

拡大部を持つ管路流れの多重解と衝撃自由剪断層不安定性

同志社大・工 高橋秀行, 塩谷幸信, 水島二郎

Multiple Stable Solutions of Flow in a Channel with a Wilder Part and Impinging Free Shear Layer Instability

by

H.Takahashi, Y.Shotani, J.Mizushima

Department of Mechanical Engineering
Doshisha University

ABSTRACT

Transitions and instabilities of flow in a symmetric channel with a suddenly expanded and contracted part are investigated numerically by three different methods, i.e. the time marching method for dynamical equations, the SOR iterative method and finite element method for steady state equations. Numerical results are analysed by using the bifurcation theory. Linear and weakly nonlinear stability theories are also applied to the flow. It is known that the flow is steady and symmetric at low Reynolds numbers, becomes asymmetric at a critical Reynolds number, gets the symmetry back at another critical Reynolds number and then becomes oscillatory at very high Reynolds numbers. Multiple stable steady solutions are found in some cases and the parameter range of existence of the multiple stable solutions is obtained. Impinging free shear layer instabilities are found to cause the flow oscillations and the mechanism of the impinging free shear layer instability is clarified.

Key Words : Channel flow, Bifurcation, Multiple stable solutions, Impinging free shear layer instability

1 はじめに

急拡大管路流れの分岐については Fearn, Mullin and Cliffe⁽¹⁾が実験と解析で研究し, 臨界レイノルズ数を求めた. 急拡大・縮小管路流れの分岐は Mizushima, Okamoto and Yamaguchi⁽²⁾によって研究されたが本研究により見つけられた安定多重解の存在を示していなかった.

一方, ジェット状流れが壁などに衝突し, 振動流となる場合, ジェットから壁までの距離が連続的に変化しても, 振動数は階段状に変化することが知られており, 衝撃自由剪断層不安定 (Impinging Free Shear Layer Instability) と呼ばれている (Rockwell and Naudascher⁽³⁾). 本研究の管路もジェットとよく似た形状であり, 同様の不安定性が起こるものと考えられるので, その存在と性質について詳しく調べる.

本研究では 2次元非圧縮流れを仮定し SOR 法および有限要素法による非線形平衡解の数値計算を行い, レイノルズ数の変化に伴う流れのパ

ターン変化と遷移を調べるとともに, 管路の形状を表すパラメータの変化によるストローハル数の変化を調べ, 衝撃自由剪断層不安定性の存在とその性質について確かめる. また, 線形安定性理論を用いて対称な流れの安定性を調べ, 臨界レイノルズ数を求める. また, 弱非線形安定性理論を用いてその局所分岐の構造を調べる. また, 管路を少し非対称にしたときの解の分岐構造の変化を調べる. さらに, 出口が 2つある管路についても, 出口の条件を流量が等しい場合と圧力が等しい場合の異なる 2つの条件を用いてシミュレーションを行い, 流れの遷移の様子を比較する.

2 支配方程式と非線形平衡解

本計算に用いた座標系を図 1 に示す. 図 1 における LC の中点を原点 O として, 流れ中心軸に x 軸, それに垂直に y 軸をとる. 急拡大部長さ DE を L_0 , 流入路の幅 AB を h とし, 流入路幅の半分 $h/2$ により長さを無次元化した. 管路形状を表

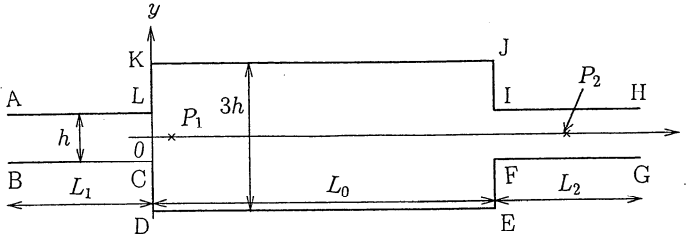


図 1: 管路形状と座標系.

すパラメータとして拡大比 $E = 3h/h$, アスペクト比 $A = L_0/3h$ と定義する. 2次元流れと仮定するので, Navier-Stokes 方程式と連続の式を流れ関数と渦度を用いて次の渦度輸送方程式とポアソン方程式に書き換える.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - J(\psi, \omega) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

ただし Re の定義は, 代表長さを助走管路幅の半分 $h/2$, 代表速度を流入口での最大流速 U_{\max} を用いて, $Re = U_{\max} h/2\nu$ とする.

