

小早川 命\*, 山田英太郎\*\*

## Application of Digital Control Theory to Adaptive Grid Generation

by

Makoto KOBAYAKAWA\*, Eitaro YAMADA\*\*

\*Kyoto University, \*\*Toyota Motor Co. Ltd.

### ABSTRACT

In this paper, new methods for adaptive grid generation through the optimal regulator of digital control are presented. The performance index of linear optimal regulator problem has a strong relation to the characteristics of adaptive grid generation. Paying attention to this point, one and two dimensional Poisson equations are transformed into the state-space form. The numerical examples of NACA-0012 airfoil flow field and supersonic flow around corners show strong clustering of grid lines at shock waves through these two kinds of adaptation.

#### 1. はじめに

適応格子は計算の途中で丸め誤差の大きくなる場所へ格子を密に集め、解の精度を高める方法である。適応格子を発生させる方法にはいろいろあるが<sup>1)~5)</sup>、そのうち Poisson の方程式

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = \Phi(\xi, \eta) \quad (1a)$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = \Psi(\xi, \eta) \quad (1b)$$

を用いた解析的方法もかなり数多くおこなわれている。この場合制御項 $\Phi$ および $\Psi$ を丸め誤差が小さくなるように何らかの方法で決め(1)を数値的に解くのであるが、 $\Phi$ 、 $\Psi$ の決め方に任意性があるため決定的な方法がないことと、(1)を数値的に解くとき緩和法などを用いるのであるが、発散しやすいため最終の適応格子を得るまでには何回にも分けて格子を発生させ、その都度その格子による数値解を求めなければならない、また、Poisson 方程式の数値解を収束させるためのパラメータ設定が難しい、など不便な点が多い。ここで

は(1)が状態方程式に書き直せることに注目し、デジタル制御の最適レギュレータを用いて適応格子を発生させることを試みた。

#### 2. 適応格子の最適化

上に述べたように、本論文では適応格子を解析的方法、すなわち Poisson の方程式(1)を解くことによって発生させる。すなわち、最初に発生させた格子(初期格子といい、本論文では代数的方法によって発生させる)を用いて解いた保存則の解の丸め誤差が最小になるような格子を解析的方法を用いて発生させるのである。この場合、(1)は状態方程式に書き直すことができる。従って、丸め誤差を最小にする評価関数を作れば、適応格子発生法を最適レギュレータ問題に置き換えることができる。本節では、この発想を具体的に示そう。まず、2次形式評価関数最小化に関する補助定理から説明する。

\* 京都大学工学部

\*\* トヨタ自動車(株)

## 2. 1 外乱がある場合の最適レギュレータの設計

[補助定理 1] 線形デジタルシステム

$$X(i+1) = A(i)X(i) + B(i)u(i) + v_0(i) \quad (2)$$

に対し, 出力が

$$Y(i) = F(i)X(i) + w_0(i) \quad (3)$$

のとき, 2次形式評価関数

$$J = \sum_{i=i_0}^{i_1-1} [Y^T(i+1)Q(i+1)Y(i+1) + u^T(i)R(i)u(i)] + Y^T(i_1)P_{1i_1}Y(i_1) + p_{2i_1}Y(i_1) + \sigma_{0i_1} \quad (4)$$

の最小化を考える. ここに  $X(i) \in R^{n \times 1}$ ,  $Y(i) \in R^{l \times 1}$ ,  $u(i) \in R^{m \times 1}$  はそれぞれ状態, 出力および入力ベクトル,  $v_0(i) \in R^{n \times 1}$ ,  $w_0(i) \in R^{l \times 1}$  はそれぞれシステムおよび出力への外乱で既知とする. また  $Q(i) \in R^{l \times l}$ ,  $R(i) \in R^{m \times m}$ ,  $P_{1i_1} \in R^{l \times l}$ ,  $p_{2i_1} \in R^{1 \times l}$  で  $Q$  および  $R$  は重みをあらわし正定,  $P_{1i_1}$  は準正定とする. このとき状態フィードバック

$$u(i) = -K(i)X(i) + u_0(i) \quad (5)$$

は  $J$  を最小化し, フィードバックゲイン  $K \in R^{m \times n}$  および定常項  $u_0 \in R^{m \times 1}$  は次式より求められる.

