

一次元移流拡散差分問題の誤差評価

名古屋 靖一郎* 牛島 照夫†

Error Estimate for One Dimensional Convective Diffusion Difference Problems

by

Seiichiro NAGOYA* and Teruo USHIJIMA†

ABSTRACT

Results on mathematical analysis for difference approximation of the constant coefficient convective diffusion problem with spatial dimension one are mentioned. As the difference approximation of spatial differential operators, difference operators with the order of accuracy less than or equal to 4 are considered. As for temporal discretization of the first order differential operator, the methods correspond to the truncation of Taylor-Maclaurin expansion of exponential function up to the first $M + 1$ terms, which are called the Runge-Kutta type method in the paper.

The characterization of von Neumann stability condition for a certain family of explicit schemes is obtained. The concept of ϵ -stability is, then, proposed for the problems. The concept implies that the stability for the problem under the neglect of the Fourier components of solution of discrete problem corresponding to the wave lengths longer than or equal to the threshold wave length determined by the positive small ϵ . Using the ϵ -stability concept, the advantage of 3rd order upwinding formula of Kawamura type approximating the first order differential operator is clarified in comparison with that of standard type. Stability analysis for the fully discrete problem with the Runge-Kutta type method is conducted for the purely convective problem in the case of 4th order central difference formulas adopted as the approximation of spatially first order differential operator. As for the error analysis of Runge-Kutta type method under the assumption of L^2 -stability, an error estimate between the genuine solution and the approximate solution is derived.

1. はじめに

最高四次精度を有する有限差分近似を適用したときの空間一次元非定常移流拡散問題に対する数学的理論解析の結果として、近似問題の安定性と、近似解と真の解との間の誤差評価に関する結果を示す。この内容は、文献[1]に従うものである。

空間方向の離散化には、2次精度以上であり、最高精度で4次を有する五点差分公式のある一般形を用いる。空間方向の離散化後に得られた時間方向のみの常微分方程式に対して、Runge-Kutta型公式と称し、精度の次数をパラメタとする時間積分公式のある一般形を適用する。本論文では、このようにして得られた広い範囲の差分スキームの族を統一的に取り扱う。

時間方向にEuler法を用いたときに、von Neumannの安定条件のCourant数と拡散数を用いた特徴付けに関する解析結果を述べる。これは、通常使われる差分公式のほとんどのものを含んだ結果である。また、新しい安定性の概念として、 ϵ 安定性を導入し、河村型三次精度風上法の標準型三次精度風上法(UTOPIA法)に対する有効性について述べる。

L^2 安定条件の仮定下で、上述の差分スキームの族を統一的に表現した誤差評価について述べる。

2. 問題設定

1次元の長さ L の領域 $\Omega = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < L\}$ を考える。その上で定義された周期境界条件下での移流拡散問題を (E) と書く。

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & t > 0 \quad x \in \Omega, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, L), & t > 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, L), & t > 0, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

u, K は非負の与えられた実定数とし、初期値 ϕ_0 を与えて、未知関数 $\phi = \phi(t, x)$ を求める問題を考える。ただし、 $K = 0$ の純移流問題を考える場合は、境界条件の後者の1階微分の条件は除くことにする。

有限差分法により連続問題 (E) を近似的に解く。空間方向を等幅 h で $2N$ 等分し、時間方向を等幅 τ で分割する。移流項の差分近似は、実パラメタ β, λ を使い、次のように定義される差分作用素 $D_h^{(\beta, \lambda)}$ を用いる。

$$(D_h^{(\beta, \lambda)} \phi)(x) = \frac{(T_{\frac{h}{2}}^{(\beta, \lambda)} \phi)(x) - (T_{\frac{h}{2}}^{(\beta, \lambda)} \phi)(x - h)}{h},$$

$$(T_{\frac{h}{2}}^{(\beta, \lambda)} \phi)(x) = \frac{\phi(x + h) + \phi(x)}{2} - \beta \{ (1 + \lambda)(\phi(x + h) - 2\phi(x) + \phi(x - h)) - \lambda(\phi(x + 2h) - 2\phi(x + h) + \phi(x)) \}.$$

この差分作用素は (β, λ) の値によって、表1に示す典型的な差分公式を表現できる。

表1 移流差分公式

(β, λ)	名称
$(0, \cdot)$	2次中心差分公式
$(\frac{1}{2}, 0)$	2次風上差分公式
$(\frac{1}{8}, 0)$	QUICK 公式
$(\frac{1}{5}, 0)$	UTOPIA 公式
$(\frac{1}{5}, 1)$	河村型3次風上差分公式
$(\frac{1}{5}, -\frac{1}{2})$	4次中心差分公式

Taylor展開できる関数 ϕ をとれば次のような評価式を得る。

$$(D_h^{(\beta, \lambda)} \phi)(x) - \left(\frac{d}{dx} \phi\right)(x) = \left(\frac{1}{3!} - \beta\right) \phi^{(3)}(x) h^2 + \beta \left(\frac{1}{2} + \lambda\right) \phi^{(4)}(x) h^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{\beta}{4}\right) \phi^{(5)}(x) h^4 + O(h^5). \quad (1)$$

