一様乱流における速度分布の交差独立性

巽　友正
国際高等研究所＊

Cross Independence of The Velocity Distribution in Homogeneous Turbulence

by
Tomomasa TATSUMI
International Institute for Advanced Studies

ABSTRACT

The *cross-independence*, or the independence of the *sum* and the *difference*, of the velocities at two points is assumed as a closure hypothesis for making determinate the equations of the velocity distribution functions of homogeneous turbulence.

While the ordinary independence of the velocities is only valid for points at large distances, the *cross independence* is valid for points at short distances as well. It also allows us to employ different scaling laws for the *sum* and the *difference* of the velocities, for instance, the viscous scaling for the former and Kolmogorov's scaling for the latter.

This hypothesis is applied to the equation of the one-point distribution function (Lundgren [1], Monin [2]), and it is shown that the closed equation yields a normal (Gaussian) one-point distribution function associated with the kinetic energy decaying inverse proportionally in time.

Key Words: turbulence, velocity distribution, cross-independence of velocities, normal (Gaussian) distribution

1．乱流理論における完結問題

乱流の統計的性質に関する最も完全な知識は、流れの全空間における速度場の分布汎関数によって与えられる。　速度場の時間的発展は流体力学方程式によって一意的に決定されるため、分布汎関数もまた決定論的な発展方程式に従う。　この方程式は、すでに特性汎関数方程式の形で Hopf [3] によって与えられており、その意味で乱流理論の基礎はすでに確立されているといってよい。

しかし、Hopf方程式は汎関数方程式であり、これを一般的に解く方法がないため、乱流場の統計的知識を得るには、この基礎方程式から有限次元の分布関数に対する方程式系を導かなければならない。　ところが、この方程式系は、流体力学方程式の非線形性のために、常に方程式よりも多い分布関数を含むという**非完結性**の困難が生じる。

これは乱流理論にとって最も本質的な困難であり、これを解決するために、これまでさまざまな**完結仮説**が提案されてきたが、いずれも固有の有効範囲と適用限界をもっており、対象を限定した現象論としての性格を免れない。　その意味で、乱流のすべての現象を貫く普遍的な仮説といったものは、Kolmogorov [4]の局所平衡仮説のほかには、まだ得られていないように思われる。

この事情は、乱流が連続的な流体の場であり、粒子や準粒子といった実体としての構成要素をもたないことによっている。　近年、乱流の可視化と数値シミュレーションによって、乱流は局所的に明確な渦構造をもつことが観測されており、それによって乱流の統計的性質のかなりの部分が物理的に説明されている。　しかし、このような渦構造は、絶えず変形、分裂、合体を繰り返す不安定なものであり、準粒子としての適格性をもっていない。

このため、完結仮説は、粒子的描像を離れた統計的な性格のものとならざるを得ないが、この場合、高次の速度分布関数をより低次の分布関数に分解することを可能にする分布の「独立性」が、有力な手段となる。　この発想のもとに、「独立性」の仮定が、どのようにして有効な完結仮説となり得るかを検証するのが本論文の目的である。

＊京都府相楽郡木津町木津川台9-3　〒619-02

2．乱流の速度分布

乱流の速度分布については、これまで実験や数値シミュレーションによって、1点における速度分布はほとんど完全に**正規分布**であることが知られている。　これに対して、1点における速度の微分や、2点における速度の差の分布は非正規的で、指数分布に近いことが報告されている。

速度分布に関する理論解析は近年盛んに行われており、実験結果に対応する理論結果も得られている。　しかし、ここで対象とする3次元乱流に関する限り、理論はまだ現象論の域を脱していないように思われる。

有限個の空間点における速度の分布関数を支配する方程式は、Lundgren [1] および Monin [2] によって独立に導かれている。　これらの方程式は、いずれも上に述べた意味で非完結的であり、これを完結させるためには何らかの統計的仮説を必要とする。

座標$\mathbf{x}_1$および$\mathbf{x}_2$の2点をとり、2点での時刻tにおける速度を$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t)$、$\mathbf{u}(\mathbf{x}_2, t)$とするとき、速度の1点および2点分布は、それぞれ次のように定義される。

$$\begin{aligned} f(1) &= f(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, t) \\ &= \langle \delta(\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{u}_1) \rangle \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(1,2) &= f_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1; \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_2; t) \\ &= \langle \delta(\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{u}_1) \times \\ &\quad \times \delta(\mathbf{u}(\mathbf{x}_2, t) - \mathbf{u}_2) \rangle \qquad (2) \end{aligned}$$

