

## No. 2

## 超音速ノズル内に発達する層流境界層を測る

石橋 雅裕\*, 中尾 農一\*

## Measurement of the Displacement Thickness in Sonic Venturi Nozzles

Masahiro ISHIBASHI and Shin-ichi NAKANO

National Research Laboratory of Metrology

The real mass flow rate produced by the sonic venturi is different from that theoretically calculated from the throat conditions because of the distorted velocity profile in the core flow and the displacement thickness of the boundary layer at the throat. The discharge coefficient is introduced to correct these effects, but it must be determined experimentally. However, if the sonic venturi is manufactured in the same shape as one used in the theoretical analysis, the discharge coefficient was determined from the theoretical analysis with the accuracy of around 0.1 percent. This means that the flow field around the throat is correctly estimated by the theoretical analysis and the displacement thickness of the boundary layer can be calculated from the discharge coefficient with the same accuracy.

Key Words : sonic venturi, displacement thickness, discharge coefficient

## 1. はじめに

ISO 9000シリーズが動き出したことにより、流量計測の分野でも、日本国内におけるトレーサビリティ体制の確立が重要な課題になっている。当研究室においてもこの動きに対応すべく、流量標準の設定およびその転移技術の確立に取り組んできた。そのために、定積槽を用いるPVT法、および、天秤を用いる質量法を用いて標準を設定し、大きな流量（200m<sup>3</sup>/h）から微小な流量（0.1L/min）を発生する様々な音速ノズルを用いて標準を移転するための研究を行ってきた。その結果、±0.1%程度以下の不確かさで国家標準の供給が可能となり、トレーサビリティ体系を確立するための基礎技術はほぼ完成したと考えられる<sup>1)</sup>。

この研究を占める大きな部分は、音速ノズルの流出係数を実験的に正確に測定することである。これまでの研究によると、超精密旋盤で製作されたノズルの流出係数の実測値は、精度の高い理論計算で得られた結果と0.1%以下の差で一致する事が確かめられた。このことは、音速ノズルのスロートにおける流れの状況、すなわち加速流における流速分布の歪みの程度、および、層流境界層の排除厚さを極めて高精度に予測・測定できることを

意味している。ここでは、流量標準を確立するために行われた音速ノズルに関する研究から派生してきた流れ場の予測、特に、音速ノズルの流出係数を用いた層流境界層の排除厚さの高精度推定について報告する。

## 2. 音速ノズルによる流量計測

はじめに、音速ノズルを用いた流量計測の原理について述べる。ここで用いる音速ノズルの形状は、図1に示すように、ISO型のトロイダルスロートソニックベンチュリノズルである。その流路は、円弧で絞られた後にその延長で3°拡大し、その直後から半頂角3°の円錐形ディフューザとなる。流れが一次元であると仮定すると、スロート部で計算した理論質量流量 $Q_t$ は、次式となる。

$$Q_t = a^* \cdot S \cdot \rho^* \quad (1)$$

ここで、 $a$ は音速、 $S$ はスロート部の断面積、 $\rho$ は気体の密度である。右肩の\*はスロートにおける値であることを示す。ノズル上流の澱み点からスロート部の音速面までの流れを理想気体の等エントロピ過程であると仮定すると、スロートの状態を澱み点状態で表すことができる。その結果、式(1)は次式となる。

