

点緩和法を用いた三次元オイラー方程式の陰的風上解法

古川 雅人* 茨木 誠一**
松尾 栄人** 井上 雅弘*

An Implicit Upwind Scheme for the Three-Dimensional Euler Equations Using a Pointwise Relaxation Method

by

Masato Furukawa
*Department of Mechanical Engineering for Power
Kyushu University*

Seiichi Ibaraki and Eito Matsuo
Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.

Masahiro Inoue
*Department of Mechanical Engineering for Power
Kyushu University*

ABSTRACT

An implicit upwind relaxation scheme has been developed for computing compressible inviscid flows using a composite zonal grid system or an unstructured grid. The three-dimensional Euler equations are discretized spatially by a cell-centered finite volume formulation, in which the inviscid fluxes are evaluated using a highly accurate upwind scheme based on the Roe's approximate Riemann solver. A new time-linearization of the inviscid fluxes evaluated by the Roe's approximate Riemann solver is presented in detail. No approximate factorization is introduced, and unfactored implicit equations are solved by a pointwise relaxation method. Numerical examples are presented for the inviscid flows through a transonic duct and a diagonal flow impeller. The present scheme was found to be stable at CFL numbers of over 10^5 .

1. 結 言

工学上問題となる圧縮性流れ場をオイラー方程式により数値解析する場合、複雑な境界形状に対する格子の適合性、さらに衝撃波に対する格子の空間分解能を高めることが精度上要求される。この観点から領域分割格子あるいは非構造格子を用いた圧縮性流れ解析スキームの開発が試みられている。領域分割格子の場合、計算領域を複数の領

域に分割して各領域ごとに構造格子を生成することで各領域の格子には規則性があるが、領域境界で格子線の不連続性を許容できるような領域境界に対しては近似因子化法を用いた陰的解法の適用は煩雑となる。さらに、非構造格子の場合、不規則に並んだ任意形状の格子を用いるので、近似因子化法を用いた陰的解法を適用できない。本報では、領域分割格子や非構造格子などの任意の格子に適用できる三次元オイラー方程式の陰的解法として点緩和法を用いた有限体積形風上解法について述べる。

*九州大学工学部動力機械工学科

**三菱重工業株式会社

2. 陰的風上法

2.1 有限体積法

三次元オイラー方程式を積分形で記述すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega + \oint_{\partial\Omega} H dS = \int_{\Omega} T d\Omega \quad (1)$$

ただし、 Q 、 H および T はそれぞれ保存量、非粘性流束および遠心力やコリオリ力などの体積力から成るベクトルを表す。有限体積法により空間的に離散化し、時間方向には陰的に離散化すると、式(1)は次のように表せる。ただし、体積力項 T は陽的に評価する。

$$\Omega_{i,j,k} \frac{\Delta Q_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \sum_{i,j,k} (SH)^{n+1} = \Omega_{i,j,k} T^n \quad (2)$$

ここで

$$\Delta Q_{i,j,k}^n = Q_{i,j,k}^{n+1} - Q_{i,j,k}^n \quad (3)$$

Σ は着目している計算セルの界面を通過する流束の収支をとることを意味しており、六面体セルを用いた構造格子系に対するcell-centered法に従って空間離散化を行う場合、次のように表せる。

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} (SH) = & (SH)_{i-\frac{1}{2},j,k} + (SH)_{i,j-\frac{1}{2},k} + (SH)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \\ & + (SH)_{i+\frac{1}{2},j,k} + (SH)_{i,j+\frac{1}{2},k} + (SH)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4)$$

なお、 Ω は計算セルの体積、 Δt は時間刻み幅、 S はセル界面の面積である。

さらに、非構造格子を用いる場合には、例えばNakahashiの方法¹⁾などにより $\Sigma(SH)$ を評価すればよい。以下では、簡単のため図1の構造格子に対してスキームの説明を行う。

2.2 非粘性流束

本スキームでは、Roeの近似リーマン解法²⁾を用いた風上法に従って、計算セル界面上における非粘性流束を求める。式(2)中の $n+1$ タイムステップでの非粘性流束を一次精度で評価すると

$$H_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[H_{i,j,k}^{n+1} + H_{i-1,j,k}^{n+1} - |A_{i-\frac{1}{2},j,k}|^{n+1} (Q_{i-1,j,k}^{n+1} - Q_{i,j,k}^{n+1}) \right] \quad (5)$$

ここに

$$A = \frac{\partial H}{\partial Q} = R \Lambda L, \quad |A| = R | \Lambda | L \quad (6)$$

