# 慣性重力波の三次元不安定性

宮嵜 武 (電通大機械), 足立 啓 (電通大院)

# Three-dimensional instabilities of inertial gravity waves

by

Takeshi MIYAZAKI, Kei ADACHI

Dept.of Mechanical-Control Eng.,Univ.of Electro-Communications

ABSTRACT

Standing and propagating plane waves in a stably stratified rotating fluid are considered. It is shown that almost all of them are unstable with respect to three-dimensional perturbations. The growth rate of the instabilities increases as the wavenumber of the disturbance increases, generally. It approaches the value predicted by a WKB analysis from below at large wavenumbers. The most dangerous instability modes are concentrated near the node-planes of a basic standing wave. In the parameter region where the short wave instabilities are weak, long wave instabilities, which are due to resonant triad interactions, grow faster.

Key Words: Inertial gravity wave,3D instability,WKB-analysis,Resonant triad interaction

## 1 序論

Kelvin 卿は剛体回転する流体中に伝播する波動を表す Euler 方程式の厳密解を与えたが、同様の有限振幅の進行(定在) 平面波を表す厳密解が回転成層流体中にも存在することが知られている。これらの波動はコリオリ力と浮力 (重力) を復元力とするために、慣性重力波と呼ばれる。本研究では慣性重力波の三次元不安定性を調べる。ここでは二種類の安定性解析を行う。まず極短波長擾乱に対する不安定性を WKB 法に基づいて調べる。これは慣性波に対する Lifschitz & Fabijonas[1]の手法を拡張したものである。次に中長波長三次元擾乱に対する不安定性を、Floquet 指数を持つ Fourier 級数展開によって調べる。内部重力波に対しては、同様の安定性解析が Drazin[2]、Klostermeyer[3]、Sonmor & Klaassen[4]によって行われており、慣性波の不安定性は Miyazaki & Lifschitz[5]によって行われた。内部重力波も慣性波も三波共鳴現象に起因する不安定性によって不安定化することが示されている。振幅の小さな定在慣性波では極短波長擾乱の成長が最も速く、その成長速度は WKB 法による簡単な解析で精度よく与えられることが特徴的である。

基本流は

$$\mathbf{u}_p = -\frac{\omega U}{2\cos\theta}\sin(z'-\omega t)\mathbf{e}_{x'} + U\cos(z'-\omega t)\mathbf{e}_y, \quad (1)$$

$$q_p = \frac{U\sin\theta}{2\cos\theta}\cos(z'-\omega t), \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_s = [\frac{\omega}{2\cos\theta}\mathbf{k}\times\mathbf{e}_y\cos\omega t + \mathbf{e}_y\sin\omega t]\sin\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}, \quad (3)$$

$$q_s = \frac{U\sin\theta}{2\cos\theta}\sin\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}\sin\omega t, \quad (4)$$

$$\omega = \sqrt{N^2\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}. \quad (5)$$

と表すことができる。ここで $U$ は波動の振幅 (定数) である。下付の添え字 $p$ は進行波を、$s$ は定在波を表す。波動の周期は $2\pi/\omega$ で与えられる。$\theta$ は波数ベクトル $\mathbf{k}$(長さは'1' にとる) が鉛直軸となす角度であり、以下の解析では波数ベクトル $\mathbf{k}$ 方向を $z'$ 軸とするように $y$ 軸回りに回転した座標系 $(x', y, z')$ を使う。$N$ は Brunt-Väisälä 振動数である。振幅と周波数が同じであれば、進行波と定在波の不安定特性も同じになりそうであるが、実際には微妙に異なることが示される。

