

変形を伴う気泡回りの流れの数値解析

管野 実* 石井 隆次** 森岡 茂樹**

Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flow Around a Bubble

by

Minoru SUGANO

Toyota Motor Corporation, Co., Ltd.

Ryuji ISHII and Shigeki MORIOKA

Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University

ABSTRACT

A numerical simulation of flows around a deformable gas bubble rising through an incompressible viscous fluid is carried out on a supercomputer Fujitsu VP-2600 at Data Processing Center of Kyoto University. The solution algorithm is a modified MAC method. For the grid generation, an orthogonal mapping proposed by Ryskin and Leal is applied. The numerical results are compared with Ryskin and Leal's results and previous experiments. It will be shown that a good agreement is obtained between them.

1. はじめに

液体中を気泡が上昇する現象は、自然界や工学の様々な分野で見られる現象である。液体中の一個の気泡の運動は、それ自身流体力学的に興味ある問題であるだけでなく、液体・気体二相系の流れの素過程としても重要である。従ってこの問題は「気泡力学」として古くから研究されている。理論的解析では、気泡形状が球形からのずれが小さい場合に研究がなされているが、気泡の変形が大きいばあいについてはほとんど取り扱われてい

ない。これは問題の非線形性に起因する数学的困難さのためである。本研究では変形を伴う気泡の運動を数値的に解析する。計算により得られた結果はまずRyskin & Lealらの数値結果及びHnat & Backmasterと Bhaga & Weberらの実験とも詳細な比較がなされる。次に気泡形状、気泡回りの流体の速度場、後流領域、気泡の抗力係数が、レイノルズ数、ウエーバー数、気泡平均半径と円筒半径との比にどのように依存するかを明らかにする。

2. 解析方法

* トヨタ自動車株式会社

** 京都大学工学部航空工学科

ここでは有限半径（極限として無限大半径の場合を含む）の垂直円筒内の非圧縮性・粘性流体中

を重力の効果により、変形あるいは後流渦を伴って、上昇する一個の気泡およびその回りの流体の運動を、定常・軸対称性を仮定して解析する。気泡の変形に伴い物体適合座標を Ryskin & Leal^{1, 2)}の方法で構成し、変形MAC法を用いて数値解析を行う。計算手法は次のようである。

- (1) 任意形状の気泡回りに物体適合座標を発生させる。このとき、少なくとも気泡表面近傍では座標系には直交性を持たせる。
- (2) 気泡形状を固定して、気泡回りの流体の流れ場を解く。気泡面では、法線応力条件以外の境界条件は全て満足させる。
- (3) 計算結果が気泡面の全ての位置で法線応力条件が満足されているかをチェックする。もし満足されていなければこの段階で計算は終了する。
- (4) 法線応力条件が満足されていない場合は、各位置でそのズレの大きさに比例して気泡面の位置を修正し(1)に戻る。このとき気泡体積は一定に保たれるように気泡面の位置の修正量の全体をコントロールする。

基礎方程式の離散化には、中心差分が用いられ空間座標にはレギュラーメッシュを採用した。スキームとしてはMAC法が適用され、運動方程式の時間積分にはオイラーの陰解法が、圧力場の計算にはSOR法が用いられた。

3. 基礎方程式

3-i 座標系の方程式

物理空間の円筒座標 (x, y, ϕ) を単位球に関する鏡像により、補助座標 (X, Y, ϕ) に変換する。このとき両座標間には次の関係がある。

$$x = X/(X^2 + Y^2), \quad y = Y/(X^2 + Y^2) \quad (1)$$

次に補助座標 (X, Y, ϕ) を計算座標(物体適合座標) (ξ, η, ϕ) と関係づけるための共変ラプラス方程式をRyskin等に従って次で与える^{1, 2, 3)}。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial X}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(f \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (3)$$

ここに $f = H_x/H_c$ は歪み関数と呼ばれるもので

$$H_c^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 \quad (4)$$

$$H_x^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^2$$

で定義される。上の変換方程式で、 $f=1$ とする等角写像の関係を与える。円筒座標の物理領域は計算面 (ξ, η) では $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ となる。補助座標 (X, Y) に対する境界条件は

$$\eta=0 \text{ 及び } \eta=1 \text{ で}$$

$$\partial X / \partial \eta = Y = 0 \quad (5)$$

$$\xi=1 \text{ で}$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 = H_c \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) = 0$$

$$\xi=0 \text{ で}$$

$$X = X(\eta), \quad Y = Y(\eta) \quad (7)$$

3-2 流れ場の方程式

非圧縮性・粘性流体の流れ場を計算するための無次元化された方程式はMAC法では次のように与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{2}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (8)$$

$$\Delta p = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{\delta t} \quad (9)$$

$$p = p_a - \frac{a g}{U^2} x \quad (10)$$

ここに a は気泡の半径、 g は重力の加速度、 p_a は流体の運動によりもたらされる圧力である。

境界条件は

対称軸上 $\eta=0$ 及び $\eta=1$ で

$$v = \partial u / \partial \xi = \partial p / \partial \xi = 0 \quad (11)$$

円筒壁上 $\xi=0$ では

$$u=1, \quad v=0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (13)$$

$$+ \frac{2}{Re} \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta v - \frac{1}{yJ} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (14)$$