$$Q_t = S^* \cdot C^* \cdot \sqrt{P_0 \cdot \rho_0} \quad (2)$$

ここで、添字<sub>0</sub>は澱み点での値であることを意味し、今

\*計量研究所

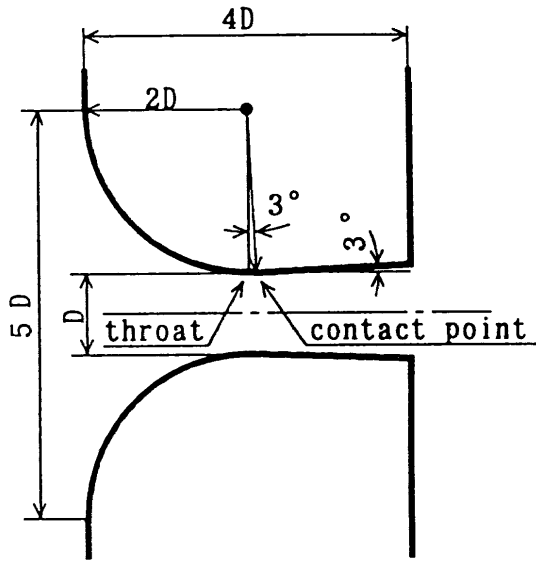


図1 ISO型トロイダルスロート音速ノズルの概形図

の場合は測定値である。 $C^*$ は、気体の種類を表す臨界定数であり、

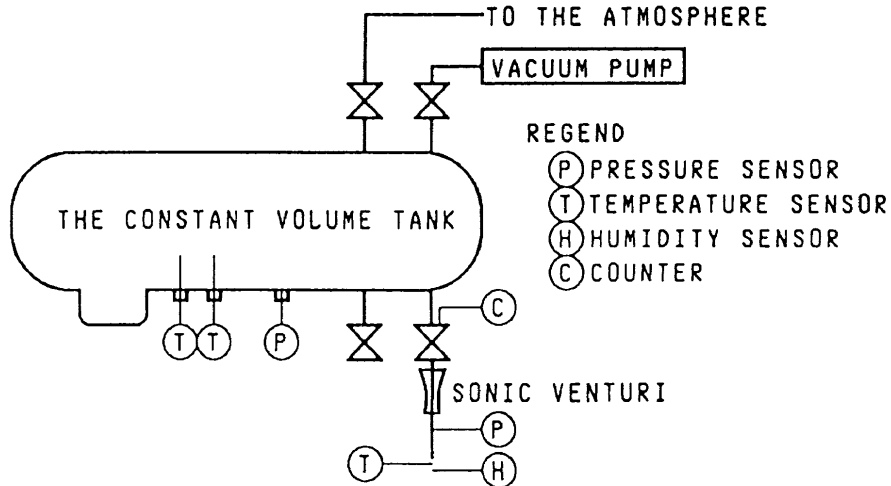
$$C^* = \sqrt{\gamma \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

で与えられる。 $\gamma$ は気体の比熱比である。

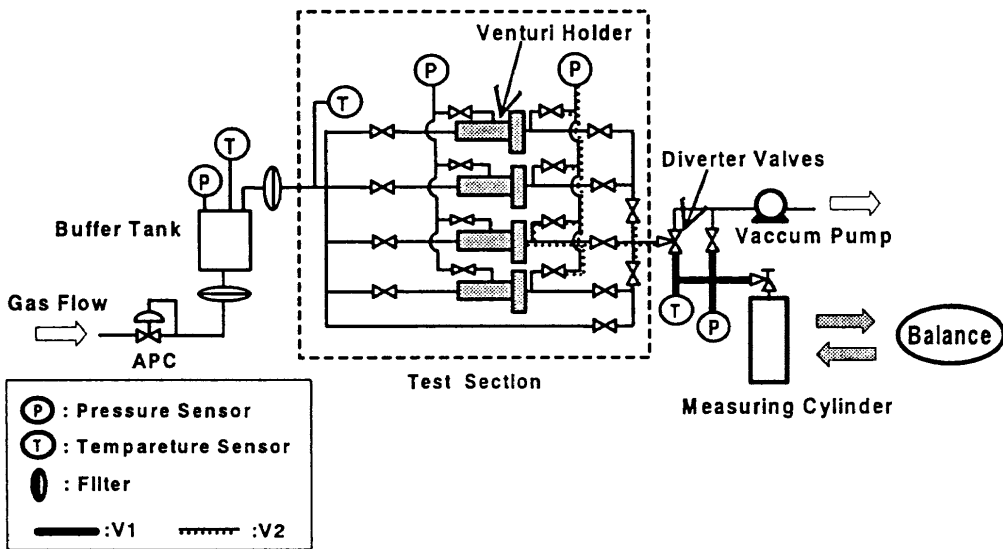
実際のノズルのスロートでは、主流が軸対称二次元流であるために流速分布が歪み、壁面で境界層が発達する。これらの影響によって、実際の質量流量 $Q_m$ は、(2)式で与えられる理論質量流量よりも小さくなる。この誤差を補正するために補正係数 $C_d$ を用い、真の流量 $Q_m$ は次式で表わされるものとする。

