11

長方形管内の層流の非線形不安定性と乱流2次流の発生

巽　友正*　吉村卓弘**

Nonlinear Instability of a Laminar Flow in a Rectangular Duct and Generation of the Turbulent Secondary Flow

by

Tomomasa TATSUMI
Kyoto Institute of Technology
Takahiro YOSHIMURA
Information System Developments, Hitachi Ltd.

ABSTRACT

The generation of the turbulent secondary flow in a rectangular duct is investigated in the framework of hydrodynamical nonlinear instability of the corresponding laminar flow. The secondary flow is obtained as an equilibrium state of growing unstable disturbances.

Keywords: turbulent secondary flow, hydrodynamical stability, duct flow

1. 長方形管における乱流２次流

円形でない断面の直管を通る乱流の速度分布は，層流の場合とかなり異なり，その等速度線が境界の隅に向かって突き出た形になっていることは，Nikuradse (1926) の測定結果によって知られていた。このような状況は，流れの断面内で中心から隅に向かう流れと，それを補う中心に向かう流れとを想定することによって説明できることが，Prandtl (1927) によって示唆され，この断面流は彼によって「乱流２次流」と名付けられた。

「乱流２次流」は，立体的に見れば大規模な縦渦であり，いわゆる乱流の秩序構造の一つに他ならない。このような秩序構造を含む乱流の統計的性質については，これまで各種の乱流モデルを用いた理論が行われてきたが，その結果はパラメータ依存的であり，半経験的理論の域を出なかった (Bradshaw (1987))。

一方，この「２次流」を表わす縦渦は，それが乱流状態においてのみ存在することから，管軸方向の１次流の不安定性によって発生したものと考えられる。そうだとすれば，「２次流」の理論的取扱いには，まず，１次流である管軸方向の層流の安定特性を解析し，ついで不安定な層流における撹乱の成長の結果として２次流を説明するのが，順当な筋道であるかと思われる（谷 (1990)）。

われわれは，この方針のもとに，まず長方形管内の１次流の流体力学的安定性を解析し，流れは，管の断面のアスペクト比Ａが3.2以上の場合には不安定であるが，それ以下では安定であることを見出した (Tatsumi & Yoshimura (1990, 1991))。ついで，昨年の本研究会において，撹乱の非線形増幅過程について予備的考察を行った（巽および吉村 (1992)）。

本論文では，その続報として，少数個のFourier成分をとった場合の撹乱の増幅過程について報告する。

* 京都工芸繊維大学
** 日立製作所、情報システム開発本部

2. 撹乱の非線形増幅

いま，初期の微少な撹乱として，管軸方向に波数αの正弦波撹乱をとるとすれば，この撹乱の成長とともに，方程式の非線形性によって高波数成分が発生するから，撹乱は一般に Fourier 級数展開，

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{u}_n(y,z;t)\exp(in\alpha x) \qquad (1)$$

の形に表わされる。ただし，ここでは，座標$\boldsymbol{x}=(x,y,z)$のx軸は管軸方向に，y,z軸はそれぞれ長方形断面の辺に垂直にとるものとする。また，すべての変数は，長方形の短辺の長さの半分であるLと，1次流の管軸上での速度U_0とを用いて無次元化したものを用いる。係数関数$\boldsymbol{u}_n$は一般に複素数で，関係式，

$$\boldsymbol{u}_{-n}=\boldsymbol{u}_n^* \qquad (2)$$

を満たさなければならない。ここに，*は共役複素数を表わす。

Fourier 級数(1)の全波数成分を取り扱うことは現実には不可能なので，ここでは級数を有限数Nで打ち切り，$n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots\pm N$，の成分だけを考慮することとする。この取扱いは，もちろん，Nの値が大きいほど良い近似を与えるが，ここでは，定性的に正しい結果を得ることだけを期待して，$N=1$，あるいは，2の場合を考察する。

波数αの初期撹乱は，その振幅aが極めて小さいとき，時間とともに$\exp(\sigma t)$のように増大($\sigma>0$)または減衰($\sigma<0$)するが，その増大・減衰率σの値は，線形安定理論によって，1次流のアスペクト比Aと Reynolds 数$R=U_0L/\nu$の値に応じて決定される（Tatsumi & Yoshimura (1990, 1991)，巽および吉村 (1992)）。

これに対して振幅aがある程度大きい場合には初期撹乱は，高波数成分の発生によってエネルギーを失うために，一般に線形の場合に比べてより減衰的となり，しかも，この非線形減衰は撹乱の振幅の増大とともに著しくなる。このため，初期撹乱が増大的($\sigma>0$)である場合，撹乱の線形増大と非線形減衰とが釣り合って，ある平衡状態が実現する。このとき，撹乱の平衡振幅は時間的に定常となり，その0波数成分$\boldsymbol{u}_0$は，x軸方向に変化のない縦渦を表わす。そして，その$\boldsymbol{u}_0$の断面内の速度場が乱流2次流を与えることは言うまでもない。

