

SOR 法を内部ソルバーに用いた残差切除法について

谷口幸二*1, 菊地一雄*2, 高橋匡康*2, 田村敦宏*3

Residual Cutting Method using SOR for inner solver

by

Koji Taniguchi, Kazuo Kikuchi, Tadayasu Takahashi, Atsuhiko Tamura

ABSTRACT

We have proposed Residual Cutting Method as a high accurate numerical method for partial differential equations. In these reports, we used ADI for inner solver and obtained good results. In this paper, we use SOR for inner solver and research the validity of Residual Cutting Method. We obtain good results that Residual Cutting Method using SOR for inner solver is robust, accurate and fast.

1. はじめに

流体力学における流れ場は偏微分方程式により記述されており、計算流体力学ではこれらの方程式を数値的に解くことで解を求めている。したがって、それらをいかに精度よく、さらには高速に解くかと言うことは、実用上重要な課題である。

従来、これらの計算にはガウス消去法、SOR法、ADI法、共役勾配法などが用いられている。それに対し、筆者らは残差切除法という新たな手法を提案している。^{[1][2]}

これらの報告で、内部ソルバーとしてADI法を用いた手法及びそれによる計算結果を報告しているが、本報告ではより広く使われているSOR法を内部ソルバーとした場合の残差切除法の有効性について調査を行った。

2. 計算結果

本報告では、対象を圧力のポアソン方程式

$$\Delta p = f$$

に限定して計算を行った。ソース項はあらかじめ想定した解により計算した。また、境界条件については全面ノイマン条件としたが、その値についても同様に定めている。

次の2つのケースについて、残差最小化係数の個数及び内部ループ数を変えて計算し、収束までの挙動を調べた。

1) 格子：直方体領域，圧力分布： $p = x^2 + y^2 + z^2$

2) 格子：翼間領域，圧力分布：解析結果の圧力分布

相対誤差 e ，相対残差 ε を

$$e = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j \sum_k (p^m - p^{m-1})^2}{\sum_i \sum_j \sum_k p^{m^2}}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j \sum_k r^2}{\sum_i \sum_j \sum_k f^2}}$$

m ：ステップ数

のように定義し、収束判定は相対誤差を用いて

$$e < 10^{-12}$$

とした。

計算には SGI Maximum Impact(R10000)を使用した。

2.1. 直方体領域

図1に示すような長さ10、幅1、高さ1の直方体を41×41×41の格子点で等間隔に分割し、ポアソン方程式の計算を行った。

図2～図8にその結果を示す。

図2は横軸に残差最小化係数 α の個数を取り、縦軸にSOR法はステップ数、残差切除法は内部SOR法のループ数とステップ数の積、もう1つの縦軸にはcpu timeをとったグラフである。内部SOR法ループ数は10に固定している。 α の個数0はSOR法を表す。また、所定の回数で収束しなかった α の個数0～2は推定値で表している。

*1 (株) ヴァイナス

*2 航空宇宙技術研究所

*3 神戸大学

このグラフから、 α が 4 個以上については大差がないことがわかる。図 3 及び図 4 の収束曲線とあわせると、このケースでは、 α の個数として 5 を選択するのが適当であると判断できる。

図 5 は、縦軸は図 2 と同様で横軸には内部 SOR 法のループ数をとっている。 α の個数は 5 に固定している。所定の回数で収束しなかった内部ループ数 1, 2 については、推定値で表している。

このグラフから収束したケース、特に内部ループ 6 以上

については顕著な差異が見られない。図 6 及び図 7 の収束曲線とあわせると、このケースでは、内部ループ数として 6 を選択するのが適当であると判断できる。

図 8 に収束性に及ぼす SOR 法の緩和係数の影響を示す。横軸は、SOR 法はステップ数、残差削除法は内部 SOR 法のループ数とステップ数の積である。SOR 法と比較し本解法の急速な収束状況が図に現れている。SOR 法の収束状況を考慮すると、残差削除法内部での SOR 法の緩和係数の影響は無視できると判断できる。

