

2 重円管内乱流の数値シミュレーション

清水 康弘^{*1} 河村 洋^{*2} 山本 稀義^{*3}

Numerical Simulation of a Turbulent Annular Flow

Yasuhiro SHIMIZU^{*1}, Hiroshi KAWAMURA^{*2}, Kiyoshi YAMAMOTO^{*3}

A direct numerical simulation for an annular flow with radius ratio of 0.02 is performed. It yields the turbulent energy budget around the inner rod. Comparisons with the results of DNS for the turbulent channel flow reveal that all budget terms near the wall of the inner rod are smaller than those of the channel flow, while both are approximately the same near the outer wall. It is remarkable that the anisotropy of the turbulent energy is enhanced close to the inner wall.

1. 緒言

本研究の対象である二重円管内の乱流は、工業的に非常に重要な流れであり、これまで Satake-Kawamura^[1]により LES を用いた解析が行われている。しかし LES では、GS 成分と SGS 成分の両方を考慮に入れなければならないため、乱流エネルギー収支などの詳細な評価は困難である。

そこで本研究では、有限差分法による DNS を十分発達した二重円管内の乱流に適用し、内管と外管の径の比が 0.02 の場合について、レイノルズ応力の輸送方程式の各項の収支を求める。さらに、二重円管の内管壁面近傍での曲率の影響を調べるため、計算結果を平行平板間乱流の DNS データ^[2]と比較する。

2. 基礎方程式

連続の式及び Navier-Stokes 方程式を以下に示す。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (1) \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial rvu}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial wu}{\partial \theta} \\ & - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] + 2 \quad (2) \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial rvv}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial wv}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} \\ & - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial w}{\partial r} \right] - \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \left[2 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) \right] \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial rwv}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial ww}{\partial \theta} + \frac{vw}{r} \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (4) \end{aligned}$$

また、十分発達した二重円管内乱流に対するレイノルズ応力輸送方程式は、各成分について次のように表される。

$$\frac{Duu}{Dt} = P_{xx} + T_{xx} + \Pi_{xx} + \Phi_{xx} + D_{xx}^v - \varepsilon_{xx} \quad (5)$$

$$P_{xx} = -2 \cdot \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad T_{xx} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\overline{uvv})}{\partial r}, \quad \Pi_{xx} = 0$$

$$\Phi_{xx} = 2 \cdot p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad D_{xx}^v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \overline{uu} \right\}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{2}{\text{Re}_\tau} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\frac{Dvv}{Dt} = P_{rr} + T_{rr} + \Pi_{rr} + \Phi_{rr} + D_{rr}^v - \varepsilon_{rr} \quad (6)$$

$$P_{rr} = 0, \quad T_{rr} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\overline{vvv})}{\partial r} + \frac{2}{r} \overline{vww}$$

$$\Pi_{rr} = -2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\overline{vp}), \quad \Phi_{rr} = 2 \cdot p \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$D_{rr}^v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \overline{vv} \right\} + \frac{2}{r^2} (\overline{w^2} - v^2) \right]$$

^{*1} 東京理科大学 大学院 理工学研究科 機械工学専攻
(〒278 千葉県野田市山崎 2641 電話(0471)24-1501)

^{*2} 東京理科大学 理工学部 機械工学科 教授

^{*3} 航空宇宙技術研究所

$$\epsilon_{rr} = \frac{2}{\text{Re}_\tau} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right)^2 \right]$$

$$\frac{D\overline{w w}}{Dt} = P_{\theta\theta} + T_{\theta\theta} + \Pi_{\theta\theta} + \Phi_{\theta\theta} + D_{\theta\theta}^v - \epsilon_{\theta\theta} \quad (7)$$

$$P_{\theta\theta} = 0, \quad T_{\theta\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r v w)}{\partial r} - 2 \frac{v w w}{r}$$

