

# 速度勾配テンソルから算出される渦の特性値について

永田 拓 成田達治 田中実一 福島千晴  
岐阜大学

## On the Characteristic Values of Vortex Structure Determined by the Invariant Values of Velocity Gradient Tensor

by

Hiroshi Nagata, Tatsuharu Narita, Yoshikazu Tanaka and Chiharu Fukushima

Gifu University, Faculty of Engineering

Vortex structure of the vortex streets in the wake of a circular cylinder is studied with the use of invariants of velocity gradient tensor  $\mathbf{F}$  ( $p = \text{tr}\mathbf{F}$ ,  $q = \det\mathbf{F}$ ,  $\omega$ : vorticity). The invariants were measured using hydrogen bubble techniques for Reynolds number,  $Re=120$  and  $Re=500$ . Particular interests are paid in clarifying the flow features concerning vortex structure in those regions where non-zero vorticity is distributed and in those regions where the eigen values of the velocity gradient tensor are complex. We show that the scatter plot of  $q$  vs.  $p$  and that of  $4q-p^2$  vs.  $\omega^2$  are useful for identifying the vortex structure which is a stable rod-like vortex or an unstable sheet-like vortex in the laminar wake ( $Re=120$ ). And the scatter plots of these values are also useful to elucidate the snapshot structure of turbulent vortex streets in the near wake of the cylinder ( $Re=500$ ).

**Key Words** : vortex structure, velocity gradient tensor, vortex street, invariant values, cylinder wake, solid rotation

### 1 はしがき

渦構造の詳細を知るには、従来からの主要な測定量である「渦度」だけでは、速度勾配テンソルに含まれる流体要素の変形や軌道についての知見が欠落する。渦度の存在領域で、流体要素の軌道が曲率を持つとは限らないし、渦核の周辺には、せん断変形速度の大きな領域が存在する。流体要素の変形や軌道は、流体の混合や化学反応に本質的な影響を及ぼし、渦を伴う流れの理解にこれらの知見は不可欠である。

本研究では、流体要素の回転ばかりでなく軌道や変形についての知見を含む「速度勾配テンソルの不変量」から算出できる種々の特性値の物理的な意味を明らかにして、渦構造の解明に必須の特性値とその表示方法を検討した。そして、レイノルズ数 $Re$ が120と500の場合の円柱背後の渦列について、これらの特性値を可視化実験によって測定し<sup>(1)</sup>、流体要素の回転速度、旋回軌道、および変形速度に注目して、層流の渦列 ( $Re=120$ ) の下流移行に伴う渦構造の変化を明らかにし、乱流の渦列 ( $Re=500$ ) の測定値から、層流と乱流の渦列構造の差異の一端を明らかにした。

### 2 実験の装置と方法

速度  $U$  の一様流中の円柱背後の流れの速度場を水素

気泡法により測定した。前報<sup>(1)</sup>のレイノルズ数 $Re=Ud/\nu$  ( $d$ : 直径、 $\nu$ : 動粘度)が120の場合に加えて、 $Re=500$ の場合についても、Taylor仮説によって時間と空間を読み替え、格子点上の速度  $\mathbf{v}(u, v)$  と、その  $x, y$  微分  $a=u_x, b=u_y, c=v_x, d=v_y$  から成る速度勾配テンソル  $\mathbf{F}$  を求めた。

### 3 速度勾配テンソル $\mathbf{F}$ と渦構造

2次元の速度勾配テンソル  $\mathbf{F}$  や変形速度テンソル

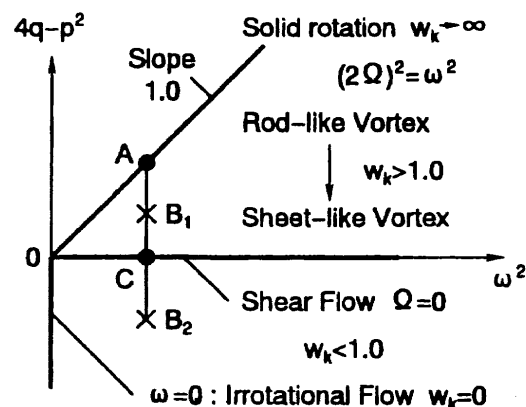


Fig.1 Physical interpretation of regions in the  $4q-p^2$  vs.  $\omega^2$  plot

D (D=F-S、S : スピンテンソル) の不変量から算出できる特性値を列挙すると、以下ようになる。近似式は、流れが非圧縮で二次元流の場合、すなわち、 $\text{div}(u, v) = a + b = -p = 0$  の場合を示す。