境界条件は, 管路入口においては十分に発達した平面ポアズイコ流と仮定する. また, 管路出口での境界条件は定常流の場合は流出条件, 非定常流である場合には, 次のゾンマーフェルトの放射条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + c \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

を用いる. 本来 c は出口での x 方向位相速度を用いるが, 簡単のために各点での x 方向速度 u を用いる. また, 壁上では滑りなし条件とする.

計算方法として, 渦度方程式 (1) を差分近似し適当な初期条件からオイラー陽解法により渦度を時間発展, ポアソン方程式 (2) を SOR 法により解き渦度から流れ関数を導く.

安定性解析をするにあたり非線形平衡解を求め. 平衡解の流れ関数と渦度を $\bar{\psi}(x, y), \bar{\omega}(x, y)$ とすると, $\bar{\psi}(x, y), \bar{\omega}(x, y)$ を支配する方程式は,

$$-J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

$$\bar{\omega} = - \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right), \quad (5)$$

となる. 式 (4), (5) を差分近似し, SOR 法により

非線形平衡解の安定性を線形安定性理論により調べる. 平衡解に攪乱 ψ', ω' を加える. $\psi(x, y, t) = \bar{\psi}(x, y) + \psi'(x, y, t)$, $\omega(x, y, t) = \bar{\omega}(x, y) + \omega'(x, y, t)$ を方程式 (4), (5) に代入する. 攪乱は時間に関して指数関数的に変化すると仮定して $\psi'(x, y, t) = \hat{\psi}(x, y)e^{\sigma t}$, $\omega'(x, y, t) = \hat{\omega}(x, y)e^{\sigma t}$ とおくと, 方程式

$$\sigma \omega = J(\bar{\psi}, \hat{\omega}) + J(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \hat{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\omega}}{\partial y^2} \right), \quad (6)$$

$$\hat{\omega} = - \left(\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

が得られる. 線形増幅率 σ の実部の符号で平衡解が安定かどうかを判定し, その臨界レイノルズ数 Re_c を求める.

さらに, 弱非線形安定性理論により振幅方程式を導き, 線形安定性で求めた臨界レイノルズ数 Re_c 近くの局所的な解の振る舞いを調べる. 攪乱方程式は形式的に

$$\frac{\partial}{\partial t} M \psi' = L(\bar{\psi}) \psi' + \frac{1}{Re} K \psi' + N(\psi', \psi') \quad (8)$$

と書ける. $\varepsilon = 1/Re_c - 1/Re$ として $\bar{\psi}, \psi', t$ を ε で展開すると

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \bar{\psi}_0 + \varepsilon^2 \bar{\psi}_1, \\ \psi' &= \varepsilon \psi_0 + \varepsilon^2 \psi_1 + \varepsilon^3 \psi_2, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_1} \end{aligned} \quad (9)$$

となる. これらの展開を (8) 式に代入して ε についてオーダー評価する. $O(\varepsilon)$ では

$$L(\bar{\psi}_0) \psi_0 + \frac{1}{Re_c} K \psi_0 = 0, \quad (10)$$

$O(\varepsilon^2)$ では

$$L(\bar{\psi}_0) \psi_1 + \frac{1}{Re_1} K \psi_1 + N(\psi_0, \psi_0) = 0, \quad (11)$$

$O(\varepsilon^3)$ では

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t_1} M \psi_0 + L(\bar{\psi}_1) \psi_0 + L(\bar{\psi}_0) \psi_2 - K \psi_0 \\ + \frac{1}{Re_c} K \psi_2 + N(\psi_0, \psi_1) + N(\psi_1, \psi_0) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

となる. 式 (10)(11) の解をそれぞれ次のように置き, これらの解を求める.

$$\psi_n = A(t_1) a_n(x, y), \quad (13)$$

$$\psi_1 = A^2(t_1)g_1(x, y). \quad (14)$$

式(12)の可解条件より次の振幅方程式(ランダウ方程式)が得られる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \lambda_0 A + \lambda_1 A^3, \quad (15)$$

$$\lambda_0 = \frac{\int \int (-\tilde{g}_0 K g_0 + \tilde{g}_0 L(\bar{\psi}_1) g_0)}{\int \int \tilde{g}_0 M g_0}, \quad (16)$$

$$\lambda_1 = \frac{\int \int \tilde{g}_0 (N(g_0, g_1) + N(g_1, g_0))}{\int \int \tilde{g}_0 M g_0}, \quad (17)$$