ここに $J = \partial(x, y) / \partial(\xi, \eta)$ 。次に気泡表面($\xi=1$)では気泡面に垂直及び平行な速度成分をそれぞれ u_n, u_s とすると

$$u_{\xi} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{u_{\eta}^2}{h_{\eta}} \frac{\partial h_{\eta}}{\partial \xi} - \frac{4}{Re} \frac{h_{\xi}}{y h_{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y u_{\eta}}{h_{\xi} h_{\eta}} \frac{\partial h_{\eta}}{\partial \xi} \right) \tag{16}$$

$$\tau_{\xi\eta} = 0 \tag{17}$$

$$\tau_{\xi\xi} - \frac{2}{We} (\kappa(\eta) + \kappa(\phi)) = 0 \tag{18}$$

ここに κ は気泡面の曲率で

$$\kappa(\eta) = \frac{1}{h_{\xi} h_{\eta}} \frac{\partial h_{\eta}}{\partial \xi} \tag{19}$$

$$\kappa(\phi) = \frac{1}{y h_{\xi}} \frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{20}$$

また We はウエーバー数で液体の表面張力 γ に対して

$$We = \frac{2\rho aU^2}{\gamma} \tag{21}$$

で定義される。

最後に物体適合座標 (ξ, η) の修正方法について述べる。一般に法線応力条件(18)は仮定された気泡形状に対しては満足されない。そのため計算手法(4)の段階で気泡表面の修正とそれに対応した座標系の再構成が必要になる。そのため歪み関数 H_{ξ} あるいは h_{ξ} の修正を行う。ここに

$$H_{\xi} = |F'| h_{\xi}, \quad F' = [(\partial X/\partial \xi)^2 + (\partial Y/\partial \xi)^2]^{1/2} \tag{22}$$

例えばここでは

$$h_{\xi}^{n+1} = \frac{a_{\eta}^n}{a} h_{\xi}^n + C \left[\tau_{\xi\xi} - \frac{2}{We} (\kappa(\eta) + \kappa(\phi)) \right] \tag{23}$$

とした。Cは適当な正の定数、 a_{η} は平均気泡半径で、nは反復回数を表している。右辺第一項の係数 a_{η}^n/a は気泡の体積を一定に保つためのコントロールパラメータである。

4. 計算結果

計算条件として必要なパラメータは式(21)で与えたWeber数以外にレイノルズ数 Re 、抗力係数 C_D 、気泡半径 a と円筒半径 R の比 r で、これらは次で定義される。