○流体要素の変形と軌道を表す特性値

○ p 値- q 値 :

$$p = -\text{tr}(\mathbf{F}) = a + d, \quad q = \det(\mathbf{F}) = ad - bc$$

○ 主せん断変形速度  $\gamma$  :

$$(2\gamma)^2 = \omega^2 + p^2 - 4q \doteq \omega^2 - 4q = Q^2 \quad (1)$$

○ 渦度数  $W_k$  :

$$W_k^2 = \omega^2 / (2p^2 + \omega^2 - 4q) \doteq \omega^2 / Q^2 \quad (2)$$

○圧力とエネルギー散逸を表す特性値

○ ラプラシアン P (P = p/ρ : kinematic pressure)

$$\nabla^2 P = -(p^2 - 4q) / 2 \doteq 2q$$

○ 散逸関数  $\Phi$  :

$$\Phi / \mu = D : D = 2p^2 + (\omega^2 - 4q) \doteq Q^2 \quad (3)$$

これらのいずれの特性値も、座標系に依存しない速度勾配テンソルの不変量、すなわち「渦度  $\omega$ 、p 値、および q 値」から算定される。これらの特性値の意味と特性値相互の関係をまとめると次のようになる。

**渦度  $\omega$  :** 流体要素の平均回転角速度の 2 倍を表し、渦構造を定量化する重要な特性値であるが、クエット流の場合のように、流体の軌道に曲率がない場合でも渦度は存在する。渦度の存在は、必ずしも流体要素の剛体回転や旋回軌道の存在を意味しない。

**p 値と q 値 :** 渦度は、流体要素と同じ速度で移動する観察座標系から見た場合、測定値の pq 位相面上のプロット点 (p, q) の位置によって、流体要素の軌道は、旋回 (spiral-points)、結節点 (nodes)、鞍点 (saddles) に区分される (critical-point theory<sup>(2)</sup>)。

p - q 値の位相面上の  $4q > p^2$  の領域で、流体要素は旋回軌道をとる。軌道の旋回角速度  $\Omega$  は、 $(2\Omega)^2 = 4q - p^2 = \nabla^2 P / 2$  の関係がある。さらに q 値は、 $p=0$  の場合に定義できる流れ関数  $\Psi(x, y) = \text{Const.}$  の曲面のガウス曲率 G を表す<sup>(3)</sup>。

**p 値 :** p 値は観察面 (xy 面) 内における発散  $\text{div}(u, v)$  を表すので、 $p > 0$  ( $p < 0$ ) の場合は、流体要素は z 方向に伸張 (圧縮) され、非圧縮流で二次元流の場合は  $p=0$  となる。p 値の正負によって、流体要素の軌道は、それぞれ spiral-in と spiral-out および、stable-node と unstable-nodes に区分される<sup>(2)</sup>。

**渦度数  $W_k$  :** 流体運動に現れる回転の質を表す尺度として、Truesdel<sup>(4)</sup> によって導入された渦度数  $W_k$  (式 (2)) は、①剛体回転 (solid-rotation) の場合には、流体要素の回転角速度  $\omega/2$  と軌道の旋回角速度  $\Omega$  が同一であるので、渦度数  $W_k$  は  $\pm \infty$  となる。この領域では、流体要素の変形速度がゼロであるので、回転は持続し、周囲流体との混合は起こらない (化学反応の停滞)。

②クエット流やホアゼイユ流の場合に  $W_k = 1.0$  となり、

③非回転流では、 $W_k = 0$  となる。

$W_k > 1.0$  は、式 (2) より、 $2q > p^2$  ( $p=0$  では、 $q > 0$ ) となる。この領域は、 $p \neq 0$  の場合には、流体要素の軌道区分の spiral-in および spiral-out の領域  $4q > p^2$  とほぼ同じである。

このように渦度数  $W_k$  は、流体要素の回転速度と変形速度との関係を定量的に表すので、渦度数  $W_k$  の分布状況から、流体要素の回転と変形速度及び軌道に注目した渦構造を知ることができる。