$$\Pi_{\theta\theta} = -\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{w p}) - \frac{2}{r} \overline{v p}, \quad \Phi_{\theta\theta} = \frac{2}{r} p \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right)$$

$$D_{\theta\theta}^v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \overline{w w} \right\} - \frac{2}{r^2} (\overline{w^2} - v^2) \right]$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{2}{\text{Re}_\tau} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right)^2 \right]$$

$$\frac{D\overline{u v}}{Dt} = P_{xr} + T_{xr} + \Pi_{xr} + \Phi_{xr} + D_{xr}^v - \epsilon_{xr} \quad (8)$$

$$P_{xr} = -\overline{v v} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad T_{xr} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r u v v)}{\partial r} + \frac{2}{r} \overline{u v w}$$

$$\Pi_{xr} = -\frac{\partial}{\partial r} (\overline{u p}), \quad \Phi_{xr} = \left[p \frac{\partial u}{\partial r} + p \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$D_{xr}^v = \frac{1}{\text{Re}_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \overline{u v} \right\} - \frac{1}{r^2} \overline{u v} \right]$$

$$\epsilon_{xr} = \frac{2}{\text{Re}_\tau} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right]$$

3. 計算条件

計算対象は、Fig.1 に示す二重円管内乱流であり、Table 1 に示す条件で計算を行う。主流は平均圧力勾配により駆動される。計算格子には staggered mesh を使用する。半径比 R_1/R_2 は 0.02 について計算を行い、の計算結果は Kim ら¹⁰による平行平板間乱流の DNS (半流路幅 δ を代表長さとしたレイノルズ数 $u_i \delta / \nu = 180$) と比較する。

本計算の格子幅を Table 2 に示す。外管側での格子幅は十分ではないが、本研究の興味の対象である内管近傍では、ほぼ十分な格子幅が確保されていると考えられる。

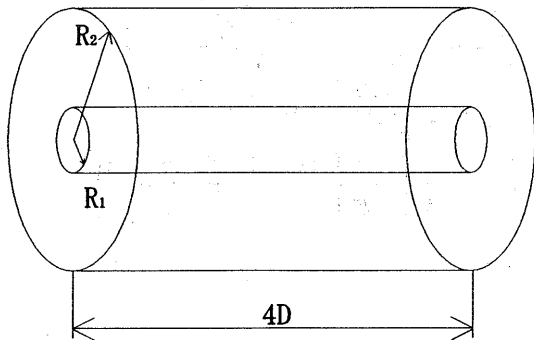


Fig.1 Calculation domain ($D=R_2-R_1$)

Table 1 Calculation condition

時間進行法	Fractional Step 法
格子分割数(x,r,θ)	64×50×128
格子形状	Staggered Mesh
使用スキーム	2次中心差分
流れ方向境界条件	周期境界条件
円周方向境界条件	周期境界条件
半径方向境界条件	Non-Slip 条件
内外径比	0.02
レイノルズ数 Re_τ	360
時間刻み	0.00001
計算ステップ数	100,000

Table 2 Spatial resolution

Δx^+	28.8
Δr^+	0.562~17.84
$(r\Delta\theta)^+$	0.35 (内管側) 18.02 (外管側)

4. 結果

Fig.2,3a,3b に平均流速分布図を示す。Fig.2 は全流路幅に対する平均流速分布であるが、流路中央より少し内管側に寄った位置にピークが存在している。また、平均流速の勾配が内管側で外管側に比べ大きくなっていることが分かる。Fig.3a,3b に注目すると、平均速度分布が外管側では普遍速度分布と良く一致しているが、内管側ではかなり小さな値を示している。これは内管曲率が小さいときに生じる、いわゆる円筒座標系効果によるものであり、破線で表したこの効果を考慮した混合長モデルによる解析値¹⁰とは十分良く一致している。