ここに、$\mathbf{u}_i (i=1,2)$は、$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t)$に対応する確率変数を表わす。　また、$\delta$は3次元デルタ関数、$\langle\ \rangle$は初期分布についての平均値を表わす。

空間的に一様な乱流の場合、(1)と(2)は、

$$f(1) = f(\mathbf{u}_1, t) \qquad (3)$$

$$f_2(1,2) = f_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1; t) \qquad (4)$$

と書ける。

これらの分布は、いずれも還元条件、

$$\begin{aligned} &\int f(1)\, d\mathbf{u}_1 = 1 \\ &\int f_2(1,2)\, d\mathbf{u}_2 = f(1) \\ &\int f_2(1,2)\, d\mathbf{u}_1 = f(2) \qquad (5) \end{aligned}$$

を満たす。

また、一様乱流では、平均速度を0とおくことができるから、分布は条件、

$$\begin{aligned} &\int \mathbf{u}_1 f(1)\, d\mathbf{u}_1 = 0 \\ &\int\int \mathbf{u}_1 f_2(1,2)\, d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 \\ &= \int\int \mathbf{u}_2 f_2(1,2)\, d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 = 0 \qquad (6) \end{aligned}$$

を満たすものとする。

2点分布f_2は、2点間の距離、

$$r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \qquad (7)$$

が極めて大きくあるいは小さくなった極限において、次のように1点分布で表わされる。

分離：$r \to \infty$ のとき、

$$\lim_{r \to \infty} f_2(1,2) = f(1) f(2) \qquad (8)$$

近接：$r \to 0$ のとき、

$$\lim_{r \to 0} f_2(1,2) = f(1) \delta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \qquad (9)$$

これらの分布を支配する方程式は、Lundgren [1] および Monin [2]によって得られているが、1点分布に対しては次のように書ける。

$$\begin{aligned} &\partial f(1)/\partial t + \mathbf{u}_1 \cdot \partial f(1)/\partial \mathbf{x}_1 \\ &= (\partial/\partial \mathbf{u}_1) \cdot [(1/4\pi) \int\int (\partial/\partial \mathbf{x}_1) \times \\ &\qquad \times (1/|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|)(\mathbf{u}_2 \cdot \partial/\partial \mathbf{x}_2)^2 \times \\ &\qquad \times f_2(1,2)\, d\mathbf{x}_2\, d\mathbf{u}_2 \\ &\quad - \lim_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \to 0} \nu (\partial/\partial \mathbf{x}_2) \cdot (\partial/\partial \mathbf{x}_2) \times \\ &\qquad \times \int \mathbf{u}_2 f_2(1,2)\, d\mathbf{u}_2] \qquad (10) \end{aligned}$$

なお、2点分布の方程式は省略する。

3．速度分布の交差独立性

多点速度分布をより少数の点の速度分布で近似しようとする場合、最も良く用いられる近似は、分布の「独立性」の仮定である。　この仮定は、2点分布と1点分布との関係としては、

$$f_2(1,2) = f(1) f(2) \qquad (11)$$

のように表わされる。

この関係は、f_2 が結合正規分布の場合に成り立つため、正規分布近似といわれる。　現在の乱流理論で用いられる準正規分布近似においては、2次と1次ではなく、4次と2次のモーメントを関係づけるのにこの近似が用いられる。　しかしこの場合も、近似の趣旨においては変わらないので、簡単のために上の場合を考える。

(11)式の関係は 上の(8)式と同じであるから、2点間の距離rが大きい場合しか成り立たない。距離rが極めて小さい場合には、この場合の関係式(9)と (11)式との相違が著しく、近似は極めて悪くなる。　他の統計現象においては一般に良い結果を与える準正規分布近似が、一様乱流の場合に破綻を来すのは、この事情によるものである。

ここで見方を変えて、2点の速度$\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$の代わりに、それらの和と差のそれぞれの1/2、

$$\mathbf{u}_+ = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \quad \mathbf{u}_- = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \qquad (12)$$

を分布の変数としよう。　そして、それらについての1体分布を、(3)に倣って、

$$g_+ = g_+(\mathbf{u}_+, \mathbf{r}, t), \quad g_- = g_-(\mathbf{u}_-, \mathbf{r}, t) \qquad (13)$$