$$Q_m = C_d \cdot Q_t \tag{3}$$

この補正係数 $C_d$ は流出係数と呼ばれ、通常は、定積槽システムや秤量タンクシステム等の校正装置を用いて測



(a) 気体の状態方程式から質量を求めるPVTt法に使用する



(b) 天秤を用いて質量を直接測定する秤量法に使用する

図2 音速ノズルの校正装置の概略図

定される。計量研究所では、この測定のために、定積槽および天秤を用いた2種の校正装置を整備した。定積槽システム（図2a）は、槽内の圧力、温度の変化、流入時間の各測定値、および、気体の状態方程式を用い、ノズルを通して槽内に流入した気体の質量を求める装置である。本システムが測定可能な流量範囲は40~10m<sup>3</sup>/hであり、測定される質量流量の総合不確かさは、95%信頼区間において±0.05%である。秤量システム（図2b）は、ノズルを通して容器に流入した気体の質量を天秤で直接測定する装置であり、微小流量用のノズルの校正に使用される。本システムが測定可能な流量範囲は5~0.1L/minであり、測定される質量流量の総合不確かさは、95%信頼区間において±0.08%である。

### 3. 流出係数の理論的な決定

流出係数は、主に、先に述べた流れ場の二つの要因から生成されるはずである。すなわち、加速による主流の流速分布の歪み、および、ノズル壁面に発達する境界層の排除厚さである。計量研究所で現在測定できるレイノルズ数は、スロート直径に基づく値で10<sup>6</sup>より小さい。これまで各国で行われてきた様々な測定によると、この範囲のレイノルズ数では、スロートに形成される境界層は層流となるはずである。

#### (1) 主流の流速分布の非一次元性

ここでは、軸対称二次元ノズルに非粘性理想気体が行われる場合のスロートにおける流速分布を求めたHallの近似解を用いる<sup>2)</sup>。この解析では、スロート近傍における直径変化をスロートにおける曲率 $R$ の逆数で級数展開し、流れが非回転であるという仮定のもとに、連続の式、エネルギー保存の式を用いる。主流方向の速度 $u$ 、流れに垂直方向の速度 $v$ をスロートでの音速で無次元化し、そこからの摂動分を曲率の逆数で展開して方程式に代入し、低次項から順に解を求めて行く。3次の項まで求めることにより、精度の高い解を得ている。詳細は、文献<sup>2)</sup>を参照されたい。

最終的に得られた流速分布を積分し、スロートにおける質量流量を計算すると、理論質量流量との比は次式となる。

$$\frac{Q_m}{Q_t} \approx 1 - \alpha \quad (4)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{k+1}{R^2} \cdot \left( \frac{1}{96} - \frac{8 \cdot k + 21}{4608 \cdot R} + \frac{754 \cdot k^2 + 1971 \cdot k + 2007}{552960 \cdot R^2} - \dots \right) \quad (5)$$

であり、 $R$ は壁面の曲率半径とスロート半径の比である。この $\alpha$ が、主流が一次元流れでないことによる質量流量

の欠損を与える。

#### (2) 層流境界層の排除厚さ

ここでは、図1に示したノズルとほぼ同じ形状を持つノズルについて、その中に発達する層流境界層の厚さを、相似解を仮定することにより、厳密な解析解として求めたGeroppの方法を用いる<sup>3)</sup>。この方法では、軸対称流におけるプラントルの境界層方程式に相似解を仮定し、ノズル形状に制限を与える一つの境界条件を選ぶことにより厳密な解析解を求める。境界層の厚さ方向に関してHowarth型の変数変換を行い、最終的には、次の形の相似解 $K$ を用いた境界層方程式を得る。

$$A \cdot (K'^2 - 1) = B \cdot K \cdot K'' + C \cdot K'''$$

ここで、 $(\prime)$ は、変換された座標による常微分を意味する。 $A, B, C$ は、ノズル形状と気体の種類によって決まる定数である。この式を一般的に解くことはできないが、ある条件を与えることによって、解析的に解く事が可能となる。具体的には、 $A = m \cdot C, B = 0$ と置く。ここで、 $m$ はノズルを軸方向に伸縮させる形状パラメータである。最終的に、スロート部の排除厚さ $\delta$ は、

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{R \cdot m}} \cdot \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{4} \cdot \frac{\gamma+3}{\gamma-1}}$$

となる。 $D$ はスロート直径である。ここで、 $m$ を適正に選ぶことにより、使用しているノズルの寸法にほぼ合致する形状を与えることができる。これを用いてスロート部における排除厚さが占める割合を求めると、

$$\left( \frac{S - \pi \cdot D \cdot \delta}{S} \right)^2 = 1 - \frac{\beta}{\sqrt{Re}} \quad (6)$$