なお、二重円管内乱流では流れ場の非対称性のために、壁面せん断速度は内管と外管とで異なる。今回の場合、両者の比は $u_{i1}/u_{i2}=1.79$ であった。 y^+ は内外管それぞれの u_i で無次元化している。また、平均壁面せん断速度は

$$u_{i,av} = \frac{R_1 u_{i1} + R_2 u_{i2}}{R_1 + R_2} \quad (9)$$

で求められ、これによって無次元化した場合の無次元距離を y^+ とする。

乱流強度分布を各方向成分について Fig.4 に示す。各値は平均壁面せん断速度で無次元化されている。同図上には平行平板間乱流の DNS の結果をも示しているが、外管近傍では両者はかなり良く一致している。差異の原因として形状の相違、格子の粗さが考えられる。一方、内管付近では本計算の場合に各レイノルズ応力方向成分間の非等方性が大きい。また、 v の変動成分には、内管付近で極大値がみられないことが特徴的である。

Fig.5a,5b は、せん断応力を内外管それぞれの u_i で無次元化した図である。特に、レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ のピークは、内管側で非常に小さい値をとっている。これは主に円筒座標系効果によるもので、乱流エネルギー

一の生成に大きく影響している。

乱流エネルギー (k) の収支を Fig.6,7a,7b に示す。Fig.6 の値は平均壁面せん断速度 $u_{\tau w}$ で無次元化したものである。乱流エネルギーの収支は外管側では平行平板間乱流の分布にほぼ一致している。内管側では生成項や散逸項のピークが大きく、かつ外管側に比して壁面近傍のより狭い範囲に分布が限られている。これは平均流速の勾配が内管側で大きく、最大流速点の内管側に片寄っているためである。このケースでは $\tau=0$ となる点は約 $y^{++}=160$ に生じている。

Fig.6 以降のエネルギー収支図においては、若干の残差が生じている。残差が十分にはゼロとまらないのは、一つにはやや格子幅が粗いことによる。その他、円筒座標系のため、エネルギー収支式と運動方程式は解析的な微分操作のレベルではむろん整合しているものの、差分式のレベルでは完全には整合させることが困難であることによる^[4]。

Fig.7a,7b は内外管それぞれの壁面せん断速度で無次元化した乱流エネルギー k の収支の分布である。外管壁近傍においては格子幅が十分細くないため、平行平板間 DNS との間に多少の差異はみられるが、ほぼ同様の傾向を示している。内管側の収支の分布形状は外管側と類似しているが、Fig.6 と異なりその値は小さい。前述のように内管壁近傍では円筒座標系効果のため、レイノルズせん断応力が小さくなっているためである。

各応力成分のうち \overline{uu} の輸送方程式の収支を Fig.8a,8b に示す。値は内外管それぞれの壁面せん断力で無次元化している。乱流エネルギー収支と同様、格子の粗さのため、差異はみられるが、平行平板間 DNS と同様の傾向を示している。その他の特徴としては、圧力歪相関項が他の各項に比べて非常に小さい点が挙げられる。これは、内管側において非等方性が大きいことの原因となっている。

次に、 \overline{vw} の収支を Fig.9a,9b に示す。内管側では、各項の値が非常に小さいことと、乱流拡散項の値が正の値を保っている点が注目される。後者は、前述したように、 \overline{vw} の分布に内管壁近傍で極大値が現れないことによる。また、内管側の圧力歪相関項の Gain 側のピークの大きさが、外管側のそれに比べて小さくなっ

ていることがみられる。これは、後に述べるエネルギーの再分配が \overline{vw} 成分にはあまり行われていないことを示している。

さらに、 \overline{ww} 及び \overline{uv} の輸送方程式収支を Fig.10a,10b 及び Fig.11a,11b に示す。これらも内管側で各項の値が小さくなっている。特に \overline{uv} の収支では、乱流拡散項の値が壁近傍で正値をとらないこと、及び各項の収支が相対的に小さいことに特徴がある。

