

有限要素計算による翼の等角写像の探究

牛島 照夫、横松 大作、安藤 一平、矢野 祐輔

(電気通信大学 電気通信学部 情報工学科)

An Investigation of Conformal Mapping for a Wing
through Finite Element Method

by

USHIJIMA, Teruo, YOKOMATSU, Daisaku, ANDO, Ippei and YANO, Yusuke
Department of Computer Science and Information Mathematics
Faculty of Electro-Communications
The University of Electro-Communications

ABSTRACT

Through finite element computation, we can compute precisely the flow profile of the 2D perfect fluid around the cross section of a wing satisfying Kutta condition at its trailing edge. A proper value γ should be determined numerically in the computation. The value γ , representing the magnitude of the circulation in a normalized sense, is characterized with the aid of the conformal mapping for the wing in this paper. The conformal mapping for the wing is the mapping which maps conformally the whole exterior domain of the wing onto the whole exterior domain of the unit circle. A few numerical results are reported for NACA23012 wing and Kármán-Trefftz wing. The results work as numerical evidence for the validity of the characterization. A procedure for numerical determination of the mapping through finite element computation is also proposed.

0. はじめに

二次元完全流体中の翼まわりの流れで、翼の後縁でクッタの条件を満たす流れは、有限要素法による数値計算で精密に計算出来る。この計算においては、ある特性値 γ を数値的に決定しなければならない。この値 γ は、ある正規化された意味で、循環量の大きさを表す。この γ の値を、翼の等角写像によって特徴付けることがこの論文でなされる。翼の等角写像とは、翼型の外部領域全体を、単位円の外部領域全体に等角に写像するものである。この特徴付けを、NACA23012 翼およびカルマン・トレフツ翼において、数値的に実証する計算結果を報告する。さらに、有限要素計算を用いて、翼の等角写像を数値的に決定する手順を提案する。

1. 翼型の外部の流れ関数

平面 R^2 内の有界領域 Ω は翼型の二次元断面を表わすものとする。その境界 C は翼面である。翼型の外部領域を Ω として、次の外部問題を考える：

$$(E) \quad \begin{cases} -\Delta\psi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{on } C, \\ \psi - \psi_0 & \text{は無限遠で有界.} \end{cases}$$

ここで ψ_0 は Ω 全体で調和であるものとする。

仮定0 (E)の解の一意性を認める。すなわち、 Ω で調和で境界 C で零であり、 Ω で有界な関数 $\psi \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ は、 Ω 全体で恒等的に零であるとする。(より数学的に言えば翼面 C はこの性質をもつものであることを要請する。) □

迎え角を表わす実パラメタ α を持つ一様流の流れ関数：

$$\psi_{0,\alpha} = -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y$$

と、循環流に対応する流れ関数：

$$\psi_{0,c} = \log r$$

を考える。ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in R^2$ である。

問題(E)において、 $\psi_0 = \psi_{0,\alpha}$ および $\psi_0 = \psi_{0,c}$ としたときの ψ をそれぞれ $\psi_{u,\alpha}$ と ψ_c で表わす。実数 γ に対して

$$\psi(\gamma) = \psi_{u,\alpha} + \gamma\psi_c$$

とおく。 $\psi(\gamma)$ は、速度1を持つ迎え角 α の一様流に漸近する、二次元完全流体における翼型 C まわり流れ場の流れ関数である。

2. クッタの条件をみたす複素速度ポテンシャル

平面 R^2 と複素平面 C を同一視して、複素数 $z = x + iy$, $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ を用いる。境界 C がジョルダン閉曲線のとき、 Ω は z -平面上の単位円の外部に等角に写像される。その写像関数は

$$z = c(\mathbf{z}) = \sum_{n=1}^{-\infty} c_n \mathbf{z}^n \\ = c_1 \mathbf{z} + c_0 + \frac{c_{-1}}{\mathbf{z}} + \frac{c_{-2}}{\mathbf{z}^2} + \dots$$

と表現される。この報告では

$$c_1 > 0$$

と正規化する。関数 $c(\mathbf{z})$ を翼の等角写像と呼ぶことにする。このとき翼面 C は

$$C = \{z = c(\mathbf{z}) : |\mathbf{z}| = 1\}$$

と表わされる。写像 $z = c(\mathbf{z})$ は

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_+ = e^{-i\beta}$$

において特異である、すなわち

$$\left. \frac{dc}{dz} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_+} = 0$$