$$Re = \frac{2\rho U}{\mu} \tag{24}$$

$$C_D = \frac{8a^2 g}{3U^2} \tag{25}$$

$$r = R/a \tag{26}$$

式(25)で与えられる抗力係数は気泡が浮力により一定の速度で上昇しているという条件から決定されるものである。

図1は今回の計算により得られた気泡形状の最終収束解と対応する物体適合座標である。

図中気泡の上昇方向は x の負の方向である。円・気泡半径比 r が小さくなると流れ方向に気泡厚みが増加する。図2には $Re = 20$ に対して

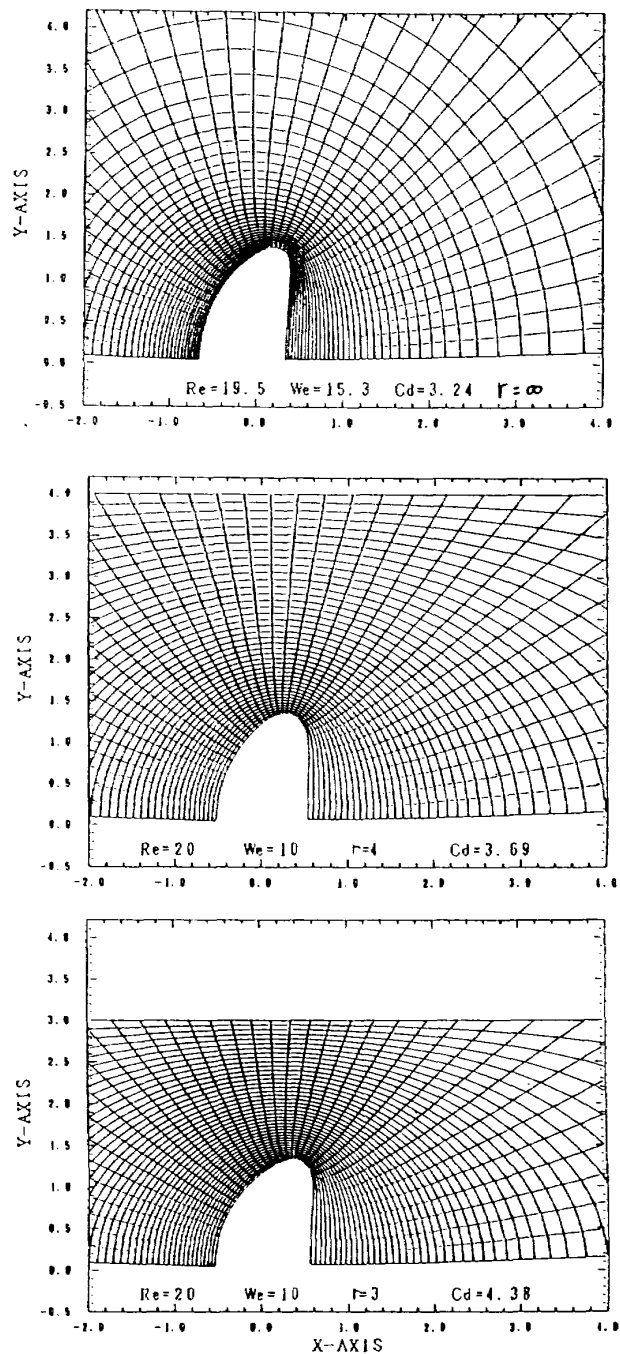


図1 気泡形状と物体適合座標

泡の抗力係数 C_D と半径比 r の関係が示されている。半径比 r の減少と共に抗力係数 C_D は増加しており、直感的な予測と一致している。しかし $r > 5$ では C_D の r への依存は非常に小さい。

図3には $r = \infty$ に対して本計算結果と Ryskin & Leal 等の結果との比較が示されている。明らかに両者の一致は良好である。相対的に気泡の球形からのズレはウエーバー数に強く依存し、気泡背後