$$K(i) = \{B^T(i)F^T(i+1)[Q(i+1) + P_1(i+1) + (Q(i+1) + P_1(i+1))^T] \times F(i+1)B(i) + [R(i) + R^T(i)]\}^{-1} \times \{B^T(i)F^T(i+1)[Q(i+1) + P_1(i+1) + (Q(i+1) + P_1(i+1))^T]F(i+1)A(i)\} \quad (6)$$

$$u_0(i) = -\{B^T(i)F^T(i+1)[Q(i+1) + P_1(i+1) + (Q(i+1) + P_1(i+1))^T] \times F(i+1)B(i) + [R(i) + R^T(i)]\}^{-1} \times \{B^T(i)F^T(i+1)[Q(i+1) + P_1(i+1)$$

$$+ (Q(i+1) + P_1(i+1))^T][F(i+1)v_0(i) + w_0(i+1)] + B^T(i)F^T(i+1)p_2^T(i+1)\} \quad (7)$$

ただし

$$P_1(i) = [F^T(i)]^{-1} \{ [F(i+1)(A(i) - B(i)K(i))]^T [Q(i+1) + P_1(i+1)] \times [F(i+1)(A(i) - B(i)K(i))] + K^T(i)R(i)K(i) \} [F(i)]^{-1} \quad (8)$$

$$p_2(i) = \{ [F(i+1)(B(i)u_0(i) + v_0(i)) + w_0(i+1)]^T [Q(i+1) + P_1(i+1) + (Q(i+1) + P_1(i+1))^T][F(i+1)(A(i) - B(i)K(i))] - u_0^T(i)[R(i) + R^T(i)]K(i) + p_2(i+1)[F(i+1)(A(i) - B(i)K(i))] - u_0^T(i)P_1(i)F(i) \} [F(i)]^{-1} \quad (9)$$

である.

[証明] ダイナミックプログラミングの手法によって証明できるが<sup>(6,7)</sup>, ここでは省略する.

## 2.2 1次元方程式による最適化<sup>8)~11)</sup>

本論文では Poisson の方程式による適応格子発生最適化を試みる。(1a,b)を書き直すと

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = -J^2(\Phi x_{\xi} + \Psi x_{\eta}) \quad (10a)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = -J^2(\Phi y_{\xi} + \Psi y_{\eta}) \quad (10b)$$

となる。ここに

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (11a)$$

$$\beta = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (11b)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (11c)$$

であり

$$J = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi} \quad (11d)$$

はヤコビアンである。

まず最も簡単な場合を考えてみよう。1次元の適応格子発生方程式は(10a)より

$$x_{\xi\xi} = -x_{\xi}^2 \Phi x_{\xi} \quad (12)$$

となる。右辺を  $u$  とおいて中心差分を用いて離散化すると

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = u_i \quad (13)$$

となるが、

$$X(i) = \begin{bmatrix} x_i - x_{i-1} \\ x_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

とおくと、状態空間形(2)であらわすことができる。ところで(13)は  $u_i = 0$  のときは  $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$  となり等間隔の格子をあらわす。すなわち、初期格子はどのようなものであっても、 $\xi$ 方向に等間隔の格子を張り直すことを意味する。ここでは  $u_i \neq 0$  の場合、丸め誤差最小の適応格子を発生させてみよう。

