48

ベクトル量の輸送に対する数値計算法について

白山　晋（高度情報科学技術研究機構）

A Numerical Method for a Vector Advection

by

Susumu SHIRAYAMA (RIST)

ABSTRACT

A linear advection-diffusion equation has been solved in order to develop a new scheme. It has been found from a relation between an interpolation method and numerical scheme that a Lagrangian scheme is one of the best way to solve a scalar advection equation. It is, however, difficult to deal with a advection equation for a vector quantity. In this paper, we consider a precise method to interpolate the vector in a cell.

1. はじめに

数値スキームを構築する上でスカラー量の移流拡散方程式が，線形，非線形性を問わず重要な役割を担ってきた． 現時点においても，精度検証として，一次元または多次元の線形移流拡散方程式をはじめに扱うことが多い． これまでの結果から，線形数値スキームの範疇でスカラー量の輸送を扱えば，スペクトル法やラグランジェ的な方法が良い性質を示すことが確かめられている． これはスキームと局所補間を結び付けることによって裏付けることができる． 非線形スキームも，例えば，エルミート補間のような傾きを与えることのできる局所補間によって表現できる． 流線に沿って流れてくる情報を利用するセミラグランジェ・スキームにおいては，格子セル内部の分布を利用するために局所補間の考えは特に重要である．

ベクトル量については一次元のシステム方程式に対し，特性速度とリーマン不変量による成分の分離（写像）の後，各成分に対してスカラー量で構築した方法を拡張するという形で議論がなされることが多い． しかしながら，二次元，三次元の速度ベクトルのような従属変数として，それ自身をベクトル量として扱った方が物理的な意味合いの明確になる量を各成分毎に離散化し，それぞれの数値的な特性を合わせるという方法論は保存則の観点から破綻をきたす可能性がある．

オイラー的な方法であれば，和分形式による全領域での保存性の確認，エネルギー方程式や場全域での保存量の導入（例えば荒川ヤコビアン）による整合条件や拘束条件の導入による打ち切り誤差や離散化の任意性の制御によって，成分毎の離散化にベクトル量としての特性を反映させることで破綻を回避できるかもしれない． セミラグランジェ的手法の場合は，成分毎の局所補間がベクトル量の局所的分布に与える影響を調べることで保存的なスキームを構築できる可能性がある． しかしながら，陽的にベクトル量の輸送を扱った方法はないものと思われる．

本稿では，ベクトル量の輸送を直接的に表現する方法を提案する．セミラグランジェ法による移流スキームにおいて適切な局所補間を考察することからはじめる．提案する方法の目標は，ベクトル量の移流拡散が長時間積分に対して十分精度良く扱えることである．

2. 二乗量の保存特性

ベクトル量の移流拡散を扱う場合，その絶対値が数値スキームによってどのように変化するかを調べることが重要である．これはベクトル量を方向と大きさに分離する考え方である．ここで対象とするベクトルを$\mathbf{u}$とし，その成分を(u,v,w)，または，(u_1,u_2,u_3)で表す． 絶対値は$|\mathbf{u}|$とする．

絶対値を直接扱った報告はほとんどないが，二乗量に関してはいくつかの文献がある[1-3]．

はじめに離散化レベルでのエネルギー，エンストロフィ等の保存概念を組み入れた方法について考察する． 和分という形で全体の積分値を保存するという離散化は，気象では非線形不安定性に関連して保存型の方程式を用いて調べられていた． この考えはArakawaによって拡張された[1]． その概略を示す．

二次元非圧縮，非粘性流れの渦度方程式は，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\zeta = 0, \tag{1}$$

である（ζは渦度）． $\hat{\mathbf{k}}$を運動面に垂直な単位ベクトル，Ψを流れ関数とすると，

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{k}} \times \nabla\Psi,$$

$$\zeta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{u} = \nabla^2\Psi,$$

である． 式(1)をヤコビアンJを用いて記述すると，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta, \Psi), \tag{2}$$

となる．ここで，$\overline{(.)}$を全領域での平均値とすると，以下のヤコビアンの性質を導くことができる．

$$\overline{J(p,q)} = 0,$$

$$\overline{pJ(p,q)} = 0,$$

$$\overline{qJ(p,q)} = 0.$$

この性質を用いると，式(2)から渦度の平均値$\overline{\zeta}$の保存が，$\Psi\cdot$式(2)から運動エネルギーの平均値$\frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}^2} = \frac{1}{2}\overline{(\nabla\Psi)^2}$の保存が，$\zeta\cdot$式(2)から渦度の自乗の平均値：エンストロフィの平均値$\overline{\zeta^2}$が保存されることがわかる．