であるようなものを考える。 \mathbf{z}_+ の像 $z_+ = c(\mathbf{z}_+)$ は翼の後縁の点に対応すると了解する。

助変数

$$Z = e^{-i\alpha} z$$

を導入し、

$$C(Z) = c(z)$$

とおく。Z平面における単位円まわり流れの複素速度ポテンシャルの一般解は

$$F(Z) = V \left\{ \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) + ik \log Z \right\}$$

である。ここでVとkは実パラメタである。z平面における迎え角 α を持つ速度Uの一樣流の複素速度 $w_0(z)$ は

$$w_0(z) = Ue^{-i\alpha}$$

である。Uは正の、 α は実のパラメタである。

定理1 V = 2c₁Uとする。このとき

$$f(z) = F(Z), z = C(Z)$$

は $w(z) = \frac{df}{dz}$ としたとき、

$$w(z) - w_0(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$$

をみたす翼型Cまわり流れの複素速度ポテンシャルの一般解である(図1参照)。

証明 合成関数の微分公式と逆関数に対する微分公式によって

$$(1) \quad \frac{df}{dz} = \frac{dF}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz} / \frac{dz}{dz}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{V \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) + ik \cdot \frac{1}{Z} \right\} \cdot e^{-i\alpha}}{\left\{ c_1 - \frac{c-1}{Z^2} - \frac{2c-2}{Z^3} - \dots \right\}} \\ &= \frac{V}{2c_1} e^{-i\alpha} \frac{\left\{ 1 + \frac{2ik}{Z} - \frac{1}{Z^2} \right\}}{\left\{ 1 - \frac{c-1/c_1}{Z^2} - \frac{2c-2/c_1}{Z^3} - \dots \right\}} \end{aligned}$$

である。ここで $z \rightarrow \infty$ のとき同程度の速さで $Z \rightarrow \infty$ かつ $Z \rightarrow \infty$ であるから、

$$U = \frac{V}{2c_1}$$

に対して $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{df}{dz} = Ue^{-i\alpha} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right)$$

である。これは命題の成立を示している。□

定義2 翼型Cまわり流れの複素速度ポテンシャル $f(z)$ がクッタの条件をみたすとは、 $z = z_+$ において $\frac{df}{dz}$ が有限に確定することである。□

定理3 定理1のステートメントにおいて与えられている複素速度ポテンシャル $f(z)$ が、クッタの条件をみたすためには

$$k = \sin(\alpha + \beta)$$

でなければならない。□

定理3の証明を遂行するために、次の命題31を用意する。そのために記法:

$$W(Z) = \frac{dF}{dZ}(Z)$$

を使用する。すなわち

$$W(Z) = V \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{Z^2} \right) + ik \frac{1}{Z} \right\}$$

である。

命題31 単位円周上の点 $Z_+ = e^{-i\theta_+}$ が $W(Z)$ の零点である:

$$W(Z_+) = 0$$

ための必要十分条件は

$$k = \sin \theta_+$$

である。□

証明 実際

$$\frac{2Z^2W}{V} = Z^2 + 2ikZ - 1$$

の右辺の二次式は、二根 Z_+ と Z_- を持つものとしてよい。根と係数の関係により

$$Z_+ + Z_- = -2ik, \quad Z_+Z_- = -1$$

が成立する。第二の関係式から

$$Z_- = -(Z_+)^{-1} = -e^{i\theta_+}$$

である。したがって第一の関係式から

$$k = \frac{Z_+ + Z_-}{-2i} = \frac{e^{-i\theta_+} - e^{i\theta_+}}{-2i} = \sin \theta_+$$

である。□

定理3の証明 Z平面における後縁の点 z_+ の原像 Z_+ は、

$$Z_+ = e^{-i\theta_+}, \quad \theta_+ = \alpha + \beta$$

と表される。命題31によって、 $W(Z_+) = 0$ と $k = \sin(\alpha + \beta)$ とは同値である。ところで、

$$\frac{df}{dz} = \frac{dF}{dZ} / \frac{dz}{dZ} = \frac{W(Z)}{C'(Z)}$$

である。本稿においては、 $c'(z_+) = 0$ を前提としているから $C'(Z_+) = 0$ である。したがって $z = z_+$ においてクッタの条件をみたすためには $W(Z_+) = 0$ でなければならない。すなわち $k = \sin(\alpha + \beta)$ でなければならない。□