波束型の擾乱が基本流の流線にのって運ばれる間に成長するか否かを、常微分方程式に帰着して、調べるものである。慣性重力波の場合 (進行波の解析では進行波とともに移動する座標系を使う)、一般に流線は閉じた楕円になるので、Floquet 理論に基づいて波束が一周する間の成長を計算する。進行波と定在波に対する常微分方程式は基本的には同一のものとなるが、定在波の場合には基本波の振幅が $U\cos z'$ の形で現れ、進行波では単に $U$ となるところが異なる。図 1a に鉛直軸方向に伝播する進行波の不安定性成長率を示す。横軸は成層の強さを表す Brunt-Väisälä 振動数であり、いくつかの振幅に対する結果を線の種類を変えて示した。安定成層をかけていくと不安定性は抑制されるが、$N=2$ の周辺には別種の不安定性が生じ、さらに成層を強くすると不安定性は消える。成層が弱いところの不安定性は一次の共鳴に起因するものであり、基本波の振幅が小さいときの成長率は $3\sqrt{3(1-N^2)}/4(4-N^2)U$ で与えられる。一方、$N=2$ 付近の不安定性は二次の共鳴にともなうもので、その成長率は $U^2/16$ となり、不安定性のピークは $N=2+U^2/8$ に位置する。定在波の不安定性を議論するときには、基本波の振幅を $0<U\cos z'<U$ の間で動かして最大成長率を探すので、図 1 の包絡線を描くことになり、$N=2$ 付近では微妙な差が生じる (定在波の方がより不安定)。図 2 に傾いて伝播する進行波の場合の結果を示す ($\theta=\pi/3$)。弱い安定成層は少しだけ不安定性を抑制するが (一次共鳴は $N=0.55$ で消える)、強い成層下では一次の共鳴が再び起こるために (一次共鳴は $N=4.47$ で現れる) 不安定性成長率が $N$ に対してほぼ線形に増加する。これは傾いた内部重力波が不安定であることを意味し、線形増加の傾きが従来の研究で求められた不安定性成長率に対応する。慣性重力波の傾きが大きくなるにつれて二次共鳴に起因する不安定性は顕著でなく、定在波の不安定性と進行波の不安定性の差がなくなる。

## 3 中長波長三次元不安定性

### 3.1 進行波の不安定性

進行平面慣性重力波の不安定性は、内部重力波の場合と同様に、擾乱を基本波の位相で Fourier 級数展開して調べることができる。

$$(u', v', w', q') = e^{\sigma t + i\gamma z' + i\alpha x' + i\beta y} \quad (6)$$

ここで$\gamma$は擾乱の周期性を規定するFloquet指数であり、$\gamma = 0$はharmonicな擾乱を、$\gamma = 0.5$はsubharmonicな擾乱を表す。$\alpha, \beta$は$x, y$方向の波数であり、$\sigma$は求めたい成長率である。慣性重力波の不安定性では、高波数擾乱の成長率は$\gamma$の値にはほとんど依存しないが、長波長ではharmonicな擾乱($\gamma = 0$)がより速く成長するようである。線形化されたEuler方程式に打ち切られたFourier級数展開$(-Max, -Max+1, ..., Max)$を代入して、圧力と流速の$z$成分を消去すると、$(6Max+3)^2$の行列の固有値問題に定式化される。固有値を数値的に求めて、成長率を決定する。

図3に不安定性成長率を$\beta$の関数として示す($U = 1.0, \gamma = 0.25$)。実線は鉛直方向に伝播する場合($\theta = 0, N = 1.0$)、点線は($\theta = \pi/3, N = 1.0$)、破線は($\theta = \pi/3, N = 3.0$)をそれぞれ示す。$\beta$が増加するにつれて成長率が増加して、WKB解析で求められた0.1777に漸近することが分かる。同様に破線もbが増加するにつれてWKB解析の値0.3525に下から近づく。最も波長の短い擾乱が最も速く成長することが特徴的である。一方、点線は極短波長での一次共鳴が起こらない場合に対応するが、高波数ではWKB解析の値0.0996に漸近するものの、低波数側に成長率の最大値が現れる。低波数(長波長)不安定性は三波共鳴現象に起因し、成層効果で極短波長の一次共鳴が禁止される場合にも長波長の三波共鳴が残るためであろう。

### 3.2 定在波の不安定性

定在波の不安定性解析は進行波のそれより少し複雑になる[5]。基本流が空間的にも時間的にも周期的であるので(進行波は進行波とともに動く座標系では定常解)、空間的にはFloquet指数を持つFourier級数展開して、さらに時間的にもFloquet理論を用いて、擾乱が基本波の一周期にわたってどう変化するかを数値積分してから、成長率を決定する。

