

局所的な補間を用いた風上法について

白山 晋

Upwind Method Using Local Interpolation

by

Susumu SHIRAYAMA
SofTek Systems Inc.

ABSTRACT

Several approaches based on the polynomial which approximates the local solutions to the governing equations have been proposed. The polynomial is piecewisely determined by interpolating the physical quantities on a point aimed at solving the equations and an adequate number of surrounding points. The derivatives at the point are evaluated by using this interpolated polynomial. Most of the conventional methods can be classified by the kinds of the polynomial and how to use the interpolation. It may be considered that this basic concept is useful for constructing a method in which the results are independent of grid systems. Also, it seems that to find an appropriate interpolation may contribute to constructing a multi-dimensional upwind scheme.

1. 緒 言

C F Dにおける基礎的な数値解法の研究は、ここ数年の会議をみればわかるように一段落し、次のブレークスルーを待っているところである。これまでの成果は支配方程式の双曲性と解が属するであろう有界変動関数の性質を如何にうまく使うかに集約できると思う。具体的には偏微分の風上方向へシフトした離散表現と非線形な制限関数の導入である。但し、これらの議論が数学的な厳密性により、一次元的な拡張であることは周知の事実であろう。このため多次元に対応する純粋なスキームの開発が、小休止中の数値解法の研究の中で注目を集めてきた。既にたくさんの方が提案されていることも事実だが数学的な理由で決定打がない。決定打がないわりには、各々のスキームは累上を埋めるくらいの力を持っている。すなわち、十分良好な結果を与える方法も少なくないのである。

本研究の最終目標は、それらが何故うまく動いているかを調べることである。多次元であって

も、風上方向へのシフトと制限関数の導入という方法は生き残っている。特に風上性は、ラグランジュ的に見た支配方程式の性質をより忠実に表すもので、数値的に解く場合、多次元でもよい方向に働いていることは、これまでの結果が裏づけている。手始めとして、風上法の基本にある局所的な補間を考える。局所的な補間はM U S C Lにおける積分型表現から区分平均値の時間変化を求める際の前処理的な補間、E N Oにおける有界変動関数など解が属するであろう関数の性質を持たせたもの、そして、特に非圧縮性のN S式に対する局所解(Taylor展開によるもの)の性質を携えたもの^[1]に大別される。補間を取り上げる理由は各種スキームの共通項のもつ性質を調べるということである。ここで、注意しなければならないのは補間が区分平均値に対するものか、従属変数そのものに対するものかを明確にすることである。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

ここで $f = f(q)$ である。例えば、この一次元の保存型の偏微分方程式の場合、下記のように区間平均値または集中化された係数をもつ未知量を更新することを基本にしたスキームでも、解くプロセスの間に微分型の離散化に変わってしまう場合がある。

$$\frac{\bar{q}^{n+1} - \bar{q}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{f}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad (2)$$

ここで $\bar{q}^n = \frac{\int q^n dx}{\Delta x}$ かつ $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\int f_{i+\frac{1}{2}} dt}{\Delta t}$ である。特に、非圧縮性流れの解法において、コントロール・ボリューム法と有限体積法において質量集中化が行われていることを考慮しないものや、スタッガード型の離散化と有限体積法を混同しているものがある。

本稿では、補間法を調べることによって、次の二つの問題に対する解決法的一端を垣間みようと思う。

- (i) いかにして多次元かつ高精度スキームを構築するか。
- (ii) 格子に対して依存性の少ない方法を見つけるにはどうしたらよいか。

- ・歪んだ格子に対する方法。
- ・座標変換に対する不変性。

2. 多次元風上法

多次元風上法における補間の使われ方を考察する前に、FDM, FVM, FEM と補間について簡単にまとめておこう。

FDM においては二つの考え方に着目する。一つは Lagrange 的のものである。例えば、式(1)で $f = uq$ とする。線形ならば、次式が成立する。

$$q = q_0(x - ut), \quad (3)$$

ここで、 q_0 は初期分布である。傾きさえ変化しなければ、初期分布がそのまま移流していく。Burgers 方程式を、非線形の場合として考える。傾きの時間変化は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{q'_0}{1 + q'_0 t}. \quad (4)$$

短い時間を考える。 $t = \Delta t$ として、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = q'_0 - (q'_0)^2 \Delta t. \quad (5)$$