Arakawa法は離散化のレベルでこれらの保存が成立するように離散式を求めるというものである． 具体的には式(2)の右辺のヤコビアンのいくつかの離散化式を用意することからはじめる． 例えば，使用するまわりの計算点を変えるなどで3種類の離散ヤコビアンJ_1^h, J_2^h, J_3^hが用意できたとする．

実際に利用する離散ヤコビアンをその3種類の線形結合で与える（Arakawa Jacobian）．

$$J^h = \alpha J_1^h + \beta J_2^h + \gamma J_3^h.$$

$J^h, \Psi J^h, \zeta J^h$ を全領域で足しこみ，領域の大きさで割ると，離散化された渦度の平均値，運動エネルギーの平均値，エンストロフィの平均値が求められる．　それぞれは保存される．

すなわち，三つの未知数 (α, β, γ) に対する三つの方程式が得られる．これを解けば (α, β, γ) が決定される．　離散化における任意性を利用することにより保存概念を離散式に組み入れるのである．

これらは全体の保存（和分形）に有効である．　但し，局所の保存を陽的に示しているわけではない．

次に非圧縮性のナビエ・ストークス方程式を扱う．森西の手法 [2,3] に従って速度の二乗量の保存を扱い，連続の式の役割について考える．

非圧縮性流体の移流項の形として次の４つのものが考えられる．　移流項を $(Conv.)_i$ として，$(Conv.)_i$ は，

$$(Div.)_i \equiv \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j},$$

$$(Adv.)_i \equiv u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$$(Skew.)_i \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$$(Rot.)_i \equiv u_j (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j},$$

のいずれかの形で表現できる．　それぞれを発散型 $((Div.))$，移流型 $((Adv.))$，混合型 $((Skew.))$，回転型 $((Rot.))$ と呼ぶ．

次に運動方程式から運動エネルギーを見積もる．　第一成分に関する運動方程式に u_1 を乗じると，

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}u_1^2)}{\partial t} + u_1 \cdot (Conv.)_1 = -u_1 \cdot (\nabla p)_1 + ...$$

となる．　$u_1 \cdot (Conv.)_1$ は各々の形について，

$$u_1 \cdot (Div.)_1 = \frac{\partial(\frac{u_1^2}{2})u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2}u_1^2 \cdot (\frac{\partial u_i}{\partial x_i}),$$

$$u_1 \cdot (Adv.)_1 = \frac{\partial(\frac{u_1^2}{2})u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{2}u_1^2 \cdot (\frac{\partial u_i}{\partial x_i}),$$

$$u_1 \cdot (Skew.)_1 = \frac{\partial(\frac{u_1^2}{2})u_j}{\partial x_j},$$

となる（ここで回転型は移流型と全く同じ性質を示すために省略）．　他の成分 u_2, u_3 を乗じても同様の式となる．　この結果から従来指摘されてきたように混合型が本質的に運動エネルギー方程式に関して保存性を持っていることがわかる．

森西はこれらの性質を離散化された方程式系について考察し，全体が移流項の形式とコンシステントな非圧縮性流体の数値解法を導いた．

ベクトル量の局所的な輸送を考えた場合，Arakawa 法は局所保存性を陽に扱わないために，ベクトル量の局所表現を算出する方法として直接利用することは難しい（全体の保存特性はスキームのチェックには用いる）．　森西の方法は，局所的な保存特性を全体のものと結び付けているもののコントロールボリューム法が基準であるためにベクトル量の局所的な分布に対する情報が欠落する．このため，本稿で考えているセミラグランジェ的方法への拡張が困難である．　しかしながら，森西の考察における＇すべての形式において連続の式 $(\nabla \mathbf{u} = 0)$ を満足すると，運動エネルギーの保存に関しては問題がなくなる＇という性質は，ベクトル量の局所的な分布を考える場合重要となる．

3. 連続の式と二乗量の保存

前節で示したように連続の式と運動エネルギーの保存は深く関連する．特に離散レベルで連続の式を満足させることは，非圧縮性流体において離散レベルの二乗量を保存させるためには本質的となる．