式(5)右辺の H^{n+1} 及び $|A_{i-\frac{1}{2},j,k}|^{n+1}$ は次式のように線形化される。

$$H_{i,j,k}^{n+1} = H_{i,j,k}^n + A_{i,j,k}^n \Delta Q_{i,j,k}^n \quad (7)$$

$$|A_{i-\frac{1}{2},j,k}|^{n+1} = |A_{i-\frac{1}{2},j,k}|^n \quad (8)$$

ただし、 $|A_{i-\frac{1}{2},j,k}|^{n+1}$ を厳密に線形化するのは複雑なので、式(8)では陽的に評価している。このとき、式(5)の非粘性流束は次のように線形化される。

$$\begin{aligned} H_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = & H_{i-\frac{1}{2},j,k}^n + \frac{1}{2} \left[(A_{i,j,k}^n + |A_{i-\frac{1}{2},j,k}|^n) \Delta Q_{i,j,k}^n \right. \\ & \left. + (A_{i-1,j,k}^n - |A_{i-\frac{1}{2},j,k}|^n) \Delta Q_{i-1,j,k}^n \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ところで、式(9)中の n タイムステップでの非粘性流束 $H_{i-\frac{1}{2},j,k}$ は以下で述べるprojection及びevolutionから成るMUSCL型の高次精度風上法に従って求められる³⁾。まずprojectionでは、高次精度化するためにセル中心上の物理量の値を用いてセル界面上の物理量の値を外挿する。本解法では、differentiable limiterを用いたvan Leerのprojection⁴⁾に従う。すなわち、

$$Q_{i-\frac{1}{2},j,k}^+ = Q_{i,j,k} - \{0.25s[(1-\kappa s)\Delta_+ + (1+\kappa s)\Delta_-]\}_{i,j,k}$$

$$Q_{i+\frac{1}{2},j,k}^- = Q_{i,j,k} + \{0.25s[(1-\kappa s)\Delta_- + (1+\kappa s)\Delta_+]\}_{i,j,k} \quad (10)$$

ここで

$$(\Delta_+)_{i,j,k} = Q_{i+1,j,k} - Q_{i,j,k} \quad (11)$$

$$(\Delta_-)_{i,j,k} = Q_{i,j,k} - Q_{i-1,j,k}$$

$$s = \frac{2\Delta_+\Delta_- + \epsilon}{(\Delta_+)^2 + (\Delta_-)^2 + \epsilon} \quad (12)$$

ただし、 $\epsilon = 10^{-6}$ 。なお、本スキームでは式(10)において $\kappa = 1/3$ とする。これは非粘性流束の陽的部分を三次精度で評価することに相当する。つぎにevolutionでは、projectionにおいて外挿されたセル界面を挟む二つの状態の時間発展の解をリーマン問題を解くことにより求め、その解からセル界面での非粘性流束を計算する。本法においては、evolutionとしてRoeの近似リーマン解法に基

づいた風上法²⁾を用いて非粘性流束を

$$H_{i\pm\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{2} \left[H(Q_{i\pm\frac{1}{2},j,k}^+, \bar{n}_{i\pm\frac{1}{2},j,k}) + H(Q_{i\pm\frac{1}{2},j,k}^-, \bar{n}_{i\pm\frac{1}{2},j,k}) \right. \\ \left. \mp |B(\bar{Q}_{i\pm\frac{1}{2},j,k}, \bar{n}_{i\pm\frac{1}{2},j,k})| \cdot (Q_{i\pm\frac{1}{2},j,k}^+ - Q_{i\pm\frac{1}{2},j,k}^-) \right] \quad (13)$$

として求める。

3. 点緩和解法

式(2)に対して式(9)で表される線形化を施すと、次式を得る。

$$D_{i,j,k}^n \Delta Q_{i,j,k}^n + D_{i-1,j,k}^n \Delta Q_{i-1,j,k}^n + D_{i,j-1,k}^n \Delta Q_{i,j-1,k}^n + D_{i,j,k-1}^n \Delta Q_{i,j,k-1}^n \\ + D_{i+1,j,k}^n \Delta Q_{i+1,j,k}^n + D_{i,j+1,k}^n \Delta Q_{i,j+1,k}^n + D_{i,j,k+1}^n \Delta Q_{i,j,k+1}^n \\ = \Delta t \left[T^n - \frac{1}{\Omega_{i,j,k}} \sum_{i,j,k} (SH)^n \right] \quad (14)$$