* (株) アーク情報システム 解析第一部
† 電気通信大学 情報工学科

次に拡散項の差分近似は、実パラメタ ξ を使い、

$$(D_{h\bar{h}}^\xi \phi)(x) = \frac{1}{h^2} [\phi(x+h) - 2\phi(x) + \phi(x-h) - \xi \{ \phi(x+2h) - 4\phi(x+h) + 6\phi(x) - 4\phi(x-h) + \phi(x-2h) \}]$$

を用いる。表2に典型的な拡散差分公式を示す。

表2 拡散差分公式

ξ	名称
0	2次中心差分公式
$\frac{1}{12}$	4次中心差分公式

Taylor展開できる関数 ϕ をとれば次のような評価式を得る。

$$(D_{h\bar{h}}^\xi \phi)(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2} \phi\right)(x) = \left(\frac{2}{4!} - \xi\right) \phi^{(4)}(x) h^2 + \left(\frac{2}{6!} - \frac{\xi}{6}\right) \phi^{(6)}(x) h^4 + O(h^6).$$

周期境界条件を用い、以上のような空間方向の離散化を行うと、 $\phi_h(t) \in C^{2N}$ についての常微分方程式に帰着される。

$$(E_h) \quad \frac{d\phi_h}{dt} = A_h \phi_h$$

ここで、次のように定義される $2N$ 周期数列 $\{a_j : a_j = a_{j+2N}, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ を用いて、行列 $A_h = (a_{k-j})_{1 \leq j, k \leq 2N}$ と表される。

$$\begin{cases} a_{-2} = -(\beta(1+\lambda)\gamma + \xi\delta), \\ a_{-1} = \left(\frac{1}{2} + \beta(3+4\lambda)\right)\gamma + (1+4\xi)\delta, \\ a_0 = -3\beta(1+2\lambda)\gamma - 2(1+3\xi)\delta, \\ a_1 = \left(-\frac{1}{2} + \beta(1+4\lambda)\right)\gamma + (1+4\xi)\delta, \\ a_2 = -(\beta\lambda\gamma + \xi\delta), \\ a_j = 0, \quad -N < j < -2 \text{ or } 2 < j \leq N. \end{cases}$$

また、 $\gamma = u/h, \delta = K/h^2$ である。

半離散問題 (E_h) に対して、 $\phi_h^n \sim \phi_h(n\tau)$ という近似の元に、時間方向は次のように離散化する。

$$(E_h^n) \quad \phi_h^{n+1} = R_M(\tau A_h) \phi_h^n.$$

ここで、正整数 M に対して $R_M(z) = \sum_{l=0}^M z^l / l!$ と定義した。このような時間方向の離散化法を、Runge-Kutta型公式と呼ぶことにする。

3. 安定性

行列 A_h は、単純巡回行列 (cf.[2]) であるので、ユニタリ行列

$$U = \frac{1}{\sqrt{2N}} (\exp(i\theta_j k))_{1 \leq k, j \leq 2N}$$

を用いて、 $\Lambda = U^* A_h U$,

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2N})$$

と対角化される。ここで、 i は虚数単位であり、 $j = 1, \dots, 2N$ に対して、

$$\begin{cases} \lambda_j = X(\theta_j) + iY(\theta_j), \\ \theta_j = \pi(j-N)/N, \\ X(\theta) = -\delta(1 - \cos \theta) - 2(\xi\delta + \beta\mu\gamma)(1 - \cos \theta)^2, \\ Y(\theta) = \gamma(1 + 2\beta(1 - \cos \theta)) \sin \theta, \end{cases} \quad (2)$$

とおいた。ここで、全離散問題 (E_h^n) の解 ϕ_h^n の離散 Fourier 変換として、 ψ_h^n を、 $\psi_h^n = U^* \phi_h^n$ と定義すると、問題 (E_h^n) は次のように書き換えられる。

$$\psi_h^{n+1} = \Lambda_{R_M} \psi_h^n$$

ただし、 Λ_{R_M} は対角行列であり、

$$\Lambda_{R_M} = \text{diag}(R_M(\tau\lambda_1), \dots, R_M(\tau\lambda_{2N}))$$

と定義する。空間 C^{2N} のノルムを、 $x = (x_1, \dots, x_{2N})^T \in C^{2N}$ に対して、

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2N} |x_j|^2}$$

と定義すると、Parseval の等式

$$|\phi_h^n| = |\psi_h^n|$$

が成り立つ。よって、 L^2 安定条件として、

$$|\phi_h^n| \leq |\phi_h^0|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

を定義すれば、次の条件が必要十分条件となる。

$$|R_M(\tau\lambda_j)| \leq 1, \quad j = 1, \dots, 2N.$$

これは、更に次のように書き換えることができる。

$$\sigma(\tau A_h) \subset S_M \quad (3)$$

ここで、 $\sigma(\tau A_h)$ は行列 τA_h の固有値の集合を表し、 $S_M = \{z \in C : |R_M(z)| \leq 1\}$ と定義する。 S_M を絶対安定領域と呼ぶことにする。(3) を全離散問題 (E_h^n) の L^2 安定条件と呼ぶこともする。