そこで，局所的なベクトル場の分布を考えたときに連続の式がどの程度満足されるのかを調べてみる．　はじめに図1に示す計算セルを考える．　このセル内で速度 $\mathbf{u} = (u, v)$ を双一次で補間すると，

$$u = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}x + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}y + \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i,j}}{\Delta x \Delta y}xy, \quad (3a)$$

$$v = v_{i,j} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x}x + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y}y + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} - v_{i,j+1} + v_{i,j}}{\Delta x \Delta y}xy, \quad (3b)$$

となる．　双一次補間は多次元風上の概念としては各方向での一次精度のものよりも高精度とされるが，セル内での質量保存の式は，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}|_h \approx$$

$$(1 - \frac{y}{\Delta y})\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + (\frac{y}{\Delta y})\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{\Delta x} + (1 - \frac{x}{\Delta x})\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} + (\frac{x}{\Delta x})\frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j}}{\Delta y}, \quad (4)$$

または，

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}|_h \approx y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (5)$$

と近似され（ここで，$0 \le x \le \Delta x, 0 \le y \le \Delta y$），速度場は連続の式の意味でセル内部で一次精度となっていることが示される．　セミラグランジェスキームを用いる場合には特にこの点に留意する必要がある．　セル内部で連続の式が一次精度であるために二乗量の保存が破綻する可能性がある．逆に言えば，セル内部の構造を連続の式，二乗量の保存等で決定することで精度が向上する可能性がある．　こうしたセル内部の構造と局所近似を対応させる手法によって，正確にベクトル場の輸送を取り扱うことのできる数値スキームの構築を行う．

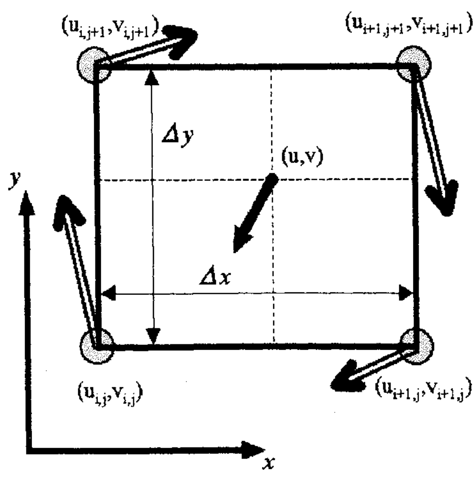

図1．格子セルの幾何形状

4. 数値計算法

偏微分方程式の数値解法において離散化が一意に決定することは少なく，離散化の任意性が存在する． また，FDM,FVM,FEMといった離散化はなめらかな解の領域で局所補間と関連付けることができる[4-6]． よって局所補間にも任意性が生じる．その任意性に着目すると，従属変数であるベクトル量から導出できるスカラー量（二乗量など）や別種のベクトル量の保存を，目的とするベクトル量の局所補間に含めることができる．

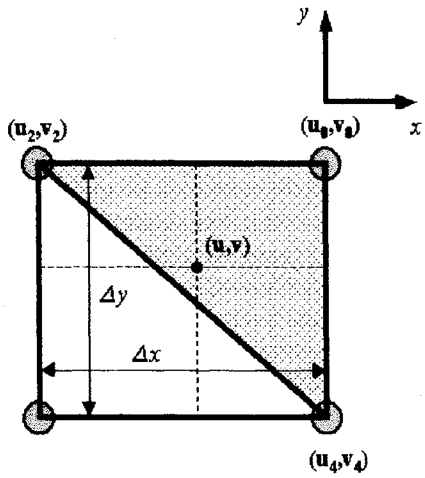

図2

まず，図2に示す風上領域での線形補間を対象とする． また，着目する保存量を二乗量$q = u^2 + v^2$とする． 三頂点で(u, v)が求まっているものとすれば，頂点でのqも決定する． それらの値を(u_0, v_0, q_0), (u_2, v_2, q_2), (u_4, v_4, q_4)とすると，対象領域において(u, v, q)は以下のように近似される．

$$u = u_0 + \frac{u_0 - u_2}{\Delta x}x + \frac{u_0 - u_4}{\Delta y}y, \tag{6a}$$

$$v = v_0 + \frac{v_0 - v_2}{\Delta x}x + \frac{v_0 - v_4}{\Delta y}y, \tag{6b}$$

$$q = q_0 + \frac{q_0 - q_2}{\Delta x}x + \frac{q_0 - q_4}{\Delta y}y. \tag{6c}$$

