

No. 18

箱の中の熱対流 — 遷移過程

足立高弘*, 水島二郎*

Sequential Transitions of the Thermal Convection in a Square Cavity

T. ADACHI and J. MIZUSHIMA

Faculty of Engineering, Doshisha University

Sequential transitions of the thermal convection in a square cavity heated from below are investigated up to the time periodic state by numerical simulations. The flow field is assumed to be two-dimensional and all the boundaries are assumed to be rigid and perfectly thermal conducting as a mathematical model. The Prandtl number is fixed as $P=7$. The dynamical properties of the solutions obtained by the numerical simulation are explained quite well from the bifurcation diagram obtained by the stability analysis.

Keywords : Bénard convection, stability, transition pitchfork bifurcation, Hopf bifurcation, hysteresis.

1. はじめに

水平に置かれた矩形容器に満たされた流体の下面を熱することにより上下面に温度差を与えると、ある臨界値でピッチフォーク分岐が生じベナール対流が発生することはよく知られている。さらに温度差を大きくしていくと、何度かのピッチフォーク分岐を経てホップ分岐が生じるか、あるいは直接にホップ分岐が生じることが予想される。それに伴い、流れは定常流から振動流に遷移する。

静止状態からのベナール対流の発生は線形安定性理論を用いて研究されてきた。すなわち、温度差に比例するパラメータであるレイリー数 Ra が小さいとき静止状態にあった流体は、臨界点で不安定になり新たな安定な解として対流が発生する。このとき臨界点ではピッチフォーク分岐が生じる。三次元の直方容器内に発生する熱対流は、Davis¹⁾によって調べられ、容器の長い辺に垂直なロールを持つモードが臨界レイリー数を与えることを示した。数学的な取り組み安さから二次元性を仮定した研究も多く行われているが^{2,3,4)}、二次元性の仮定は無限に長い直方体の長さ方向に平行な軸を持つロールを考えることに相当しており、臨界値を与えるモードはDavisの結果に反している。したがって、二次元性の仮定は数学的なモデルと考えられる。

静止状態が不安定となり、ピッチフォーク分岐が生じた結果発生した対流は安定であるが、 Ra をさらに増加させると不安定になる。側壁の境界条件が完全熱伝導の場合、その臨界レイリー数は二次元性の仮定の下で $Ra=37046$ であり、再びピッチフォーク分岐が生ずることが Adachiと Mizushima⁵⁾により調べられている。

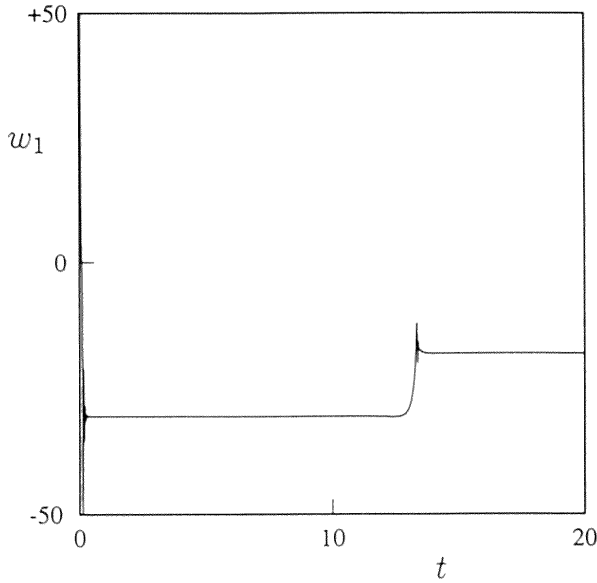
本研究では、正方容器に発生するレイリー・ベナール対流の遷移過程を、二次元性を仮定し、数値シミュレーションと安定性理論の二通りの手法を用いて詳しく調べる。特に、 Ra を増加させたときの定常流から振動流への遷移および流れ場のモード間の遷移に着目する。