で表わそう。　これらの分布は、形の上では1変数の分布であるが、実質的には2点における速度に依存する2点分布である。　事実、これらは、2点分布f_2 の畳み込みとして、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} g_+(\mathbf{u}_+) &= (\tfrac{1}{2})^3 \int f_2(\tfrac{1}{2}\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_+ - \tfrac{1}{2}\mathbf{u}_1)\, d\mathbf{u}_1 \\ &= (\tfrac{1}{2})^3 \int f_2(\mathbf{u}_+ - \tfrac{1}{2}\mathbf{u}_2, \tfrac{1}{2}\mathbf{u}_2)\, d\mathbf{u}_2 \\ g_-(\mathbf{u}_-) &= (\tfrac{1}{2})^3 \int f_2(\tfrac{1}{2}\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_- + \tfrac{1}{2}\mathbf{u}_1)\, d\mathbf{u}_1 \\ &= (\tfrac{1}{2})^3 \int f_2(\tfrac{1}{2}\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_-, \tfrac{1}{2}\mathbf{u}_2)\, d\mathbf{u}_2 \end{aligned} \qquad (14)$$

ただし、上式および以下においては、必要でない限りパラメター$\mathbf{r}$を省略する。

これらの分布が、還元および0平均の条件、

$$\int g_\pm(\mathbf{u}_\pm)\, d\mathbf{u}_\pm = 1 \qquad \pm：同順 \qquad (15)$$

$$\int \mathbf{u}_\pm g_\pm(\mathbf{u}_\pm)\, d\mathbf{u}_\pm = 0 \qquad \pm：同順 \qquad (16)$$

を満たすことは、(13)式を用いて確かめられる。

2体分布については、2点分布(4)をそのまま、

$$f_2(1,2)=f_2(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{r},t)$$
$$=g_2(\mathbf{u}_+,\mathbf{u}_-,\mathbf{r},t) \qquad (17)$$

のように表わされる。

いま、2体分布(17)が1体分布(13)の積として、

$$g_2(\mathbf{u}_+,\mathbf{u}_-,\mathbf{r},t)$$
$$=g_+(\mathbf{u}_+,\mathbf{r},t)g_-(\mathbf{u}_-,\mathbf{r},t) \qquad (18)$$

で表わされると仮定しよう。 これは、変数($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$)に対する独立性の仮定(10)に対応する、変数($\mathbf{u}_+$, $\mathbf{u}_-$)に対する独立性の仮定に他ならない。これを(10)と区別して、**交差独立性**(cross independence)と呼ぶ。

交差独立性(18)は(11)とは違って、1体分布がそれぞれパラメター$\mathbf{r}$に依存するため、より広い適応性をもっている。 例えば、$\mathbf{r}\to 0$の極限で、

$$g_+(\mathbf{u}_+,0)=f(\mathbf{u}_+),\quad g_-(\mathbf{u}_-,0)=\delta(\mathbf{u}_-) \qquad (19)$$

を要求すれば、近接の条件(9)が満たされ、また、$\mathbf{r}\to\infty$の極限で、

$$g_\pm(\mathbf{u}_\pm,\infty)=f(\mathbf{u}_\pm) \qquad (20)$$

を要求すれば、分離の条件(8)が満たされる。

交差独立性が物理的に何を意味するかを、速度相関について調べてみよう。 速度$\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$の任意の座標成分u_1、u_2の相関$\langle u_1u_2\rangle$を考えれば、$\mathbf{u}_1$と$\mathbf{u}_2$が一般に独立ではないため、

$$\langle u_1u_2\rangle = \langle u_1\rangle\ \langle u_2\rangle \qquad (21)$$

のように分離できない。 しかし、(12)を使えば、

$$\langle u_1u_2\rangle = \langle u_+^2\rangle - \langle u_-^2\rangle \qquad (22)$$

となるから、$\mathbf{u}_+$と$\mathbf{u}_-$それぞれのモーメントに分離できる。 これは、交差独立性の利点である。

もちろん、この分離は形式的なものであり、それ自身としては物理的意味をもたない。 しかし、$\mathbf{u}_+$の分布は乱流の大規模成分に関係し、$\mathbf{u}_-$の分布は中小規模成分に依存することを考慮すれば、例えば、分布g_+には粘性相似則を、分布g_-にはKolmogorov相似則を用いることが考えられる。

いずれにせよ、交差独立性(18)は、元の独立性(11)に比べてより広い有効範囲をもつことが期待される。 このことを具体的に確かめるために、1点分布方程式(10)にこの仮定を適用した場合、どのような分布が得られるかを調べてみよう。