時間刻み幅を小さくすれば、式(3)は充分良い精度で成立する。これを FDM に応用すると、

$$q^{n+1} = q^n(x_0 - u \Delta t). \quad (6)$$

q^n を、ある補間によって近似すれば、次のステップの値が求められる。これは既に気象学者の間で、上流法 (Upstream Method) とか、Semi-Lagrange 法として知られているものである。もう一つの方法は、物理量のテイラー展開と、ある多項式とを結び付ける方法である^[1]。具体的な方法は本節後半で述べられる。

式(1)を FVM で離散化すれば式(2)のようになるのだが、多くの場合、 \bar{f} は数値流束として、次のように扱われる。

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} f^{(*)}(q_L, q_R) dt.$$

この積分及び \bar{q}^n において、 q の分布が問題になる。即ち、補間の性質が解の性質を決めるのである。FEM の場合、Galerkin 的なやり方は試行関数に対する最小二乗近似と見なせるから、補間されるべき q の関数形が近似解の性質を決めるといってもよい。FEM がスプライン法そのものであると言われる由縁である。

さて、多次元風上法であるが、二次元のスカラー輸送方程式の考察から始めよう。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

ここで $u = y, v = -x$, 境界条件は

$$q(x, 0) = 0, \quad \text{if } x < -0.65,$$

$$q(x, 0) = 1, \quad \text{if } -0.65 < x < -0.35,$$

$$q(x, 0) = 0, \quad \text{if } -0.35 < x < 0,$$

$$q(-1, y) = 0, \quad \text{if } 0 < y < 1,$$

$$q(x, 1) = 0, \quad \text{if } 0 < x < 1,$$

である^[2]。基本スキームは線形問題で良好な結果を与えても、非線形問題ではその結果がそのまま現れることは少なく、線形問題での試行はあまり意味がないというのが最近の風潮である。ある意味で正しいのだが、多くのスキームが短い時間において線形化された方程式に対して提唱されていることを考えれば、いくつかのスキームをふるいから落とすためにはこの考察は重要となる。まず、一次精度のスキームを調べてみる。図1に示すような風上方向へ偏った4点系を扱う。4点を用いた q のテイラー展開は、

$$q = q_{i,j} + \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_{i,j} x + \frac{\partial q}{\partial y} \Big|_{i,j} y + \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} xy, \quad (8)$$

である。次に q の補間を考える。便宜上、 $u > 0$ 且つ $v > 0$ の場合を扱い、

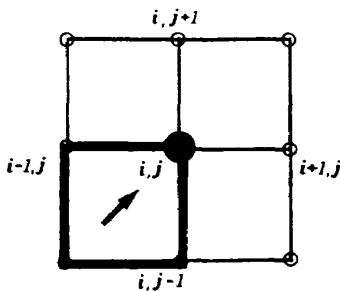
$$q = q_{i,j} + \frac{q_{i,j} - q_{i-1,j}}{\Delta x} x + \frac{q_{i,j} - q_{i,j-1}}{\Delta y} y + \frac{q_{i,j} - q_{i-1,j} - q_{i,j-1} + q_{i-1,j-1}}{\Delta x \Delta y} xy, \quad (9)$$

を基本におく。式(8)と式(9)を比較すると q の微係数が直ちに求められる(先述したFDMの第二の方法である)。これは、各空間方向に対する一次精度の風上差分である。

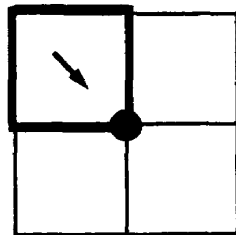
$$q^{n+1} = q_{i,j} - u \frac{q_{i,j} - q_{i-1,j}}{\Delta x} \Delta t - v \frac{q_{i,j} - q_{i,j-1}}{\Delta y} \Delta t. \quad (9')$$

この方法を基準に別のスキームを探そう。はじめに、式(7)をある曲線座標系に変換する。

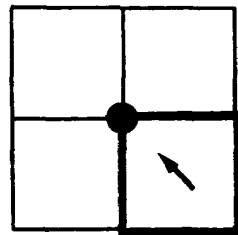
$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial \xi} + V \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0, \quad (10)$$



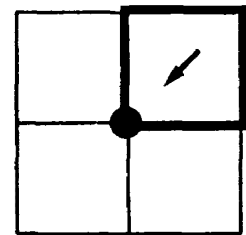
SW ; $u > 0$ and $v > 0$



NW ; $u > 0$ and $v < 0$



SE ; $u < 0$ and $v > 0$



NE ; $u < 0$ and $v < 0$

図1. 4点系

ここで (U, V) は反変速度成分を表し、

$$U = u[a^1]_1 + v[a^1]_2,$$

$$V = u[a^2]_1 + v[a^2]_2,$$

与えられる。図2に示すように、一つの座標線の流れの方法にとれば、共変及び反変基本ベクトルは

$$\mathbf{a}_1 = (\cos \theta, \sin \theta),$$

$$\mathbf{a}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta),$$

$$\mathbf{a}^1 = (\cos \theta, \sin \theta),$$

$$\mathbf{a}^2 = (-\sin \theta, \cos \theta),$$

となる。ここで $\cos \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$ 、 $\sin \theta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$ である。この場合、反変速度の η 成分は、0になるので式(10)は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0, \quad (11)$$