ここで

$$D_{i,j,k} = I + \frac{\Delta t}{2\Omega_{i,j,k}} \left[S_{i-\frac{1}{2},j,k} (A_{i,j,k} + |A_{i-\frac{1}{2},j,k}|) + S_{i,j-\frac{1}{2},k} (A_{i,j,k} + |A_{i,j-\frac{1}{2},k}|) \right. \\ \left. + S_{i,j,k-\frac{1}{2}} (A_{i,j,k} + |A_{i,j,k-\frac{1}{2}}|) + S_{i+\frac{1}{2},j,k} (A_{i,j,k} + |A_{i+\frac{1}{2},j,k}|) \right. \\ \left. + S_{i,j+\frac{1}{2},k} (A_{i,j,k} + |A_{i,j+\frac{1}{2},k}|) + S_{i,j,k+\frac{1}{2}} (A_{i,j,k} + |A_{i,j,k+\frac{1}{2}}|) \right]$$

$$D_{i-1,j,k} = \frac{\Delta t}{2\Omega_{i,j,k}} S_{i-\frac{1}{2},j,k} (A_{i-1,j,k} - |A_{i-\frac{1}{2},j,k}|) \\ D_{i,j-1,k} = \frac{\Delta t}{2\Omega_{i,j,k}} S_{i,j-\frac{1}{2},k} (A_{i,j-1,k} - |A_{i,j-\frac{1}{2},k}|) \\ D_{i,j,k-1} = \frac{\Delta t}{2\Omega_{i,j,k}} S_{i,j,k-\frac{1}{2}} (A_{i,j,k-1} - |A_{i,j,k-\frac{1}{2}}|) \quad (15)$$

$$D_{i+1,j,k} = \frac{\Delta t}{2\Omega_{i,j,k}} S_{i+\frac{1}{2},j,k} (A_{i+1,j,k} - |A_{i+\frac{1}{2},j,k}|) \\ D_{i,j+1,k} = \frac{\Delta t}{2\Omega_{i,j,k}} S_{i,j+\frac{1}{2},k} (A_{i,j+1,k} - |A_{i,j+\frac{1}{2},k}|)$$

$$D_{i,j,k+1} = \frac{\Delta t}{2\Omega_{i,j,k}} S_{i,j,k+\frac{1}{2}} (A_{i,j,k+1} - |A_{i,j,k+\frac{1}{2}}|)$$

本スキームでは、陰解法において広く一般に使用されている近似因子化 (AF) 法を式(14)に適用せず、すなわち式(14)の左辺を因子化せずに、緩和法⁵⁾を用いて式(14)を解く。ただし、複合格子

あるいは非構格子への適用を考慮して、緩和法として点緩和法を用いる。このとき、式(14)は次のように変形される。

$$D_{i,j,k}^n \Delta Q_{i,j,k}^n = \Delta t \left[T^n - \frac{1}{\Omega_{i,j,k}} \sum_{i,j,k} (SH)^n \right] \cdot \sigma \\ - \left(D_{i-1,j,k}^n \Delta Q_{i-1,j,k}^n + D_{i,j-1,k}^n \Delta Q_{i,j-1,k}^n + D_{i,j,k-1}^n \Delta Q_{i,j,k-1}^n \right. \\ \left. + D_{i+1,j,k}^n \Delta Q_{i+1,j,k}^n + D_{i,j+1,k}^n \Delta Q_{i,j+1,k}^n + D_{i,j,k+1}^n \Delta Q_{i,j,k+1}^n \right) \quad (16)$$

ここで、 σ は陰的および陽的部分の空間精度の違いを補正するために必要な緩和係数である。ただし、上式右辺の ΔQ には n タイムレベルの値のみを用いてガウス・ザイデル形の緩和を行う。

本オイラー解析スキームでは、近似因子化に伴う誤差がないので、数値計算例において示すように、 10^5 以上のクーラン数においても安定に計算を実行できる。さらに、本陰的風上法をナビエ・ストークス解析スキームへ適用することも可能である⁶⁾。

4. 境界条件

4.1 固体壁境界

圧力以外の非粘性流束を零とする。固体壁上の圧力は壁の法線方向の運動方程式から求める。

4.2 流入境界

境界の外側に仮想セルを設定し、流入条件に対応した物理量をその仮想セルに与え、内部セルの界面と同様に流入境界を扱い、境界上においても2節で述べた projection 及び evolution を行って流束を求める。この方法では、仮想セルとそれに隣接する内部セルの間でリーマン問題を解くことにより境界上の流束が評価されるので、境界での波の反射が抑えられる⁷⁾。

