

円管流の非線形安定計算

伊藤 信毅* 門田 宏**

Nonlinear Stability Calculations of Pipe Flow

by

Nobutake ITOH

National Aerospace Laboratory

Hiroshi KADOTA

The University of Electro-Communications

ABSTRACT

Fully nonlinear computations with an iterative method are made to investigate stability of pipe Poiseuille flow to axisymmetric and non-axisymmetric disturbances. Numerical results indicate that the weakly nonlinear theory cannot predict nonlinear development of disturbances, and that there is no equilibrium amplitude of monochromatic-type disturbances in the wavenumber and Reynolds number range concerned.

Keywords: pipe flow, nonlinear stability

1. はじめに

円管内のポアズイユ層流に対して線形安定計算を行うと、微小攪乱は常に減衰し、流れが安定であることを示す¹⁻⁴⁾。そこで、実験的に観測される乱流への遷移は、何等かの原因で有限な振幅を持つ攪乱が導入されて、非線形発達するためであろうと考えられる。しかし今までに行われた弱い非線形安定理論の結果はまだ満足すべき説明を与えていない⁵⁻⁷⁾。本研究では軸対称と非軸対称攪乱に対して、反復法を用いた強い非線形安定計算を行う。

2. 攪乱方程式

円管の半径と定常層流の最大流速を用いて諸量を無次元化する。円柱座標系を (r, θ, x) 、速度成分を $(w, v, U+u)$ と書き、 $U=1-r^2$ は基本流、

u, v, w は攪乱速度を表わすものとする。非圧縮流の運動方程式にこれらを代入し、基本流自身が方程式を満たすことを考慮すると攪乱に対する方程式が得られる。攪乱をフーリエ級数

$$v = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(r, t) \exp\{ik(\alpha x + \beta \theta)\} \quad (1)$$

に展開すると、各フーリエ成分を支配する方程式と境界条件は次の形に表わされる⁸⁾。

$$\left(L_k - \frac{\partial}{\partial t} M_k\right) v_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} N[v_{k-l}, v_l], \quad (2)$$

$$|v_k(0)| < \infty, \quad v_k(1) = 0 \quad (3)$$

ここで、 L_k, M_k は線形作用素、 N は非線形項である。

3. 線形および弱い非線形安定計算の結果

線形安定理論の固有値問題を解くと、複素振動数 ω の列が波数 α, β とレイノルズ数 R の関数として定まる。 $\beta=0$ の場合が軸対称攪乱、 $\beta \neq 0$ の

* 航空宇宙技術研究所

** 電気通信大学

ときが非軸対称攪乱である。図1には $\beta=0$ の場合について、位相速度 $c_r = \omega_r / \alpha$ と増幅率 ω_i の α に対する変化を示した。図中の番号は $\alpha=0$ において ω_i の大きい方から固有値に順番を付けたものである。すべての非軸対称攪乱もこの図と同様に常に負の増幅率をもち、流れの安定を示している。

線形解が中立安定曲線を持たない場合の弱い非線形安定理論は false problem method に基づいて定式化される。図2は Reynolds & Potterの方法⁹⁾ (以下R & P法)と Itohの方法⁶⁾ から得られるランダウ定数を比較した一例である。 λ_i が正の値をとれば平衡振幅の存在を予測することになる

が、結果は定式化に依存して互に逆の符号を示している。ランダウ定数は攪乱の増幅率を振幅展開したときの一次の係数であるから、振幅の大きい所で増幅率がどうなるかについて決定的なことは言えない。

4. 反復法による強い非線形安定計算

非線形攪乱方程式をチェビシェフ級数展開と反復法に基づく直接解法によって解く。攪乱速度の時間依存性は弱い非線形理論のR & P法とItoh法をそのまま踏襲した。その結果、一般に複素振