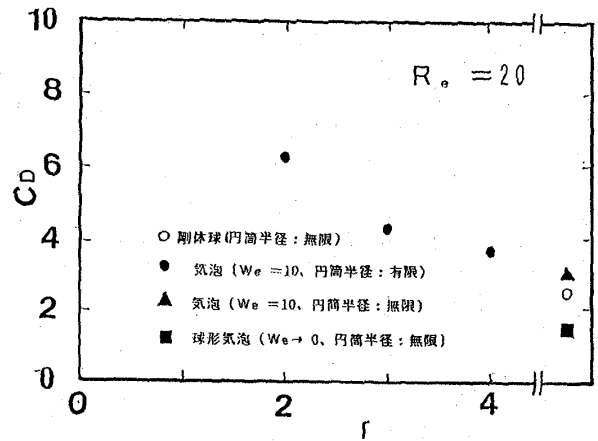
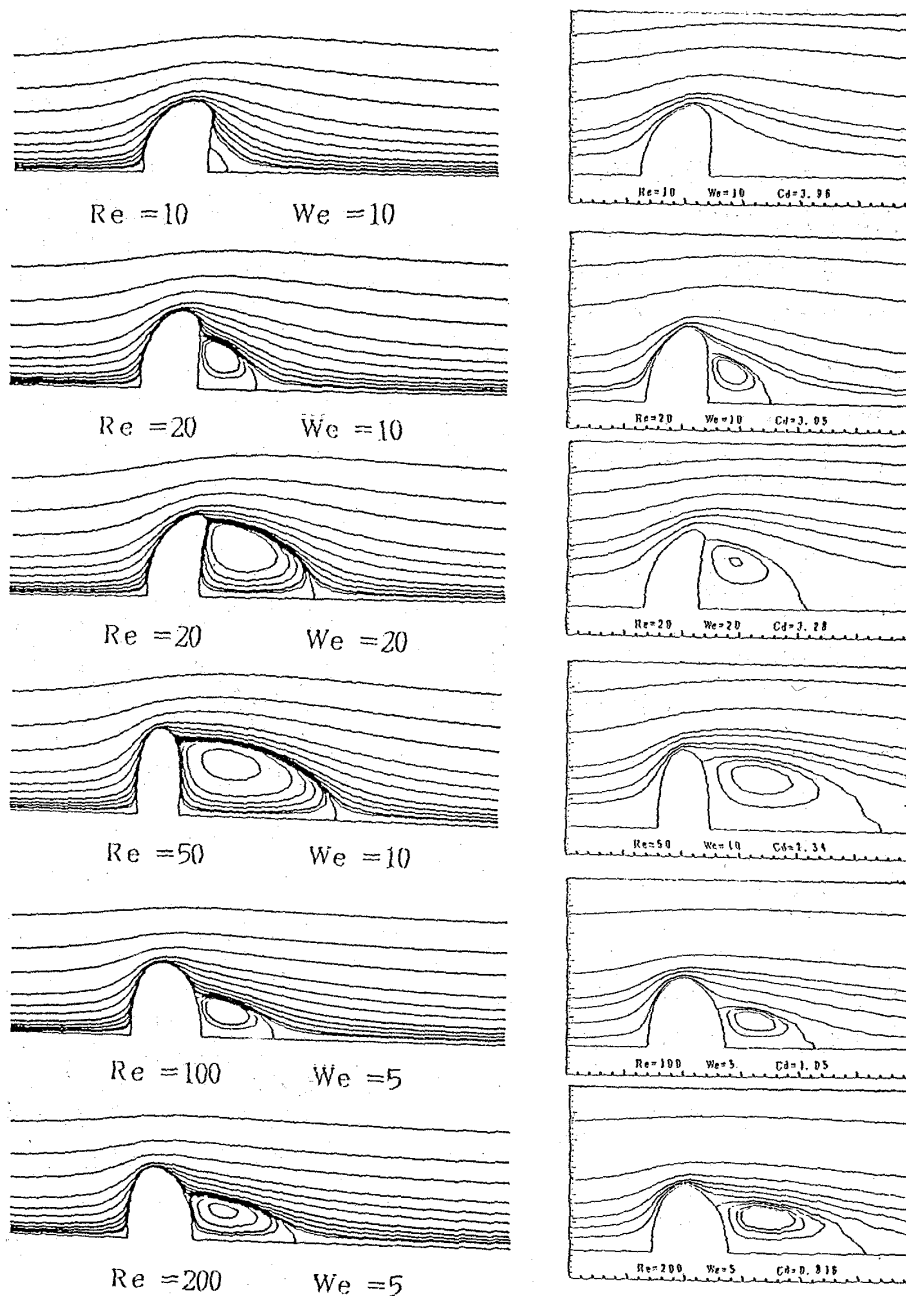


図2 抗力係数と r の関係



Ryskin & Leal

本計算

図3 本計算結果と Ryskin & Leal の計算との比較 ($r = \infty$) .