となる。ここで、

$$\beta = \frac{4}{\sqrt{m}} \cdot \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left( 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \frac{\gamma-1}{\sqrt{3}} \right) \quad (7)$$

である。 $\beta / \sqrt{Re}$ は排除厚さによる有効断面積の減少量を与え、これが質量流量欠損の原因となる。

#### (3) 理論的に求められる流出係数

上で求めた主流および境界層による質量流量欠損を結合し、実測される流出係数に相当するものを求めるためには、それぞれの欠損が十分に小さいことを考えて、(4)式と(6)式の積を取れば良い。空気の比熱比( $\gamma = 1.401$ )を用い、スロートにおける曲率半径を一致させると、次式が得られる。

$$C_d = 0.99859 - \frac{3.522}{\sqrt{Re}} \quad (8)$$

これが、理論的に決定された流出係数である。

#### 4. 理論と実験との比較

超精密旋盤を用い、スロート部分の形状が理論解析で用いられた形状とほぼ同じとなるノズルを製作した。図3は、理論解析されたノズル形状と実測に用いられたノズルの設計値を示す。スロート近傍はほぼ完全に同じ形状となっている。これまでに、スロート直径が7~20mmである範囲の相似形ノズルを20本以上製作した。実際に製作されたノズルについて、形状測定を行った結果の一例を図4に示す。図の実線は設計値、黒点は測定値であり、N1のノズル形状は設計値とほぼ完全に一致している。N5ノズルは、製作されたノズルの中で最も製作誤差が大きいものであり、スロート前後に凸凹が存在する。