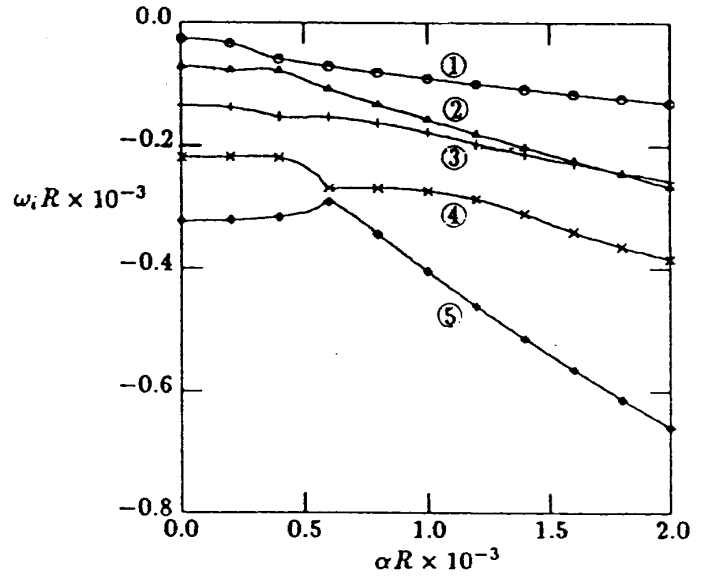
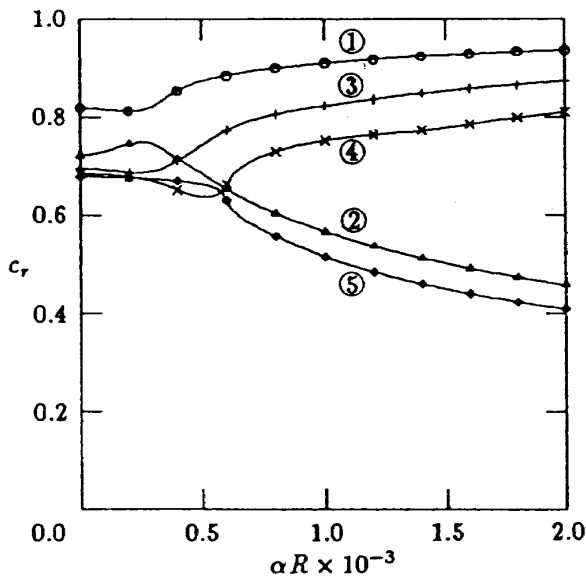
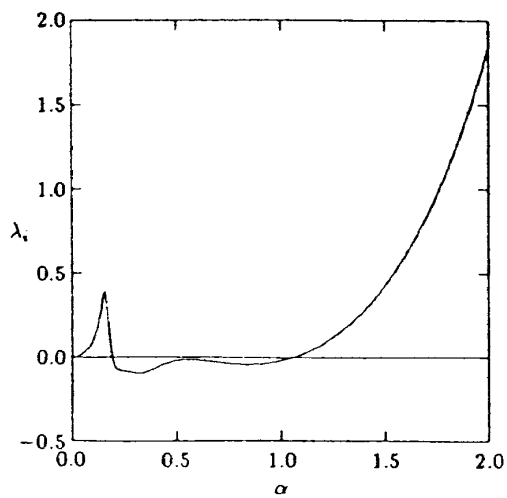
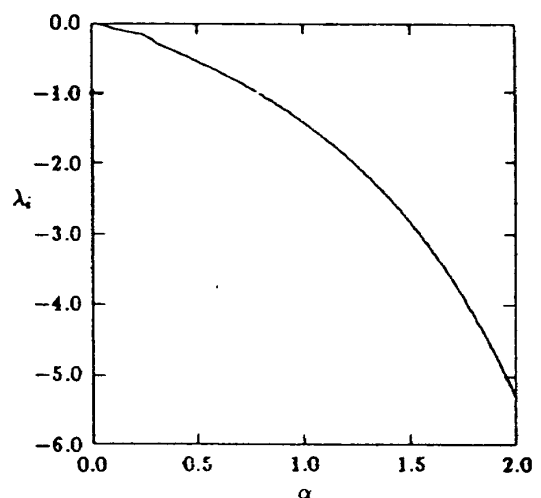