となる。これを、 ξ 方向に沿って積分すれば

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} + U \frac{q_{i,j}^n - q_c^n}{\Delta s} = 0, \quad (12)$$

となる。ここで、 q_c^n は図2の c 点での値、 Δs は点 o と点 c の距離である。 Δs は $U \Delta t$ なので、式(11)の解は、 $q^{n+1} = q_c^n$ より、 $q^{n+1} = q^n(x_o - u \Delta t, y_o - v \Delta t)$ となる。 q^n は式(9)で与えられているので、結果として次式を得ることができる。

$$q^{n+1} = q_{i,j} - u \frac{q_{i,j} - q_{i-1,j}}{\Delta x} \Delta t - v \frac{q_{i,j} - q_{i,j-1}}{\Delta y} \Delta t + uv \frac{q_{i,j} - q_{i-1,j} - q_{i,j-1} + q_{i-1,j-1}}{\Delta x \Delta y} \Delta t^2. \quad (13)$$

これは先に述べた上流法の二次元における一次精度版である。

次に、一次精度の二次元風上法を考察する。

式(11)に対し、風上方向に差分をとればいいのだが、ここでは別の考えを使う。即ち、一次の風上差分が二次の中心差分と二次の拡散項によって表現されることに注目する。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial \xi} \Big|_h - \frac{|U|}{2} \Delta s' \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} \Big|_h = 0. \quad (14)$$

ここで、 $|_h$ は差分オペレータを意味する。式(14)を物理面で構成し直すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \left(u \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{u}{2} \Delta x' \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) + \left(v \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{v}{2} \Delta y' \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) \\ - uv \Delta t \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで、 $\Delta x' = \Delta s' \cdot \cos \theta$ 、 $\Delta y' = \Delta s' \cdot \sin \theta$ である。式(13),(15)は風上性を考慮して導いた式だが、次式は、One-step Lax-Wendroff法から導出したものである。

$$\begin{aligned} \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} + \left(u \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{u}{2} (u \Delta t) \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) \\ + \left(v \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{v}{2} (v \Delta t) \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) - uv \Delta t \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} - r = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

ここで $r = \frac{\Delta t}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial y} \right)$ である。

以上の三つのスキームの内、はじめの二つのものは同じ性質を示すが、Lax-Wendroffによるものは多少数値的に不安定となる。そこで、一次精度二

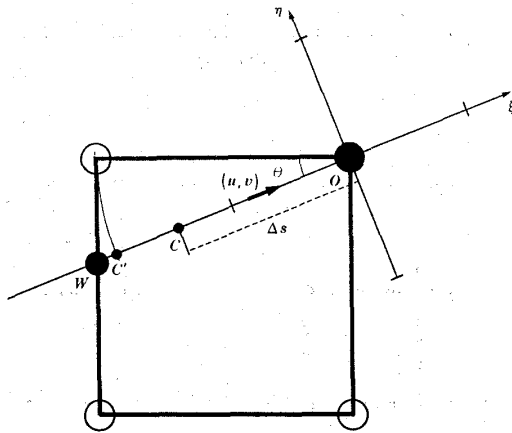


図2. 二次元風上法の幾何的表現

次元法として第一の方法(式(13))を採用し、従来の方法(式(9'))と比較する。格子点数は61x31、時間刻み幅は0.03である。図3は、入口及び下流側境界での q の分布を示したものである。入口での分布がそのまま運ばれることになるので、厳密解は入口の分布を見ればよい。両者ともに拡散的な解を示すが、式(13)による方法のほうが厳密解に近いようである。実はクーラン数を1に近づけることで式(13)による方法は更に良い結果となる。仮定した分布がそのまま運ばれることを考えれば、うなずける結果であろう(辺上か内部か)。ではクーラン数を0に近づけるとどうなるか。図4(ある時間 t での q の空間分布)を見れば分かるように二つの方法の差異がなくなる。