一方で，qは式(6a),(6b)の近似された(u, v)からも算出できる．

$$\begin{aligned} q = u^2 + v^2 &= q_0 + \frac{q_0 - q_2}{\Delta x}x + \frac{q_0 - q_4}{\Delta y}y \\ &+ \frac{x}{\Delta x}(-1 + \frac{x}{\Delta x})((u_0 - u_2)^2 + (v_0 - v_2)^2) \\ &+ \frac{y}{\Delta y}(-1 + \frac{y}{\Delta y})((u_0 - u_4)^2 + (v_0 - v_4)^2) \\ &+ 2\frac{xy}{\Delta x \Delta y}((u_0 - u_2)(u_0 - u_4) + (v_0 - v_2)(v_0 - v_4)). \end{aligned} \tag{7}$$

式(6c)と式(7)の相違がセル内部の構造を考える上で重要である． 式(6c)と式(7)が表すセル内部での場を図3に示す速度（中心を$(0.25\Delta x, -0.5\Delta y)$においた渦場から生じるもの）を用いて示したのが図4である．

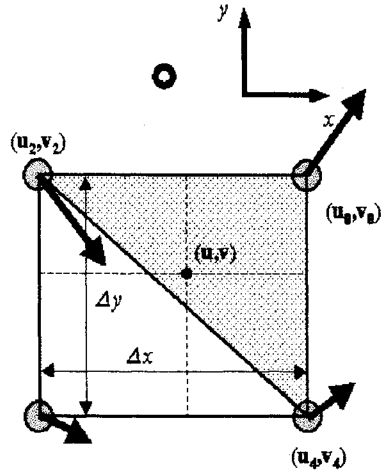

図3

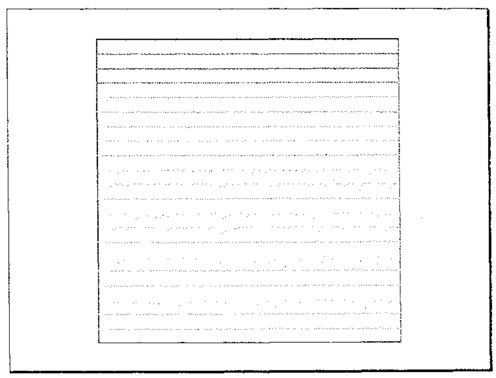

図4a 式(6c)を用いた分布

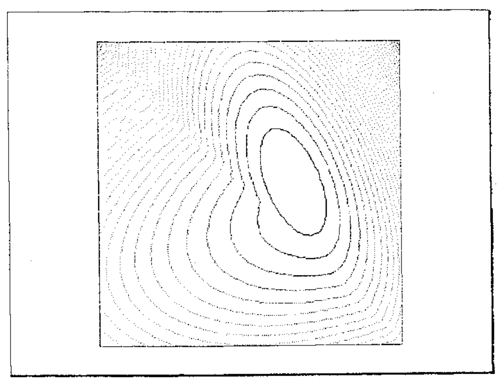

図4b 式(7)を用いた分布

もし式(6c)の近似が正確であるとすれば，セル頂点で二乗量の保存が成立するようなベクトル場でも，セル内部において式(6a)，式(6b)から計算される二乗量は保存しない． 逆にセル内部で二乗量を保存させるように式(6a)，式(6b)を修正すれば，セル内での保存の良い局所補間を求めることができる． その補間をセミラグランジェ法に適用すれば，保存則を満足するようにスキームを設計できる可能性がある．

一例として，二次元の線形移流方程式を用いて方法を説明

する． ベクトル量(u, v)に対する線形の移流方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8b)$$

である． ここで移流速度を(A, B)とした． はじめに従属変数であるベクトル場に対して，ある演算子を施してスカラー量または別種のベクトル量を作る． ここでは，二乗量qを採用する． 式(8a),(8b)から次式が成立する．

$$\frac{\partial q}{\partial t} + A\frac{\partial q}{\partial x} + B\frac{\partial q}{\partial y} = 0. \quad (8c)$$