ここで、 \tilde{g}_0 は式(10)に関する随伴関数である。

3 計算結果と考察

3.1 流れの遷移とパターン変化

レイノルズ数が小さいときは管路中心軸に対して対称な定常流であり、レイノルズ数が大きくなると、非対称な定常流へと遷移し、さらに大きくしていくと、再び対称な定常流に戻り、そして周期流に遷移する。

その代表例として拡大比 $E = 3$ 、アスペクト比 $A = 7/3$ の定常非対称流 ($Re = 40$)、定常非対称流 ($Re = 58$)、定常対称流 ($Re = 100$)、振動流 ($Re = 900$) についての流れ場を図2に示す。

$Re = 40$ では、流れ場は管路の急拡大部において中心に対して対称な渦循環領域が存在し、これらの渦領域に挟まれた主流は急拡大部付近で広がった後、後流助走区間に流入する。 $Re = 58$ では流れ場は非対称となり、対称性を破るピッチフォーク分岐が生じたことがわかる。 $Re = 100$ では流れ場は再び対称になるが、 $Re = 40$ の流れ場と大きく異なる点は渦領域が拡大部全体に広がることである。 $Re = 900$ では流れ場は非定常な周期流となりホップ分岐が生じたことがわかる。拡大部に2つの渦領域が存在し、上下あわせて4つの大きな渦領域が存在する。また、急縮小部付近において主流の振動が見られ、下流域に波として伝わっていく様子が分かる。

これらの遷移の様子を分岐ダイアグラムを図3に示す。流れ場を特徴づける代表的な物理量として、管路中心軸上の代表点 $P_1(x, y) = (0.8, 0.0)$ における y 方向の速度成分 v_1 をとる。 $v_1 = 0$ は流れが対称であることを示し、 v_1 が有限の値では対称性が崩れていることを示す。図3(a)に v_1 と Re の関係を示す。レイノルズ数が $Re_{c1} = 47.70$ よりも小さいと $v_1 = 0$ すなわち流れが対称で、 $Re > Re_{c1}$ で流れが非対称に遷移していること

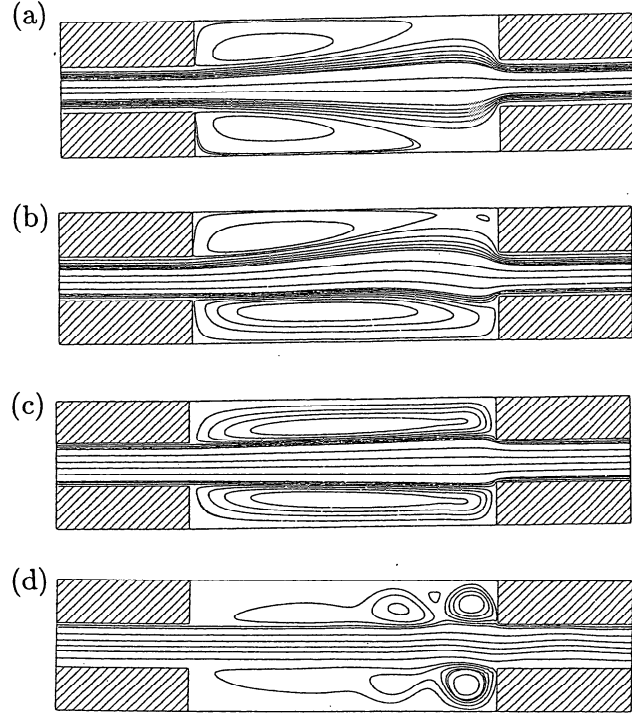


図2: 流れ場. (a) $Re = 40$, (b) $Re = 58$, (c) $Re = 100$, (d) $Re = 900$. ($A = 7/3$)

がわかる。これにより $Re = Re_{c1}$ からピッチフォーク分岐が生じたことがわかる。さらに $Re_{c2} = 65.24$ で流れが再び対称な定常流へと遷移している。

次に振動の様子をとらえるために、図3(b)に管路中心軸上の代表点 $P_2(x, y) = (17.0, 0.0)$ における y 方向速度成分の振幅 a を示す。 $Re_3 = 843$ より小さいときは $a = 0$ で定常対称流であることがわかる。 $Re = Re_3$ から a が有限の値を持ち、流れが周期流へと遷移し、定常対称流は不安定になる。これにより $Re = Re_{c3}$ でホップ分岐が生じたことがわかる。

