sign}(x) \end{aligned}$$

b_2 は2としている。上式は、極値が存在する部分では、 $\Delta^* f = \Delta f$ 、すなわち $\Delta^3 f = 0$ となり、少なくとも空間精度が3次精度以下になるように設定されている。

FCMTスキームは、MUSCLアプローチ [7] を用いることで簡単に導出できる。その場合に数値流束 $\hat{f}_{\ell+1/2}$ は次のように定義される。

$$\hat{f}_{\ell+1/2} = f^+(u_{\ell+1/2}^L) + f^-(u_{\ell+1/2}^R) \quad (13)$$

u^L, u^R は MUSCL アプローチにより外挿された物理変数を意味する。具体的には、次のように外挿される。

$$\begin{aligned} u_{\ell+1/2}^L &= u_\ell + \frac{1}{6}(\Delta^* \bar{u}_{\ell-1/2} + 2\Delta^* \bar{u}_{\ell+1/2}) \\ u_{\ell+1/2}^R &= u_{\ell+1} - \frac{1}{6}(2\Delta^* \bar{u}_{\ell+1/2} + \Delta^* \bar{u}_{\ell+3/2}) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta^* \bar{u}_{j+1/2} &= m(\Delta^* u_{j+1/2}, b_1 \Delta^* u_{j-1/2}) \\ \Delta^* \bar{u}_{j+1/2} &= m(\Delta^* u_{j+1/2}, b_1 \Delta^* u_{j+3/2}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta^* u_{j+1/2} = \Delta u_{j+1/2} - \frac{1}{6}\Delta^3 \bar{u}_{j+1/2} \quad (16)$$

$$\Delta^3 \bar{u}_{j+1/2} = \Delta \bar{u}_{j-1/2} - 2\Delta \bar{u}_{j+1/2} + \Delta \bar{u}_{j+3/2} \quad (17)$$

$$\Delta \bar{u}_{j-1/2} = m(\Delta u_{j-1/2}, b_2 \Delta u_{j+1/2}, b_2 \Delta u_{j+3/2})$$

$$\Delta \bar{u}_{j+1/2} = m(\Delta u_{j+1/2}, b_2 \Delta u_{j+3/2}, b_2 \Delta u_{j-1/2})$$

$$\Delta \bar{u}_{j+3/2} = m(\Delta u_{j+3/2}, b_2 \Delta u_{j-1/2}, b_2 \Delta u_{j+1/2}) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} m(x, y, z) &= s \cdot \max\{0, \min\{|x|, s \cdot y, s \cdot z\}\} \\ s &= \text{sign}(x) \end{aligned}$$

4. 方程式系への適用

FCMTスキームを、方程式系に適用するために、数値流束を定義する必要がある。本研究では流れ問題に合わせて、修正流束分離法、流束差分法、対流・圧力分離法の3種類を使い分ける。

4.1 修正流束分離法 [2]

ここで用いる流束分離法は、Steger-Warming FVS[9]に基づく方法で、境界層の計算が精度良くできるよう著者らが改良したものである。まず、一般曲線座標系で表された圧縮性ナビエ・ストークス方程式の対流項、すなわち流束ベクトルは次のような数値流束に離散化される。

$$(\hat{F}_i)_{\ell+1/2} = (A_i^+)_{\ell+1/2} \hat{Q}_{\ell+1/2}^L + (A_i^-)_{\ell+1/2} \hat{Q}_{\ell+1/2}^R \quad (19)$$

ここで、 $A_i^\pm (i = 1, 2)$ はヤコビ行列で、特性速度(固有値)の符号により分離される。 $\hat{Q}^{L(R)}$ は上述の MUSCL アプローチにより物理変数が外挿される。最終的に $(\hat{A}_i^\pm)_{\ell+1/2} \hat{Q}^M$ は、次のようなサブベクトルの和で記述される。

$$(\hat{A}_i^\pm)_{\ell+1/2} \hat{Q}^M = \bar{\lambda}_{i1}^\pm \hat{Q}^M + \frac{\bar{\lambda}_{ia}^\pm}{\bar{c}\sqrt{g_{ii}}} \bar{Q}_{ia} + \frac{\bar{\lambda}_{ib}^\pm}{\bar{c}^2} \bar{Q}_{ib} \quad (20)$$