次に、von Neumann 安定条件を定義しておく。ここでの von Neumann 安定条件は、数学的文献 [3] での定義より強い条件を採用する。

定義1 (von Neumann 安定条件)

問題 (E_h^n) が von Neumann 安定であるとは、

$$\tau\sigma(\gamma, \delta) \subset S_M$$

であることをいう¹。ここで、

$$\sigma(\gamma, \delta) = \{z = X(\theta) + iY(\theta) : -\pi < \theta \leq \pi\}.$$

であり、関数 X, Y は (2) 式に定義した。□

定義から明らかなように、 $\sigma(A_h) \subset \sigma(\gamma, \delta)$ なので、定義1の von Neumann 安定条件は、 L^2 安定条件 (3) より強い条件になっている。

Courant 数 c と拡散数 d を次のように定義する。

$$c = \tau\gamma = \frac{\tau u}{h}, \quad d = \tau\delta = \frac{\tau K}{h^2}.$$

これらの量は、物理的な要請とメッシュ幅のみで決まるパラメタである。全離散問題 (E_h^n) は、スキームを特定するパラメタ (β, λ, ξ, M) と、物理的要請とメッシュ幅から決まるパラメタ (c, d) によって一つの計算可能な問題に帰着される。スキームを固定したとき、即ち、パラメタ (β, λ, ξ, M) を一つに固定したとき、そのスキームが von Neumann 安定であるための必要十分な (c, d) の範囲を von Neumann 安定領域と呼ぶことにする。そして、各スキームに対して、von Neumann 安定領域を求めることを、「(von Neumann) 安定領域の特徴付け」と呼ぶことにする。

von Neumann 安定条件を弱めて一般化した次の新しい安定条件の概念を導入する。 \cos の逆関数 \cos^{-1} の値域を $[-\pi, \pi]$ とする。

定義2 (ε 安定条件)

実数 ε を区間 $[0, 2]$ の一つの値に固定する。問題 (E_h^n) が ε 安定であるとは、

$$\tau\sigma_\varepsilon(\gamma, \delta) \subset S_M$$

¹ 複素数の集合 S の複素数倍の集合 τS とは $\{\tau s \in C : s \in S\}$ を意味する。

であることをいう。ここで、

$$\sigma_\varepsilon(\gamma, \delta) = \{z = X(\theta) + iY(\theta) : -\pi < \theta \leq \cos^{-1}(1 - \varepsilon)\}.$$

であり、関数 X, Y は (2) 式に定義した。□

$\varepsilon = 0$ のときの ε 安定条件は von Neumann 安定条件に一致する。この意味で ε 安定条件は von Neumann 安定条件の一般化である。 $\sigma_\varepsilon(\gamma, \delta) \subset \sigma(\gamma, \delta)$ が成立するので、 ε 安定条件は von Neumann 安定条件を弱めている。また、 ε を 0 から大きくしていくとき、単調に $\sigma_\varepsilon(\gamma, \delta)$ は小さくなり、

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow \sigma_{\varepsilon_1}(\gamma, \delta) \supset \sigma_{\varepsilon_2}(\gamma, \delta) \quad (4)$$

が成立する。 $\varepsilon \in [0, 2]$ を固定し、スキームを特定したとき、そのスキームが ε 安定を満足するための必要十分な c - d 平面上の領域を ε 安定領域と呼ぶことにする。性質 (4) から、 ε 安定領域は、 ε を 0 から大きくするとき、単調に広がっていく。即ち、 ε を固定したときの c - d 平面上の安定領域を S_ε と書くとき、

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow S_{\varepsilon_1} \subset S_{\varepsilon_2}$$

が成立する。

ε 安定条件は、 ε の値によってある種のモード θ に制限をつけたときの安定条件である。その制限とは、長波長のモードから順に $\cos^{-1}(1 - \varepsilon)$ に対応するモード θ の手前までを無視したときの安定条件である。長波長モードを無視する意味を以下に述べる。

- 最長波長のモードである定数モード $\theta = 0$ は常に安定である。即ち、 $\theta = 0$ に対応するスペクトル $X(\theta) + iY(\theta)$ は常に絶対安定領域 S_M に含まれる。そして、関数 X, Y はモード θ の連続関数であるので、 θ が 0 から変化して絶対安定領域から飛び出してもそれほど遠くにはいかず、即ち発散するモードであったとしても急激には発散しない。
- Navier-Stokes 方程式などの 2 次非線形項をもつ問題では、長波長モードは短波長モードに移行する。

上の二つのことから、2 次の非線形項をもつ流れのシュミレーションにおいては、長波長が発散するモードであったとしても、その発散は急激ではなく、そして、発散する前に短波長へと移行して行くことが推測される。即ち、 ε 安定条件は、2 次の非線形項をもつ流れのシュミレーションを意識した上での安定条件である。

3.1 Euler 法の場合の安定性

実際の数値計算では、時間方向の離散化に (陽的) Euler 法がよく使われる。そこで、Euler 法に限定して安定性の議論を行う。即ち、時間積分の次数 M を 1 に固定する。次の定理を導くことができる。