3. クッタの条件をみたす流れ関数

定理4 迎え角 α の一樣流に漸近する流れ場の流れ関数

$$\psi(\gamma) = \psi_{u,\alpha} + \gamma\psi_c$$

がクッタの条件をみたす流れ場の流れ関数であるためには

$$(2) \quad \gamma = 2c_1 \sin(\alpha + \beta)$$

でなければならない。□

定理4の証明を遂行するために、次の命題41を用意する。

命題41 定理1のステートメントで与えられる複素速度ポテンシャル $f(z)$ に対して、実二変数 x と y の実関数 $\Psi(x, y)$ を

$$\Psi(x, y) = \text{Im } f(z), \quad z = x + iy$$

によって定めると

$$\Psi = U\{\psi_{u,\alpha} + \gamma\psi_c\}, \quad \gamma = 2c_1 k$$

である。□

定理4の証明 定理3と命題41から直ちに得られる。□

命題41の証明 第一段 実二変数 x と y を複素数 $z = x + iy$ に対応させ、さらに $z = C(Z)$ によってZ-平面の点 Z に対応させる。この対応によって基準となる流れ関数 $\Psi_{u,\alpha}$ と Ψ_c を

$$\Psi_{u,\alpha}(x, y) = \text{Im } \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right),$$

$$\Psi_c(x, y) = \text{Im } i \log Z$$

によって定める。

第二段

$$\Psi_{u,\alpha}(x, y) = \frac{1}{2c_1} \psi_{u,\alpha}.$$

何となれば、 $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) - \frac{1}{2c_1} e^{-i\alpha} z = \mathcal{O}(1)$$

である。一方、本稿では $z \rightarrow \infty$ のとき、

$$\psi_{u,\alpha} - \text{Im } e^{-i\alpha} z = \psi_{u,\alpha} - \psi_{0,\alpha} = \mathcal{O}(1)$$

であるとしている。第一段より $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\Psi_{u,\alpha} - \frac{1}{2c_1} \psi_{u,\alpha} = \mathcal{O}(1)$$

である。更に

$$\Psi_{u,\alpha}|_C = \text{Im } \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \Big|_{|Z|=1} = 0$$

である。したがって C 上で

$$\Psi_{u,\alpha} - \frac{1}{2c_1} \psi_{u,\alpha} = 0$$

である。仮定 0 より、上の等式は Ω 全体で成立する。

第三段

$$\Psi_c = \psi_c$$

である。このことを示すために $z \rightarrow \infty$ のとき

$$z = d_1 z + d_0 + \frac{d_{-1}}{z} + \frac{d_{-2}}{z^2} + \dots, \\ d_1 = \frac{1}{c_1}, d_0 = -\frac{c_0}{c_1}, d_{-1} = -c_1, \dots$$

と表されることを認める。次に

$$\begin{aligned} \text{Re } \log Z &= \log |Z| \\ &= \log |z| \\ &= \log (|z| \cdot |d_1|) \\ &= \log \left(\left| 1 + \frac{d_0}{d_1} \frac{1}{z} + \frac{d_{-1}}{d_1} \frac{1}{z^2} + \dots \right| \right) \end{aligned}$$

である。したがって $z \rightarrow \infty$ のとき

$$\text{Re } \log Z = \log |z| + \mathcal{O}(1)$$

である。これから $r \rightarrow \infty$ のとき

$$\Psi_c = \text{Im } i \log Z = \log r + \mathcal{O}(1)$$

である。本稿では $r \rightarrow \infty$ のとき

$$\psi_c = \log r + \mathcal{O}(1)$$

としている。したがって $r \rightarrow \infty$ のとき

$$\Psi_c - \psi_c = \mathcal{O}(1)$$

である。更に

$$\Psi_c|_C = \text{Im } i \log Z|_{|Z|=1} = 0$$

である。したがって C 上で

$$\Psi_c - \psi_c = 0$$

である。仮定 0 より、上の等式は Ω 全体で成立する。

第四段 (命題 41 の証明)

$$f(z) = F(Z) = V \left\{ \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) + ik \log Z \right\}$$

であり、 $\Psi = \text{Im } f$ であるから、第一段より

$$\Psi = V \{ \Psi_{u,\alpha} + k \Psi_c \}$$

である。定理 1 のステートメントで $V = 2c_1 U$ としているから

$$\Psi = 2c_1 U \{ \Psi_{u,\alpha} + k \Psi_c \}$$

である。第二段と第三段により

$$\begin{aligned} \Psi &= 2c_1 U \left\{ \frac{1}{2c_1} \psi_{u,\alpha} + k \psi_c \right\} \\ &= U \{ \psi_{u,\alpha} + 2c_1 k \psi_c \}. \end{aligned}$$