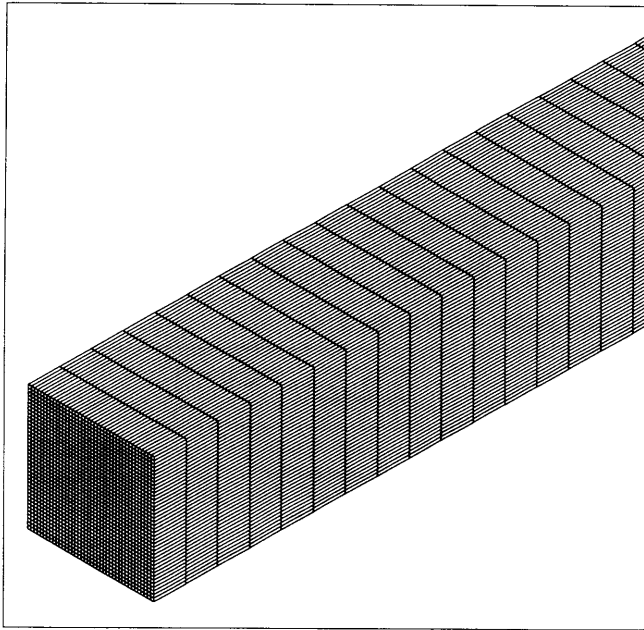


図1 直方体グリッド

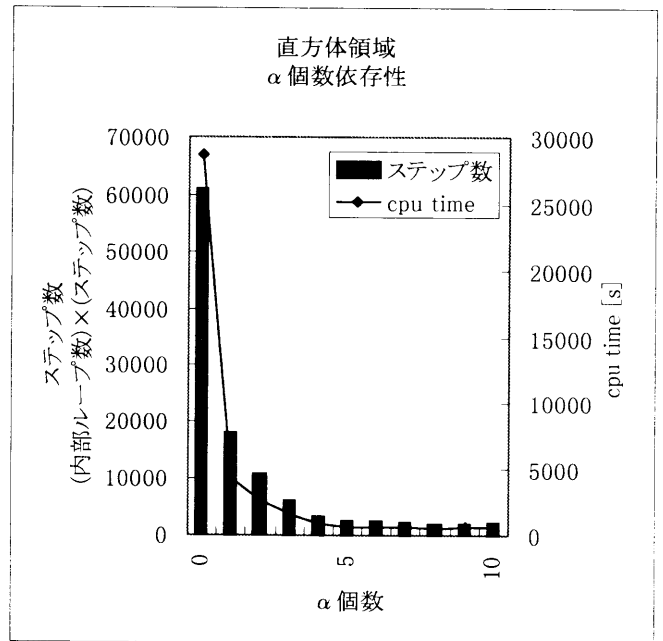


図2 残差最小化係数の個数依存性(1)

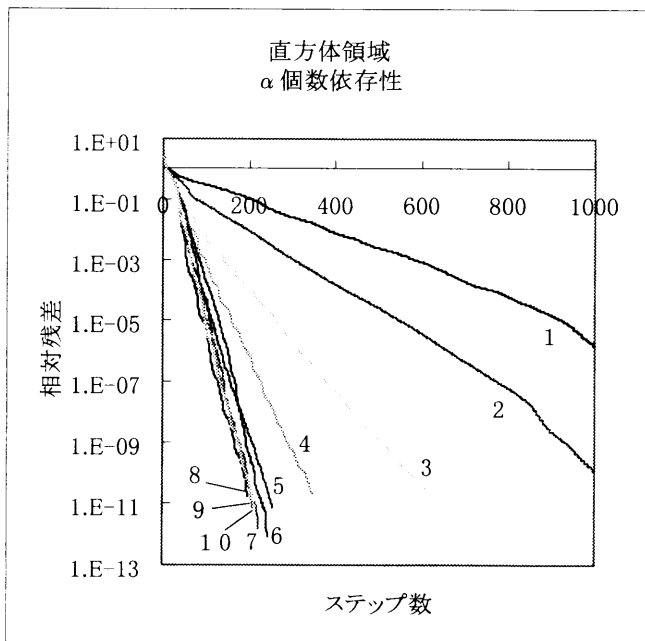


図3 残差最小化係数の個数依存性(2)