ただし、 M は $A = A^{+(-)}$ で $L(R)$ を意味し、

$$\lambda_{i1} = U_i, \lambda_{i4} = U_i + c\sqrt{g_{ii}}, \lambda_{i5} = U_i - c\sqrt{g_{ii}}$$

$$\lambda_{ia}^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_{i4}^\pm - \lambda_{i5}^\pm), \lambda_{ib}^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_{i4}^\pm + \lambda_{i5}^\pm) - \lambda_{i1}^\pm \quad (21)$$

また

$$\bar{Q}_{ia} = \bar{p}\bar{Q}_{ic} + \Delta \bar{m}_i \bar{Q}_d \quad (22)$$

$$\bar{Q}_{ib} = \Delta \bar{m}_i \bar{Q}_{ic} + \bar{p}\bar{Q}_d \quad (23)$$

$$\bar{p} = \bar{Q}_p \cdot \hat{Q}^M \quad (24)$$

$$\Delta \bar{m}_i = \bar{Q}_{im} \cdot \hat{Q}^M \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Q_{ic} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \partial \xi_i / \partial x_1 \\ \partial \xi_i / \partial x_2 \\ U_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_d = \begin{bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ (e+p)/\rho \\ k \\ \varepsilon \end{bmatrix} \\ Q_p &= \begin{bmatrix} \phi^2 \\ -\tilde{\gamma} u_1 \\ -\tilde{\gamma} u_2 \\ \tilde{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{im} = \begin{bmatrix} -U_i \\ \partial \xi_i / \partial x_1 \\ \partial \xi_i / \partial x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

この式には、Roeが提案した近似リーマン解法 [10] を組み込まれており、オーバーラインの付いた変数が Roe 平均される。

4.2 流束差分法 [3]

Roe の近似リーマン解法に基づく流束差分法をベクトル形で導出すると、数値流束 $(\hat{F}_i)_{t+1/2}$ は次式で表される。

$$(\hat{F}_i)_{t+1/2} = \frac{1}{2} [\hat{F}_i(\hat{Q}_{t+1/2}^L) + \hat{F}_i(\hat{Q}_{t+1/2}^R) - |(\hat{A}_i)_{t+1/2}(\hat{Q}_{t+1/2}^R - \hat{Q}_{t+1/2}^L)|] \quad (26)$$

$(\hat{A}_i)_{t+1/2}$ ($i = 1, 2$) は Roe 平均を施して次式で計算される。

$$|(\hat{A}_i)_{t+1/2} \hat{Q}^M| = |\bar{\lambda}_{i1}| \hat{Q}^M + \frac{|\bar{\lambda}_{ia}|}{\bar{c}\sqrt{g_{ii}}} \bar{Q}_{ia} + \frac{|\bar{\lambda}_{ib}|}{\bar{c}^2} \bar{Q}_{ib} \quad (27)$$

ただし、

$$|\lambda_{ia}| = \frac{1}{2} (|\lambda_{i4}| - |\lambda_{i5}|) \\ |\lambda_{ib}| = \frac{1}{2} (|\lambda_{i4}| + |\lambda_{i5}|) - |\lambda_{i1}| \quad (28)$$

本研究で用いる修正流束差分法と流束差分法は、基本的に Roe の近似リーマン解法に基づくように変形されているので、流束差分法の中心差分の評価にもよるが、ほぼ同一の特徴を持った式となっている。