2. 数値シミュレーション

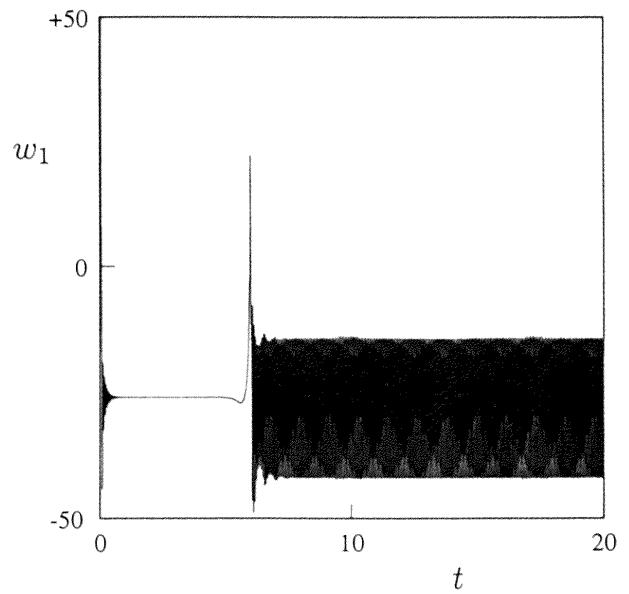
数値シミュレーションを行うことにより、正方容器に発生する熱対流の時間発展の振る舞いを調べる。座標系は容器の中心を通り水平方向に x 軸、それと直角を z 軸とする。チェビシェフ多項式を用いた級数展開とコロケーション法とを用いて展開係数に対する行列形式の常微分方程式を導き、ルンゲークッターギル法を用いて適当な初期条件の下で、 $Ra=40000$ 、 48000 の場合について計算を行う。ここで、レイリー数 Ra とプラントル数 P は $Ra = \gamma g \delta T d^3 / \nu \kappa$ 、 $P = \nu / \kappa$ と定義し、 κ は流体の熱拡散係数、 ν は動粘性係数、 γ は熱膨張係数、 g は重力加速度である。プラントル数は $P=7$ (水) とする。

図1に、数値シミュレーションの結果得られる時間変

*同志社大学工学部



(a) : $Ra=40000$



(b) : $Ra=48000$

図1 速度 w_1 の時間発展.

化の様子を示す。代表振幅としては $(x, z) = (1/4, 0)$ における z 方向の速度 w_1 を用いる。図1(a)は $Ra=40000$ の場合であり、 w_1 は一度 $w_1 = -30.6$ に収束した後振動が起こり新たな別の値 $w_1 = -18.2$ に収束している。これは、不安定な定常解から安定な定常解への遷移と考えられる。このとき、流れ場は容器の中心に渦を一つ持つモードから x 方向に二つの並んだ渦を持つモードへと遷移する。図1(b)は $Ra=48000$ の場合であり、ここでも w_1 は一度不安定な定常解 $w_1 = -26.0$ に収束する。そのときの流れ場は容器の中心に一つの渦を持つ。図1(b)では、 w_1 はその後定常値には収束せず、 $-42.0 < w_1 < -14.4$ の範囲で周期的に変動する振動解が現れた。次節では、このような解の振る舞いを安定性理論を用いて説明する。

3. 非線形平衡解と安定性

静止状態における線形安定性を調べ、その後発生する熱対流の非線形平衡解を求め、その安定性を調べる。ここでも、チェビシェフ多項式を用いた級数展開とコロケーション法を用いた展開係数の代数方程式を導き、ニュートン法および固有値問題を解くことにより計算を進める。図2に $0 < Ra < 70000$ における非線形平衡解の分岐ダイアグラムを示す。縦軸は代表振幅 w_1 、横軸はレイリー数 Ra である。実線は安定な平衡解、点線は不安定な平衡解を表す。ここでは、先の数値シミュレーションの結果をふまえ、渦が一つのモードと渦が二つのモードに着目する。渦が一つのモードの場合には、系に Z_2 対称性が存在する⁵⁾。振幅 w_1 の分布は、系が Z_2 対称性を持つ場合には Ra 軸に対して対称であり、 Z_2 対称性を持たな