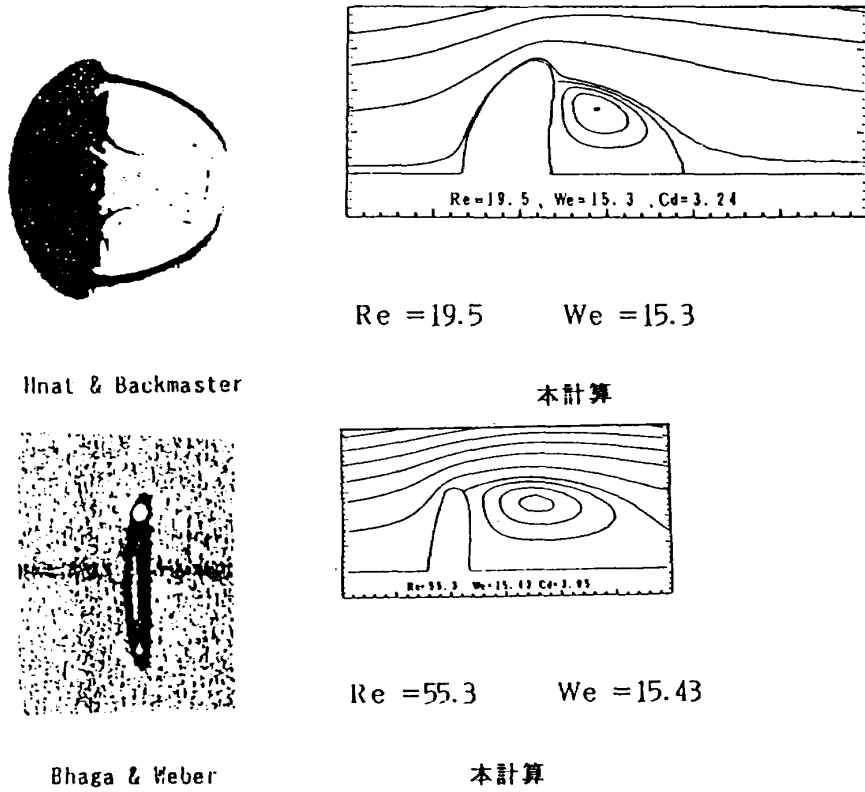


図4 実験との比較

の渦領域の大きさはレイノルズ数に強く依存している。

図4には本計算結果と実験結果との比較がなされている。これらの気泡の抗力係数 C_D の定量的な比較は表1に示されている。

最後に本計算で得られた計算結果について物理的な議論を行う。いま仮に実験で用いる流体の種類を指定すると、密度 ρ 、粘性係数 μ 、及び表面張力 γ の物性値が決定され、本計算であらかじめ指定した Re と We から気泡の半径 a と上昇速度 U は自動的に決定される。次に計算で決定された流れ場から抗力係数 C_D が求められる。この C_D の値を(25)式に代入すると

$$g = \frac{3U^2}{8a} C_D \quad (27)$$

で重力加速度 g が求められる。ところがこの g は地上での重力加速度($9.8m/s^2$)とは一般的には一致しない。この不一致は以下の理由による。流体の種類を指定すると、気泡が一定速度で上昇するという仮定から、 a と U は独立ではなく $U = U(a)$ の関係が存在する。このことは Re と We とを同時に指定できない。従って本計算のように Re と We を独立に与えて得られた数値結果に対しては g は

Re	We	C_D (実験)	C_D (本研究)
19.5	15.3	3.44 *1	3.24
55.3	15.43	2.78 *2	3.05

*1 Hnat & Buckmaster(1976) , *2 Bhaga & Weber(1981)

表1. 抗力係数の比較

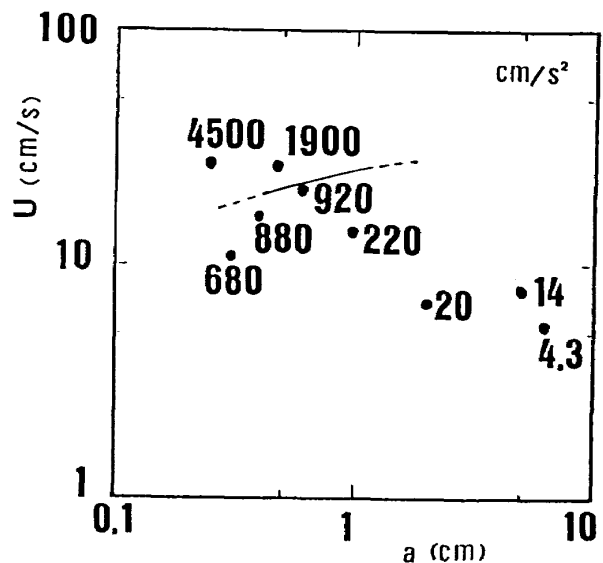


図5 気泡半径 a と上昇速度 U に対する重力加速度

あらかじめ指定することはできないことを示している。従って実際の実験結果と比較するためには式(27)から決定される g と地上での値が一致するように、与えられた気泡半径に対する Re と We の関係を試行錯誤的に決定しなければならない。図4には流体として鉱物油 ($\rho=0.8755 \text{ g/cm}^3$, $\mu=1.18 \text{ g/(s.cm)}$, $\gamma=32.2 \text{ g/s}^2$) に対して気泡半径 α 及び上昇速度 U を与えた計算結果から式(27)より決定された重力加速度 g の値が示されている。

参考文献

- (1) G.Ryskin & L.Leal, "Numerical Solution of Free Boundary Problems in Fluid Mechanics. Part 1. The Finite Difference Technique", J. Fluid Mech., Vol.148, pp.1-17, 1984.
- (2) G.Ryskin & L.Leal, "Orthogonal Mapping", J.Comp.Phys., Vol.50, pp.71-100, 1983.
- (3) 管野 実、石井隆次、森岡茂樹、"変形を伴う気泡まわりの流れの数値解析", 第9回航空機計算空気力学シンポジウム、NAL SP-16, pp.173-176, 1991.

5. 結論

有限半径(無限大半径の極限を含む)の垂直円筒内の非圧縮性・粘性流体中を、重力の下で定速度で上昇する一個の気泡及びその回りの流の運動を数値的に解析した。結果は、Ryskin & Lealの数値結果及びHnat & BuckmasterとBhaga & Weberの実験結果と比較され、計算及び実験誤差の範囲内で一致していることが確認された。