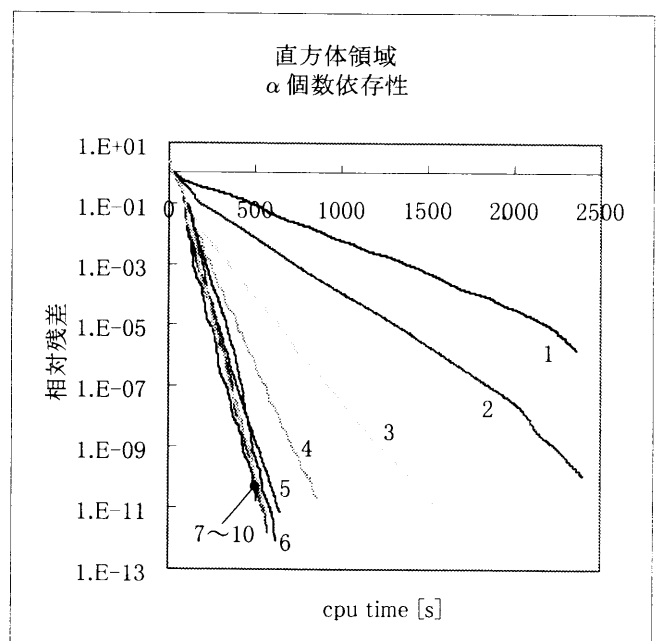


図4 残差最小化係数の個数依存性(3)

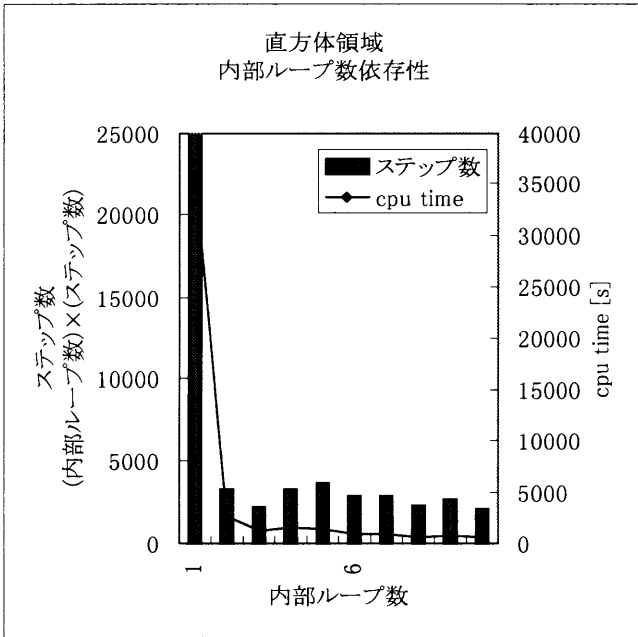


図5 内部SOR法ループ数依存性(1)

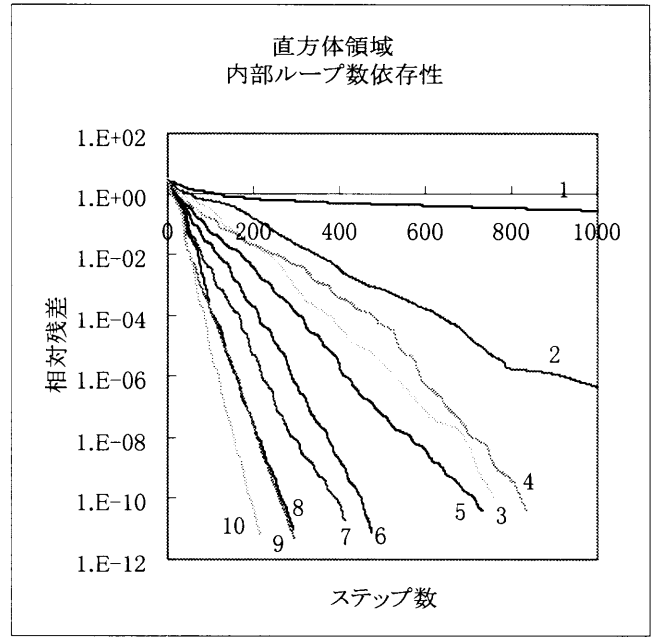


図6 内部SOR法のループ数依存性(2)