定理 1 (Euler 法の場合の von Neumann 安定領域の特徴付け)

$M = 1$ とし、 $\beta > 0, \xi \geq 0$ であるとする。そのとき、次の二つの条件は同値である。

$$(a) \quad \lambda \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \max \left(0, \frac{\beta(1+2\beta) - \xi}{\beta\sqrt{1+4\beta+8\beta^2}} \right).$$

(b) 全離散問題 (E_h^+) が von Neumann 安定条件を満たす必要十分条件が、非負パラメタ (c, d) を用いて次のように書ける。

$$c^2 \leq 2d \leq \frac{1-4\beta\mu c}{\eta}, \quad c \geq 0, d \geq 0, \quad (5)$$

ここで、 $\mu = 2\lambda + 1, \eta = 4\xi + 1$ である。□

定理 1 から得られた結果を図示する。拡散項に 2 次中心差分法 ($\xi = 0$) を用いるとき、移流項に UTOPIA 公式 ($(\beta, \lambda) = (\frac{1}{9}, 0)$) と河村公式 ($(\beta, \lambda) = (\frac{1}{9}, 1)$) を用いた場合は定理 1 の条件 (a) を満足するので (5) 式で von Neumann 安定領域は決定される。そこで、それぞれの von Neumann 安定領域を図 1 と図 2 に示す。(1) 式を見れば分かるように、河村公式は UTOPIA 公式に比して主要項である 4 階微分の係数を 3 倍大きくしている。そのため、河村公式は精度は UTOPIA 公式に劣るが安定性はよいと言われている。しかし、図 1, 図 2 からはその様子が観察されない。

ε 安定性について次の定理を導くことができる。

定理 2 (Euler 法の場合の ε 安定条件の特徴付け)

$\varepsilon \in [0, 2]$ を一つに固定する。 β, λ, ξ は非負であるとする。全離散問題 (E_h^+) が ε 安定であるための必要十分条件は次のように書ける。

$$\begin{cases} -4\{d + (2\xi d + \beta\mu c)\varepsilon\} + 4\{d + (2\xi d + \beta\mu c)\varepsilon\}^2 \\ \quad + c^2(2 - \varepsilon)(1 + 2\beta\varepsilon)^2 \leq 0, \\ 2d \leq \frac{1-4\beta\mu c}{\eta}, \quad c \geq 0, \quad d \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\mu = 2\lambda + 1, \eta = 4\xi + 1$ である。□

拡散項に 2 次中心差分法 ($\xi = 0$) を用いるとき、移流項に UTOPIA 公式 ($(\beta, \lambda) = (\frac{1}{9}, 0)$) と河村公式 ($(\beta, \lambda) = (\frac{1}{9}, 1)$) を用いた場合は定理 2 の仮定を満足するので (6) 式で ε 安定領域は決定される。そこで、 $\varepsilon = 0.5$ としたときの、それぞれの ε 安定領域を図 3, 図 4 に示す。 c - d 平面上の領域 $\{(c, d) : 0 \leq c \leq 1/2, 0 \leq d \leq \min(c^2/2, 1/2 - c)\}$ を強移流域と呼ぶことにする。河村公式を用いた図 4 は、UTOPIA 公式の図 3 より強移流域で著しく広がっている様子が観察される。このことから、高 Reynolds 数の流れ場を Navier-Stokes 方程式を離散化して計算する場合、河村公式の方が安定に計算できることが予想される。

3.2 移流問題の安定性

移流項の差分公式に注目し、この部分節では、 $K = 0$ の純移流問題を考える。von Neumann 安定条件の特徴付けとして、次の定理を導くことができた。

定理 3 (純移流問題に対する von Neumann 安定条件の特徴付け)

$K = 0, u > 0$ とする。 $\lambda = -\frac{1}{2}$ ($\mu = 0$) に固定する。このとき、次が成立する。

- (1) $M = 1, 2$ のとき、差分問題 (E_h^+) は von Neumann 安定にならない。
- (2) $M = 3, 4$ のとき、差分問題 (E_h^+) が von Neumann 安定なるための必要十分条件は、次が成立することである。

$$\tau \leq \frac{cM}{\sigma_{\max}(\beta)}. \quad (7)$$

ここで、

$$\sigma_{\max}(\beta) = \begin{cases} \gamma\sqrt{f_\beta(p\beta)}, & \beta \geq -\frac{1}{2}, \\ \gamma\sqrt{f_\beta(q\beta)}, & \beta < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_\beta(x) = (1 + 2\beta x)^2 x(2 - x), \\ p\beta = \frac{-6\beta + 1 + \sqrt{36\beta^2 + 4\beta + 1}}{2}, \\ q\beta = \frac{-6\beta + 1 - \sqrt{36\beta^2 + 4\beta + 1}}{2}, \\ \begin{cases} c_3 = \sqrt{3}, \\ c_4 = 2\sqrt{2}. \quad \square \end{cases} \end{cases}$$