4.3 対流・圧力差分法

これは、Liou によって提案された AUSM スキーム [11] に基づく方法である。本研究では、衝撃波の捕獲能力を向上するため、Hänel の提案した FVS スキーム [12] と AUSM スキームを圧力の勾配の応じて切り替える方法を提案した。すなわち、数値流束は、次式で表される。

$$(\hat{F}_i)_{t+1/2} = J\sqrt{g_{ii}} [(M_i^+)_{L} \hat{Q}_{L} + (M_i^-)_{R} \hat{Q}_{R} + \delta_{1/2} (M_i)_{LR} \Delta \hat{Q}] + J \hat{P} \quad (29)$$

ただし、

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \rho c \\ \rho c u_1 \\ \rho c u_2 \\ \rho c H \end{bmatrix}, \quad \hat{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_{i,1}(p_L^+ + p_R^-) \\ \xi_{i,2}(p_L^+ + p_R^-) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここで、

$$M_i = \frac{U_i}{c\sqrt{g_{ii}}} \quad (30)$$

$$(M_i)_{1/2} = (M_i^+)_{L} + (M_i^-)_{R} \quad (31)$$

$$M_i^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_i \pm 1)^2, & (|M_i| \leq 1) \\ \frac{1}{2} (M_i \pm |M_i|), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (32)$$

$$p^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} p (M_i \pm 1)^2 (2 \mp M_i), & (|M_i| \leq 1) \\ \frac{1}{2} p (M_i \pm |M_i|) / M_i, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (33)$$

$$\Delta[\cdot] = [\cdot]_R - [\cdot]_L \quad (34)$$

$$(M_i)_{LR} = \begin{cases} -(M_i^-)_{R}, & (M_i)_{1/2} \geq 0 \\ (M_i^+)_{L}, & (M_i)_{1/2} < 0 \end{cases} \quad (35)$$

$$\delta_{1/2} = 1 - \frac{|p_L - p_R|}{\max(p_L, p_R)} \quad (36)$$

$\delta_{1/2} = 1$ のとき AUSM スキーム、 $\delta_{1/2} = 0$ のとき、Hänel's FVS スキームとなる。

5. 時間積分

5.1 定常計算

本研究では、陰的時間進行法に基づく時間積分スキームを用いる。まずは Beam-Warming の近似因子化 [13]、Pulliam-Chaussee の対角化 [5]、ならびに Steger-Warming の上流化 [9] が施されて導出された定常計算のための対角化近似因子化法は次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{Step 1} \quad & [I + \theta \Delta t (\Lambda_1^+ \nabla_1 + \Lambda_1^- \Delta_1)] \Delta \hat{Q}^n \\ & = -\Delta t \hat{L}_1 N \cdot RHS^n \\ \text{Step 2} \quad & [I + \theta \Delta t (\Lambda_2^+ \nabla_2 + \Lambda_2^- \Delta_2)] \Delta \hat{Q}^n \\ & = \hat{L}_2 \hat{L}_1^{-1} \Delta \hat{Q}^n \\ \text{Step 3} \quad & \Delta \hat{Q}^n = N^{-1} \hat{L}_2^{-1} \Delta \hat{Q}^n \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、

$$RHS^n = -\Delta t \hat{\mathcal{F}}^*(\hat{Q}) \quad (38)$$

$\theta = 1/2$ or 1 , ∇_i と Δ_i それぞれ前進、後退差分演算子である。 $\hat{\mathcal{F}}^*$ はナビエ・ストークス方程式の空間微分項 (粘性項も含む) の差分演算子。 \hat{L}_i ($i = 1, 2$) は、非保存形表示された左固有ベクトルからなる行列、 N は保存形から非保存形に変換するための行列で、以下のような要素からなる。

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -U_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -U_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \phi^2 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \bar{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\hat{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta_{2i} \frac{g_{12}}{g_{22}} & \delta_{1i} \sqrt{g_{ii}}/c & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{1i} \frac{g_{21}}{g_{11}} & 1 & \delta_{2i} \sqrt{g_{ii}}/c & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_{1i} & -\delta_{2i} & \sqrt{g_{ii}}/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