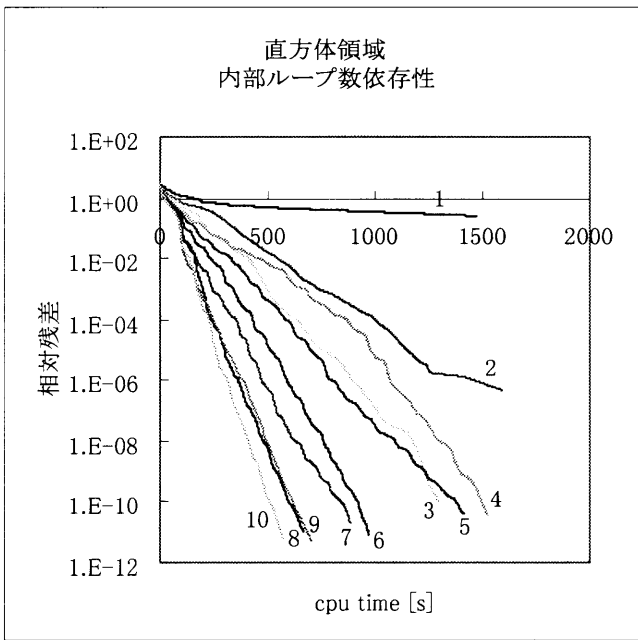


図7 内部SOR法のループ数依存性(2)

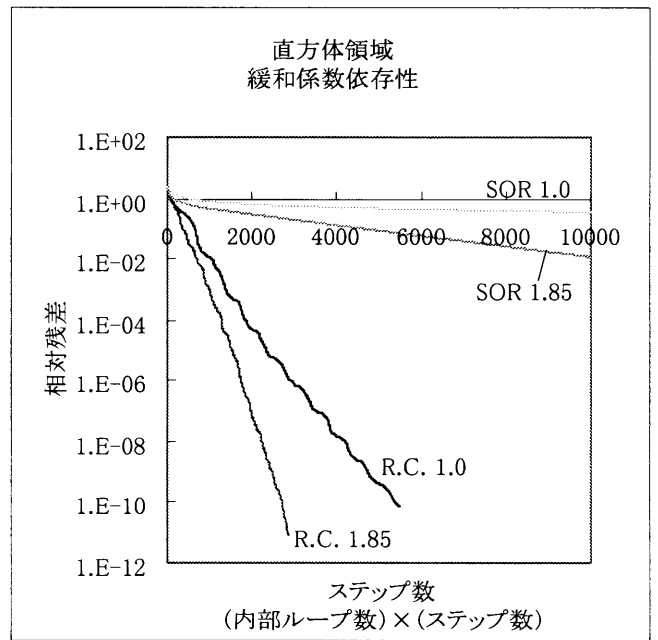


図8 SOR法緩和係数の影響

2.2. 翼間領域

図 10に示す圧力分布をした図 9の翼間領域について圧力のポアソン方程式を計算した。格子点数は 101×47×47 である。

その結果を図 11～図 17に示す。

図 11は、直方体の図 2と同じ軸をとり α の個数が収束に及ぼす影響を表したグラフである。内部 SOR 法ループ数は 10 に固定している。所定の回数で収束しなかった α の個数 0～3 は推定値で表している。

このグラフから、 α が 6 個以上については、特に cpu time に差が見られないことがわかる。図 12及び図 13の収束曲線もあわせると、このケースでは α の個数として 6 を選択するのが適当であると判断できる。

図 14は、直方体の図 5と同じ軸をとり内部 SOR 法のループ数が収束に及ぼす影響を表したグラフである。 α の個数は 6 に固定している。また、所定の反復回数で収束しなかった内部ループ数 1～6 については推定値で表している。

このグラフから内部ループ数が 7 のところで、一旦 cpu time が減っていることが見て取れる。図 15, 図 16の収束曲線からも、このケースでは、内部ループ数を 7 とするのが適当であると判断できる。

図 17は、収束性に及ぼす SOR 法の緩和係数の影響を表したグラフである。横軸は直方体の図 8と同様である。残差切除法では、内部の SOR 法の緩和係数の影響は無視できると判断できる。また、図に SOR 法と比較し本解法の優れた収束性が現れている。