$(\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$ のとき, 移流差分公式は 4 次中心差分公式になる. このとき, 定理 3 を適用できる. $M = 1, 2$ では, von Neumann 安定にはならないが, $M = 3, 4$ のときは, (7) 式を満足すれば von Neumann 安定である. 特に, $M = 4$ の古典的 Runge-Kutta 法を用いたとき, $K = 0$ の純移流差分問題 (E_h^r) が von Neumann 安定であるための最大 Courant 数は, 定理 3 の (7) 式から,

$$c \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3+8\sqrt{6}}{12}}} = 2.0612023 \dots$$

と計算される. 即ち, 移流差分公式を 4 次中心差分公式とし, 時間積分法を古典的 Runge-Kutta 法を用いるとき, 純移流問題 (E_h^r) は, Courant 数が 2 を越えて von Neumann 安定に解けることが分かった.

4. 誤差解析

領域 $\Omega = [0, L]$ を 1 次元トラスとする. $j = 0, 1, 2, \dots, 2N$ に対して, jh を中心にする幅 h の定義関数を $w_j(x)$ と書くことにする ($w_0 = w_{2N}$).

$$w_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in ((j-1/2)h, (j+1/2)h), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$j = 1, 2, \dots, 2N$. ただし, w_{2N} を正確に書けば次のようになる.

$$w_{2N}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, h/2) \cup (L-h/2, L], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

そして, $w_j, j = 1, 2, \dots, 2N$ によって張られる関数空間 $X_h \subset L^2(\Omega)$ を考える. 連続関数の空間 $C(\Omega)$ から X_h への射影 P_h と X_h ノルム $\|\cdot\|_{X_h}$ を, C^{2N} から X_h への写像 Q_h を, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} P_h \psi &= \sum_{j=1}^{2N} \psi(jh)w_j, & \psi &\in C(\Omega). \\ \|\psi\|_{X_h} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{2N} |\psi(jh)|^2 h}, & \psi &\in X_h. \\ Q_h \psi &= \sum_{j=1}^{2N} \psi_j w_j, & \psi &= (\psi_1, \dots, \psi_{2N})^T \in C^{2N}. \end{aligned}$$

$A_h = Q_h A_h Q_h^{-1} : X_h \rightarrow X_h$ とおく. この A_h を用いて, 全離散問題 (E_h^r) は X_h 上の元を求める問題に書き直されるので, この問題を改めて (E_h^r) と書くことにする.

$$(E_h^r) \begin{cases} \phi_h^{n+1} = R_M(\tau A_h) \phi_h^n, \\ \phi_h^0 = P_h \phi_0. \end{cases}$$

ここで, 行列 A_h と X_h 上の作用素 \mathcal{A}_h は相似な関係にあるので, 前節での安定性の議論は, L^2 安定条件として,

$$\|\phi_h^n\|_{X_h} \leq \|\phi_h^0\|_{X_h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{8}$$

と定義するところから出発してほぼそのまま成り立つ.

定理 4

全離散問題 (E_h^r) が L^2 安定条件 (8) を満足するとする. 初期値を $\phi_0 \in H^m(M, K)(\Omega)$,

$$m(M, K) = \begin{cases} \max(M+1, 5), & K = 0, \\ \max(2M+1, 6), & K > 0. \end{cases}$$

というようにとるとき, 条件 $\phi_h^0 = P_h \phi_0$ を満足する全離散問題の解

ϕ_h^n に対して, 次のような誤差評価ができる. $n\tau \leq T$ とし,

$$\begin{aligned} \|P_h \phi(n\tau) - \phi_h^n\|_{X_h} &\leq C'T \left[\tau^M \sum_{k=0}^{M+1} |u|^{(k)} K^{M-k+1} \|\phi_0^{(2M-k+2)}\|_{L^2} \right. \\ &+ |u| \{ \gamma_1 \|\phi_0^{(3)}\|_{L^2} h^2 + (\frac{\gamma_1}{\tau} + \gamma_2) \|\phi_0^{(4)}\|_{L^2} h^3 + \frac{\gamma_2}{\tau} \|\phi_0^{(5)}\|_{L^2} h^4 \} \\ &+ K \{ \gamma_3 \|\phi_0^{(4)}\|_{L^2} h^2 + \frac{\gamma_3}{\tau} \|\phi_0^{(5)}\|_{L^2} h^3 \} \\ &\left. + |u| h^4 \sum_{j=1}^5 c_{5,j} |\alpha_j^n| \|\phi_0^{(5)}\|_{L^2} + K h^4 \sum_{j=1}^5 c_{6,j} |\alpha_j^K| \|\phi_0^{(6)}\|_{L^2} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \left| \frac{1}{3!} - \beta \right|, \\ \gamma_2 = \left| \beta \left(\frac{1}{2} + \lambda \right) \right|, \\ \gamma_3 = \left| \frac{2}{4!} - \xi \right|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1^n = -\beta(1+\lambda), & \alpha_1^K = -\xi, \\ \alpha_2^n = \frac{1}{2} + \beta(3+4\lambda), & \alpha_2^K = 1+4\xi, \\ \alpha_3^n = 0, & \alpha_3^K = 0, \\ \alpha_4^n = -\frac{1}{2} + \beta(1+4\lambda), & \alpha_4^K = 1+4\xi, \\ \alpha_5^n = -\beta\lambda, & \alpha_5^K = -\xi. \end{cases}$$

$$c_{n,j} = \sqrt{\frac{1}{2n-1} \frac{|j-3|^n}{(n-1)!}}. \quad \square$$

5. 数値実験

5.1 安定領域の図示

数値的な手法により, 安定領域を近似的に求めて図示することを考える. (γ_1, δ_1) が, $\gamma_1^2 + \delta_1^2 = 1$ かつ $\gamma_1, \delta_1 \geq 0$ を満足するように取られているとする. このとき, 次のことを仮定する.