次に $A = 8/3$ の場合の分岐ダイアグラムを図4に示す。ここでも流れは定常対称流から定常非対称流、さらに定常対称流に周期流へと遷移する様子が分かる。 $A = 7/3$ の場合と異なる点は、 $Re_{c2} = 107$ から $Re'_{c2} = 112$ の間で安定な非対称解に加え、不安定な非対称解が存在し、さらに安定な対称解も存在する。すなわち安定多重解の状態にあり、流れの履歴によって解が変化するヒステリシスが生じる。また $Re = Re'_{c2}$ でサドルノード分岐が生じていることがわかる。

以上の結果をまとめて流れが遷移する各臨界レイノルズ数 Re_c とアスペクト比 A の関係を図

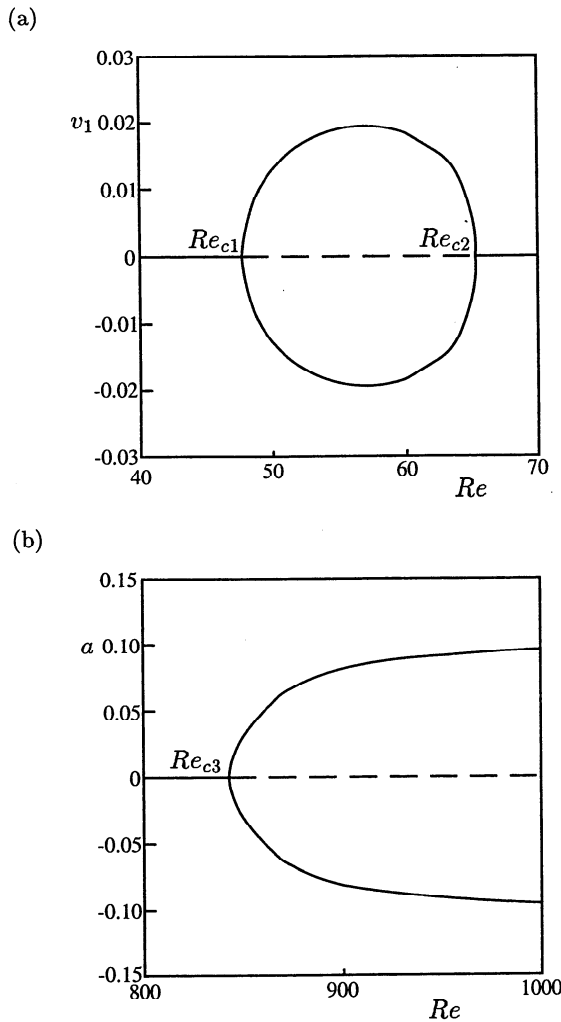


図 3: (a) P_1 における y 方向速度 v_1 , (b) P_2 における y 方向速度の振幅 a . ($A = 7/3$)

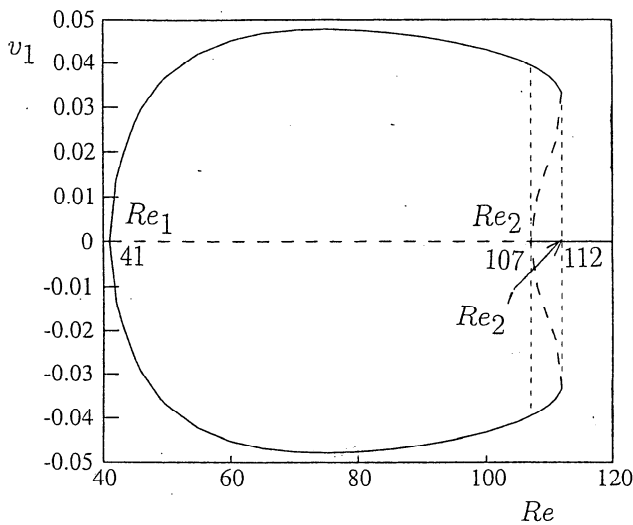


図 4: P_1 における y 方向速度 v_1 . ($A = 8/3$)