5.2 非定常計算 (近似因子化法)

式 (37) はニュートン反復法とクランク・ニコルソン法を組み込むことで、時間最大 2 次精度に拡張でき、次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{Step 1} \quad & [I + \theta \Delta t (\Lambda_1^+ \nabla_1 + \Lambda_1^- \Delta_1)]^m \Delta \hat{Q}^{*m} \\ & = -\Delta t (\hat{L}_1 N)^m \cdot RHS^m \\ \text{Step 2} \quad & [I + \theta \Delta t (\Lambda_2^+ \nabla_2 + \Lambda_2^- \Delta_2)]^m \Delta \hat{Q}^{*m} \\ & = (\hat{L}_2 \hat{L}_1^{-1})^m \Delta \hat{Q}^{*m} \\ \text{Step 3} \quad & \Delta \hat{Q}^m = (N^{-1} \hat{L}_2^{-1})^m \Delta \hat{Q}^{*m} \end{aligned} \quad (41)$$

ただし、

$$\Delta \hat{Q}^m = \hat{Q}^{m+1} - \hat{Q}^m \quad (42)$$

$$RHS^m = -(\hat{Q}^m - \hat{Q}^n) - \Delta t \{ \hat{\mathcal{F}}^*(\hat{Q}^m) + \hat{\mathcal{F}}^*(\hat{Q}^n) \} / 2 \quad (43)$$

m はニュートン反復の回数で、 $m = 0$ のとき、 $\hat{Q}^m = \hat{Q}^n$ 。もし $m \Rightarrow \infty$ ならば、 $\Delta \hat{Q}^m \Rightarrow 0$ すなわち $\hat{Q}^m \Rightarrow \hat{Q}^{n+1}$ で、時間最大 2 次精度の解が得られる。

5.3 非定常計算 (LU-SGS 法)

Yoon らによって提案された LU-SGS スキーム [6] にニュートン反復法とクランク・ニコルソン法と組み込んで、時間方向最大 2 次精度の時間積分法を構築すると、次式のようになる。

$$D \Delta \hat{q}_{i,j}^{*m} = (RHS)_{i,j}^m + \theta_L \Delta t [(\hat{A}_1^+ \Delta \hat{q}^*)_{i-1,j}^m]$$

$$+ (\hat{A}_2^+ \Delta \hat{q}^*)_{i,j-1}^m \quad (44)$$

$$\Delta \hat{q}_{i,j}^m = \Delta \hat{q}_{i,j}^{*m} - D^{-1} \theta_L \Delta t [(\hat{A}_1^- \Delta \hat{q})_{i+1,j}^m + (\hat{A}_2^- \Delta \hat{q})_{i,j+1}^m] \quad (45)$$

ただし、

$$D = [1 + \theta_L \Delta t (r_1 + r_2)] I \quad (46)$$

$$r_\ell = \kappa \max[|\lambda(\hat{A}_\ell^\pm)|] \quad (\kappa \geq 1) \quad (47)$$

$$\hat{A}_\ell^\pm = [\hat{A}_\ell^\pm \pm r_\ell I] / 2 \quad (48)$$

$$\Delta \hat{q}^m = \hat{q}^{m+1} - \hat{q}^m \quad (49)$$

$$RHS^m = -(\hat{q}^m - \hat{q}^n) - \Delta t [\theta_R \hat{L}^*(\hat{q}^m) + (1 - \theta_R) \hat{L}^*(\hat{q}^n)] \quad (50)$$

$\theta_L = \theta_R = 1/2$ ならばクランク・ニコルソン法となるが、実際には $\theta_L = 1$ を計算に用いている。これは、左辺の計算が解に依存しないという仮定に基づく。