一方，初期撹乱が減衰的である場合，その線形減衰は，一般に非線形減衰によってさらに加重される。しかし，初期振幅aがある臨界値を超えた場合，非線形相互作用が減衰的から増大的に転化して，線形減衰と非線形増大とが釣り合って新たな平衡状態が実現することが起こり得る。この場合もまた，平衡撹乱の0波数成分$\boldsymbol{u}_0$が，乱流2次流を与えることになる。

3. 2波数系 ($N=1$) の場合

$N=2$の場合，展開(1)において$n=\pm1$および0の3成分を考慮することになるが，関係式(2)により，$n=1$および0の2成分だけを取り扱えばよいことになる。このとき，撹乱を支配する非線形の運動方程式に展開(1)を代入して，当該の波数成分だけを考慮すれば，係数関数$\boldsymbol{u}_1$および$\boldsymbol{u}_0$に対する閉じた方程式系が得られるが，これは，さらに連続方程式を考慮すれば，v_1，w_1，u_0，およびψ_0に対する方程式系の形に書くことができる。ここに，ψ_0は，速度成分v_0およびw_0に対する流れの関数を表わす。

この方程式系に各係数関数の Legendre 展開を代入し，Legendre 多項式の直交性を用いて展開係数に対する発展方程式を作れば，この方程式を数値的に解くことによって，各係数関数の時間的発展を追跡することができる。

この場合，撹乱の状態を表わす最も適当な指標は，基本波の運動エネルギー，

$$E_1=|\boldsymbol{u}_1|^2/2 \qquad (3)$$

であろう。ある与えられた管のアスペクト比Aと，1次流の Reynolds 数Rのもとに，撹乱の時間的増大と減衰は，端的にそれぞれE_1の増大と減少によって表わされ，平衡状態の実現は，E_1の一定値への漸近によって示される。また，撹乱の臨界振幅a_0は，対応するE_1の初期値から求められる。

このような方針のもとに，アスペクト比は$A=$

1～5，Reynolds 数は$R=10^3\sim10^4$，基本波数は$\alpha=1\sim10$の範囲で，E_1のさまざまな初期値から出発した時間的変化の模様を調べた。その結果，例えば，$A=1$，$R=1000$，$\alpha=1$の場合に，臨界振幅は$a_c=0.015$のように求められ，他のA，Rおよびαの値の組に対しても，それぞれ臨界振幅が求まった。しかし，臨界振幅を超えた初期振幅に対しては，E_1はいずれも時間とともに単純に増大して，一定値への漸近は見られなかった。この点は 2 波数系 ($N=1$) の本質的な限界であり，平衡状態を得るためには，最小限 3 波数系 ($N=2$) を取り扱わなければならないように思われる。

4.　3 波数系 ($N=2$) の場合

$N=2$ の場合は，上の考察に従って，v_1，w_1，u_0，ψ_0，v_2，およびw_2に対する発展方程式を数値的に解いて，それぞれの時間的発展を追跡すればよいことになる。ここでも，重要な指標は基本波のエネルギーE_1であり，この量の時間的発展を調べることによって，撹乱の平衡状態および臨界振幅を見いだすことができる。この場合は，倍波数成分$\boldsymbol{u}_2$ (v_2，w_2) が基本波よりも大きな減衰率をもつため，$N=1$ の場合に比べて平衡状態の存在がより明確であると考えられる。ただ，この場合，計算プログラムが$N=1$ の場合に比べてより複雑になり，計算時間も長くなるため，まだ決定的な結果を得るに至っていない。具体的結果の報告は次の機会に譲ることとしたい。

参　考　文　献

Bradshaw, P. (1987) : Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 53-74.

Nikuradse, J. (1926) : Forsch. Ver. deuitsch. Ing. 281, pp.13-14.

Prandtl, L. (1927) : Verh. 2 intern. Kongr. tech. Mech. Zürich. 1926, pp.70-74.

谷　一郎(1990)：航空宇宙技術研究所特別資料，SP-11, pp.41-42.

Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (1990) : J. Fluid Mech. **212**, 437-449.

Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (1991) : Turbulence and Coherent Structures, eds. O. Metais & M. Lesieur, Klewer Acad. Publ. pp.267-281.

巽友正および吉村卓弘(1992)：航空宇宙技術研究所特別資料，SP-13, pp.57-61.