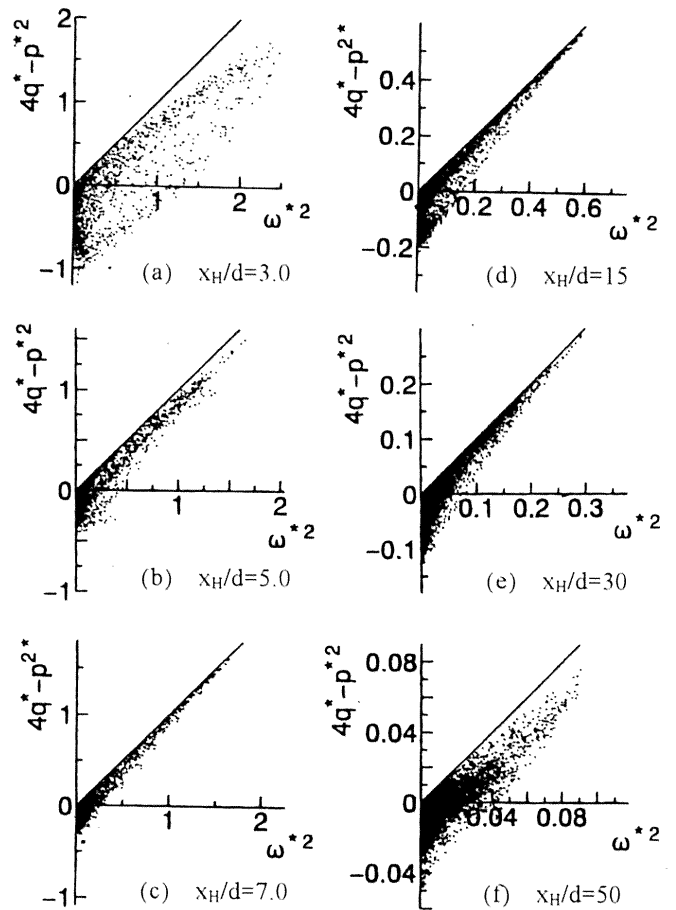


Fig.2 Scatter plots of  $(4q - p^2)$  vs.  $\omega^2$  (Re=120, x-y plane)

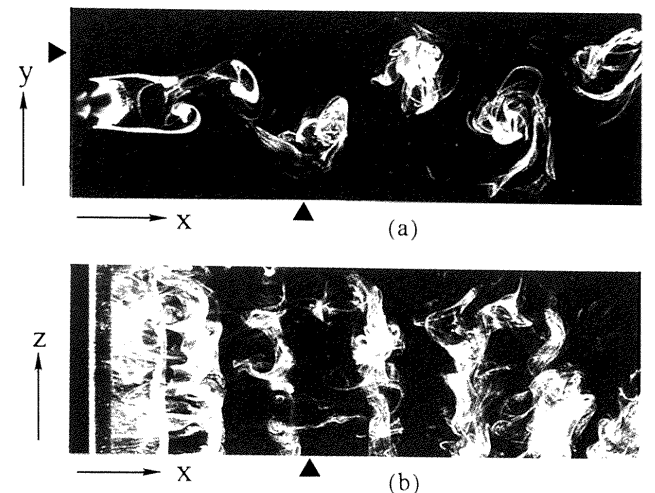


Fig.3 Vortex streets visualized by electrolysis method  
Re=500, ▲:  $x_H/d=5.0$ , ►:  $y_H/d=1.0$

4 速度勾配テンソルFの不変量の位相面表示

渦度数 $W_k$ の等値線図によって、流体の回転角速度ばかりでなく変形速度に注目した渦構造を明らかにできる。しかし、渦度数 $W_k$ と他の特性値との関係や渦構造の変化を明確に知るためには、前報で示したように、渦度や変形速度などの他の特性値の等値線図と対比する必要がある。ここでは、速度勾配テンソルの不変量を位相面にプロットすることによって、上述の渦構造の特性を1つの図に表示する方法を考える。