図1 $\beta=0$ の場合の位相速度 c_r と増幅率 ω_i

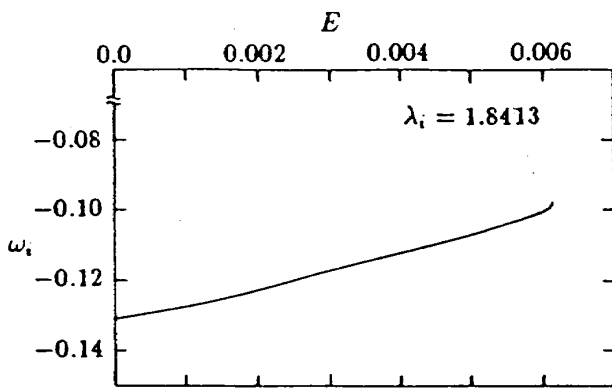


(a) R & P 法

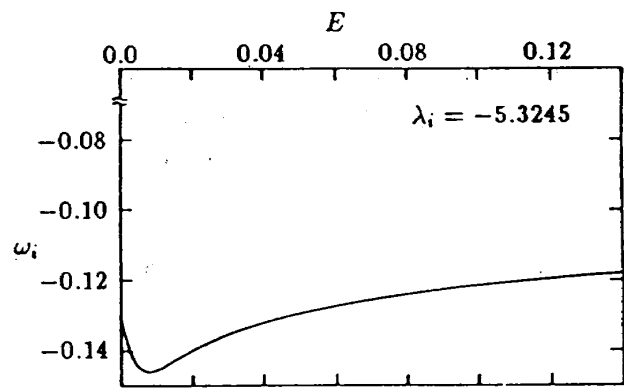


(b) Itoh 法

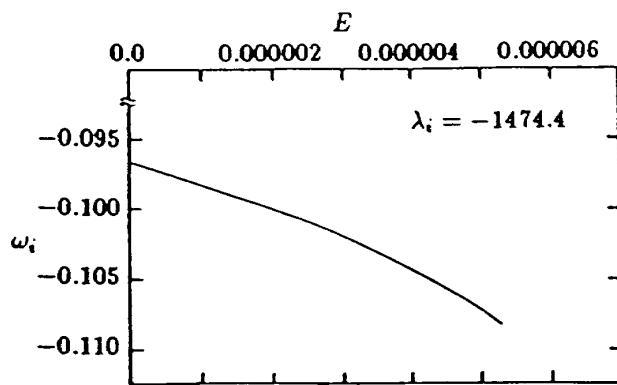
図2 $R=1000, \beta=0$: 第1固有値の場合のランダウ定数 λ_i



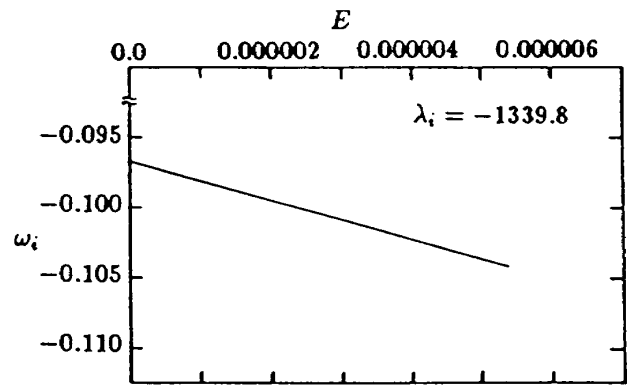
(a) R & P 法



(b) Itoh 法

図3 $R=1000$, $\beta=0$: 第1固有値, $\alpha=2.0$ の場合の非線形増幅率 ω_i 

(a)



(b)

図4 $R=1000$, $\beta=1$: 第1固有値, $\alpha=2.0$ の場合の非線形増幅率 ω_i

動数 ω が攪乱の大きさに依存することになり、それを調整して ω が実数値を取るよう導くことができれば平衡状態が得られる。

実際の計算ではフーリエ級数を4倍高調波まで、チェビシェフ級数を50項まで採った。非線形増幅率 ω_i の攪乱強度 $E = |u_1'(1)|^2$ に対する変化を図3と図4に示した。弱い非線形理論から得られるランダウ定数 λ_i は $E=0$ における曲線の傾きに対応している。図3(a)では E が0.006を越えると解が発散するが、これはR & P法の定式化が特異点をもったためである⁶⁾。一方(b)では E を大きくしてゆくと ω_i が増加し始めるが、 $\omega_i=0$ にまでは達しない。図4は非軸対称攪乱に対するもので、しかも全攪乱中で線形増幅率が最も大きい値を取る場合であるが、 E を大きくすると ω_i はむしろ減少する。このような傾向を見るとランダウ定数の符号のみで平衡振幅が存在するかないかを予測することはほとんど不可能であると言える。結局、

今回調べた範囲では平衡振幅を見つけることはできなかった。

5. むすび

円管ポアズイユ流に対して反復法を用いた強い非線形安定計算を行った。本研究では単色波型攪乱のみ扱ったが、調べた範囲では軸対称攪乱に対しても非軸対称攪乱に対しても非線形不安定のための敷居振幅は得られなかった。円管流の不安定現象を説明するには、複数の波動系の非線形干渉を考慮した安定解析が必要なように思われる。

参考文献

- 1) Lessen, M., Sadler, S. G. & Liu, T. Y. (1968) Phys. Fluids 11, 1404-1409.
- 2) Davey, A. & Draizin, P. G. (1969) J. Fluid Mech. 36, 209-218.
- 3) Salwin, H. & Grosch, C. E. (1972) J. Fluid

- Mech. 54, 93-112.
- 4) Salwin, H., Cotton, F. W. & Grosch, C. E. (1980) J. Fluid Mech. 98, 273-284.
 - 5) Davey, A. & Nguyen, H. P. F. (1971) J. Fluid Mech. 45, 701-720.
 - 6) Itoh, N. (1977) J. Fluid Mech. 82, 469-479.
 - 7) Davey, A. (1978) J. Fluid Mech. 86, 695-703.
 - 8) 伊藤信毅(1988)数理解析研究所講究録 661, 1-12.
 - 9) Reynolds, W. C. & Potter, M. C. (1967) J. Fluid Mech. 27, 465-492.