したがって命題 41 の結論が成立している。□

定理 1、命題 31、定理 3 は翼理論においてはよく知られていることと思われる (今井 [2] など)。定理 4 の導出の道すじを明晰にするために証明を附した。

4. 有限要素計算手法のあらまし

我々は近年 $\psi_{u,\alpha}, \psi_c$ およびクッタの条件をみたす正規化循環量 γ を有限要素計算によって定めることを追究してきた。翼の外部の無限領域の取り扱いと翼の後縁における特異性の処理がスチュエクロフ作用素による非局所境界条件によって解決されることに着目した。

我々の手法を適用する上での翼型 C に対する制限は、「翼の後縁 P の近くでは翼の上面と下面は正の角度を持って P で交わる二直線と一致している」ことである。

我々の手法によって導出した離散化問題の数値計算の手順は次のようである。

1. 数値係数連立一次方程式への変換
2. 循環流流れ関数 ψ_c の有限要素計算
3. 循環流拡大係数 C_1 の算出
4. 一様流流れ関数 ψ_u の有限要素計算
5. 一様流拡大係数 U_1 の算出
6. クッタの条件をみたす流れ関数

$$\psi(\gamma) = \psi_u + \gamma \psi_c, \quad \gamma = -U_1 / C_1$$

の算出。

以上の手順の内容は、昨年度のシンポジウム論文集で報告した (横松-牛島 [5])。

5. 翼の等角写像の初項の数値的決定

我々の手法によって翼型 NACA23012 に対して迎え角 α を変化させて正規化循環量 γ を求めたものをプロットしたところ、定理 4 の表式 (2) がよく再現されることを確認した (図 2)。数値計算による表式 (2) の係数 c_1 および零揚力角 $-\beta$ は

$$c_1 = 1.104129258, \quad -\beta = -1.169237 (\text{度})$$

である。定理 4 の正規化循環量 γ から次の諸量を求めることができる。翼まわりの循環量 Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi U \gamma \\ &= 4\pi U c_1 \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

ここで U は翼に向かって流入する一様流の速度の大きさである。揚力 L :

$$\begin{aligned} L &= \rho U \Gamma \\ &= 4\pi \rho U^2 c_1 \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

ここで、 ρ は流体の密度である。

揚力係数 C_L :

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{\rho U \Gamma}{\frac{1}{2} \rho U^2 l} \\ &= \frac{8\pi c_1}{l} \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

ここで、 l は翼弦長である。

NACA23012の迎え角 α を変化させたときの、高レイノルズ数の下での風洞実験による揚力係数と有限要素数値計算結果から数値的に求められた揚力係数を比較したところ、迎え角が小さいところでは両者は整合していることがわかった(図3)。実際の数値計算では翼弦長 l を4としているので、数値計算による正規化循環量を $\gamma_h(\alpha)$ とすると、対応する揚力係数 C_L^h は

$$C_L^h(\alpha) = \frac{4\pi}{l} \gamma_h(\alpha) = \pi \gamma_h(\alpha)$$

となる。図3の数値計算値は、この値をプロットしたものである。

6. カルマン・トレフツ翼への適用

解析的に翼型が与えられ、後縁において、翼の上面と下面が、正の角度を持って交わる翼型の一つが、カルマン・トレフツ翼である。

この翼型を定義するために、 ζ 平面から z 平面への等角写像 $z = K_p(\zeta)$ を用いる。この写像は、 z と ζ が

$$(3) \quad \frac{z-a}{z+a} = \left(\frac{\zeta-a}{\zeta+a} \right)^p$$

をみたすものとして定められる。ここで、 p は、

$$1 < p \leq 2$$

の範囲にあるパラメタである。この範囲の p に対して、複素数 Z の主分枝を、

$$Z^p = \exp(p \text{Log} Z)$$

とおく。 $\text{Log} Z$ は、対数関数の主値である。すなわち、

$$Z^p = |Z|^p e^{ip\theta}$$

と定める。換言すれば、関数記号 Z^p の意味は、独立変数 Z の偏角 θ を $-\pi \leq \theta < \pi$ の範囲に限って、 $|Z|^p e^{ip\theta}$ をその関数値とするものであると解釈する。