最後に、乱流エネルギーの再分配を担う圧力歪相関項の値の分布を、 $\overline{uu}, \overline{vw}, \overline{ww}$ の 3 成分について Fig.12a,12b に示す。 \overline{uu} の符号が全領域において負値を示しているが、これは \overline{uu} 成分で発生した乱れのエネルギーの一部が \overline{vw} 成分と \overline{ww} 成分に振り分けられることを示している。

\overline{uu} の Loss 側のピーク値は、内管側では外管側に比してほぼ一桁小さい。また外管側の $y^{++}>30$ では、 \overline{uu} のエネルギーが \overline{vw} と \overline{ww} にほぼ均等に分配されているのに対し、内管側では \overline{vw} 成分が Gain 側に大きなピークをもたず、 \overline{ww} に選択的にエネルギーが分配されていることが注目される。また、いわゆる \overline{vw} の splatting と呼ばれる壁近傍の負のピークも相対的に大きな値となっている。

5. 結言

二重円管内乱流に対して、直接数値シミュレーションを行い、乱流エネルギー及びレイノルズ応力輸送方程式の収支を求めた。外管壁近傍の収支は平行平板間乱流と定性的にはほぼ一致する。内管側の収支には内管曲率に起因する多くの特徴が観察された。

参考文献

[1]Satake, S. and Kawamura, H., *Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows*, 1(1993), 5-5.
 [2]Kim, J., Moin, P., and Moser, R., *J. Fluid Mech.*, 177(1987), 133-166.
 [3]Vilemas, J., Cesna, B. and Survila, V., "Heat transfer in gas-cooled annular channels", A.Zukauskas, eds., Springer Verlag.,(1987), 58.
 [4]鈴木,河村,機論,60-578(1994), 3280.