仮定 1

次の条件を満たす有限な非負の値 τ_1 を決定できる.

$$\tau_1 = \max\{ \tau : \tau\sigma(\gamma_1, \delta_1) \subset S_M, \tau \geq 0 \}$$

であり, かつ

$$\tau\sigma(\gamma_1, \delta_1) \subset S_M, \quad \forall \tau \in [0, \tau_1]. \quad \square$$

スキームが固定され, 物理的な要請 (u, K) と空間刻み幅 h が与えられている時を想定する. このとき, (γ, δ) の値は一意に決まっている. $\rho = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$ とおく. すると, ある (γ_1, δ_1) が取れて,

$$(\gamma, \delta) = \rho(\gamma_1, \delta_1), \quad \rho > 0.$$

この (γ_1, δ_1) に対して, 仮定 1 が成立するとし, τ_1 が決定できたとする. このとき,

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_1}{\rho}$$

ととれば, 全離散問題 (E_h^r) が von Neumann 安定に解けるための最大時間刻み幅となる. 実際, $\tau\sigma(\gamma, \delta) = (\tau\rho)\sigma(\gamma_1, \delta_1)$.

上述の原理を用い, 次のように安定限界を求める. $\sigma_h(\gamma_1, \delta_1)$ を次のように定義する.

$$\sigma_h(\gamma_1, \delta_1) = \{ \lambda_j = X(\theta_j; \gamma_1, \delta_1) + iY(\theta_j; \gamma_1, \delta_1) : j = 1, 2, \dots, 2N \}.$$

即ち, $\sigma_h(\gamma_1, \delta_1)$ は, $\sigma(\mathcal{A}_h)$ に一致する ($u = \gamma_1 h, K = \delta_1 h^2, h = \frac{L}{2N}$). 問題 (\mathcal{T}_h) を次のようにおく.

$$(\mathcal{T}_h) \quad \tau_1(h) = \max\{ \tau : \tau\sigma_h(\gamma_1, \delta_1) \subset S_M, \tau \geq 0 \}.$$

集合 $\{\{\theta_j : 1 \leq j \leq 2N\}_{h=\frac{1}{2N}} : N = 1, 2, \dots\}$ は、トーラス $(-\pi, \pi]$ の稠密集合であるので、次のことが期待できる。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau_1(h) = \tau_1.$$

計算の都合上、次の同値な問題 (M_h) に変換する。

$$(M_h) \quad \max\{\tau = \sqrt{c^2 + d^2} : \sigma_h(c, d) \subset S_M, \frac{c}{d} = P, c \geq 0, d \geq 0\}.$$

問題 (M_h) と (T_h) の対応関係は次のようになる。 $c = \tau\gamma_1, d = \tau\delta_1, \tau\sigma_h(\gamma_1, \delta_1) = \sigma_h(c, d)$ 。ここで、 $P = \frac{c}{d} = \frac{\gamma_1}{\delta_1}$ はセル Péclet 数と呼ばれている。

$N = 50$ とする。 $\tau_1(h)$ を求めるために、変数 τ についての二分法を用いた。言い替えれば、行列 A_h の 100 個の固有値

$$\lambda_j = X(\theta_j; c, d) + iY(\theta_j; c, d), \quad j = 1, 2, \dots, 100,$$

が絶対安定領域 S_M に含まれるような τ の限界を二分法で追いつめて求めた。

時間方向の精度を $M = 4$ とし、拡散差分公式を 2 次中心差分公式に固定して、移流差分公式を、河村公式 $((\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, 1))$ 、UTOPIA 公式 $((\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, 0))$ 、4 次中心差分公式 $((\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}))$ の 3 種類の近似安定領域を図 5 に示す。図 5 から分かる特徴的なこととして、 $M = 4$ の古典的 Runge-Kutta 公式を用いたとき、Taylor 展開の精度 (1) のよいものほど安定領域が広がっている。