4. 1点速度分布

1点速度分布に対する方程式は(10)式で与えられる。 ここで、一様乱流を対象とするとすれば、$f(1)$は点の座標$\mathbf{x}_1$には依らないから、左辺第2の移流項は消える。

つぎに、右辺第1の圧力項は、2重積分に(18)を代入すれば、

$$\int\int(\partial/\partial\mathbf{x}_1)(1/|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|)\times$$
$$\times(\mathbf{u}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{x}_2)^2 f_2(1,2)\,d\mathbf{x}_2\,d\mathbf{u}_2$$
$$=(\partial/\partial\mathbf{x}_1)\int\int(1/|\mathbf{r}|)(\mathbf{u}_2\cdot\partial/\partial\mathbf{r})^2\times$$
$$\times g_+(\mathbf{u}_+,\mathbf{r})g_-(\mathbf{u}_-,\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\,d\mathbf{u}_2$$

となるが、右辺の2重積分は$\mathbf{x}_1$に依らないから、やはり消える。 したがって、一様乱流では右辺第2の粘性項だけが寄与する。

粘性項をT_νとおき、(18)を代入すれば、

$$T_\nu=-(\partial/\partial\mathbf{u}_1)\cdot[\lim_{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|\to 0}\nu(\partial/\partial\mathbf{x}_2)$$
$$\cdot(\partial/\partial\mathbf{x}_2)\int\mathbf{u}_2 f_2(1,2)\,d\mathbf{u}_2]$$
$$=-(\partial/\partial\mathbf{u}_1)\cdot[\lim_{|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|\to 0}\nu(\partial/\partial\mathbf{x}_2)$$
$$\cdot(\partial/\partial\mathbf{x}_2)\int\mathbf{u}_2 g_+(\mathbf{u}_+,\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\times$$
$$\times g_-(\mathbf{u}_-,\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\,d\mathbf{u}_2] \qquad (23)$$

となる。

ここで、極限$|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|\to 0$ に着目して、

$$\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1=\Delta\mathbf{x}$$
$$\mathbf{u}_-=\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)=\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u}$$
$$\mathbf{u}_+=\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=\mathbf{u}_1+\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u} \qquad (24)$$

とおけば、$|\Delta\mathbf{x}|\to 0$ のとき、

$$g_+(\mathbf{u}_+,\Delta\mathbf{x})\to g_+(\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2),0)$$
$$=f(\tfrac{1}{2}(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2))=f(\mathbf{u}_1+\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u})$$
$$=f(\mathbf{u}_1)+\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u}\cdot\{f(\mathbf{u}_1+\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u})-f(\mathbf{u}_1)\}/\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u}$$
$$\to f(\mathbf{u}_1)+\tfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{u}\cdot\partial/\partial\mathbf{u}_1)f(\mathbf{u}_1)$$

となる。

したがって、(23)は、

$$T_\nu=-\nu(\partial/\partial\mathbf{u}_1)\cdot[\lim_{|\Delta\mathbf{x}|\to 0}(\partial/\partial\Delta\mathbf{x})^2\times$$
$$\times\int(\mathbf{u}_1+\Delta\mathbf{u})(1+\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u}\cdot\partial/\partial\mathbf{u}_1)f(\mathbf{u}_1)\times$$
$$\times g_-(\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})\,d\Delta\mathbf{u}] \qquad (25)$$

と書ける。

ここで、任意の$\Delta\mathbf{x}$に対して、

$$\int g_-(\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})\,d\Delta\mathbf{u}=1$$
$$\int\Delta\mathbf{u}\,g_-(\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})\,d\Delta\mathbf{u}=0$$

が成り立つことを考慮すれば、(25)は、積分内の$\Delta\mathbf{u}$について2次の項だけが残って、

$$T_\nu=-\tfrac{1}{2}\nu\ [\lim_{|\Delta\mathbf{x}|\to 0}(\partial/\partial\Delta\mathbf{x})^2\times$$
$$\times\int(\Delta\mathbf{u}\cdot\partial/\partial\mathbf{u}_1)^2 f(\mathbf{u}_1)\times$$
$$\times g_-(\tfrac{1}{2}\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})\,d\Delta\mathbf{u}]$$
$$=-4\nu\ [\lim_{|\Delta\mathbf{x}|\to 0}(\partial/\partial\Delta\mathbf{x})^2\times$$
$$\times\int(\Delta\mathbf{u}\cdot\partial/\partial\mathbf{u}_1)^2 f(\mathbf{u}_1)\times$$
$$\times g_-(\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})\,d\Delta\mathbf{u}]$$
$$=-(4/3)\nu\ [\lim_{|\Delta\mathbf{x}|\to 0}(\partial/\partial\Delta\mathbf{x})^2\times$$
$$\times\int(\Delta\mathbf{u})^2(\partial/\partial\mathbf{u}_1)^2 f(\mathbf{u}_1)\times$$
$$\times g_-(\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})\,d\Delta\mathbf{u}] \qquad (26)$$

