

二次流れをともなう管内乱流の相似性

石 垣 博*

Similarity between Turbulent Flows through Curved Pipe and Orthogonal Rotating Pipe

by

Hiroshi ISHIGAKI

Kakuda Research Center, National Aerospace Laboratory.

ABSTRACT

The secondary flow due to Coriolis force takes place when viscous fluid flows through a straight pipe rotating about an axis perpendicular to the pipe axis. This is analogous to the secondary flow due to centrifugal force in the flow through a stationary curved pipe. The quantitative similarities between the two flows are demonstrated for turbulent flow by the similarity arguments and computational study using $k - \varepsilon$ turbulence model. It is demonstrated that the mutual similarity between two flows is established for friction factors and flow patterns.

1. 緒 言

遠心力、コリオリ力、浮力などの体積力が作用する管路内の流れは多くの実用機器に見られる。断面内に体積力が作用する管内流は一般に二次流れを有し、複雑な三次元流動になる。この種の流れに関する従来の研究は曲管（遠心力）、回転管（コリオリ力、遠心力）、水平加熱管（浮力）などの内部流として個別的に扱われてきた。これら二次流れの可視化パターンなどが定性的に似ていることはしばしば指摘されていたが、相互の定量的な関連性を取扱った研究は著者の研究以外には見あたらない。

著者はさきに遠心力が作用する曲管（図1）とコリオリ力が作用する直交回転管（図2）内の完全発達層流をとりあげ、流れの支配パラメータを適切に決定して特性を表示すれば、両者のあいだに相似性（アナロジー）が成立すること、管摩擦係数や熱伝達率は同一の式で記述できることな

どを示した⁽¹⁾。本報告では完全発達乱流においても両者の相似性が成立することを示す。

さて層流においては、基礎方程式に物理的に適切な変換をほどこすことにより、層流の力学的相似パラメータ K_{LC} と λ , K_{LR} と R_0 を導いた。しかし乱流の場合には、未知のレイノルズ応力が存在して基礎式が閉じていないため、この方法はとれない。そこで流体要素に作用する力の比を考え、粘性力に対して経験的仮定を加えながら、 K_L と同じ物理的意味をもつように相似パラメータを誘導した。

その結果、曲管に対しては $K_{TC} = Re^{1/4}/\sqrt{\lambda}$ 、直交回転管に対しては $K_{TR} = Re^{1/4}/\sqrt{R_0}$ が求まった。

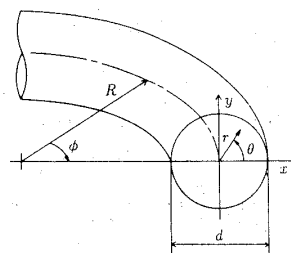


図1 曲管の座標系

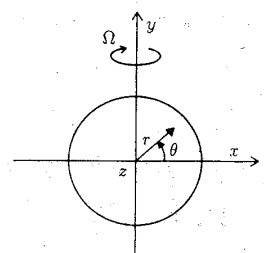


図2 直交回転管の座標系

* 航空宇宙技術研究所 角田支所

層流の経験から類推すれば、 λ と R_0 が8以上であれば流れ特性はそれぞれ K_{TC} と K_{TR} のみで支配され、このときに両者の相似性が成立することが期待される。

本報告では K_{TC} 、 K_{TR} で表示したときに二つの流れの管摩擦係数がたがいに一致すること、流れパターンが相似な特性をもつことを既存の実験データと壁関数型 $k-\epsilon$ モデルを用いた数値計算により明らかにする。

2. 主な記号

K_{LC}	: ディーン数、曲管の層流特性数	$= Re/\sqrt{\lambda}$
K_{LR}	: 直交回転管の層流特性数	$= Re/\sqrt{R_0}$
K_{TC}	: 曲管の乱流特性数	$= Re^{1/4}/\sqrt{\lambda}$
K_{TR}	: 直交回転管の乱流特性数	$= Re^{1/4}/\sqrt{R_0}$
Re	: レイノルズ数	$= w_m d/\nu$
R_0	: ロスビー数	$= w_m/\Omega d$
λ	: 曲管の曲率パラメータ	$= R/d$

3. 力学的相似パラメータ

曲管内の層流特性数 K_{LC} は(慣性力/粘性力)と(遠心力/粘性力)の積の平方根である。前者は Re 、後者は Re/λ であるから、 $K_{LC} = Re/\sqrt{\lambda}$ となる。 λ は(慣性力/遠心力)の意味をもつ。遠心力をコリオリ力におきかえれば、 K_{LC} と λ に対応するものとして、 K_{LR} と R_0 が得られる。