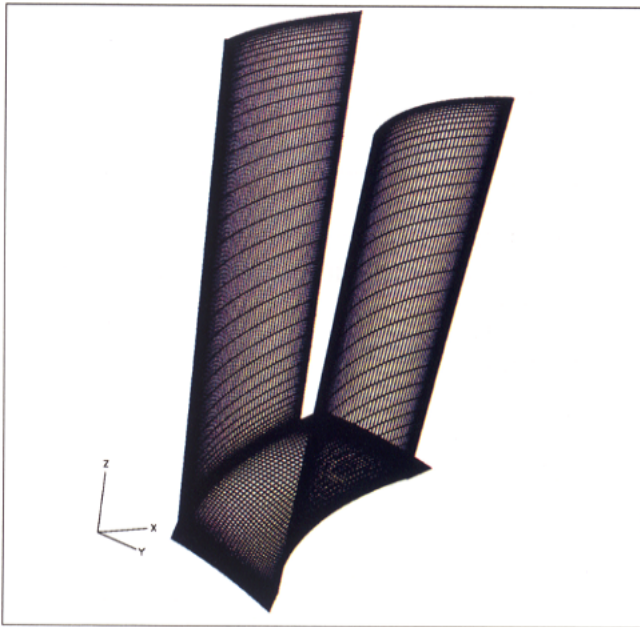


図9 翼間グリッド

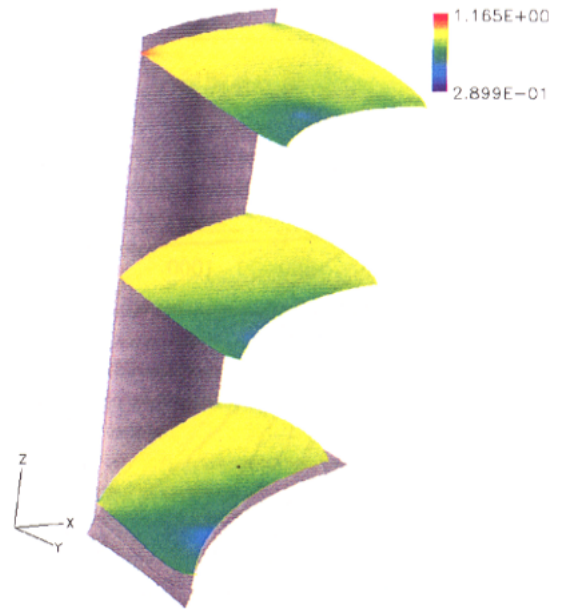


図10 圧力分布

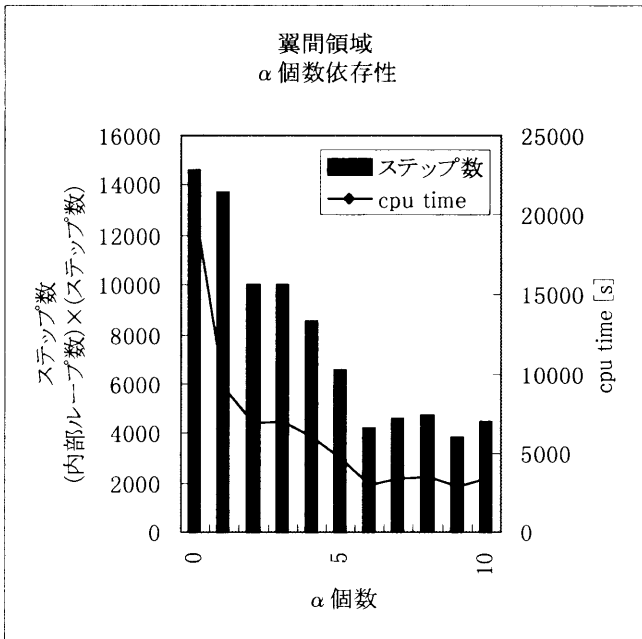


図11 残差最小化係数の個数依存性(1)