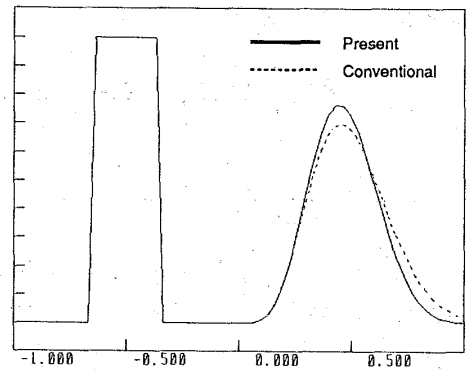


図3. 下流側境界での q の分布。

ここで注意しなければならないのは、安定性を増したいいくつかのスキームは、クーラン数が大きくなると拡散的になるということと、多次元性を考慮したスキームはクーラン数が1に近いほど良好な結果が得られるように設計されているということである(比較検討するスキームが妥当であるかということ)。

次に三次精度の方法をみてみよう。紙面の都合上、詳しい式は書けないが、従来の方法としては各方向に対する風上差分を採用したものを、多次元性を考慮したものとして式(13),(15)をそのまま拡張したものを使う。図5に結果を示すが、多次元性を考慮したものが少しだけ良い結果となっている。それ以上に注目すべきところは、一次元方向の高精度化が効いているということである。

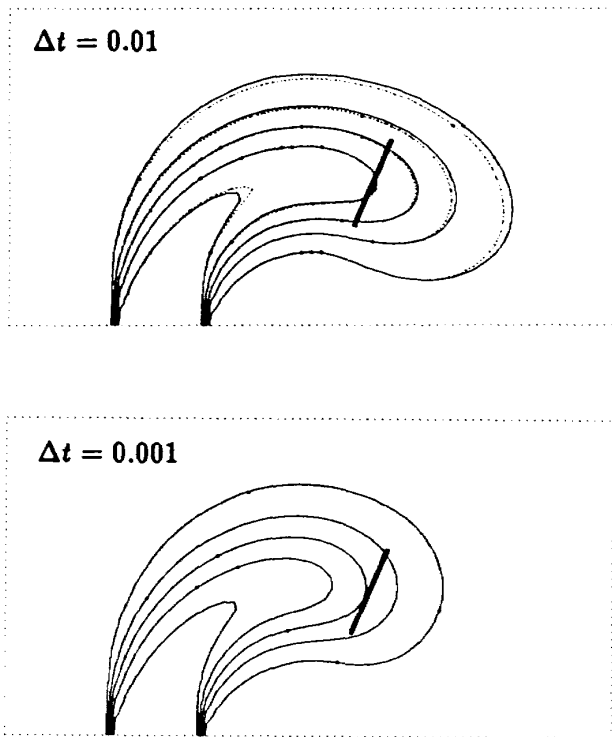


図4. ある時間での q の空間分布。点線は式(13)、実線は式(9')による結果、また、太線はフロントの位置である。

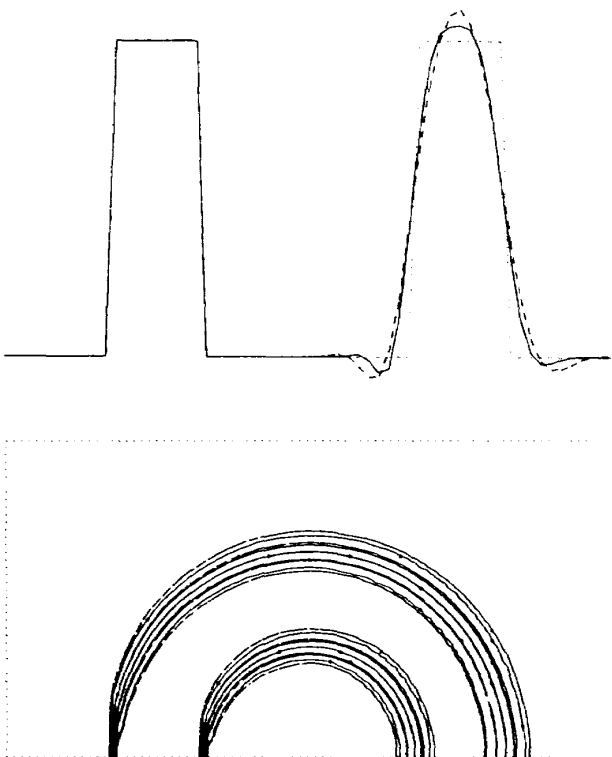


図5. 下流側境界での q の分布と q の空間分布。破線は従来の方法、実線は斜め方向を考慮した方法による結果 ($\Delta t = 0.01$)。

3. 格子依存性

B.P. Leonard の QUICK や UTOPIA^[3] は、その名の通り、区分多項式近似による方法である。論文に示されているように、Lagrange 補間された多項式を基本とするので、傾きを微係数として、離散化された方程式のバランスから、次の時間の物理量を求めるわけである。FDM, FVM の一般曲線座標系や FEM のパラメトリック空間など計算空間を利用する方法が発展したため、物理面で求められる多項式をそのまま扱った計算例は少ない。