この場合、評価関数は

$$\sum_{i=1}^{n_i} w_i \Delta_{\xi} x_i^2 \quad (15)$$

となる。ここに  $\Delta_{\xi} x_i$  は  $\xi$ 方向の格子点間の距離、 $w_i$  は丸め誤差の重みであり、 $\rho$  を物理量(保存則の近似解)とすると

$$w_i = 1 + \delta |\rho_{\Delta_{\xi} x_i}| + \epsilon |\rho_{\Delta_{\xi} x_i \Delta_{\xi} x_i}| \quad (16)$$

であらわされる<sup>3)</sup>。すなわち、(16)の右辺第2項は(15)に入れると  $(\Delta_{\xi} x)^2 |\rho_{\Delta_{\xi} x}|$  に比例するが、これは格子点間の誤差であり、第3項は  $(\Delta_{\xi} x)^2 |\rho_{\Delta_{\xi} x \Delta_{\xi} x}|$  に比例するが、これは物理量  $\rho$  の Taylor 展開の3次の項に比例し、2次精度計算の丸め誤差となる。 $\delta$  および  $\epsilon$  は重み係数であり任意性をもつ。

$$Q(i) = \begin{bmatrix} w_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17a)$$

$$R(i) = a \quad (17b)$$

などとおくと、(15)は(4)の形に書くことができる。ただし、 $a$  は入力重みであり任意性をもつ。なお、境界は  $i=0$  および  $i=n_i$  における格子点である。 $i=0$  の格子点は初期値として与えられ、 $i=n_i$  の格子点は評価関数における  $Y(n_i)^T P_{1,n_i} Y(n_i)$  により与えられ、評価関数の最小化はこれを0に近づけることを意味する。

さて、以上の方法を NACA-0012 まわりの高亜音速流れに適用してみよう。初期格子(C型)は代数的方法で発生させ<sup>12)</sup>、マッハ数 ( $M_{\infty}$ ) 0.8、迎角 ( $\alpha$ )  $1.25^{\circ}$  の場合の保存則の数値解法スキームは Harten の TVD をもちいている<sup>13)</sup>。適応の結果は Fig.1 および Fig.2 に示される。すなわち、初期格子での収束解を用いて発生させた適応格子が Fig.1 であり、この適応格子を用いてさらに収束解を求めたのが Fig.2 である。(16)における物理量としては流れの密度を用いた。また、格子点間の値は補間によって求めた。衝撃波近傍に格子の集中が見られ、等密度線も衝撃波が極めて薄くなることを示している。しかしこの方法には二つの問題がある。第一に適応格子は  $\eta$  方向には独立である。そのため  $\eta$  一定の格子線が滑らかではなくなる。第二に最適化は  $i$  (格子点の順番) に対してなされており、適応

格子を張り直すと位置がずれる。Fig.1 は第一の欠点に対しては、スムージングにより一定の格子線を滑らかにし、第二の欠点に対しては位置の修正をおこなって衝撃波の位置に格子線が集中するようにしてある。なお、このスムージングおよび位置の修正の方法については省略する。

### 2.3 2次元ポアソン方程式による最適化

前節の方法は丸め誤差の大きくなる領域が2次元的に広がっている場合には適用しにくいように思われる。そこで、2.2の1次元適応格子を2次元に拡張することを考える。すなわち、(10a,b)であらわされる Poisson の方程式による適応格子発生のお最適化を上述のレギュレータ問題に適用してみる。(10a,b)を中心差分を用いて離散化すると

$$\begin{aligned} (x_{i+1j} - x_{ij}) &= (x_{ij} - x_{i-1j}) \\ + \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\beta}{2} (x_{ij+1} - x_{ij-1} - x_{i-1j+1} + x_{i-1j-1}) \right. \\ &\left. - \gamma (x_{ij+1} - 2x_{ij} + x_{ij-1}) \right\} - \frac{J^2}{\alpha} (\Phi x_\xi + \Psi x_\eta) \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} (y_{i+1j} - y_{ij}) &= (y_{ij} - y_{i-1j}) \\ + \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\beta}{2} (y_{ij+1} - y_{ij-1} - y_{i-1j+1} + y_{i-1j-1}) \right. \\ &\left. - \gamma (y_{ij+1} - 2y_{ij} + y_{ij-1}) \right\} - \frac{J^2}{\alpha} (\Phi y_\xi + \Psi y_\eta) \end{aligned} \quad (18b)$$