となる。 ここに、分布g_-の$|\Delta\mathbf{x}|\to 0$ の極限での等方性と、それによる関係式、

$$(\Delta\mathbf{u}\cdot\partial/\partial\mathbf{u}_1)^2=\tfrac{1}{3}(\Delta\mathbf{u})^2(\partial/\partial\mathbf{u}_1)^2$$

を仮定している。

以上の結果、粘性項は最終的に、

$$T_\nu=-(4/3)\nu C_g(\partial/\partial\mathbf{u}_1)^2 f(\mathbf{u}_1) \qquad (27)$$

で表される。 ただし、

$$C_g=\lim_{|\Delta\mathbf{x}|\to 0}(\partial/\partial\Delta\mathbf{x})^2\times$$
$$\times\int(\Delta\mathbf{u})^2 g_-(\Delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{x})\,d\Delta\mathbf{u}$$
$$=\lim_{|\Delta\mathbf{x}|\to 0}(\partial/\partial\Delta\mathbf{x})^2\ \langle(\Delta\mathbf{u})^2\rangle_{g_-} \qquad (28)$$

は、分布g_-の分散の原点における曲率を表わす。

以上の結果を総合すれば、1点分布 $f(1)$に対する方程式は、(10)、(27)、(28)式により、

$$\partial f(\mathbf{u}_1)/\partial t=-\alpha^2(\partial/\partial\mathbf{u}_1)^2 f(\mathbf{u}_1) \qquad (29)$$
$$\alpha^2=(4/3)\nu C_g \qquad (30)$$

で与えられる。

(29)式は、時間的変化項と粘性項からなる線形方程式であるが、留意すべきことに、負の拡散率 $-\alpha^2$ をもつ 逆拡散方程式となっている。　このことは、元の分布方程式(10)からも予想されることであるが、$\mathbf{u}_1$ を従属変数とする運動方程式においては正の拡散として働いた粘性が、$\mathbf{u}_1$ を独立変数とする分布方程式では逆方向に作用することによるものである。

さらに留意すべきことは、拡散率 α^2 は定数ではないことである。　ここで、乱れの単位質量当たりの運動エネルギー、

$$E=\frac{1}{2}\langle|\mathbf{u}|^2\rangle=\frac{1}{2}\langle u_i^2\rangle \qquad (31)$$

$(i=1,2,3)$と、その減衰率を表わす粘性散逸率、

$$\varepsilon=-dE/dt$$
$$=\frac{1}{2}\nu\langle(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)^2\rangle \qquad (32)$$

$(i,j=1,2,3)$を考えれば、(28)、(30)式より、

$$\alpha^2\propto\varepsilon \qquad (33)$$

であり、α^2は一般に時間とともに変化する。

5．1点正規速度分布

いま、乱流としては、外部からのエネルギー供給のない減衰乱流を考え、エネルギー減衰則として $E\propto t^{-1}$を採用する。　このとき、(32)により $\varepsilon\propto t^{-2}$となるから、(33)により、

$$\alpha^2=\alpha_0^2 t^{-2} \qquad (34)$$

で表わされる。　ただし、α_0^2は定数。

この仮定の下に、(29)式は、

$$\partial f(\mathbf{u},t)/\partial t=-(\alpha_0^2/t^{-2})\triangle f(\mathbf{u},t) \qquad (35)$$

と書ける。　ここに、変数$\mathbf{u}_1$の添字を省略し、Laplace演算子 $\triangle=(\partial/\partial\mathbf{u})^2$ を用いている。

(35)式は、時間変数の変換、

$$\tau=1/t \qquad (36)$$

によって、$f(\mathbf{u},\tau)$に対する方程式、

$$\partial f(\mathbf{u},\tau)/\partial\tau=\alpha_0^2\triangle f(\mathbf{u},\tau) \qquad (37)$$

