流れの不安定性に関する一考察

福西　祐 (東北大工)，横川　譲 (東北大院)，谷口　英夫 (岩手大工)

New View and Description of Flow Instability

Yu Fukunishi*, Yuzuru Yokokawa* and Hideo Taniguchi**

*Dept.of Machine Intel. and Sys.Eng., Tohoku University
**Dept.of Mech.Eng., Iwate University

ABSTRACT

An attempt to predict a instability of shear-layer without using the linear stability theory is performed. The transformation process from a shear-layer to separated vortices is simulated by solving two dimensional vorticity-transport equations. As a result of a detailed investigation on the interaction of vorticity field with velocity field, it is suggested that a parameter associated with the inner product of vorticity gradient and velocity vector can be used to estimate the instability of flow field. A feasibility of this parameter when it is used for transition control is also shown.

Key Words: instability, shear-layer, vorticity-transport equation, parameter, vorticity gradient.

1. はじめに

壁面近傍にないせん断層は不安定であることが知られている．通常その理由は，線形安定性理論により変曲点型の速度分布を持つ流れは非粘性でも不安定であることが示されているため，と説明される (1)．このようなせん断層は乱流や乱流遷移中の流れの中でしばしば発生し，例えば平板境界層において遷移末期にスパイク波形が生じるのも変曲点型の速度分布を持つせん断層の不安定性に起因するとされている (2)．

ところで，線形安定性理論とは，Navier-Stokes 方程式を平行流近似により線形化し，そこへ周期的な解を入れ，ある速度分布と境界条件のもとにおける解の振幅の時空間的成長，減衰から流れの安定性を予測する解析法である．この方法はいろいろな場面で安定性の予測に有効であるものの，あくまで数学的な検証であるため，不安定な流れ場が成長する力学的説明にはなっていない．したがって実際の流れ場において流れが不安定になる力学的なプロセスを説明しようとすると，不安定性を別の視点で捉えることが必要となる．

本研究では，２次元流れ場においてせん断層が時間的に変化していく様子を渦度輸送方程式を用いた数値シミュレーションによって再現し，渦度場と速度場の相互関係に注目することによって，流れ場の不安定性を支配している物理パラメータを力学的な観点から明らかにすることを試みる．また線形安定性理論によって得られた結果との比較を行う．

2. 数値解析法

計算は２次元非圧縮性粘性流れ場において，運動方程式から導かれる無次元化された渦度輸送方程式 (1) と流れ関数に関するポアソン方程式 (2) を，差分法により解いた．この方程式系では連続の式が自動的に満足される点で有利である．座標系は流れ方向に x 軸，高さ方向に y 軸をとっている．

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \qquad (2)$$

ここで，ω が渦度，ψ が流れ関数であり，Re はせん断層の厚さの半分 L を代表長さとしたレイノルズ数である．(1) を計算する際，移流項には３次精度風上差分 (Kawamura-Kuwahara scheme) を，時間積分には前進オイラー法を用いた．また式 (2) のポアソン方程

式はSOR法(加緩和係数1.8)によって収束解を求めている．計算格子は10：1の長方形格子でx方向に100点，y方向に101点としている．図1にせん断層を模擬した流れ方向速度分布の概形を示す．初期条件として式(3)に示す流れ方向速度のy方向分布を与えた．

$$U(\frac{y}{L}) = \frac{y}{L} + \frac{1}{\pi}sin(\pi\frac{y}{L}) \tag{3}$$

vの初期値は計算領域全体で0とし，また渦度ω，および流れ関数ψの初期条件はこの速度分布より計算した．さらに微小擾乱に対する流れの安定性を解析するために，渦度分布に振幅0.01％の初期擾乱を加えて計算を行った．この初期擾乱はx方向には周期的であり，その振幅は渦度勾配に比例させている．