4.3 流出境界

境界条件として等エントロピ流出マッハ数を与え、流入境界と同様に仮想セルを導入して境界上の流束を求める。流入条件と等エントロピ流出マッハ数から、等エントロピの関係式及び連続の式を用いて仮想セル上の物理量を規定する。

5. 数値計算例

5.1 遷音速ダクト

式(16)において体積力項 T を $T = 0$ とすると、本スキームは絶対座標系での三次元オイラー解析が可能となる。本スキームの信頼性を検討するために図1に示すようなダクト内の遷音速流れ解析を行った。このダクトの $x-y$ 面内形状は $Ni^{8)}$ が用いた二次元ダクトの形状と同一であり、 z 方向のダクト幅は一定である。図2に示すように計算格子はH形であり、 x 、 y および z 方向の格子点数は Ni の計算格子に準拠してそれぞれ65、17および5とした。さらに、流入マッハ数および等エントロピ流出マッハ数は0.675とした。

残差の履歴を図3に示す。比較のために時間積分法として3段階ルンゲ・クッタ法を用いた陽的風上解法の残差履歴も示している。本陰的風上解法を用いた計算では、クーラン数を 10^3 とした。 10^5 以上のクーラン数に対しても本陰的風上解法は安定に計算可能であり、本報で提案するスキームは実際に無条件安定であることがわかる。本スキームにおいて陰的および陽的部分の空間精度の違いを補正するために導入した緩和係数 σ の最適値は0.3であった。この値は二次元の場合⁶⁾の最適値0.5より小さく、三次元の場合は二次元と比較して誤差が大きくなる傾向にあり、緩和係数 σ を小さくとる必要があることがわかる。さらに、点緩和を施す際に一方向のみに掃引(sweep)すると、残差が下がらず正しい解が得られないので、各タイムステップ毎に掃引する方向を入れ替える必要がある。なお、定常解の存在する場合の残差履歴として、 x および y 方向の分割数を半分にした格子 ($33 \times 9 \times 5$) に対する残差履歴を図4に示す。この図から、定常解の存在する場合、本スキームでは残差の減少率は単調であることがわかる。図5に本スキームおよび Ni のマルチ・グリッド・スキームにより得られた等マッハ数線図を示す。両者とも良く一致し、スロート部のやや下流側に衝撃波が形成されている様子が鮮明にとらえられており、本スキームの妥当性が定量的にも認められる。

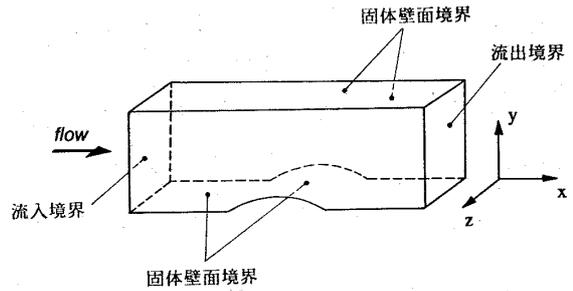


図1 遷音速ダクト

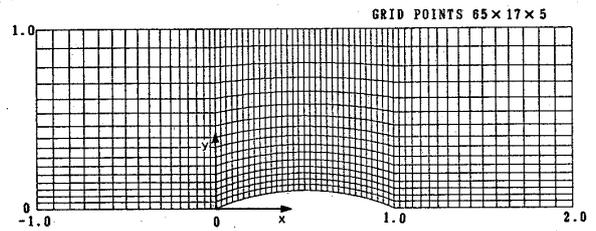


図2 遷音速ダクトの計算格子
(65×17×5)

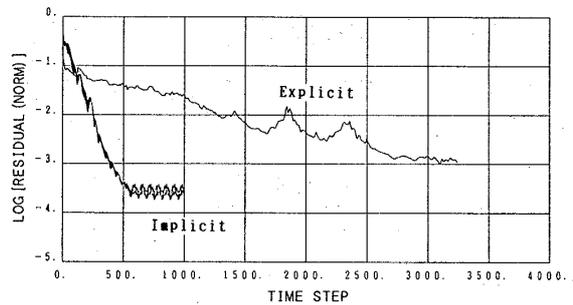


図3 遷音速ダクト流れ解析の残差履歴
(陰的解法および陽的解法)