前節で述べたように、 $p$ 値と $q$ 値を位相面表示すれば、測定点における流体軌道の特性が分かる<sup>(2)</sup>。さらに、測定値のプロット点と曲線 $4q=p^2$ との距離は、 $4q-p^2$ が正の場合は $(2\Omega)^2$ 、 $4q-p^2$ が負の場合は $(2\gamma)^2-\omega^2$ となる。

したがって、これらの距離に比例する $4q-p^2$ を縦軸に、 $\omega^2$ を横軸とする位相面に測定値をプロットすれば、図1に示すように、プロット点の位置(図中×印)によって流れの特性が分かる。流体が剛体回転する場合は、 $\omega=2\Omega$ であるので、測定値はslopeが1.0の直線 $4q-p^2=\omega^2$ 上にプロットされる(厳密には、 $p$ 値も0である)。非回転流の場合は、測定値は図1に示す負の縦軸上にプロットされる。したがって、この直線と測定値のプロット点との距離(図中 $AB_1$ 又は $AB_2$ )は、渦領域の流れの剛体回転からの隔たりを示す。換言すれば、この距離は、安定なrod状の渦からの隔たりを示し、この距離が大きい程、渦は不安定なsheet状の渦<sup>(5)</sup>であることを示す。

5 実験の結果と考察

5.1 Re=120の場合の渦列の渦構造 図2は、xy面(円柱の横断面)内の流れの速度勾配テンソルの不変量の測定結果を、位相面( $4q-p^2$  vs.  $\omega^2$ )に表示したものである。この場合の渦列は層流である。図中 $x_H/d$ は、円柱の中心から下流に測った気泡発生電極細線の無次元設置位置を示す。

円柱直後の $x_H/d=3.0$ での測定値のプロット点は、図2(a)に示すように、直線 $4q-p^2=\omega^2$ から離れた領域に多く分布している。これに対して、これより下流の $x_H/d=5.0, 7.0, 15.0$ および $30.0$ のプロット点は、この直線により近い領域により多く分布している(図2(b)~(e)参照)。しかし、さらに下流の $x_H/d=50.0$ の測定値は、図2(f)に示すように、再び、この直線から離れた領域に分布していることが分かる。

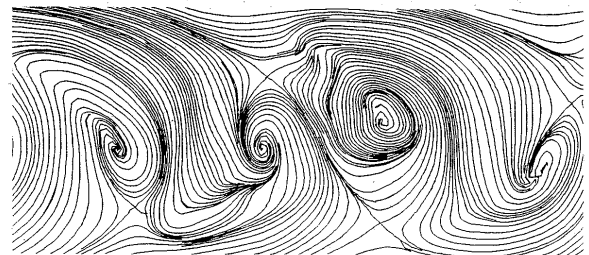
これは、円柱背後の渦列の渦構造が、下流に移行するに従って、near-wakeで不安定なsheet状の渦<sup>(5)</sup>から安定なrod状の渦<sup>(5)</sup>に変化し、下流のfar-wakeでrod状の渦が再び不安定なsheet状の渦に変化する経過を示している。

周知のように渦列は円柱直後に不安定な領域があり、少し下流では安定した渦列となり、さらに下流のfar-wakeで再び不安定となり、渦のpairing等の再配列と渦列の三次元化が起こる。図2の測定値の位相面

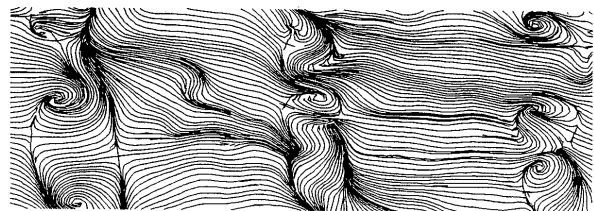
表示は、この周知の現象を明確に示している。

5.2 Re=500の場合の渦列の渦構造 図3は、Re=500の場合の円柱背後の渦列を、円柱表面を発色電極とする電解沈殿法により可視化した写真である。前述のRe=120の場合とは異なり、渦領域の流れは乱流であり、円柱軸に平行な渦列に巻き付くFingersと呼ばれる3次元的な渦構造<sup>(6)</sup>の存在が認められる。この流れについて、円柱軸の横断面内(xy面内)の流れと円柱軸に平行な面内(xz面内)の流れの測定を行った。図3の中の▲と▶印は、水素気泡を発生させる為の電極細線の設置位置を示す。以下の図4から図8に測定結果を示す。図中\*印付の測定値は、いずれも $U$ および $d$ で無次元化した値である。