5.2 精度検証

純移流問題では、連続問題 (E) の解析解 ϕ が求められるので、ここでは、 $K = 0$ の純移流問題を用いて精度検証計算を行う。流速は $u = 1$ とし、領域の長さ $L = 2\pi$ とする。時間方向の離散化に古典的 Runge-Kutta 法 ($M = 4$) を用い、空間方向の移流差分公式には 4 次中心差分公式 $((\beta, \lambda) = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}))$ を用いる。このスキームを 4 次-4 次スキームと呼ぶことにする。そして、時間刻み幅 τ と空間刻み幅 h を同じスピードで 0 に近づける。即ち、Courant 数 c を一定とする。このとき、定理 4 から、安定条件を満たす範囲では、4 次-4 次スキームは 4 次のオーダーで次の誤差 e が 0 に収束するはずである。

$$e = \|P_h \phi(T) - \phi_h^n\|_{X_h}$$

Courant 数 c は 2 に固定する。このとき、定理 3 から、4 次-4 次スキームは von Neumann 安定である。収束状況を見るために、 $N = 8, 16, \dots, 1024$ ($2^j, j = 3, 4, \dots, 10$) と分割を細かくし、

$$h = \frac{L}{2N}, \quad \tau = \frac{ch}{u}$$

ととる。精度検証時刻は、一周して戻った時刻で、 $T = L/u$ とする。

初期値を次の 4 通りにとり、誤差の収束の様子を両対数グラフにプロットした図を、それぞれ図 6、図 7、図 8、図 9 に示す。

(a) $C^\infty(\Omega) \ni \phi_0(x) = \sin x$.

(b) $C^6(\Omega) \ni \phi_0(x) = \begin{cases} x^6(1-x)^6, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < L. \end{cases}$

(c) $C(\Omega) \ni \phi_0(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1-x, & 0.5 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < L. \end{cases}$

(d) $C(\Omega) \ni \phi_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < L. \end{cases}$

これらの四つの図から、定理 4 の主張の通りの滑らかさをもつ初期値 ϕ_0 に対しては、ほぼ 4 次の精度がでていることが観察される。

6. まとめ

- 時間方向に Euler 法を用いた場合に、von Neumann 安定条件の特徴付けとして、定理 1 を報告した。
- 新しい安定性の概念として、 ϵ 安定性を導入した。これを用いて、2 次の非線形項をもつ流れの計算においては、河村公式は、UTOPIA 公式に比して、安定性をよくすることを予測される結果を示した。
- 純移流問題において、4 次-4 次スキームが、von Neumann 安定である Courant 数限界は 2 を越えることを解析的に示した。
- 移流拡散差分問題 (E_h^r) の誤差評価として、定理 4 を報告し、純移流問題の場合に、4 次-4 次スキームを用いて数値的な確かめ計算を行った。定理 4 の主張に整合する結果であった。

参考文献

- [1] Nagoya, S., *Stability Analysis and Error Estimate for Difference Problems Derived from a Spatially One Dimensional Convective Diffusion Equation*. PhD Thesis, The University of Electro-Communications, Tokyo (1996).
- [2] R.S. Varga (渋谷政昭 訳), 計算機による大型行列の反復解法, サイエンス社, 1972.
- [3] Richtmyer, R.D. and Morton, K.W., *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Second Edition, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1967.

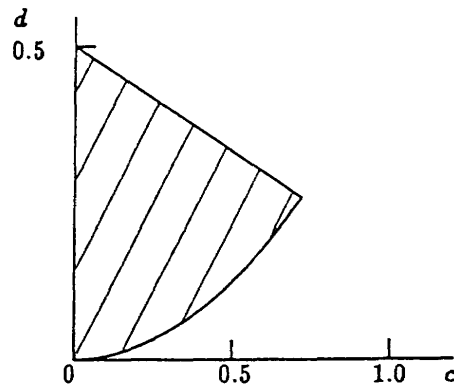


図 1 UTOPIA スキームの von Neumann 安定領域

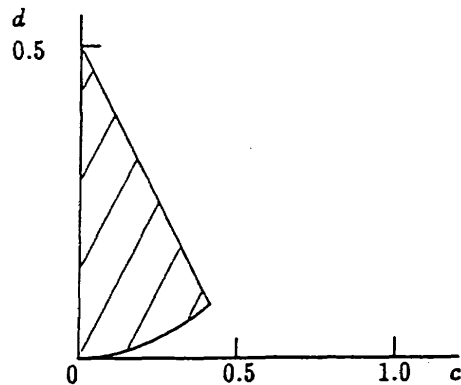


図 2 河村スキームの von Neumann 安定領域

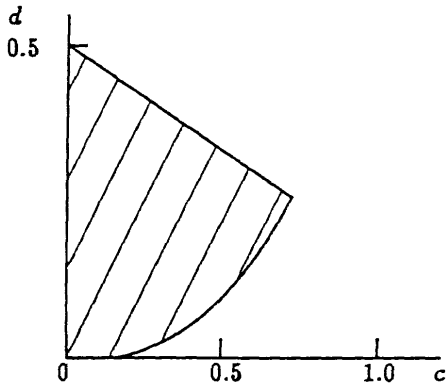


図3 UTOPIA スキームの ε 安定領域 ($\varepsilon = 0.5$)