となる。この場合、状態ベクトル  $X(i)$  を

$$X(i) = \begin{bmatrix} x_{i1} - x_{i-11} \\ x_{i-11} \\ \vdots \\ x_{in_j} - x_{i-1n_j} \\ x_{i-1n_j} \\ y_{i1} - y_{i-11} \\ y_{i-11} \\ \vdots \\ y_{in_j} - y_{i-1n_j} \\ y_{i-1n_j} \end{bmatrix} (4n_j \times 1) \quad (19)$$

とおけば、状態方程式は1次元の場合と同様にして(2)のように書ける。この場合、A お

よびBには $\alpha, \beta, \gamma$ およびJが含まれているが、これらの値はとりあえず差分によって与えることにする。最適値はくり返し差分によって収束させるが、まず初期格子によって得られた保存則の数値解(この場合は密度)を用いて適応格子を発生させる。この適応格子点での密度は補間によって求め、 $\alpha, \beta$ などの値もこの補間値による差分から求める。この格子を用いてさらに数値解を求め、第2回目の適応格子を発生させる。これを繰り返して適応格子線の移動がなくなったところを最適格子と考えるのである。

ここで評価関数について考えてみよう。1次元の場合と同様に考えると、2次元では $\xi$ 線にそって $\sum_i w_{ij} \Delta_\xi x_{ij}^2$ を、 $\eta$ 線にそって $\sum_j v_{ij} \Delta_\eta y_{ij}^2$ をそれぞれ同時に最小にすることが考えられる。すなわち

$$\sum_{i=1}^{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_j} \{ w_{ij} (\Delta_\xi x_{ij}^2 + \Delta_\xi y_{ij}^2) + v_{ij} (\Delta_\eta x_{ij}^2 + \Delta_\eta y_{ij}^2) \} \quad (19)$$

が評価関数となる。ここに $w_{ij}$ および $v_{ij}$ は丸め誤差の重みをあらわし、2次元においても(16)を用いる。(19)を(4)の形に書くと

$$Q(i) = \text{diag} [w_{i1} \quad v_{i1} \quad w_{i2} \quad v_{i2} \quad \dots \\ w_{in_j-1} \quad v_{in_j-1} \quad 1 \quad v_{in_j} \quad w_{i1} \quad v_{i1} \quad \dots \\ w_{in_j-1} \quad v_{in_j-1} \quad 1 \quad v_{in_j}] (4n_j \times 4n_j) \quad (20a)$$

$$R(i) = aI^{4n_j \times 4n_j} \quad (20b)$$

などとなる。なお、 $(x_{1j}, y_{1j})$ および $(x_{2j}, y_{2j})$ は初期値として与え、 $(x_{n_i, j}, y_{n_i, j})$ および $(x_{n_i-1, j}, y_{n_i-1, j}), (j = 0, 1, \dots, n_j)$ は終端値として与える。さらに $(x_{i0}, y_{i0})$ および $(x_{i1}, y_{i1})$ と $(x_{in_j}, y_{in_j})$ および $(x_{in_j-1}, y_{in_j-1}), (i = 1, 2, \dots, n_i)$ は環境条件として固定する。すなわち、外周とその一つ内側の格子線は固定するものとする。

マッハ数が1.5の超音速流の場合について2次元適応格子を発生させるとFig.3のよ

うになり、収束解による等密度線図 (Fig.4) に明らかなように斜め衝撃波が極めてシャープにとらえられることがわかる。この場合最適格子の繰り返しの回数は5回で格子の移動量は10%以下になる。さらに、角を曲がるマッハ2の超音速流の Euler 方程式の数値解に前の例と同様な方法で最適適応格子を発生させると Fig.5 のようになり、密度分布は Fig.6 のようになる。この場合も最適化の効果が顕著にあらわれているのがわかるであろう。