図4に、図3の場合($U = 1.0, \gamma = 0.25, \theta = 0, N = 1.0$)について定在波(点線)と進行波(実線)に対する結果を比較する。高波数でWKB解析値0.1777に近づくことは共通するが、その近づき方が遅く、長波長側では定在波の不安定性の方が弱いことが特徴である。定在波の長波長擾乱の成長率は進行波のもののほぼ半分ぐらいになる。定在波は振幅が半分の二方向に伝播する進行波の重ね合わせであるが、片方向に伝播する進行波を不安定化する三波共鳴は逆方向に伝播する進行波を不安定化できないためにこの差が生じる。極短波長の極限では三波共鳴は一次共鳴につながるが、この極限では両方向に伝播する進行波が同じ三波共鳴によって不安定化されるようになるので、定在波と進行波の不安定性特性が同一になる。したがって、定在波の三次元不安定化は短波長擾乱に支配されやすいようである。

図5に最大増幅する高波数擾乱の流速の$x$成分を示す。進行波に対する擾乱は基本波の位相の全体に広がっているのに対して、定在波に対する擾乱は基本波の節面付近に集中する。このことは、WKB解析での不安定性成長率が基本波振幅の増加関数であり(一次共鳴が許されるなら)、節面で最大増幅率が与えられることに対応する。

1) A. Lifschitz & B. Fabijonas, Phys. Fluids **8**, 2239 (1996).
2) P.G. Drazin, Proc. R. Soc. Lond. A **356**, 411 (1977).
3) J. Klostermeyer, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **61**, 1 (1991).
4) [illegible]
(1998).
6) T. Miyazaki & K. Adachi, Phys. Fluids **10**, in print (1998).

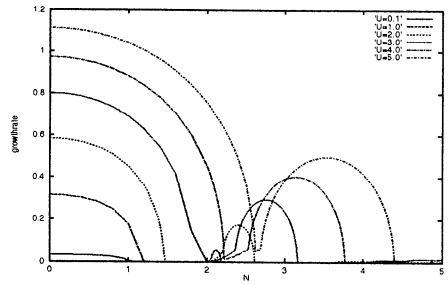


Fig. 1: WKB 増幅率$\theta = 0$: 進行波

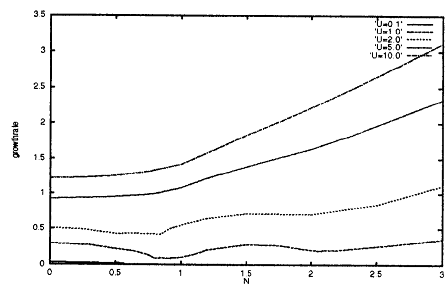


Fig. 2: WKB 増幅率$\theta = \pi/3$: 定在波

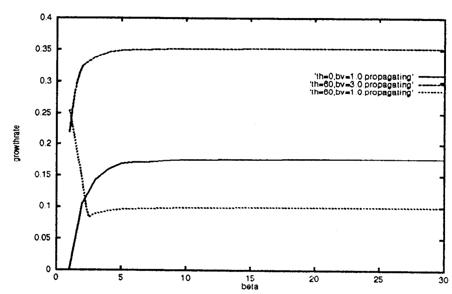


Fig. 3: 中長波長不安定性の増幅率: 進行波

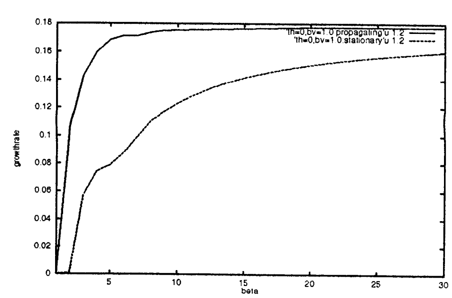


Fig. 4: 中長波長不安定性の増幅率: 進行波と定在波