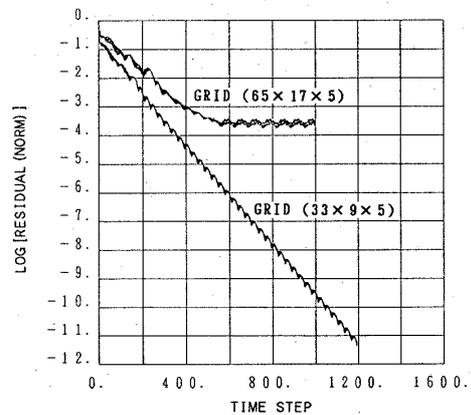
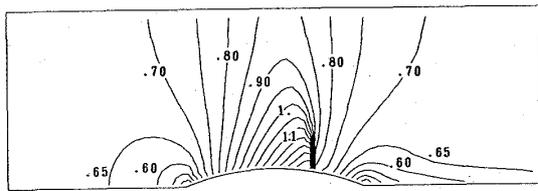
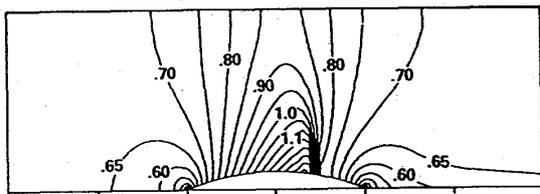


図4 遷音速ダクト流れ解析の残差履歴
(粗い格子 $33 \times 9 \times 5$)



(a) 本スキーム



(b) Niのスキーム⁸⁾

図5 等マッハ数線図

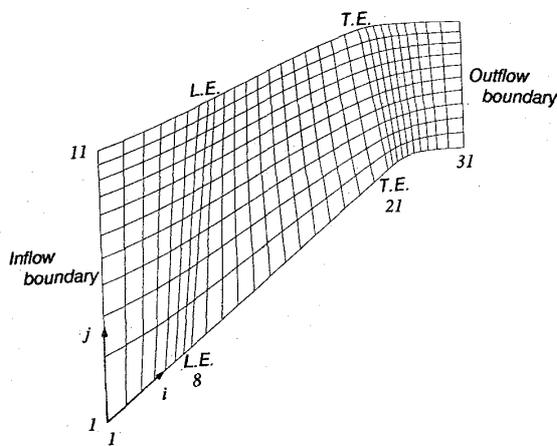


図6 斜流圧縮機羽根車の計算格子
(子午面図, 31×11×11)

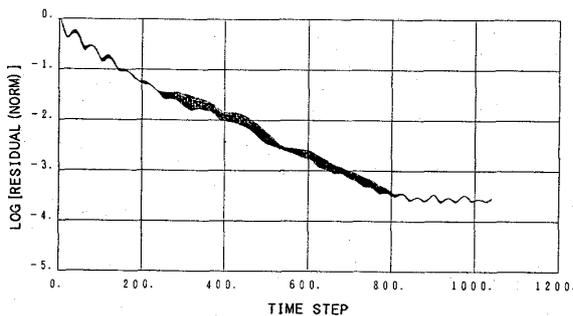


図7 羽根車流れ解析の残差履歴

5.2 斜流圧縮機羽根車

複雑な三次元流れ場に対する本スキームの適用性を調べるために、斜流圧縮機羽根車の三次元オイラー解析に本スキームを適用した。図6に計算格子を示す。流れ方向、スパン方向および周方向の格子点数はそれぞれ31、11、11である。なお、翼先端すきまはないものとして計算を行った。

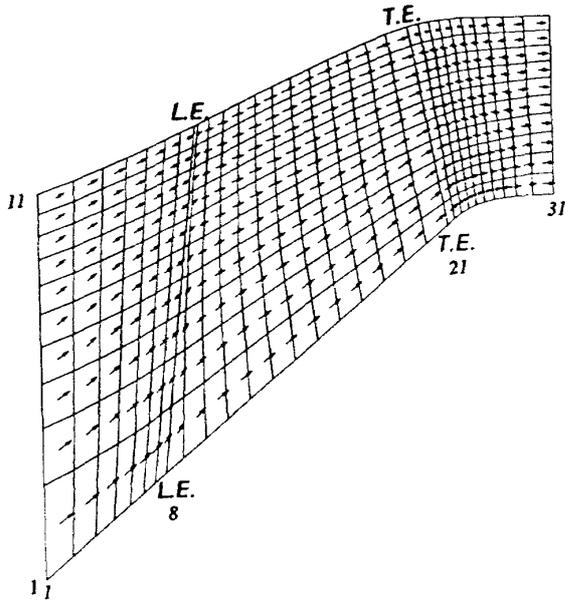
図7に残差の履歴を示す。また、図8に負圧面および正圧面における子午面速度ベクトルを示す。さらに、図9は翼後縁における横断面内の二次流れベクトルを下流から見た図である。図8の正圧面の後縁(T.E.)付近でハブ側に向かう流れが生じていることがわかる。これに対応して、図9では正圧面側においてハブに向かう流れ、負圧面側においてケーシングに向かう流れが生じており、羽根車の回転とは逆巻きの二次流れが認められる。本計算の供試羽根車は流出旋回速度がスパン方向に一定となる渦形式で設計された結果、翼負荷がスパン方向に一様でなくケーシング側で大きくなっている。このスパン方向の翼負荷分布に起因して上述の二次流れは起きており、本スキームはこの三次元効果を正しく評価できていることがわかる。