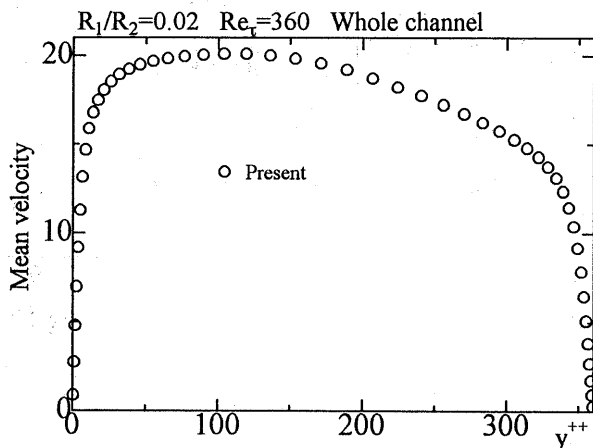


Fig.2 Mean velocity profile

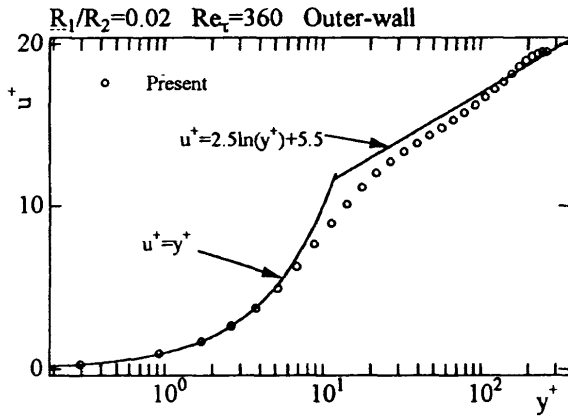


Fig.3a Mean velocity profile

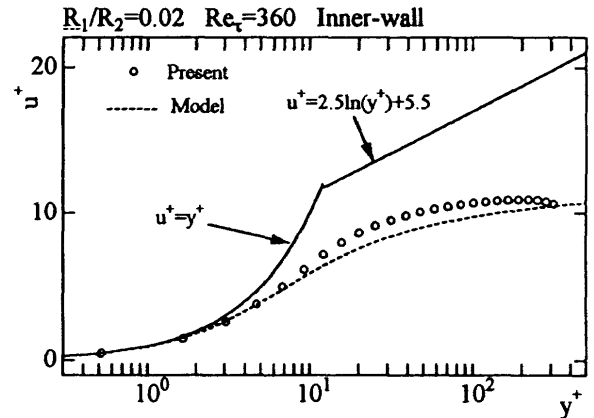


Fig.3b Mean velocity profile

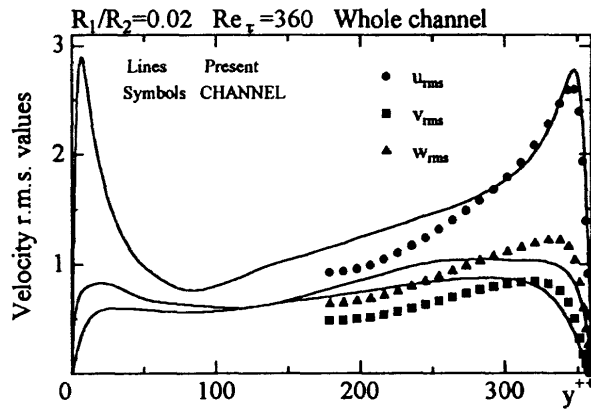


Fig.4 Turbulent intensity

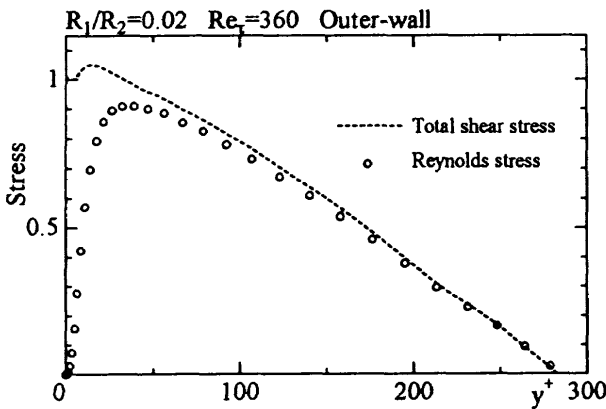


Fig.5a Shear stress profile

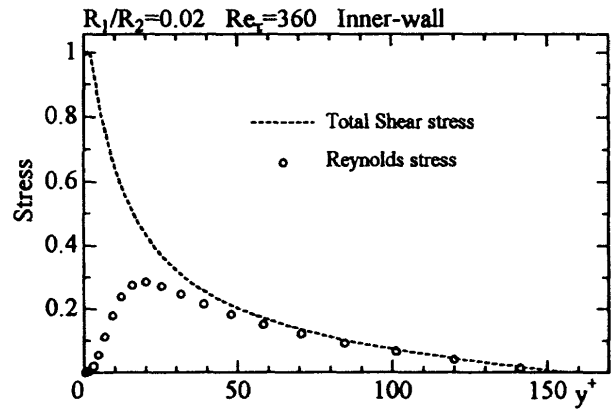