ところで、複素数 ζ に対して、

$$\theta = \arg \zeta, \theta_+ = \arg(\zeta - 1), \theta_- = \arg(\zeta + 1)$$

として、これらの偏角は、 $-\pi \leq \theta_+, \theta, \theta_- < \pi$ をみたすように標準化する。このとき、 $\Theta = \theta_+ - \theta_-$ は、 $-\pi \leq \Theta < \pi$ の範囲にある。そこで、

$$Z = \frac{\zeta - a}{\zeta + a}$$

に対して、 Z^p を定めることが出来る。(3)の右辺はこのように解釈する。

$\zeta \rightarrow \infty$ において、

$$(4) \quad K_p(\zeta) = \frac{a}{p} \zeta + \frac{a}{p} \cdot \frac{p^2 - 1}{3} \cdot \frac{1}{\zeta} + \dots$$

と展開される。

ζ 平面の第二象限の点 ζ_0 を固定する。 $r = |\zeta_0 - 1|$ とおく。

$$\zeta_0 = 1 + r e^{i(\pi - \beta)}$$

と現される。実パラメタ a, p, r, β によって表されるカルマン・トレフツの翼面 C は、

$$C = \{z = K_p(\zeta) : |\zeta - \zeta_0| = r\}$$

によって定められる。(p=2のときは、一般ジュエコフスキー翼となる。)

助変数

$$z = \frac{\zeta - \zeta_0}{r}$$

を用いて

$$z = c(z) = K_p(\zeta)$$

と定めると、(4)から、 $z \rightarrow \infty$ では、

$$z = c(z) = c_1 z + c_0 + c_{-1} z^{-1} + c_{-2} z^{-2} + \dots,$$

$$c_1 = \frac{a}{p}, \quad c_0 = \frac{a}{p}, \quad c_{-1} = \frac{a}{p} \cdot \frac{p^2 - 1}{3} \cdot \frac{1}{r} \dots$$

である。定理4より正規化された循環量 γ は、

$$(5) \quad \gamma = 2 \frac{a}{p} r \sin(\alpha + \beta)$$

である。値 $-\beta$ は、零揚力角である。さらに翼の上面と下面は後縁の点において、

$$\tau = (2 - p)\pi$$

なる角度を持ってそれぞれの接線が交わっていることが解る。

ここでは、 $a = 1, p = 1.9, r = 1.2, \beta = 3^\circ$ とおいたカルマン・トレフツの翼型に対する有限要素計算の結果を紹介する。ここで、我々の手法から生じる問題点に対面する。すなわち、解析的に与えられる翼型 C においては、翼の上面と下面は翼の後縁の近くで決して直線ではない。そこで後縁の点 P を中心に半径0.3の円を描き、この円と、翼の上面および下面との交点をそれぞれ、 Q および R として、この円の内部にある翼の上面、および翼の下面をそれぞれ線分 PQ 、および線分 RP で置き換える。このように翼型を修正して、我々の手法を適用した(図4参照)。

要素の初期分割を接点数64、要素数96の分割(図5)として、順次組織的な二分的細分を行った。すなわち細分前要素三角形を、その頂点と各辺の中点を用いて4個の合同な小三角形に分割し、それ等を細分後の要素三角形とする。この際、細分前三角形の辺の一つが細分前計算領域の境界になる場合は、中点を原内部領域 Ω_i の境界上に移動させて、細分後小三角形を生成する。この手順に従って三回細分を繰り返したときの三角形分割(最密分割)は接点数3200、要素数6144(図6)である。

この最密分割における迎え角 $\alpha = 0$ のときの一様流の流れ関数から決まる流線図を図7に示す。最密分割で計算した循環流の流れ関数から決まる流線図は図8である。我々の手法で決めた γ の値は

$$\gamma = 0.0063787$$

である。この γ の値を使って $\psi(\gamma) = \psi_u + \gamma \psi_c$ から定めた流線図は図9である。流線は滑らかに後縁から分離してクッタの条件をみたしていると判断出来る。図10には、迎え角 $\alpha = 15^\circ$ のときの解析解が決定する流線と有限要素解が決定する流線とを比較して示した。いずれもクッタの条件をみたす流れに対してである。点線で解析解を表し、実線で有限要素解を表している。要素分割の程度と数値計算における翼型の修正の二点を考慮しておおむねよい一致であると判断する。