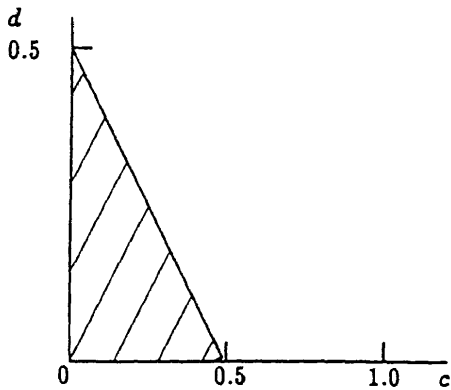


図4 河村スキームの ε 安定領域 ($\varepsilon = 0.5$)

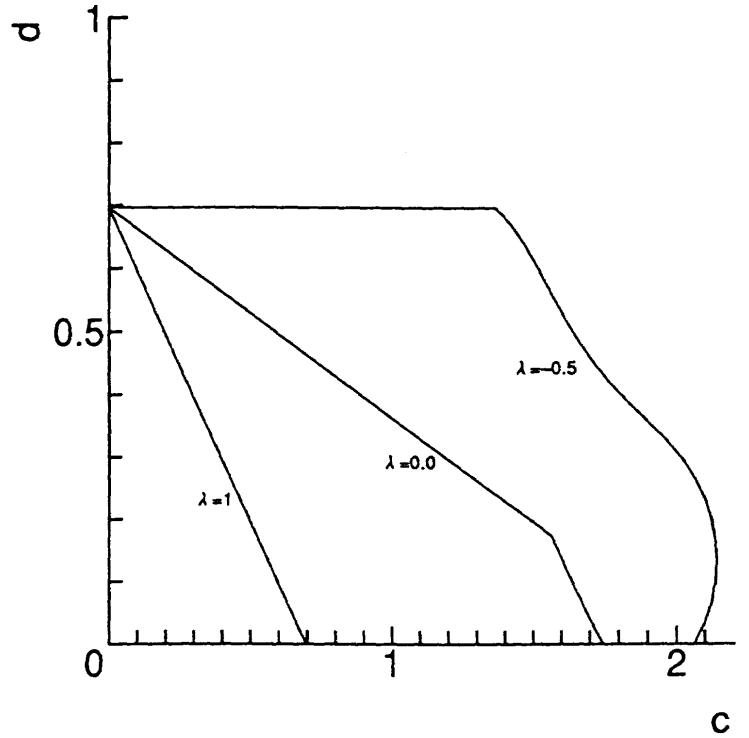


図5 Runge-Kutta 法の von Neumann 安定領域 ($M = 4$)

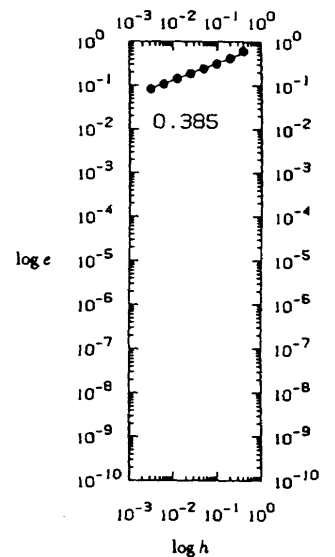
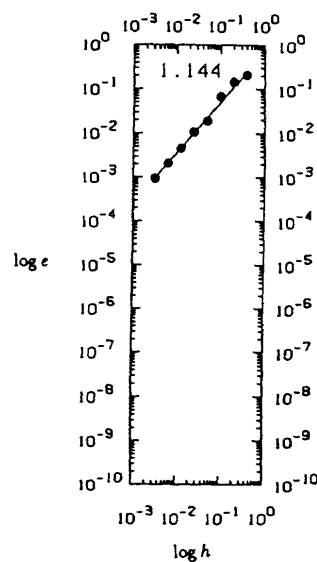
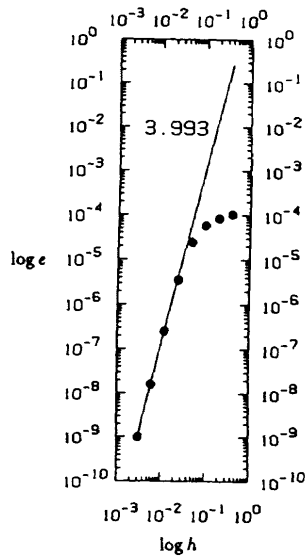
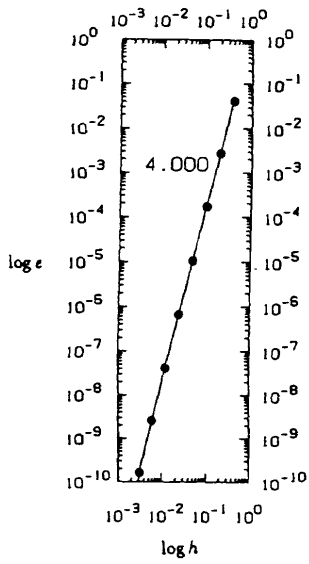


図6 誤差の収束率 ($\phi_0 \in C^\infty(\Omega)$) 図7 誤差の収束率 ($\phi_0 \in C^5(\Omega)$) 図8 誤差の収束率 ($\phi_0 \in C(\Omega)$) 図9 誤差の収束率 ($\phi_0 \notin C(\Omega)$)