次に式(8c)を解くのだが，スカラー量に対する精度の良いスキームが提唱されているのでそのスキームを用いればよい．
そして，多くの数値スキームは局所補間と関連付けられるのでスカラー量に対するセル内の分布を求めることができる．
その分布を用いて従属変数であるベクトル量の局所補間を補正する． その後，式(8a),(8b)を以下のようにセミラグランジェスキームで解く．

$$u^{n+1} = u^n(x_{i,j} - A\Delta t, y_{i,j} - B\Delta t), \quad (9a)$$

$$v^{n+1} = v^n(x_{i,j} - A\Delta t, y_{i,j} - B\Delta t). \quad (9b)$$

(u, v, q)のセル内の適切な分布が求まれば，式(8)の時間積分を正確に遂行できる． ただし，qの分布に注意しなければならない． 例えば，式(8c)を一次の風上法で解けば，式(6c)のセル内分布となるが，式(6c)の近似の正当性を十分に吟味しておかなければ従属変数(u, v)に対する正しい局所補間を導くことはできない．

4.1 ベクトル場の局所補間1

さて，式(6c)の近似が良いものとして，(u, v)の構成法を考えてみよう． 式(6a)，式(6b)の代わりに次式を用いる．

$$u = u_0 + \frac{u_0 - u_2}{\Delta x}x + \frac{u_0 - u_4}{\Delta y}y + \alpha xy, \quad (10a)$$

$$v = v_0 + \frac{v_0 - v_2}{\Delta x}x + \frac{v_0 - v_4}{\Delta y}y + \beta xy, \quad (10b)$$

式(10a)と(10b)を$u^2 + v^2$に代入後，式(7)と比較して，αとβを決定する．

4.2 ベクトル場の局所補間2

ベクトル場を方向と大きさに分けることで，大きさ（二乗量）の近似を核とした局所補間を構成することができる．まず，式(6a),(6b)を，

$$\hat{u} = u_0 + \frac{u_0 - u_2}{\Delta x}x + \frac{u_0 - u_4}{\Delta y}y, \quad (10a)$$

$$\hat{v} = v_0 + \frac{v_0 - v_2}{\Delta x}x + \frac{v_0 - v_4}{\Delta y}y, \quad (10b)$$

$$q = q_0 + \frac{q_0 - q_2}{\Delta x}x + \frac{q_0 - q_4}{\Delta y}y. \quad (10c)$$

とする．$(\hat{u}, \hat{v})$から方向成分を抽出する．

$$u^* = \frac{\hat{u}}{\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}}, \qquad v^* = \frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}}.$$

式(10c)を用いて，$u = u^*\sqrt{q}$, $v = v^*\sqrt{q}$とすることで，セル内部の(u, v)を構成する．

この方法も，スカラー量qのセル内の分布関数を基準として，ベクトル場の分布を求めるものである． 説明のために線形補間を採用したが，スカラー量qに関する保存性の良い数値スキームを採用し，その数値スキームから導かれるセル内のqの分布関数を利用すれば，高精度化への拡張は難しくない．

おわりに

セミラグランジェ・スキームにおいて，ベクトル量の輸送を正確に記述するための局所的な補間について考察した．
現時点で得られている知見は以下の通りである．

・ベクトル量の輸送を正しく扱うには保存概念を離散式に組み入れることが重要である。 具体的には，

●数値アルゴリズム全体の整合性

●離散化における任意性

●局所補間における任意性

を利用すればよい。

・ベクトル量を方向と大きさに分離することにより，大きさ（二乗量）に対する最適な局所補間を探すことができれば，保存性の良い分布関数を得ることができる．これをセミラグランジェ的方法に利用してベクトル量の移流方程式を解けばよい．

・但し，ベクトル量に対してある演算子（作用素）を施した場合のスカラー量に関するセル内の近似の正当性を補助的な支配方程式を利用して調べる必要がある．

・直交等間隔格子系ではある程度成功しているが，一般のセル形状での議論が今後の課題となる。

参考文献

1. Arakawa, A., J. Comp. Phys. vol.1, 1966, pp.119-143.
2. 森西洋平，日本機械学会論文集(B編)，62巻604号，pp.4090-4097 (1996)
3. 森西洋平，日本機械学会論文集(B編)，62巻604号，pp.4098-4105 (1996)
4. Shirayama, S., Bulletin of the American Physical Society, vol.**34**, no.**10**, 1989, p.2314.
5. Shirayama, S., AIAA-91-1563-CP, Proceedings of the AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference, June, 1991.
6. Shirayama, S., AIAA Journal, vol.**30**, no.**5**, 1992, pp.1237-1242.