### 3. おわりに

数値流体力学における適応格子の発生法に最適レギュレータを応用して、従来の方法より簡単に適応格子を発生させる方法を開発した。適応格子の生成には解析的方法、すなわち Poisson の方程式を用いた。従来の方法では制御項  $\Phi$  および  $\Psi$  (2次元の場合) を何らかの方法で決め、微分方程式の数値解法 (緩和法など) によりこれを解き適応格子を生成する。しかし、解を収束させるためには繰り返し適応格子を発生させねばならず、任意パラメータの設定も難しい。本論文による方法では Poisson の方程式を状態空間方程式に置き換え、2次評価関数最小化によって最適制御項  $\Phi$  および  $\Psi$  を求めるため、適応格子の生成はロバストであり、収束も速い。特に最初に示した1次元適応格子にその効果が顕著にあらわれる。ただし、この場合は格子発生後、位置の修正、スムージングなどが必要となる。そのためスムージングを不要にし、位置の修正も自動的におこなう2次元格子へと発展させた。今後の課題は3次元適応格子へ拡張すること、汎用性をもたせることなどである。

### 参考文献

- 1) M. Berger and A. Jameson, AIAA J., Vol.23, No.4 pp.561~568(1985).
- 2) J. F. Dannenhoffer and J. Baron, AIAA Paper 86-0495(1986).
- 3) J. F. Thompson, AIAA Paper 84-1606 (1984).
- 4) K. Nakahashi and G. S. Deiwert, AIAA J., Vol.25, No.4, pp.513~520(1987).
- 5) J. U. Brackbill and J. S. Saltzman, Journal of Computational Physics; Vol.46, pp.342~368(1982).
- 6) H. Kwakernaak and R. Sivan, Linear Control Systems; pp.490~495, John-Wiley & Sons Inc.(1972).
- 7) 小早川, 山田, システム制御情報学会論文誌, 第33巻, 第10号(1992)掲載予定.
- 8) H. Matsumura and M. Kobayakawa, Proc. of International Symposium for Computational Fluid Dynamics -Nagoya, pp.451~454(1989).
- 9) M. Kobayakawa and H. Matsumura, Proc. of the 2nd Japan-Soviet Union Joint Symposium on Computational Fluid Dynamics; pp.63~70(1990).
- 10) 小早川, 第35回システム制御情報学会研究発表講演会論文集, pp.263~264(1991).
- 11) 山田, 小早川, 第5回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.451~454(1991).
- 12) W. J. Gordon and L. C. Thiel, Numerical Grid Generations, pp.177~192, North Holland(1982).
- 13) H. C. Yee, R. F. Warming and A. Harten, Journal of Computational Physics, Vol.57, pp.327 ~ 360 (1985).

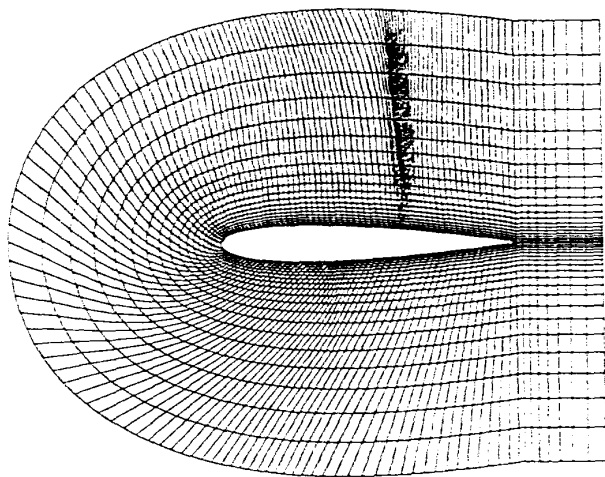


Fig.1 NACA-0012 まわりの 1次元適応格子.