Fig.5b Shear stress profile

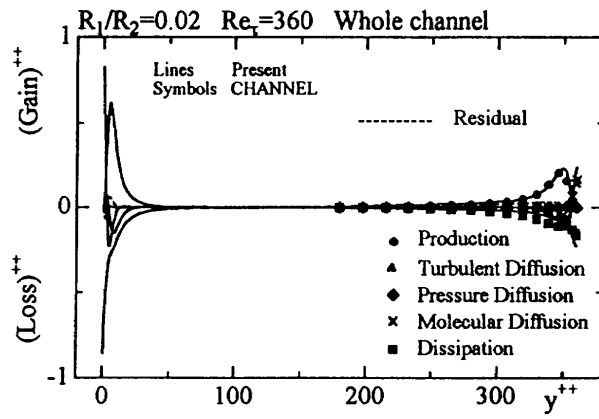


Fig.6 Budget of the Turbulent Energy

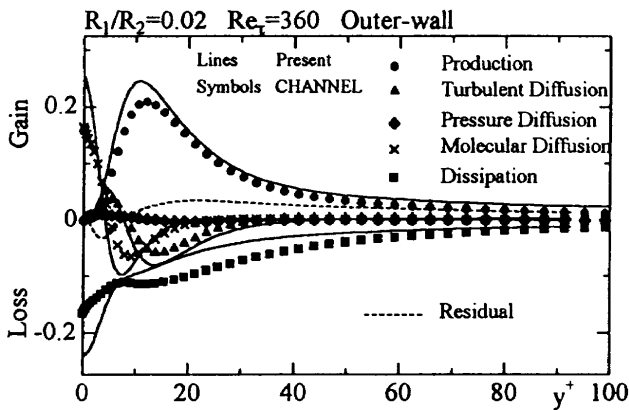


Fig.7a Budget of the Turbulent Energy

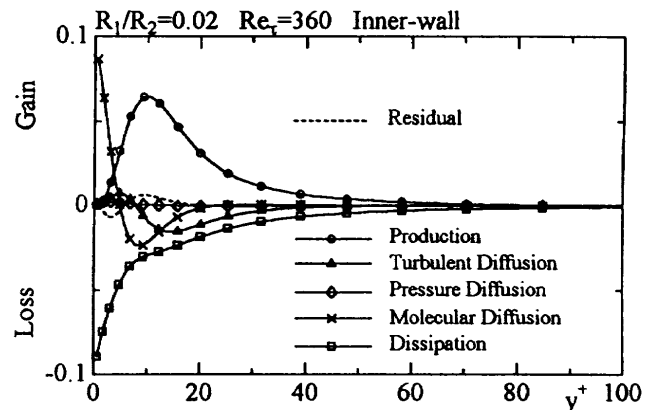


Fig.7b Budget of the Turbulent Energy

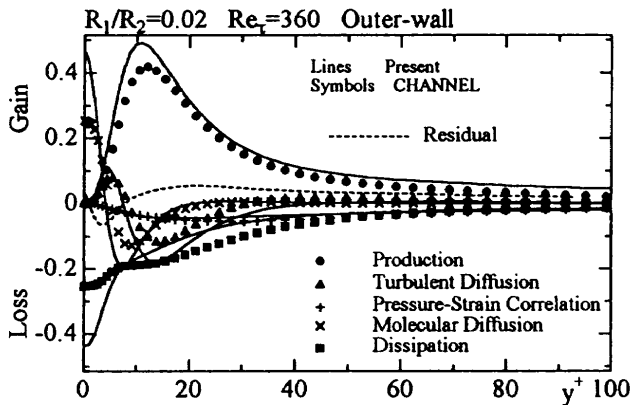


Fig.8a Budget of Reynolds stress uu