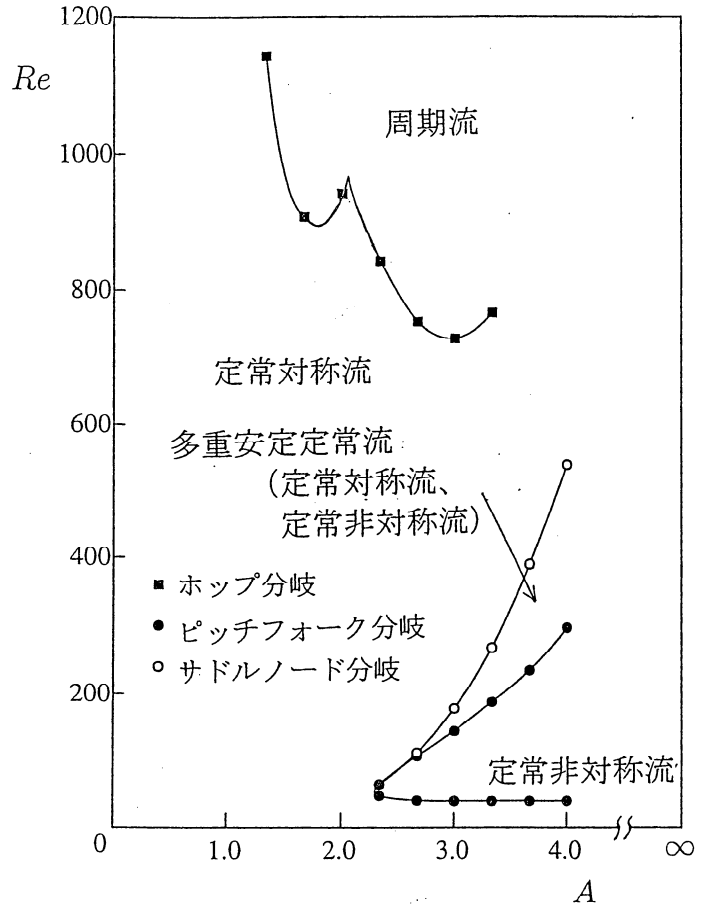


図 5: 中立曲線.

5に示す. 図5を見るとホップ分岐に異なるモードが存在することがわかる. このモードの違いを考察するためにストローハル数を調べる. ストローハル数は, 振動数 f を無次元化したもので, $St = L_0 f / 3hU_{max}$ で定義する. その結果を図6に示す. 図6によると St はモードが変化するところで階段状に変化する. St の階段状の変化は衝突自由剪断層不安定性の特有の性質であり, 急拡大管路においても衝突自由剪断層不安定性が起こっていることがわかった. この不安定モードの変化を攪乱のパターンの変化により確認した.

3.2 安定性理論

シミュレーションにより定常対称流が定常な非対称流になることが分かった. この遷移は定常対称流が不安定になったことが原因と考えられる.

ここでは, 対称流が不安定になる臨界レイノルズ数を線形安定性を用いて調べた. 線形増幅率 σ を求めた結果が図7である. $Re < Re_1$ の時に σ が負なので対称流は安定であるが $Re_1 < Re < Re_2$ では正となり, 対称流は不安定になることが分か

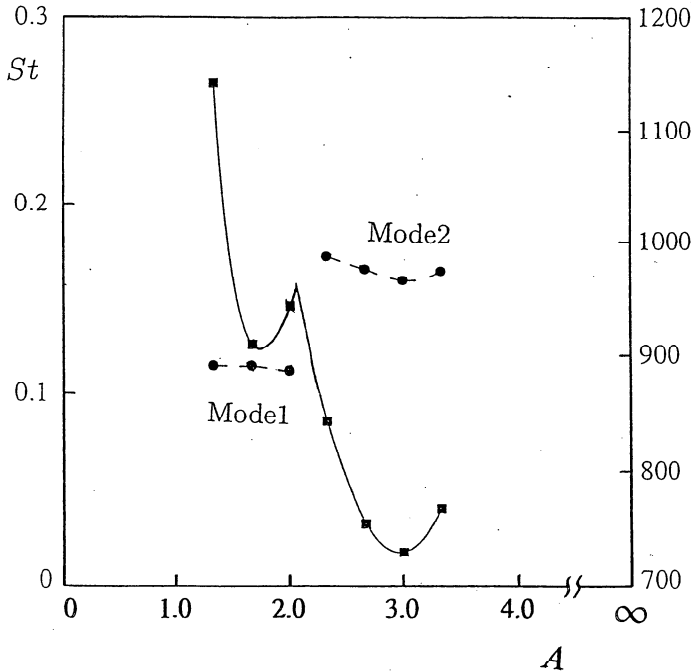


図 6: ストローハル数, ホップ分岐の臨界レイノルズ数 Re_{c3} と A の関係.