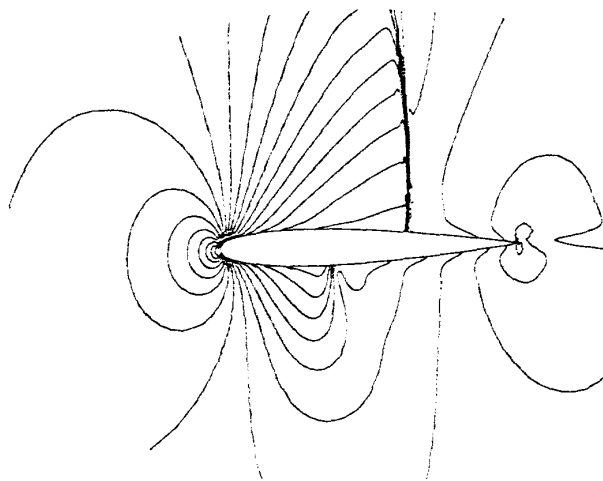


Fig.2 1次元適応格子による収束解 (等密度線 図)  $M_\infty = 0.8, \alpha = 1.25^\circ$ .

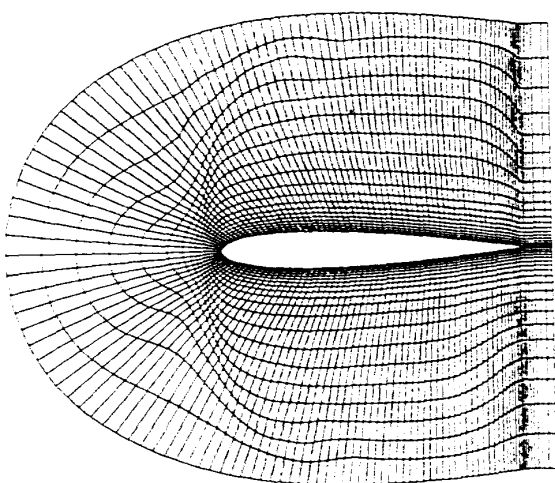


Fig.3 NACA-0012 まわりの 2次元適応格子.

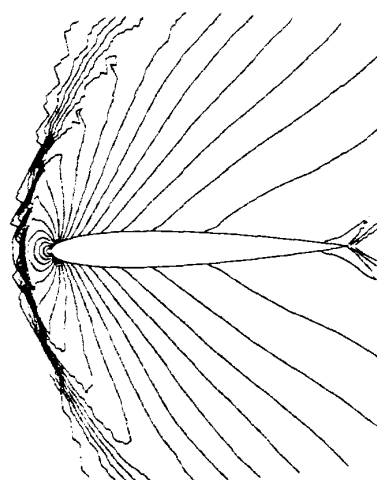


Fig.4 2次元適応格子による収束解 (等密度線 図)  $M_\infty = 1.5, \alpha = 0^\circ$ .

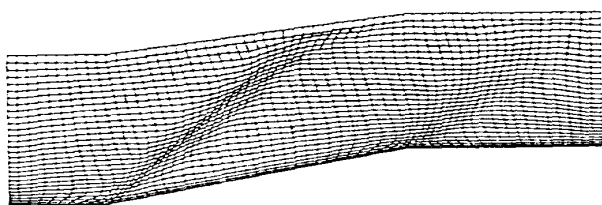


Fig.5 角をまわる流れの 2次元適応格子.

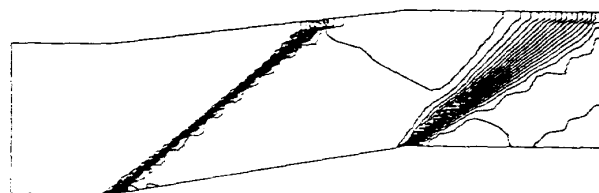


Fig.6 2次元適応格子による収束解 (等密度線 図)  $M_\infty = 2$ .