表1は、迎え角 $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ のときの γ の計算値 γ_h の収束状況と解析解から(5)によって決まる γ の値を比較して示してある。表1によれば、数値計算値 γ_h は、分割を細かくするのに応じて収束する傾向にある。その収束の速さは、三角形分割の代表的長さ h の二乗のオーダーに近いと推測される。しかしながら、そのときの収束値 γ_0 は、理論値 γ とは、相対誤差1%程度の食い違いのある値と推測出来る。この食い違いは、翼の後縁部の修正に起因する。修正した翼型そのものも、ある写像関数によって、その翼型の外部全体は、単位円の外部全体に等角写像される。この翼の等角写像の初項の係数 c_1 から γ_0 は、 $\gamma_0 = 2c_1 \sin(\alpha + \beta)$ によって決まるべき量である。

後縁部の扇形切除を行わずに、領域 Ω_i が凹な角を後縁で、持つものとして、三角形分割を実施して、有限要素計算を進めることは可能である。すなわち、 ψ_u と ψ_c を数値計算し、拡大係数 U_1 と C_1 を後縁の点を中心とする扇形の円弧上境界 C_p 上でのこれらの有限要素解の値を用いて数値的に定めることが可能である。そのような手法によって、 $a = 1, p = 1.9, r = 1.2, \beta = 5^\circ$

の場合に数値計算を実施した。この際、三角形分割の細分を進める毎に後縁近くで直線近似する翼面の部分の大きさは、後縁の点からの距離が細分前の距離の1/2になるようにとった。

表2はこの方法で得られた迎え角 $\alpha = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ のときの γ の計算値 γ_h の収束状況と解析解から(5)によって決まる γ の値を比較して示してある。表2によれば、数値計算値 γ_h は、分割を細かくするのに応じて単調増加して理論値 γ に収束しているように見える。また、その収束の速さは、 h の一乗のオーダーに近いように観察される。しかしながら、収束の速さが緩慢であることから、有限の h での γ_h の値は、最密分割においても相対誤差10%程度である。このことは、後縁部の特異性によって、流れ関数自体が後縁の点で特異性を持つことになり、対応する有限要素解の収束が緩慢になることに起因している。この事情の定性的および定量的、もしくは、理論的および数値的な詳細にわたる解明は次の課題である。

なお図4から図10と表1は安藤[1]より転載した。表2は矢野[4]の結果である。

7. 有限要素計算による翼の等角写像の同定

先ず、 $\phi_0 = x$ として、次の外部問題、(D)を考える。

$$(D) \begin{cases} -\Delta\phi = 0 \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ on } C, \\ \phi - \phi_0 \text{ は無限遠で有界.} \end{cases}$$

問題(D)の解 ϕ は、無限遠で流速1のx軸に平行な一様流に漸近する循環の無い二次元翼まわり流れのポテンシャル関数である。

この問題(D)は、(E)と同様な手法で有限要素計算可能である。このことを踏まえて次の仮定5を設定する。

仮定5 所与の翼型 C に対して、無限遠で流速1のx軸に平行な一様流に漸近する、循環の無い、二次元翼まわり流れの複素速度ポテンシャル

$$f = \phi + i\psi$$

は、翼の外部領域と翼面上の任意の点 z において、その値 $f(z)$ は、任意精度で計算可能である。□

そこで、

$$\phi_- = \min_{(x,y) \in C} \phi(x,y), \quad \phi_+ = \max_{(x,y) \in C} \phi(x,y),$$

$$\hat{F}_0 = \frac{\phi_+ + \phi_-}{2}, \quad a = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}$$

と定めて、 ζ 平面上での関数 $\hat{F}(\zeta)$ を

$$\hat{F}(\zeta) = \hat{F}_0 + \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right)$$

によって定義する。このとき、 $|\zeta| \geq a$ なる ζ に対して翼の写像関数 $\hat{C}(\zeta)$ の値 z を

$$f(z) = \hat{F}(\zeta)$$

をみたすものとして定める。

定理1の証明の中の式(1)によって、翼外の点 z では $\frac{df}{dz} \neq 0$ であり、 $f(z) = \hat{F}(\zeta)$ より

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\hat{F}}{d\zeta} \Big/ \frac{df}{dz}$$

が、翼外の点 z で成立する。すなわち、関数 $z = \hat{C}(\zeta)$ は $|\zeta| > a$ では、当然のことながら、正則である。

そこで $|\zeta| > a$ では、

$$\begin{aligned} z &= \hat{C}(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta^n \\ &= C_1 \zeta + C_0 + \frac{C_{-1}}{\zeta} + \frac{C_{-2}}{\zeta^2} + \dots \end{aligned}$$