これらのノズルの流出係数  $C_d$  を定積槽方式によって求めた結果を図5の黒丸で示す。実験的に求められた流出係数から最小二乗法によって求めた適合曲線は、

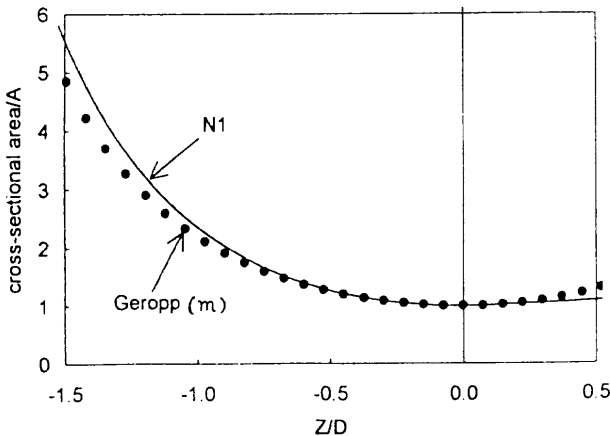


図3 ISO型音速ノズル(N1)と理論解析に使用される音速ノズルのスロート ( $Z/D=0$ ) 近傍における設計形状の比較

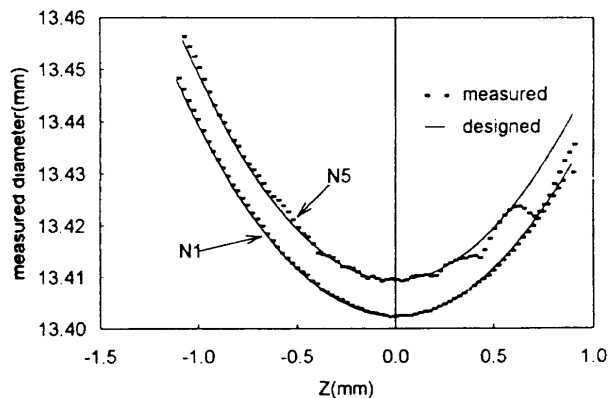


図4 音速ノズルの設計形状と製作後の測定された形状との比較

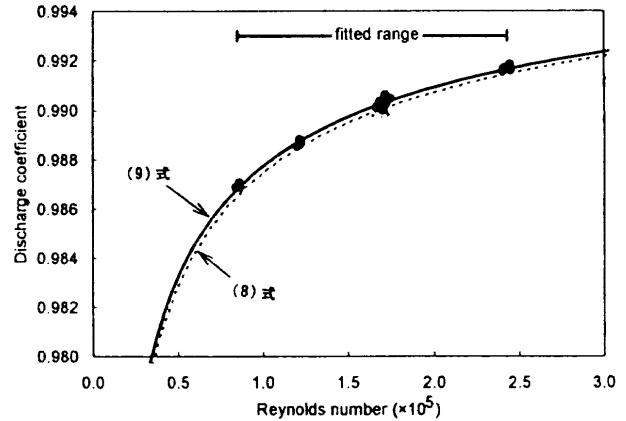


図5 N1音速ノズルの流出係数のレイノルズ数による変化

$$C_d = 0.99864 - \frac{3.448}{\sqrt{Re}} \quad (9)$$

となり、全ての測定値はこの式の $\pm 0.03\%$ 以内に分布した。ただし、(9)式は本測定で用いられた相似形ベンチュリノズルに限って有効であり、四分円等の別な形状のノズル用いた場合には、それぞれに固有な適合曲線が必要となった。ところが、(9)式を求めるために用いたノズルから円錐形のディフューザ部分を取り去ったノズルも(9)式と同じ適合曲線を持つことが確認されており、すなわち、流出係数を大きく支配する部分は、スロート前方のみではなく、その後方の $3^\circ$ までの円弧部分も含まれることが分かっている。図5の点線および実線は、それぞれ、(8)式および(9)式から計算された。これらの差は、

$$Re > 10000 \text{ において } 0.08\% \text{ 以下}$$

$$Re > 5000 \text{ において } 0.11\% \text{ 以下}$$

となり、測定範囲 (fitted range) においては、両者はほぼ完全に一致する。したがって、理論ノズルと同じスロート形状を持つノズルを製作すれば、その流出係数は、理論的な予測値を用いて $0.1\%$ 程度の精度で決定することが可能である。

#### 5. 境界層排除厚さの推定

これまでの議論によると、音速ノズルのスロート近傍の流れ場は、境界層の排除厚さを含め、理論的に極めて正確に予測できているはずである。この理論によると、主流の流速分布は、レイノルズ数に依存せず、形状と気体の種類のみ依存する。したがって、実験的に測定された流出係数を用い、スロートにおける排除厚さの変化を極めて正確に求めることができるはずである。図6は、スロート直径が $0.7\text{mm}$ 以下である微小な音速ノズルについて、測定値から求められた適合曲線を用いることにより、スロートにおける排除厚さのレイノルズ数依存性

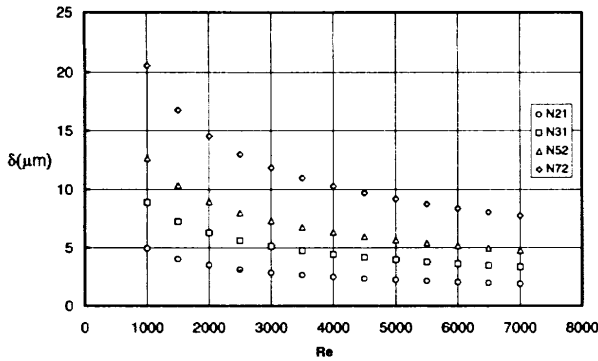


図6 音速ノズルスロート部における実験から推定された境界層排除厚さとレイノルズ数との関係

を計算したものである。ノズル名にある「N」の次の数字は、スロート直径 (mm) の小数点以下第一位の値を表す。どのノズルにおいても、レイノルズ数の増加に伴って排除厚さが急速に減少するが、漸近的にそれぞれの固有な値に近づく、これは、高いレイノルズ数域において流出係数がほぼ一定になるというこれまでの結果と一致している。このような小さなノズルでは、排除厚さも極

めて薄く、直径が0.2mmのN21ノズルにおいては $5\mu\text{m}$ 以下となる。ここに示された値は、これまでの議論から考え、0.1%程度の正確さを持っていると考えられる。このように、流出係数を正確に測定し、理論計算と併せて考えることにより、従来の方と比べて桁違いに高い精度で境界層の排除厚さを推定することが可能となった。

#### 参考文献

- 1 石橋雅裕等, “超精密加工音速ノズルの流出係数” 計測自動制御学会論文集 vol. 21, pp. 991-998, 1995.
- 2 Hall et al. “Transonic flow in two-dimensional and axially-symmetric nozzles”, Quart. J. Mech. and Applied Math., vol. 15, 487-508, 1962.
- 3 Geropp, “Laminare Grenzschichten in ebenen und rotationssymmetrischen Lavalduesen”, Deutsche Luft- und Raumfahrt, Forschungsbericht 71-90.