6 数値計算例

6.1 高迎角翼周りと後流の非定常衝撃波 / 渦干渉流れ

ここで用いられる衝撃波 / 渦捕獲法の特徴は次の通りである。

- 1) 計算格子に重合格子を採用し、物体周りに O 型格子もしくは C 型格子、そして一様流れ場には直交格子が生成される。互いの情報は 3 次精度 Lagrange 補間により陽的に交換される。
- 2) 対流項の離散化には、修正流束分離法、FCMT スキームを使用し、時間積分には最大 2 次精度近似因子化法を使用する。
- 3) 物体表面近傍のみに渦粘性を評価するため、修正 Baldwin-Lomax モデル [14] を使用し、物体後流域には乱流モデルは用いない。

数値計算例として、迎角 15° と 20° の NACA0012 翼について計算した結果を示す。計算格子は、図 1 に示すような重合格子からなり、翼周りに格子点数 121×41 の C 型格子、流れ場に格子点数 121×101 の直交格子を発生させている。迎角の変化は、翼周りの計算格子を回転することにより得る。一様流マッハ数は 0.8、レイノルズ数は 6.0×10^6 。図 2(a)(b) と図 3(a)(b) には、各迎角での計算された無次元時間における瞬間等マッハ数分布ならびに渦度分布を示す。衝撃波と境界層の干渉に伴って発生した渦が、周期的に下流へ流れて行く様子が示されており、本解法が衝撃波・渦捕獲能力にすぐれているのがわかる。図 2、図 3 いずれに関しても渦が翼のかなり後方までその構造を保ちながら流れているが、さらに後方域では、翼迎角の違いによる流れ構造の差異が見だされている。

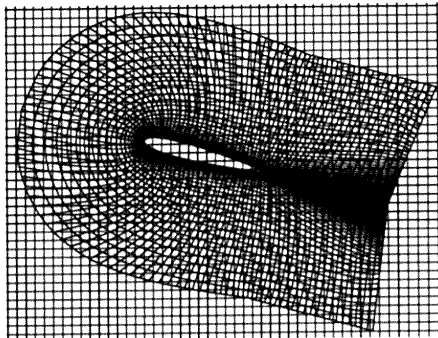
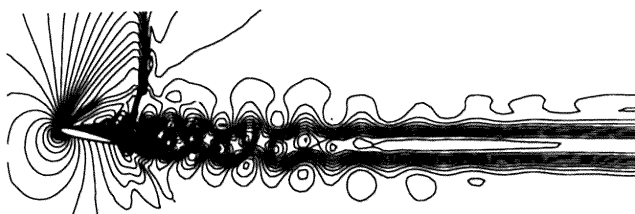


図 1 計算格子 (一部を表示)

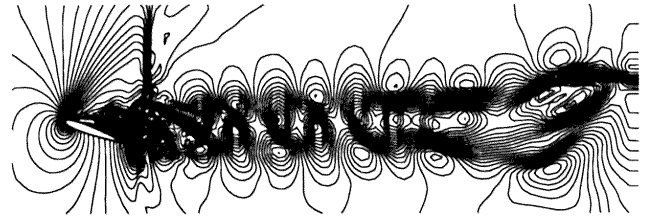


(a) 瞬間マッハ数分布



(b) 瞬間渦度分布

図 2 計算結果 (迎角 15° の NACA0012 翼)



(a) 瞬間マッハ数分布



(b) 瞬間渦度分布

図 3 計算結果 (迎角 20° の NACA0012 翼)

6.2 遷音速タービン翼列の非定常衝撃波 / 渦干渉流れ

ここで用いられる衝撃波 / 渦捕獲法の特徴を簡単に説明すると次のようなものである。

- 1) 計算格子に修正 H 型格子を採用する。これは、格子の直交性を良くするために、後流領域の周期境界で格子点が食い違っているのに特徴がある。
- 2) 対流項の離散化には、流束差分法、FCMT スキームを使用し、時間積分には最大 2 次精度近似因子化法を使用する。
- 3) 乱流計算のため、低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデル [15] を用い、計算初期段階での数値的不安定性を除去するために、乱流運動エネルギーの生成と散逸のバランスに制限を施す [3]。