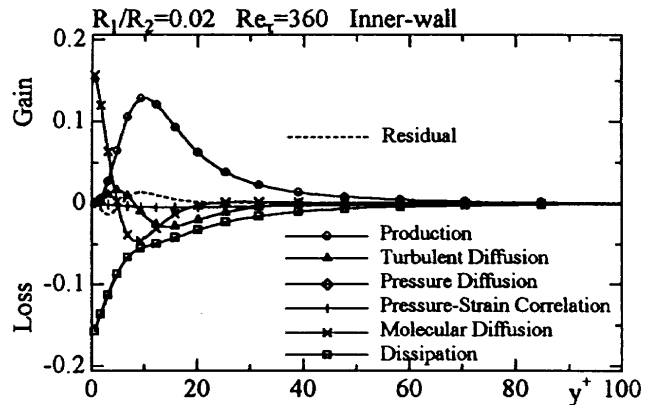


Fig.8b Budget of Reynolds stress uu

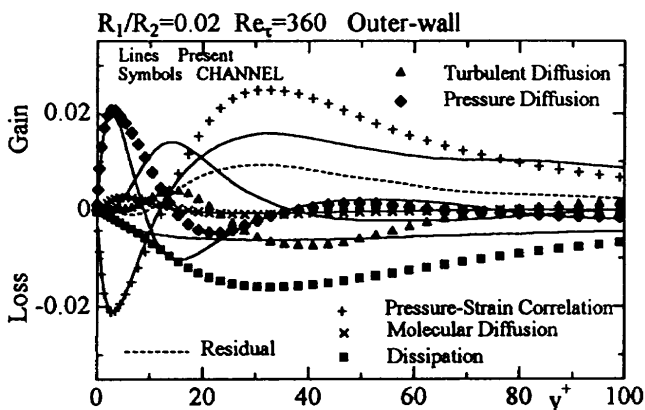


Fig.9a Budget of Reynolds stress vv

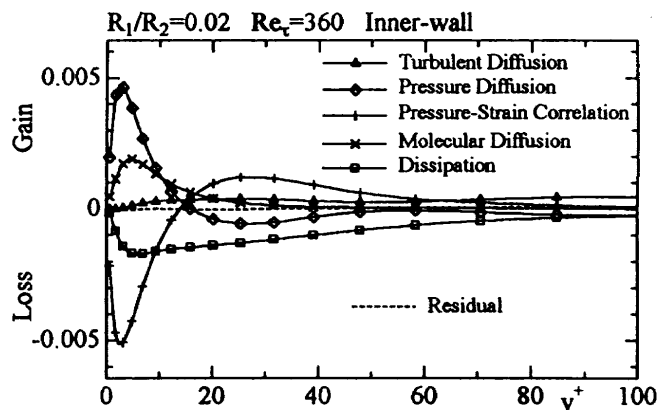


Fig.9b Budget of Reynolds stress vv

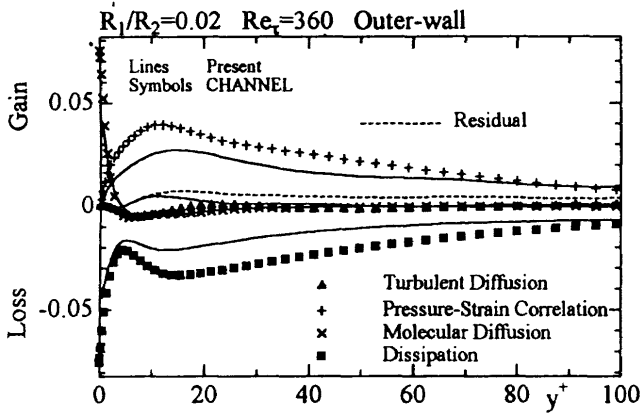


Fig. 10a Budget of Reynolds stress \overline{ww}

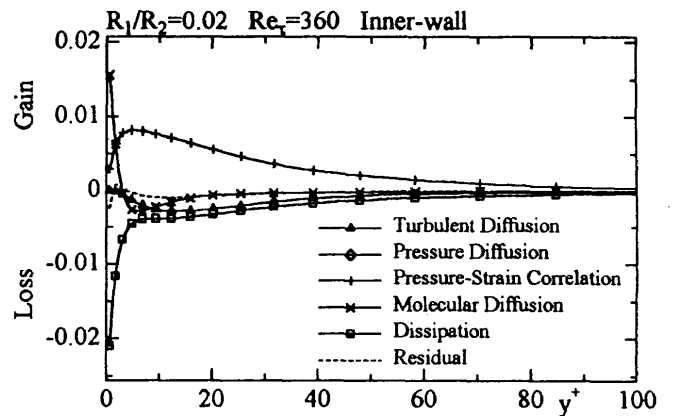