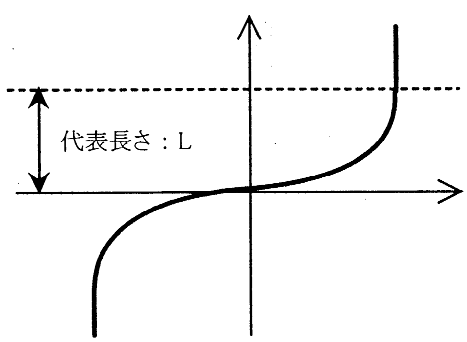


図1　流れ方向速度分布概略図

境界条件は以下のように与えた．

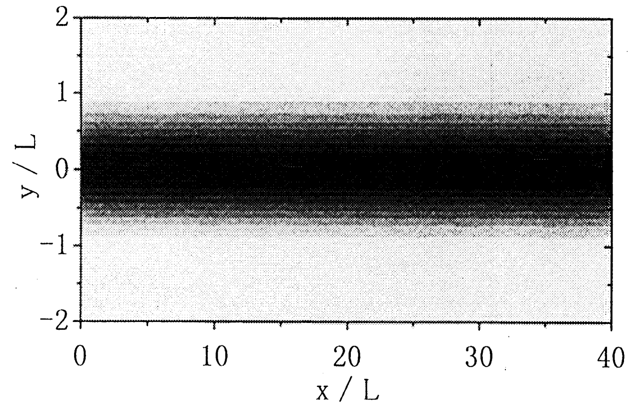
表1　境界条件

	渦度ω	流れ関数ψ
外縁境界	$\omega=0$ (鏡面条件)	$\psi=0$
流入流出境界	周期境界条件	周期境界条件

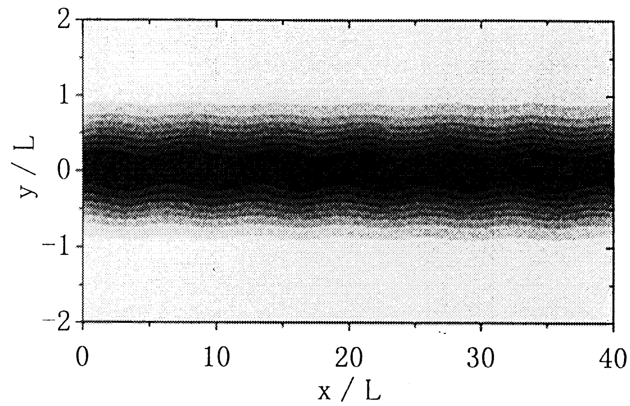
3. 結果と考察

3.1　流れ場の時間的変化

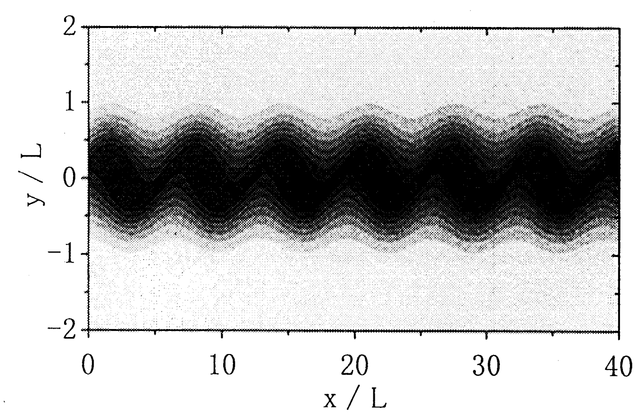
図2に初期条件として無次元波数α=0.94の擾乱を与えた流れ場の渦度コンターの時間変化を示す．図中の色の濃い場所は渦度が大きいことを示している．ここで，時間τは主流速度差とLより得られる時間[3]で無次元化しており，レイノルズ数は500としている．なお，これ以降の計算もすべて同じレイノルズ数で行っている．図においていわゆるKelvin-Helmholtz不安定により流れ場が時間とともに変形しており，その過程はせん断層がロールアップして独立した渦層に変形していく過程であるということがわかる．