用いた計算格子を図 4 に示す。格子点数は 181×61 。計算条件は以下に示す通りである。

表 1 計算条件

翼形状	VKI LS-59 翼
ピッチ	0.71
全圧 (Pa)	0.964×10^5
全温 (K)	290
レイノルズ数	8.50×10^5
流出マッハ数	0.99
流入角 (deg)	30.0

時間精度を比較するため、時間 1 次精度での計算と時間最大 2 次精度 (本解法) での計算を行った場合に得られた等マッハ数分布を、図 5(a)(b) に示す。時間 1 次精度では、図 5(a) に示す通り定常解となり、翼後縁からの後流は直線的な形で捕らえられてしまう。一方、図 5(b) は本解法による瞬間値を表し、翼後縁から周期的な渦が発生している様子や、翼後縁で発生している衝撃波との干渉によりその渦が変形している様子が鮮明に捕らえられている。図 6(a)(b) には、図 5(b) と同じ時間での瞬間等渦度分布と渦粘性係数分布を示す。実験 [16] においては、本計算で対象としたタービン翼列の後流から周期的な渦が発生することがすでに報告されており、本解法による計算結果はその事実を裏付けていると言える。

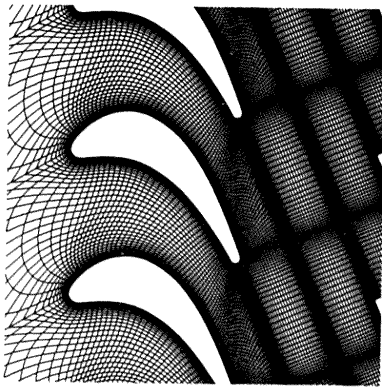
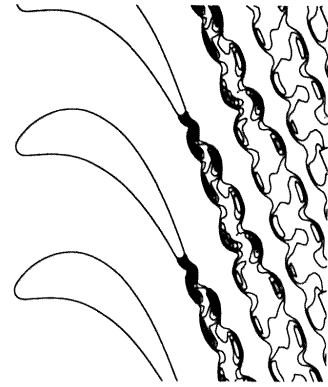
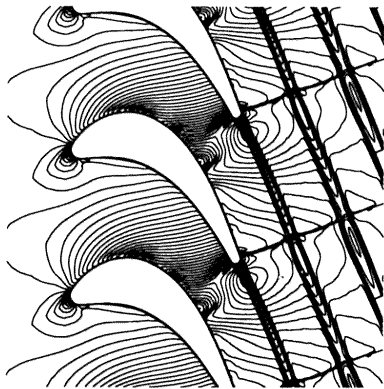


図4 計算格子

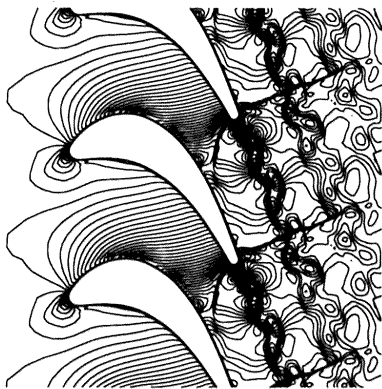


(b) 渦粘性分布

図6 後流域の計算結果



(a) 時間1次精度



(b) 本解法

図5 等マッハ数分布

次に、計算結果の妥当性をさらに検証するため、実験値との定量的な比較を行なう。図7は無次元化された翼表面上における等エントロピーマッハ数分布図を表し、定常計算による解 (Steady)、本計算による異なった3種類の瞬間値 (Instantaneous 1,2,3)、ならびにその時間平均値 (Average) が実験値 (Experiment) と比較されている。翼負圧面側の衝撃波付近を除いて、時間平均値は定常解と同様に実験結果とよく一致していると言える。3種類の瞬間値が衝撃波付近で異なる理由は、その衝撃波が周期的に振動していることによると思われる。