6. 結 言

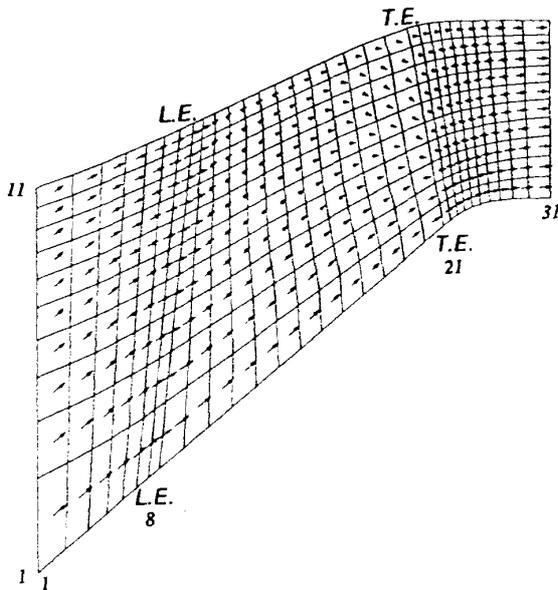
本報では、領域分割格子や非構造格子などの任意の格子に適用できる三次元オイラー方程式の陰的解法として、点緩和法を用いた有限体積形風上解法について述べた。非粘性流束の線形化はスキームの安定性にとって重要であり、Roeの近似リマン解法を用いて評価された非粘性流束の線形化を新たに定式化した。本スキームは近似因子化による誤差を伴わないので実際に無条件安定であり、 10^5 以上のクーラン数でも安定に計算できること、収束過程において残差の減少率は単調であること、陰的部分と陽的部分の空間精度の違いおよび点緩和に伴う誤差を補正するために緩和係数を導入する必要があり三次元問題の場合その最適値は二次元問題の場合よりも小さく0.3程度であること、各繰り返しステップ毎に点緩和の掃引方向を反転する必要のあることがわかった。

参考文献

- 1) Nakahashi, K. and Egami, K. : Proc. of the 12th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics (1990), 342.
- 2) Roe, P.L. : J. Comp. Phys., 143 (1981) .353.
- 3) 古川,ほか2名 : 日本機械学会論文集 (B編) 56巻523号 (1990),609.
- 4) Anderson, W.K., et al. : AIAA Paper, 85-0122 (1985).
- 5) Chakravarthy, S.R. : AIAA Paper, 84-0165 (1984).
- 6) Furukawa, M., et al. : Trans. ASME, J. of Turbomachinery, 114-3 (1992),599.
- 7) Sawada, K., et al. : Mem. of Fac. Eng., Kyoto Univ., 48-2 (1986),240.
- 8) Ni, R.-H. : AIAA J. 20-11 (1982),1565.



(a) 負圧面



(b) 正圧面

図8 子午面速度ベクトル

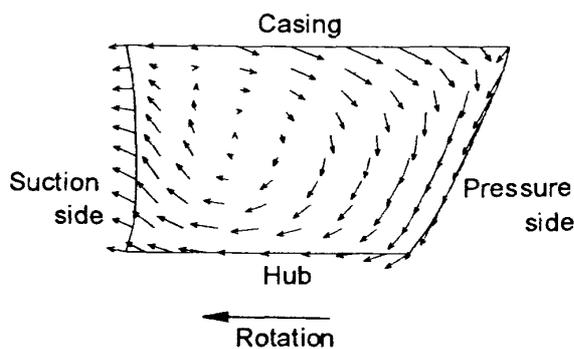


図9 羽根車後縁における二次流れベクトル