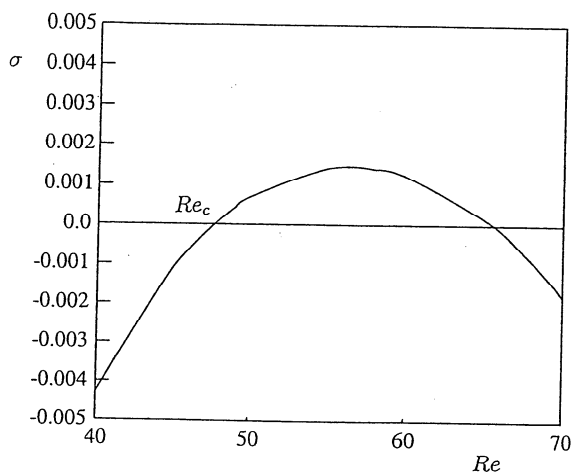


図 7: 対称解に対する線形増幅率 σ

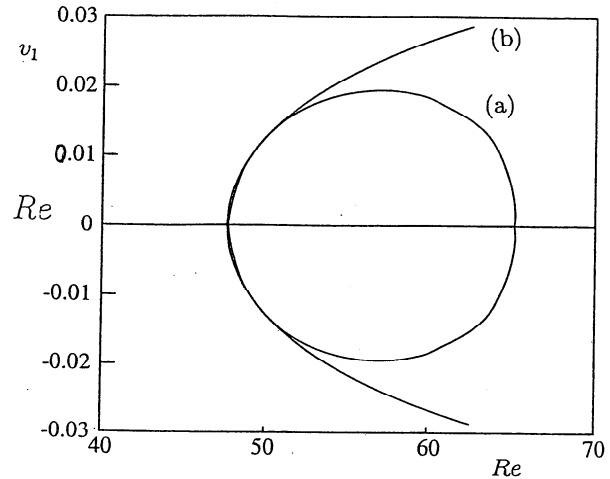


図 8: (a) 数値シミュレーション, (b) 弱非線形安定性理論による v_1 .

る. $Re_2 < Re$ に再び σ が負になり対称解が安定であることが分かる. また, $\sigma = 0$ として得られた臨界レイノルズ数は数値シミュレーションで得られた臨界レイノルズ数 Re_{c1}, Re_{c2} の結果とよく一致している.

さらに弱非線形安定性理論により Re_1 付近での局所的な解の振る舞いを調べた. そこでは解がピッチフォーク分岐しており, 1 自由度の振幅方程式で記述できる. その係数を決定しその結果とシミュレーションの結果を図 8 に示す. 結果は数値シミュレーションの結果とよく一致していることが分かった.

3.3 構造不安定

ここでは管路が非対称性を持つときの解の振る舞いについて調べた. 図 9 にその結果を示す. 完全に対称な管路では $Re = Re_{c1}$ でピッチフォーク分岐が生じていたが, 管路の非対称性によって不完全なピッチフォーク分岐になることが分かった. またそれにより孤立解が存在するようになるが, 非対称性が大きくなると孤立解が消滅することが分かった.

3.4 分岐管路の場合

出口が 2 本ありその幅が入口の半分である管路形状を図 10 に示す. 拡大比 $E = 3$, アスペクト比 $A = 7/3$ とする. 境界条件を両出口での圧力が等しい場合と, 流量が等しい場合の 2 通りについて計算した. 流れの非対称性を調べるた