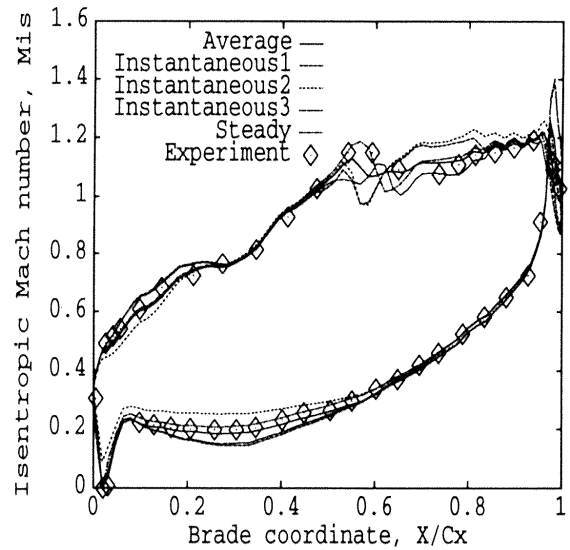


図7 翼表面等エントロピーマッハ数分布

次に、出口流失角度 β (deg) と損失係数 ζ (%) が実験結果と比較される。以下のように上記条件の他に、 $M_2 = 1.145$ についても同様の計算を行って定量値を計算した。

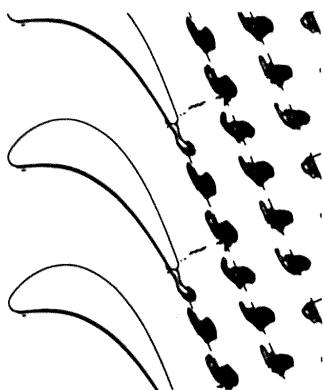
表2 (a) 出口流失角度 β (deg)

	計算値	実験値	誤差
$M_2=0.969$	67.2	66.9	0.4 %
$M_2=1.145$	66.5	65.9	0.9 %

表2 (b) 損失係数 ζ (%)

	計算値	実験値	誤差
$M_2=0.969$	4.58	5.02	8.7 %
$M_2=1.145$	6.94	6.99	0.7 %

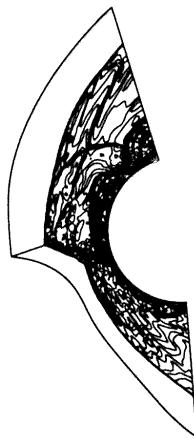
これらからもわかる通り、実験結果に非常に近い結果を得ることができた。なお、渦放出周期としてストローハル数 S_f を計算したところ $S_f = 0.17$ という値が得られている。



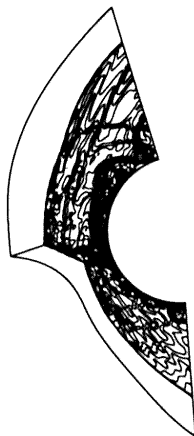
(a) 等渦度分布

6.3 鈍頭物体周りの非定常極超音速衝撃波干渉流れ

極超音速で航行する飛翔体に斜め衝撃波が干渉すると、衝撃波 / 衝撃波干渉による超音速ジェットや滑り線が発生して、強い非定常流れとなる。この場合問題になるのは、これらの発生に伴う局所的な温度上昇であり、設計上極めて重要な問題である。ここでは、最も典型的な衝撃波干渉加熱問題である TYPEIV[17]を対象として、空間方向、対流・圧力分離法、FCMT スキーム、時間方向、最大 2 次精度 LU-SGS 法による衝撃波 / 渦捕獲法を使用した。なお、乱流モデルは用いていない。計算条件は、主流条件として、マッハ数 8.03、流入角 0(deg) について考える。また、入射衝撃波角度を 18.1(deg) とし、入射衝撃波背後条件を、マッハ数 5.25、流入角 12.5(deg) とする。計算格子点数は、265 × 153。図 8(a)(b) には、計算により得られた異なった無次元時間における瞬間等温度分布を示す。衝撃波干渉により生じた超音速ジェットが温度境界層と干渉して、非定常的なせん断層を形成している様子が鮮明に捕獲されている。