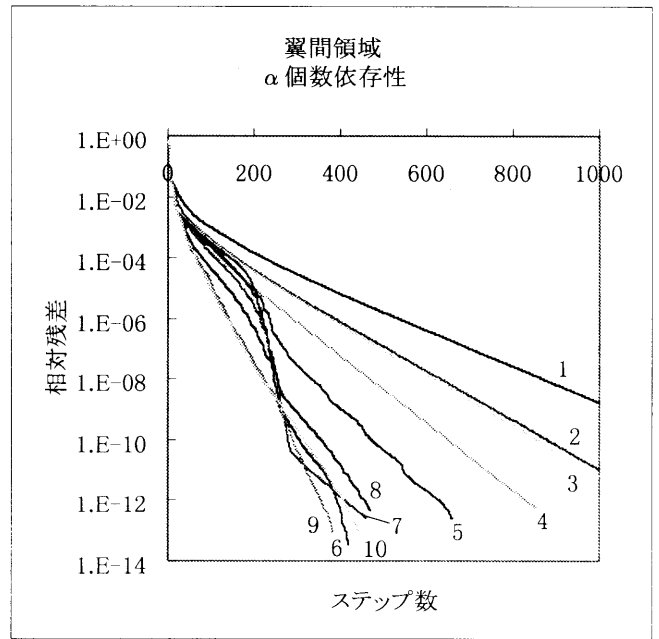


図12 残差最小化係数の個数依存性(2)

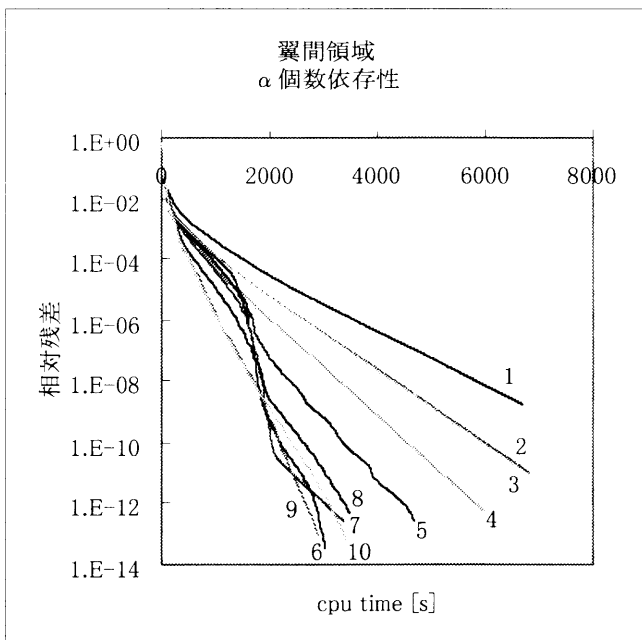


図13 残差最小化係数の個数依存性(3)

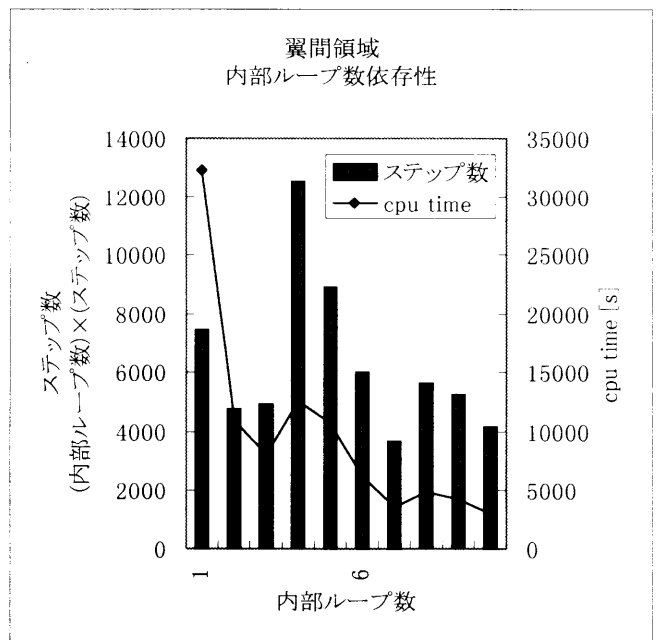


図14 内部SOR法ループ数依存性(1)