図4は、断面流線(sectional-streamlines)を示す。前述の可視化写真が示すように、この場合の渦領域は乱流であるので、本測定値は、時間的空間的に変動する流れのスナップショットであるけれども、xy面内では、図4(a)に示すように、流線の形状は千鳥配

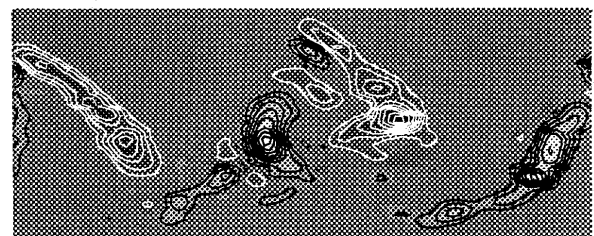


(a) x-y plane

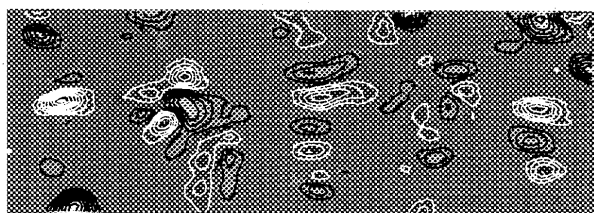


(b) x-z plane

Fig 4 Sectional streamlines, Re=500



(a) x-y plane,  $\omega^*_{max}=4.4$ ,  $\omega^*_{min}=-4.3$ , Step=0.51



(b) x-z plane,  $\omega^*_{max}=4.4$ ,  $\omega^*_{min}=-4.4$ , Step=0.52

Fig 5 Contours of vorticity, Re=500

列の渦列の存在を明瞭に示し、図 4 (b)のyz面内の流れは3次元的な渦構造の存在を示唆している。

図 5 は、渦度  $\omega^* = \omega d / U d$  の等値線図を示す。 $\omega^*$  の値が 0.35 以下の等値線は省かれている。図中、黒の実線は正の渦度を表し、白の実線は負の渦度を表す。xy面内では、図 (a) に示すように、 $Re=500$  の場合は、 $Re=120$  の場合 (前報参照) とは異なり渦度の値は大きく、等渦度線の形は同心の円群にはならず、渦度はひも状の比較的狭い領域に分布する。yz面内の流れでは、符号の異なる渦度が隣接した領域に分布し、前述のFingersと呼ばれる3次元的な渦のこの面内における渦度の分布状況を表している。

これらの渦度分布から、 $\omega^*=0.4$  の渦度の等値線が囲む渦領域の循環  $\Gamma^* = \Gamma / U d$  を求めると、 $\Gamma^*$  の値は、xy面内で 1.8 から 2.1 の範囲にあり、yz面内のFingersと呼ばれる渦の循環は、xy面内の渦の約4分の1の0.5程度である。

図 6 は、p 値と q 値の位相面表示である。図 6 (a) と図 6 (b) は、それぞれxy面及びxz面内の測定値をプロットしたものである。図 6 (a) と図 6 (b) を対比すると、xy面とxz面に対する測定点の分布状況に著しい変化は認められない。これは、前述の可視化写真 (図 3) が示唆するFingersと呼ばれる2次渦の渦構造が、p 値と q 値から見ると、xy面内で観察される渦列とほぼ同様であることを示している。

比較のために、 $Re=120$  の場合の p-q 値の同様なプロットを図 7 に示す。この場合のxy面内の流れでは、図 7 (a) に示すように、p 値のプロット点の分布範囲は狭く、q 値は広い範囲に分布する。また、yz面内の流れでは、図 7 (b) に示すように q 値はほとんどゼロで、旋回軌道が認められない。これは前掲の $Re=500$  の場合 (図 6) に認められたFingers状の渦構造が、 $Re=120$  の場合には存在しないことと対応している。