(a)　τ=20.0



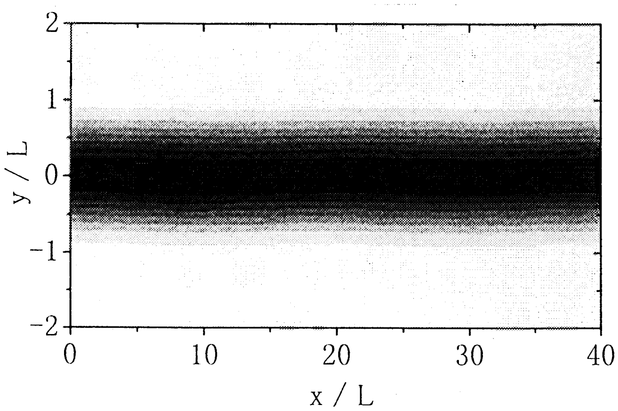
(b)　τ=40.0



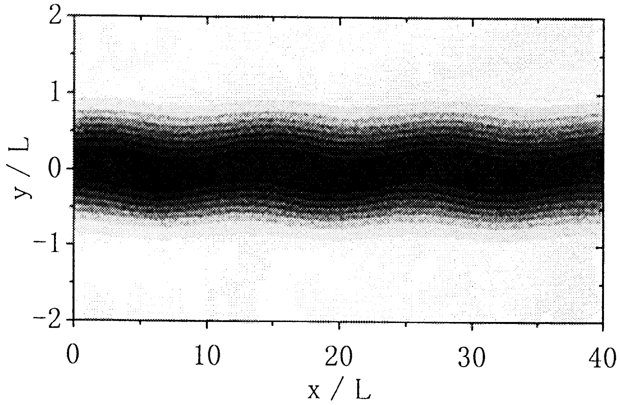
(c)　τ=50.0

図2　せん断層の時間変化

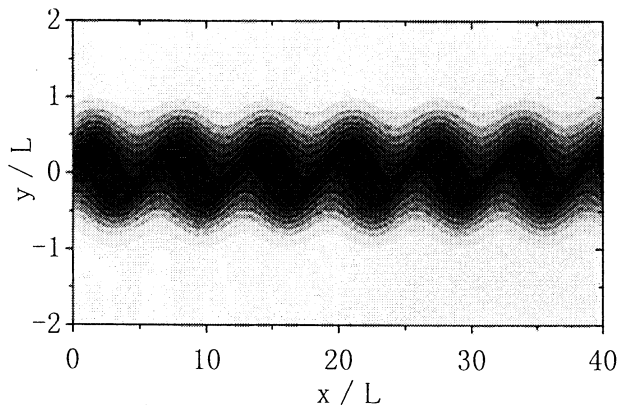
図3は初期擾乱として4種類の波数を与えたそれぞれの流れ場のτ=50.0における渦度コンターである．同じ計算時間を経た後であるにもかかわらず，初期に与えた微小擾乱の波数に依存して流れ場の変化の様子が大きく異なることが観察される．



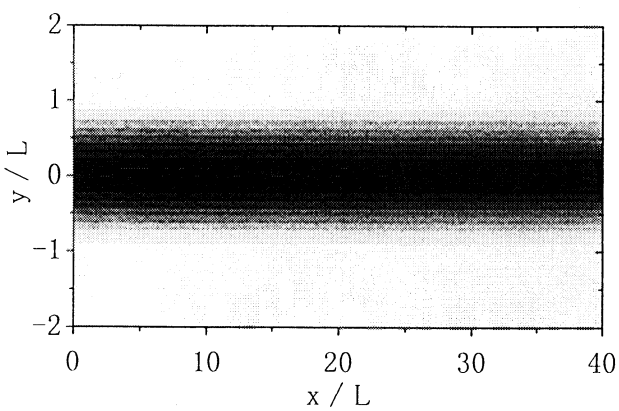
(a)　α=0.315



(b)　α=0.470



(c)　α=0.940



(d)　α=1.415

図３　渦度コンター図

図４に微小擾乱の波数 α と速度変動の増幅率 β_i の関係を，数値シミュレーションによる計算結果と線形安定性理論による予測の比較という形で示した．これによると，計算結果と理論値が定性的にかなり良く一致しており計算が正しく行われていることを示している．

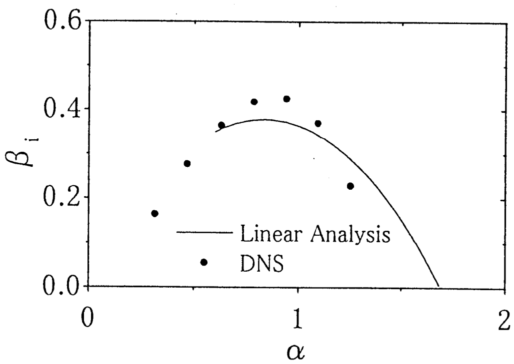
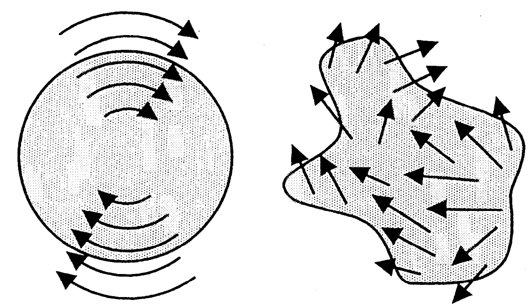