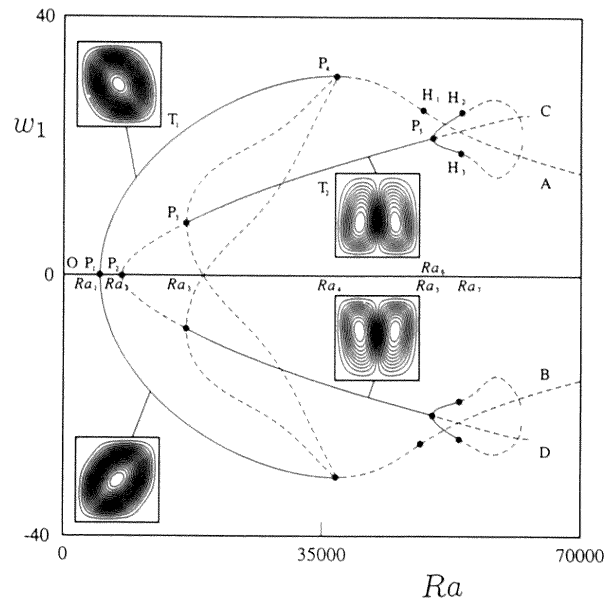


図2 振幅 w_1 の分岐ダイアグラム. 臨界レイリー数はそれぞれ、 $Ra_1=5011.7$, $Ra_2=7972.4$, $Ra_3=16624$, $Ra_4=37046$, $Ra_5=49603$, $Ra_6=54048$, $Ra_7=54223$.

い場合でも、ほぼ対称である。図中の P, H はそれぞれピッチフォーク分岐、ホップ分岐が生じる点を示し、その臨界値を Ra_i ($i = 1 \dots 7$) で示す。

この分岐図で Ra_3 と Ra_4 の間のレイリー数に対しては実線で示される安定なブランチが4本存在するが、その中でどの状態が実現されるかは初期条件に依存する。また、 Ra を十分に小さい値から増加させるとき、十分大きい値から減少させるときとは同じ Ra に対してとる状態が異なるヒステリシス現象が現れる。すなわち、

Ra を Ra_3 よりも小さい値から増加させる場合には第一ブランチ P_1-A (or P_1-B) 上の解が実現されるが、 Ra_4 でこの解は不安定になり P_2-C (or P_2-D) 上の平衡解に遷移する。このとき、流れ場は渦一つのモードから渦二つのモードへ遷移する。逆に、 Ra を Ra_4 より大きな値から減少させるときには第二ブランチ P_2-C (or P_2-D) 上の解が実現されるが、 Ra_3 でこの解は不安定となり P_1-A (or P_1-B) 上の平衡解に遷移し、その流れ場は渦二つのモードから渦一つのモードへ遷移する。

4. まとめ

本研究では、数値シミュレーションと分岐理論の二つの手法を併用し、数値シミュレーションから得られた特異な解の挙動を分岐理論の立場から説明することを試みた。すなわち、図 1 (a) の $Ra=40000$ は、図 2 の Ra_4 と Ra_5 の間の値であり、ここでは不安定な第一のブランチと安定な第二のブランチが存在する。解は、はじめ第一のブランチ (P_1-B) 上の平衡解に向かったが、 Ra_4 より大きなところでの Ra に対してこの平衡解は不安定なので、時間の経過とともに不安定性により振動が起こり、安定な第二のブランチ (P_2-D) 上の平衡解へ向かい収束した。数値シミュレーションにおいて、不安定な

平衡解に到達することは考え難いが、ここで得られた結果では、不安定な平衡解にかなりの期間留まっていることはたいへん興味深い。図 1 (b) の $Ra=48000$ も、図 2 の Ra_4 と Ra_5 の間の値であり、はじめ第一のブランチ上の不安定な平衡解に向かうが、ここでも不安定性により振動が起こり別の安定な解に向かう。この場合には、定常値には収束せず振動解が現れている。これは、亜臨界ホップ分岐の存在を示唆するものである。この振動解は、おそらく Ra_5 (H_1 点) で生じるホップ分岐が亜臨界分岐であり、そこから伸びる安定な振動解が現れているものと考えられる。

References

- (1) S. H. Davis 1967 *J. Fluid Mech.*, **30**, 465–478.
- (2) W. Velte 1964 *Arch. Ration. Mech. Analysis*, **16**, 97–124.
- (3) N. Y. Lee, W. W. Schultz and J. P. Boyd 1989 *Int. J. Heat Mass Transfer*, **32**, 513–520.
- (4) J. Mizushima 1995 *J. Phys. Soc. Jpn.*, **64**, 2420–2432.
- (5) T. Adachi and J. Mizushima 1996 *J. Phys. Soc. Jpn.*, **65**, 1686–1698.