図 8 は、 $Re=500$  の場合の  $(4q-p^2)$  と  $(\omega^2)$  の値の位相面表示である。図 8 (a) と図 8 (b) は、それぞれxy面内およびxz面内の測定値をプロットしたものである。これらの図の測定点とslopeが1.0の直線との距離に注目して、図 (a) と図 (b) の測定点の分布を対比すると、xy面内とxz面内の測定点の分布状況に著しい差異は認められない。これは、xy面内およびxz面内のいずれの渦領域の流れにも、流体要素の回転速度と変形速度に注目した場合に、同様の渦構造が存在することを示している。

### 6 結 言

渦領域の流れの流体要素の回転速度と変形速度および軌道に注目して、渦構造の詳細を明らかにするためには、渦度  $\omega$  の分布の他に、速度勾配テンソルの不変量を測定し、これらの値をp-q位相面及び  $4q-p^2$  と  $\omega^2$  位相面に表示する方法がきわめて有効である。

この方法を用いて、 $Re=120$  の場合の渦列について、円柱直後でsheet状の渦構造がすぐ下流で安定なrod状の渦列に変化し、さらに下流のfar-wakeで再び不安

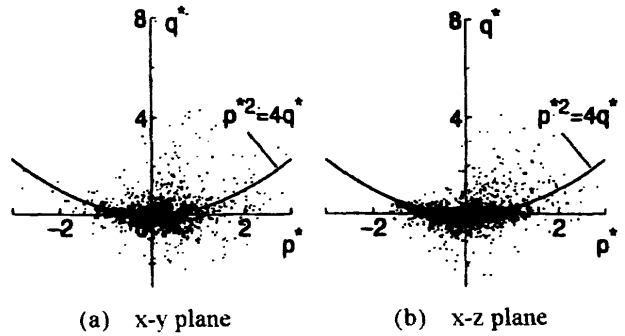


Fig 6 Scatter plots of q vs. p, Re=500

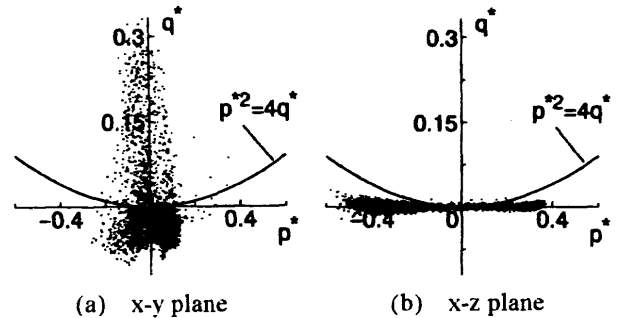


Fig 7 Scatter plots of q vs. p, Re=120

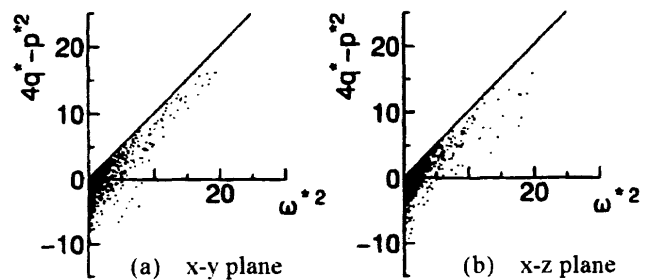


Fig.8 Scatter plots of q vs. p and  $(4q-p^2)$  vs.  $\omega^2$ ,  $Re=500, x_H/d=5.0, y_H/d=1.0$

定なsheet状の渦列に変化する状況が明示できた。

そして $Re=500$ の乱流の渦列には、xy面内の渦列 (主渦) に巻き付くFingers状の2次渦が存在し、その循環値は、xy面内の主渦の約4分の1程度であるが、2次渦と主渦列の渦構造は、p-q位相面や  $4q-p^2$  と  $\omega^2$  の位相面から見て、両者に顕著な差異は認められないことが明らかにされた。

### 文 献

- (1) 永田, 箕浦, 福島, ながれ, 別冊(1996), 503
- (2) Perry, A.E. and Fairlie, B.D., Adv. Geophys. 18 (1974), 299
- (3) 穂刈, 微分幾何, 至文堂(1965), 123
- (4) Truesdell, C., The Kinematics of Vorticity, (1954), Indiana Univ. Press, 106
- (5) Kida, S. and Tanaka, M., Ann. Rev. Fluid Mech. 26 (1994), 169
- (6) Gerrard, H., Phil. Trans. Roy. Soc. A288 (1978), 351