(a) $t = t_1$



(b) $t = t_2$

図 8 瞬間等温度分布

図 9 には、物体表面熱流束の時間変化を示す。縦軸は主流における熱流束との比を表し、瞬間最大値は、時間平均された実験値よりも 30% 近く大きな値を示しており、非定常流れを考慮した解析の必要性が示唆される。

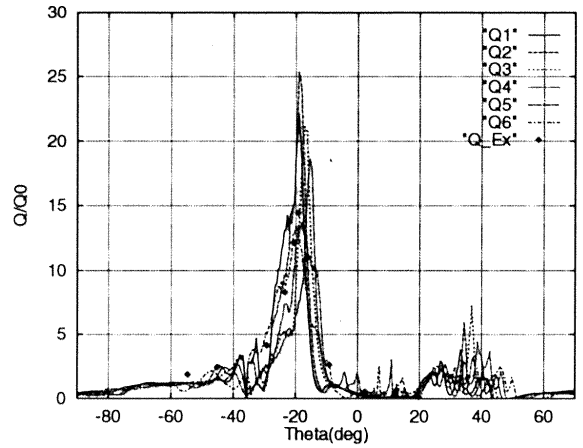


図 9 物体表面熱流束の時間変化

7. あとがき

空間方向に、4 次精度コンパクト MUSCL TVD スキームと、修正流束分離法、流束差分法、もしくは対流・圧力分離法を組み合わせた差分スキームを、そして時間方向には時間最大 2 次精度の近似因子化法もしくは LU-SGS 法による時間積分を用いた、3 種類のいわゆる衝撃波 / 渦捕獲法を開発しその有効性について検討した。本研究のコンセプトは、衝撃波のみならず渦も含めた高次精度での捕獲であり、開発された解法はその要求をかなり満足するものである。現在これらの解法を、3 次元問題ならびに、複雑方程式系、たとえば反応や相変化が考慮できる解法へ拡張しているところである。

文 献

1. Yamamoto, S. and Daiguji, H., Computers & Fluids, Vol.22, (1993), pp.259-270.
2. Yamamoto, S. and Daiguji, H., AIAA Paper No.92-3044, (1992).
3. Yuan, X., Yamamoto, S. and Daiguji, H., AIAA Paper No.94-3199, (1994).
4. Yamamoto, S. and Kano, S., AIAA Paper No.96-2152, (1996).
5. Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., J. Comp. Phys., Vol.39(1981), pp.347-363.
6. Yoon, S. and Jameson, A., AIAA J., Vol.26(1988), pp.1025-1026.
7. Anderson, W.K., Thomas, L. and van Leer, B., AIAA J., Vol.24(1986), pp.1453-1459.
8. Chakravarthy, S.R. and Osher, S., AIAA Paper 85-0363, (1985).
9. Steger, J.L. and Warming, R.F., J. Comp. Phys., Vol.40(1981), pp.263-293.
10. Roe, P.L., J. Comp. Phys., Vol.43(1981), pp.357-372.
11. Liou, M.-S. and Steffen, C.J., J. Comp. Phys., Vol.107(1993), pp.23-39.
12. Hänel, D. and Schwane, R., AIAA Paper 89-0274, (1989).
13. Beam, R.M. and Warming, R.F., AIAA J., Vol.16(1978), pp.393-402.
14. Degani, D. and Schiff, L.B., J. Comp. Phys., Vol.66(1987), pp.173-196.
15. Chien, K.-Y., AIAA J., Vol.20(1982), pp.33-38.
16. Kiock, R., et al., Trans. ASME, J. of Engng. for Gas Turbine and Power, Vol.108(1986), pp.277-285.
17. Edney, B. E., FFA Report 115, 1968.