の形に書くことができる。　この式は、良く知られた拡散方程式に他ならない。

(35)式の一般解は、直接にせよ、(37)式を経由するにせよ、次のように求められる。

$$\begin{aligned}f(\mathbf{u},t)&=f(u_1,u_2,u_3,t)\\&=(2\pi)^{-3}\Pi_{i=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_i\,\Pi_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda_j\times\\&\quad\times h(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\times\\&\quad\times\exp(-\alpha_0^2k_i^2/t)\cos[k_i(u_j-\lambda_j)]\\&=(\sqrt{t}/2\alpha_0\sqrt{\pi})^3\Pi_{j=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda_j\times\\&\quad\times h(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\times\\&\quad\times\exp[-(u_j-\lambda_j)^2t/4\alpha_0^2]\end{aligned} \qquad (38)$$

ここに、$h(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$は任意関数を表わす。

ここで、任意関数を、

$$h(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\Pi_{j=1}^{3}\delta(\lambda_j) \qquad (39)$$

と選べば、(38)は次の等方的な特解を与える。

$$f(\mathbf{u},t)=(t/4\alpha_0^2\pi)^{3/2}\times$$
$$\times\exp[-|\mathbf{u}|^2t/4\alpha_0^2] \qquad (40)$$

解(40)は、時間とともに自己相似的に変化する **3次元正規分布**を表わす。　時刻 $t=0$ は(35)式の特異点であるため、解は $t=0$ では意味をもたないが、$t>0$ では有限の分布密度をもつ**正規分布**となる。　時間 t の増加とともに分布の幅は次第に減少し、逆に分布の高さは増加する。　そして、時間 t が無限大となる極限において、分布は原点 $|\mathbf{u}|=0$ に集中した**δ分布**となる。　これは、乱流が終局的には静止状態に近づくことに対応している。

乱流のエネルギーEは、(31)、(40)から、

$$E=\frac{1}{2}\int|\mathbf{u}|^2f(\mathbf{u},t)d\mathbf{u}=3\alpha_0^2/t$$

となるから、$t=1$ におけるE、εの値をそれぞれE_0、ε_0とおけば、(32)により、

$$E=E_0/t \qquad \varepsilon=\varepsilon_0/t^2 \qquad (41)$$
$$E_0=\varepsilon_0=3\alpha_0^2$$

と書ける。　これは、この節のはじめに仮定したエネルギーEの減衰則、およびεとα^2 との関係(33)が、互いに整合的であることを示している。

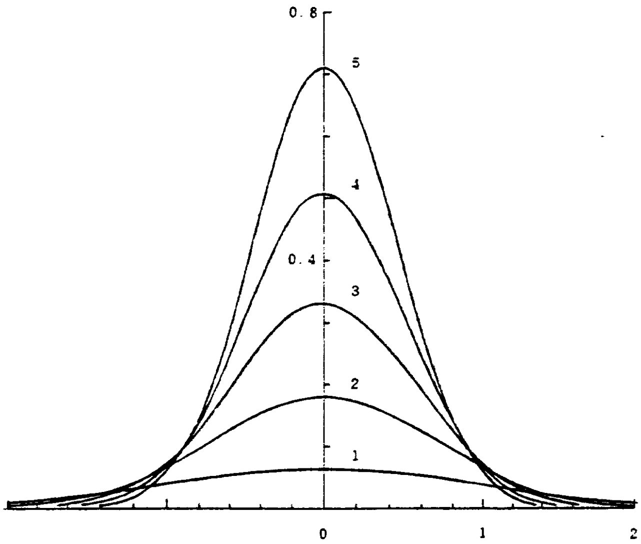

図1. 一様等方性乱流における1点速度の正規分布関数
縦軸：$f(\mathbf{u},t)$　横軸：$u=|\mathbf{u}|$
パラメター：$t/2\alpha_0^2$

謝辞

本研究に当たって（財）国際高等研究所より受けた多大の支援と便宜に対して、深く感謝の意を表する。　また、山田道夫教授には貴重な示唆と有益な討論を頂き、大木谷耕司助教授と高岡正憲博士には文献検索などについて多くの援助を頂いたことに対して、ここに厚く御礼申し上げる。

引用文献

[1]Lundgren, T.S.　Phys. Fluids, **10**, 1967, 969.
[2]Monin, A.S.　J. Appl. Math. Mech. **31**, 1967, 1057.
[3]Hopf, E.　J. Rat. Mech. Analysis, **1**, 1952, 87.
[4]Kolmogorov, A.N.　C.R. Acad. Sci. URSS, **30**, 1941, 301.