と展開出来ると考えて、その近似形 $z = \hat{C}^{(N)}(\zeta)$ を、

$$\begin{aligned} z &= \hat{C}^{(N)}(\zeta) = \sum_{n=1}^{-N} C_n^{(N)} \zeta^n \\ &= C_1^{(N)} \zeta + C_0^{(N)} + \frac{C_{-1}^{(N)}}{\zeta} + \frac{C_{-2}^{(N)}}{\zeta^2} + \dots + \frac{C_{-N}^{(N)}}{\zeta^N} \end{aligned}$$

の形で定めることにする。その手順の一つを以下に述べる。

第一段 外部領域 Ω の中に互いに異なる $N+2$ 個の点 z_j を取り $f_j = f(z_j)$ とする：

$$z_j \in \Omega, \quad f_j = f(z_j), \quad -1 \leq j \leq N.$$

第二段 ζ 平面の原点を中心とする半径 a の円板の外部にある点 ζ_j を $f_j = \hat{F}(\zeta_j)$ をみたすように定める。すなわち、 ζ_j は次の二次方程式 (Z_j) の根のうち、 $|\zeta_j| > a$ をみたすものである：

$$(Z_j) \quad \zeta^2 - 2(f_j - \hat{F}_0)\zeta + a^2 = 0.$$

第三段 次の $N+2$ 元の連立一次方程式 (C_N) を解いて、 $N+2$ 個の係数 $C_j^{(N)}$ 、 $-N \leq j \leq 1$ 、を定めて、 $\hat{C}^{(N)}(\zeta)$ を決定する：

$$(C_N) \begin{cases} C_1^{(N)} \zeta_j + C_0^{(N)} + \frac{C_{-1}^{(N)}}{\zeta_j} + \frac{C_{-2}^{(N)}}{\zeta_j^2} + \dots + \frac{C_{-N}^{(N)}}{\zeta_j^N} \\ = z_j, \quad -N \leq j \leq 1. \end{cases}$$

上の手順の第三段における連立一次方程式 (C_N) は、Vandermondeの行列式の知識によって、一意可解であることが解る。

得られた $\hat{C}^{(N)}(\zeta)$ から、本稿での標準的な翼の写像関数 $z = c(z)$ の形に変換する作業を最後に行う。

上に述べた手順の有効性の検討、特にTheodorsen[3]他によって確立している伝統的な手法との比較が、当面の課題である。

謝辞

図3のNACA23012の風洞実験の値は、

G. P. D. Siemens氏がNACAのテクニカルレポートの数表から数値を電子化したものをWWWで入手し使用した。ここに記して謝意を表する。昨年度の講演発表の後で、航空宇宙技術研究所吉田憲司博士から、本研究課題の歴史などにつき有益な教示を受けた。吉田博士の好意に感謝する。安藤[1]と矢野[4]の卒業研究における数値計算は、電気通信大学助手小山大介氏の助言の下に行われた。同氏の尽力に感謝する。

参考文献

[1] 安藤一平、後縁の点を考慮したカルマントレフツ翼周り定常流の数値計算、平成9年度電気通信大学卒業論文、電気通信大学電気通信学部情報工学科、1998年3月。
 [2] 今井 功、等角写像とその応用、岩波書店、1979。
 [3] T. Theodorsen, I. E. Garrick, General theory of arbitrary wing sections, NACA Report No.452, 1933。
 [4] 矢野祐輔、二次元完全流体中における翼周り流れの有限要素計算、平成9年度電気通信大学卒業論文、電気通信大学電気通信学部情報工学科、1998年3月。
 [5] 横松大作、牛島照夫、二次元完全流体中のクッタの条件をみたす翼まわり流れの有限要素計算、第15回航空機計算空気力学シンポジウム論文集、科学技術庁航空宇宙技術研究所刊行(発表1997年6月13日、刊行1998年2月)。