しかしながら、格子が歪みはじめると、これによって解が振動する場合がある。特に NS 用の格子で一次元方向の格子の不均一性が数値振動を誘起することが知られていたため、主として乱流研究のグループが座標変換による誤差を報告してきた。著者は物理空間で直接多項式を用いて風上法を構築して、格子の歪みによる疑似的な渦の発生等、座標変換による数値誤差について論じてきた^[1,4,5]。スキームに関して、三次精度の風上差分を構築するには四次の多項式から得られる傾きと四次の拡散項の和ではなく、風上方向に偏った三次の多項式から得られる傾きと四次の多項式から得られる拡散項の和をとる必要があることや、QUICK の場合、二次の多項式を忠実に表現しても歪んだ格子では三次精度にはならないことを示してきた。結論として、一次元方向に対して滑らかに変化する格子上で計算しないと非物理的な現象を観測する危険があるということを示した。逆に言えば、物理空間でうまく処理すれば格子依存性の少ない計算法が構築できるということでもある。本節の最後として、式(13)に類似した方法で二次元 Cavity 流れを解析した例を図6に示す。具体的な方法は文献6を参考にしてほしい。

4. 結 論

(i) 多次元風上法を構築する場合、一次元方向の高精度化と高々一点の斜め方向の寄与を考えれば十分良好な解が期待できる。特にクーラン数が小

さい場合は、多次元性に対し神経質になる必要性はほとんどない。

(ii) NS 解のおおまかな振舞いは局所的に三次程度の風上方向に偏った多項式近似により捉えられる。

但し、保存系の FVM の場合、基本変数は二次以上の多項式で近似されることが望ましい。

(iii) 数値的な座標変換は、大部分が一次変換となっているので、一次元的な歪みには特に注意が必要である。このため、滑らかな格子生成や、物理空間での誤差解析が大切になる。

参考文献

1. Shirayama, S., AIAA Paper 91-0727, Jan. 1991, または、AIAA J., vol.30, no.5, 1992, pp.1237-1242
2. Roe, P.L., Lecture Notes in Physics 371, Springer-Verlag 1990, pp.273-277.
3. Leonard, B.P., Computer Methods in Appl. Mech. and Eng., vol.19, 1979, pp.59-98.
4. 白山 晋、第7回航空機計算空気力学シンポジウム（平成元年6月）
5. Shirayama, S., Bulletin of the American Physical Society, vol.34, no.10, 1989, p.2314.
6. Shirayama, S., AIAA Paper 91-1563CP, June 1991.

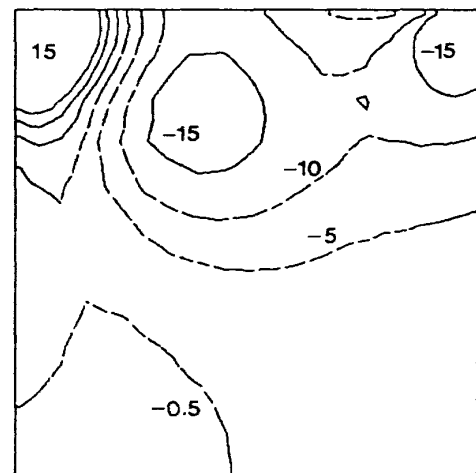
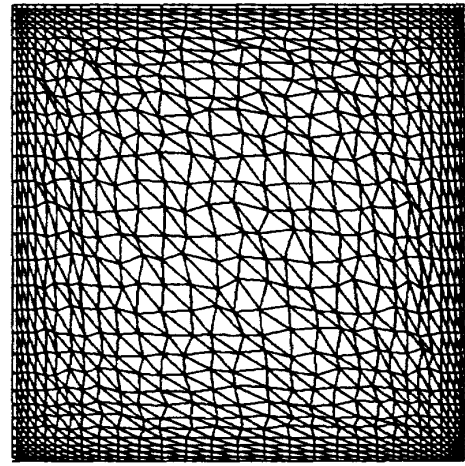


図6. 格子と圧力分布 ($Re = 100$, 961 nodes)。