図４　u'_{rms} の時間変化

3.2　渦度場と速度場の相互関係

ここで，なぜ特定の波数に対してのみ速度変動の成長が速くなるのかの力学的な説明を試みることにする．図２から明らかなように，速度変動の成長の速さとは渦層のロールアップの速さであり，それは渦度の空間分布形状が変形する速さであると考えることができる．これは，渦度の分布形状の変化のし易さが流れ場の不安定の強さと同じ意味を持つと言い換えられる．この変形過程は，渦度分布が速度場を決定しさらにその速度場が渦度分布の変形を決定するというプロセスで進行するため渦度とそれを運ぶ速度との関係が重要となる．



(a)　(b)

図５　渦度分布と速度ベクトルの関係

この例として図５のような場合を考えてみると，(a)に示すように円の中に渦度が一様に分布して全体が剛体回転をしている場合には渦度分布形状の安定性は保

たれる．しかしながら (b) に示すように渦度が分布している場合を考えるとこの形状は変化し易い．つまり流れ場が不安定であることが予測できる．この (a), (b) の差は速度ベクトルと渦度のコンターラインのなす角度の有無と捉えることもでき，(a) のように両者のなす角度がない場合には渦度分布の形状の変化は促進されず，(b) のように両者のなす角度がある場合には変化が促進されると考えられそうである．この角度は渦度勾配と速度の内積という量で取り扱うことができる．

次に，上記の内積の流れ場全体での合計が流れ場の不安定性を表すパラメータとなりうるか否かの検証を行う．

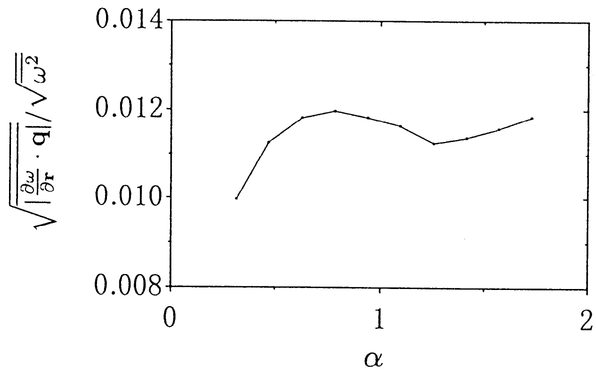


図6　$\sqrt{|\frac{\partial\omega}{\partial \mathbf{r}}\cdot \mathbf{q}|}/\sqrt{\overline{\omega^2}}$ の時間変化

図6に渦度勾配 $\frac{\partial\omega}{\partial \mathbf{r}}$ と速度ベクトル $\mathbf{q}$ の内積の絶対値を流れ場全体で合計したパラメータと波数の関係を示す．なおこの値は ω の r.m.s. 値で無次元化を行っている．この図と図4を比較すると，α が 1.2 以下では概ね同じ傾向を示すものの，α が 1.2 を超えた辺りからまた右上がりになっておりこの部分では増幅曲線と一致していないことがわかる．

4　まとめ

渦度輸送方程式を用いた数値シミュレーションを行った結果，せん断層の不安定性に関する以下の知見を得た．

(1) 流れ場の不安定性とは渦度の分布形状の変化のし易さであると考えることができる．

(2) 渦度勾配と速度の内積の絶対値を流れ場全体で合計した値が，流れ場の不安定性を定量的に表すパラメータとなりうる可能性がある．

参考文献

1) 巽友正, 後藤金英：流れの安定性理論, 産業図書 (1976),pp.95-105.

2) Nishioka,M., Asai,M., Iida,S : *Laminar-Turburent Transition*,Springer-Verlag.,(1980),pp.37-46.

3) 小林陵二, 福西祐, 西川世洋, 深谷潔：第23回乱流シンポジウム講演論文集.,(1991),pp.425-429.