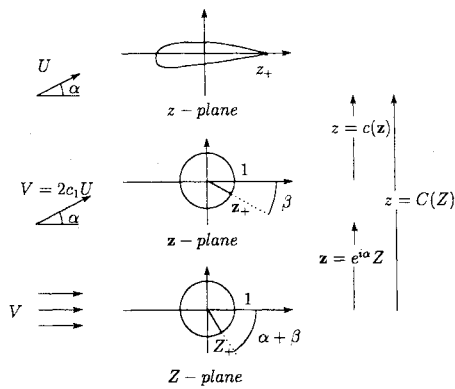


図 1: 翼の等角写像

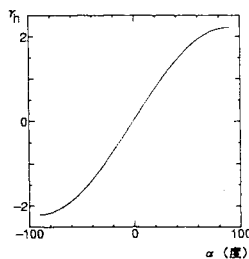


図 2: 迎え角 α を変化させたときの正規循環量 $\gamma_h(\alpha)$

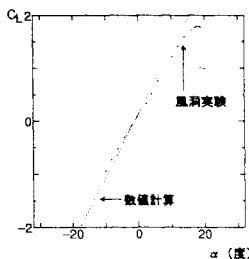


図 3: 迎え角 α と揚力係数 C_L (風洞実験の値は、レイノルズ数 8.8×10^6 のとき)

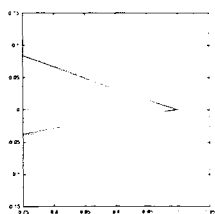


図 4: カルマン・トレフツ翼の後縁付近の拡大図 点線: 翼型の直線近似, 実線: 理論上の翼型

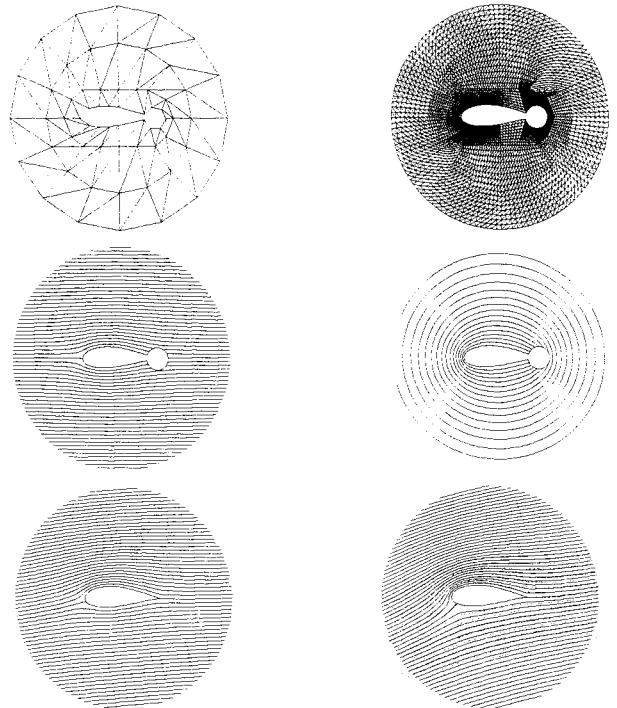


図 5(左上): 初期分割 (接点数 64, 要素数 96)

図 6(右上): 最密分割 (接点数 3200, 要素数 6144)

図 7(左中): 一様流の流れ関数 (迎え角なし)

図 8(右中): 循環流の流れ関数

図 9(左下): クッタの条件を満たす流れの流れ関数

図 10(右下): 解析解の流れと有限要素解の流れの比較 点線: 解析解, 実線: 有限要素解

表 1: 迎え角と三角形分割を変化させたときの, 計算値 γ_h と理論値 γ (後縁部分扇型切除, $a = 1, p = 1.9, r = 1.2, \beta = 3^\circ$)

	迎角 0°	迎角 5°	迎角 10°	迎角 15°
分割 1	0.070585	0.186471	0.300939	0.413116
分割 2	0.065544	0.176868	0.286846	0.394641
分割 3	0.064134	0.174294	0.283127	0.389805
分割 4	0.063787	0.173649	0.282189	0.388582
理論値 γ	0.066109	0.175798	0.284149	0.390337

表 2: 迎え角と三角形分割を変化させたときの, 計算値 γ_h と理論値 γ (後縁部分無切除, $a = 1, p = 1.9, r = 1.2, \beta = 5^\circ$)

	迎角 0°	迎角 5°	迎角 10°	迎角 15°
分割 1	-0.164221	-0.045662	0.073244	0.191593
分割 2	-0.019309	0.093930	0.206454	0.317407
分割 3	0.045227	0.156013	0.265612	0.373190
分割 4	0.075883	0.185796	0.294294	0.400552
理論値 γ	0.110091	0.219345	0.326929	0.432025