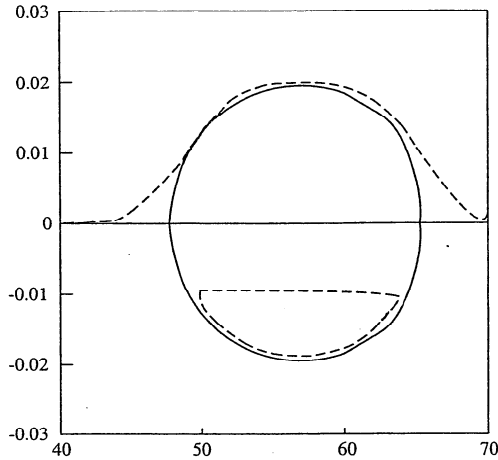


図 9: 管路が非対称性持つ場合の分岐構造の変化

めに $P_1(x, y) = (3.5, 0.0)$ (出口1つの場合とは異なる) での y 方向速度 v_1 を図 11 に示す. どちらの出口境界条件でも1つ出口よりも低い臨界レイノルズ数 $Re_c = 44.4$ で流れは定常対称流から定常非対称流へと遷移した. しかし非対称流から対称流に遷移するとき, 流量が等しい場合は非対称流のブランチは閉じているが, 圧力が等しい場合はブランチは閉じずに対称解に遷移している. つまり, 非対称流から対称流への遷移においてヒステリシスが起きている. また, 流れは対称流から非対称流に遷移しても出口の流量, 圧力ともにほとんど変化しないことがわかった.

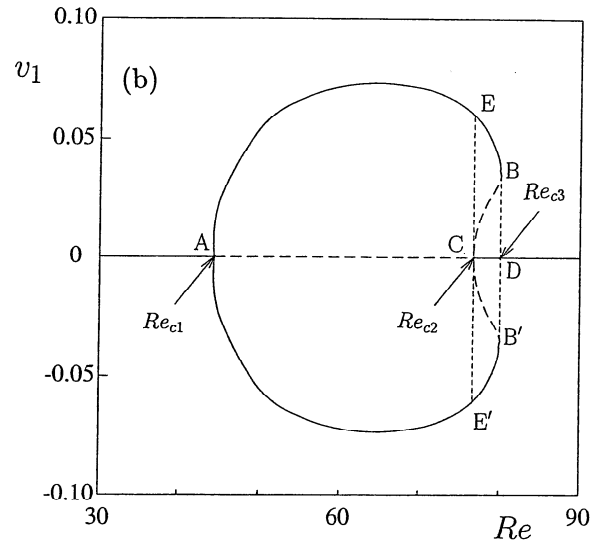
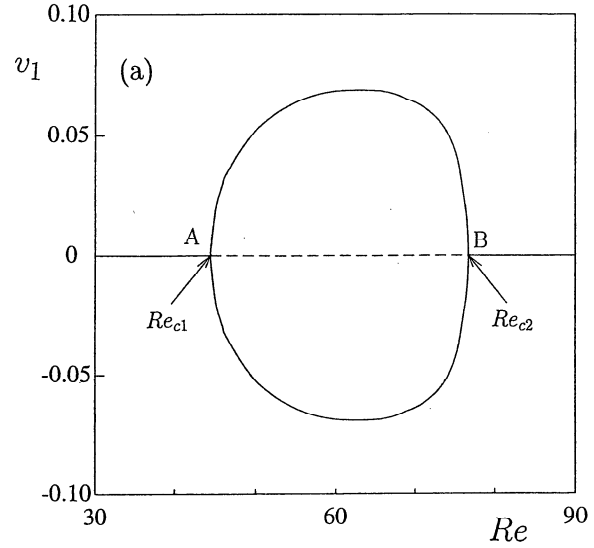


図 11: (a) 出口での流量が等しい場合, (b) 出口での流量が等しい場合.

参考文献

[1] R. M. Fearn, T. Mullin and K.A.Cliffe; Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion, *J. Fluid Mech.*, **211** (1990), 595-608.

[2] J. Mizushima, H. Yamaguchi and H. Okamoto; Stability of flow in a channel with a suddenly expanded part, *Phys. Fluids*, **8**(1996), 2933-2942.

[3] N. Alleborn, K. Naudakumar and K. A. Cliffe; Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion, *J. Fluid Mech.*, **339** (1997), 169-188.

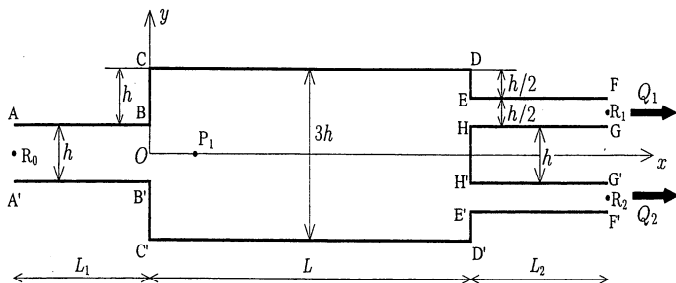


図 10: 分岐管路の形状.