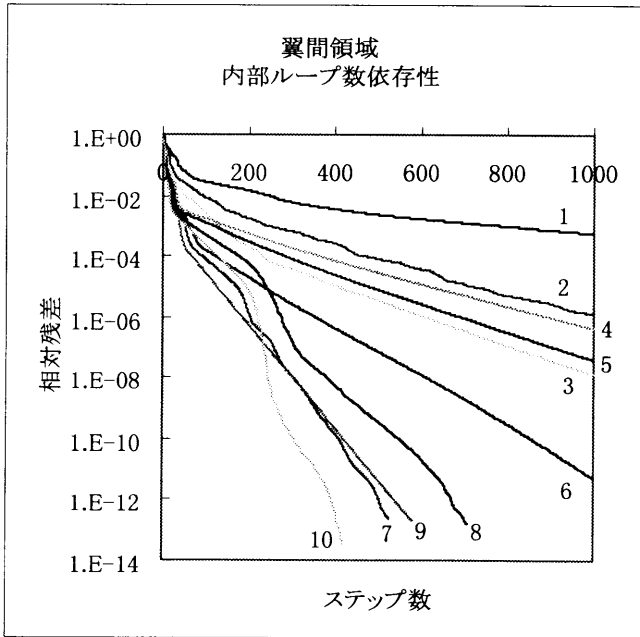


図15 内部SOR法ループ数依存性(2)

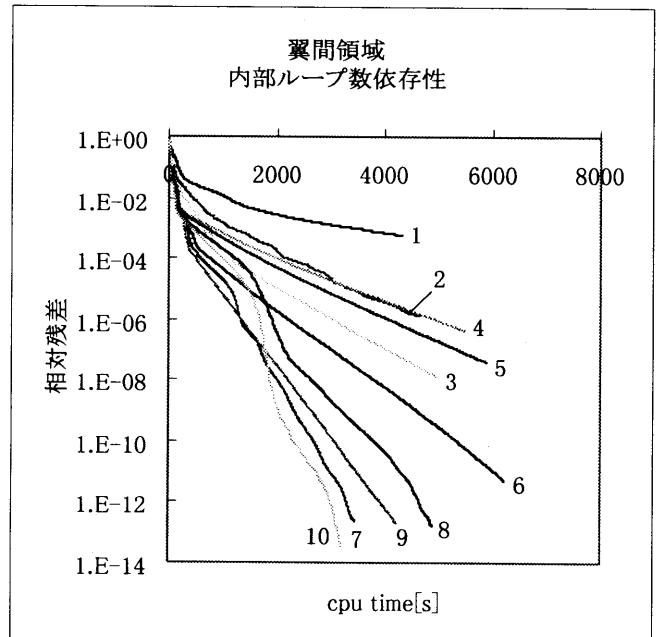


図16 内部SOR法ループ数依存性(3)

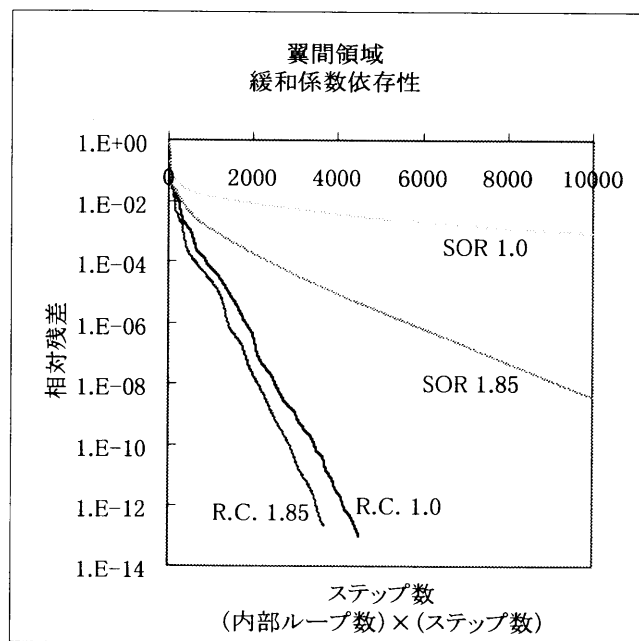


図17 SOR法緩和係数の影響

3. まとめ

本計算により、次のような結論が得られた。

- SOR法を内部ソルバーとした場合も残差切除法は安定に動作する。
- SOR法と比較し、残差切除法の優位性/有効性を確認できた。
- 残差切除法を適用することで、緩和係数に関し最適値を意識する必要がなかった。
- 内部ループ数 $N=6\sim7$ 、 α の個数 $L=5\sim6$ が最適とな

り、パラメータ設定に関してADI法を用いた場合とほぼ同等の結果となった。

参考文献

- [1] 田村, 菊地, 高橋: 機械学会論文集, 62-604, B編(1996-12), 4076
- [2] A. Tamura, K. Kikuchi, T. Takahashi: Journal of Computational Physics 137,247-264(1997)