Fig. 10b Budget of Reynolds stress \overline{ww}

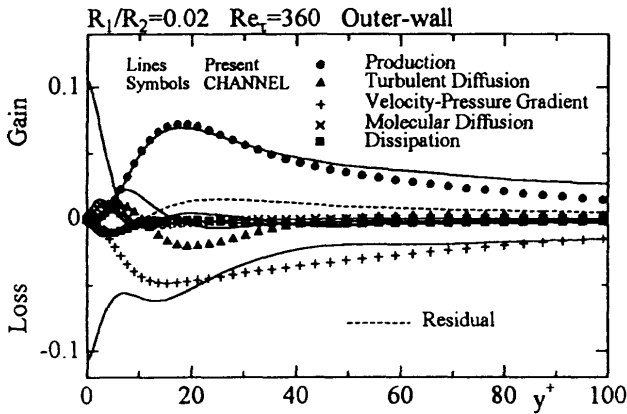


Fig. 11a Budget of Reynolds stress \overline{uv}

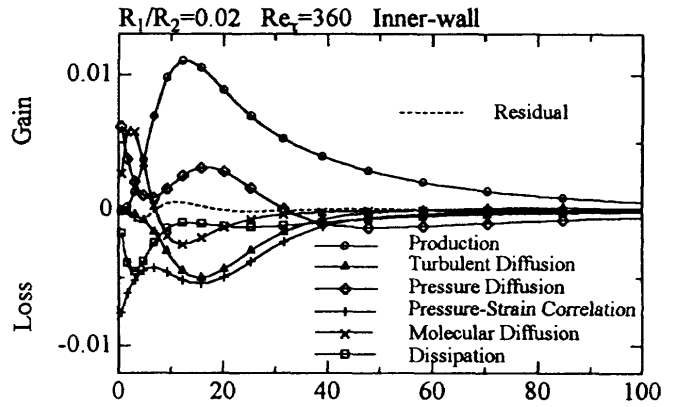


Fig. 11b Budget of Reynolds stress \overline{uv}

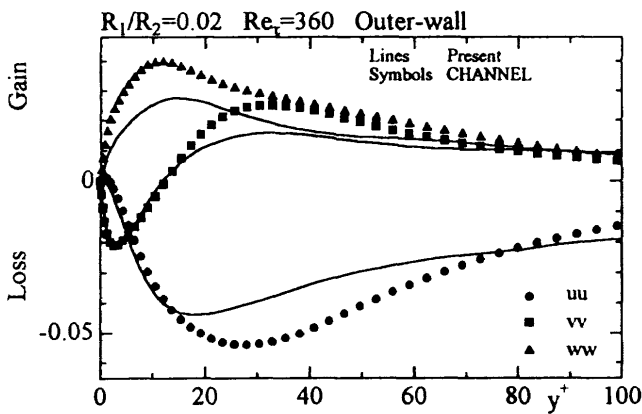


Fig. 12a Pressure-Strain Correlation Terms

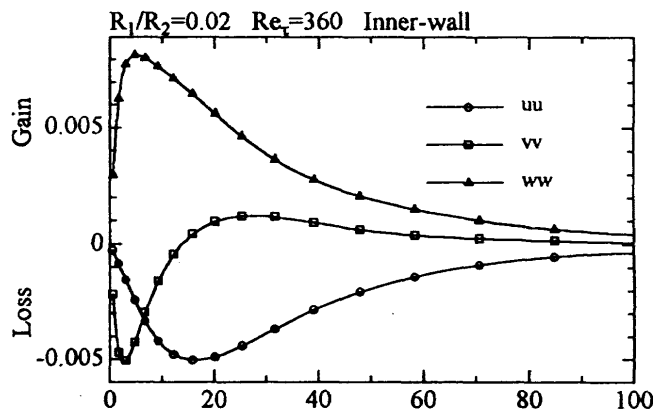


Fig. 12b Pressure-Strain Correlation Term