乱流になっても慣性力と体積力は同じ形で表わされ、粘性力のみが異なる。そこで経験知識を利用して粘性力を表示すれば、 K_L と同じ物理的意味を有するものとして $K_{TC} = Re^{1/4}/\sqrt{\lambda}$ 、 $K_{TR} = Re^{1/4}/\sqrt{R_0}$ が得られる。 λ と R_0 は乱流でもそのまま使える。

4. 基礎式と数値解法

図1、2に示すように円管に固定して座標をとり、管軸を z 軸とする。曲管の曲率半径 R は円管直径 d に比して大きいと仮定する($\lambda > 8$)。回転直管は y 軸のまわりに一定角速度 Ω で回転し、回転の向きは x 軸から z 軸へ向かうとする。これら管内の流れが定常、非圧縮性の乱流であるとすれば、(r, θ, z)方向の速度成分を(V_r, V_θ, V_z)として、完全発達領域の基礎方程式は対流項、拡散項の $\partial/\partial z$ をゼロとおいて次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\rho V_r^2 - \mu_{eff} \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[\rho V_\theta V_r - \mu_{eff} \frac{\partial V_r}{r \partial \theta} \right] = F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + S_r, \quad (2)$$

ここに

$$S_r = \frac{\rho V_\theta^2}{r} - \mu_{eff} \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_T \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\mu_T \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\mu_T V_r}{r^2} - \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\mu_T \frac{V_\theta}{r} \right),$$

$$F_r = \frac{\rho V_\theta^2}{R} \cos \theta \quad (\text{曲管}),$$

$$F_r = 2\rho\Omega V_z \cos \theta \quad (\text{直交回転管})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\rho V_r V_\theta - \mu_{eff} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[\rho V_\theta^2 - \mu_{eff} \frac{\partial V_\theta}{r \partial \theta} \right] = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + S_\theta, \quad (3)$$

ここに

$$S_\theta = -\frac{\rho V_r V_\theta}{r} + \mu_{eff} \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_T \frac{\partial V_r}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\mu_T \frac{\partial V_\theta}{r \partial \theta} \right) + \frac{2V_r}{r^2} \frac{\partial \mu_T}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \mu_T}{\partial r} + \frac{\mu_T}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta},$$

$$F_\theta = -\frac{\rho V_\theta^2}{R} \sin \theta \quad (\text{曲管}),$$

$$F_\theta = -2\rho\Omega V_z \sin \theta \quad (\text{直交回転管})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\rho V_r V_z - \mu_{eff} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\rho V_\theta V_z - \mu_{eff} \frac{\partial V_z}{r \partial \theta} \right] = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + S_z, \quad (4)$$

ここに

$$S_z = 0$$

$$F_z = 0 \quad (\text{曲管}),$$

$$F_z = -2\rho\Omega(V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta) \quad (\text{直交回転管})$$

式(2)~(4)の $\mu_{eff} = \mu + \mu_T$ は有効粘性係数、 μ_T は乱流粘性係数である。

$k-\epsilon$ モデルでは μ_T は乱れエネルギー k とその散逸率 ϵ の局所値から決まると仮定する。

$$\mu_T = C_\mu \rho k^2 / \epsilon \quad (5)$$

k と ϵ は次の輸送方程式から求める。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\rho V_r k - \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[\rho V_\theta k - \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{r \partial \theta} \right] = G - \rho \epsilon, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\rho V_r \varepsilon - \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[\rho V_\theta \varepsilon - \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \theta} \right] = C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (7)$$

ここに

$$G = \mu_T \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{r \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right)^2 - \frac{2V_\theta}{r} \left(\frac{\partial V_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{2V_r}{r} \left(\frac{V_r}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{V_\theta}{r} \right)^2 \right]$$

モデル定数は標準的な次の値である。

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

k, ε の壁境界条件は次の壁関数で与える。

$$\begin{aligned} \tilde{V}_P^+ &= \frac{\tilde{V}_P}{\tilde{V}_r} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey_P^+) \\ k_P &= \sqrt{C_\mu} \tilde{V}_r^2 \\ \varepsilon_P &= \tilde{V}_r^3 / (\kappa y_P) \end{aligned}$$

添字 P は壁近傍格子点、 \sim は壁に平行な成分の合成量を示す (たとえば $\tilde{V} = \sqrt{V_\theta^2 + V_z^2}$)。

数値計算プログラムは Patankar の本⁽⁹⁾に準拠して作成したものである。すなわち有限体積法、スタガード格子、べき乗スキーム、SIMPLE 法を用いている。

図3は事前確認のために行なった二次流れのない静止直円管の計算結果である。格子点数 20×20 (等間隔) と 21×17 (壁近傍で密な不等間隔) の2種類の結果を示してある。 21×17 では Re が 5×10^4 より小さくなると、壁に隣接する格子点が粘性底層の中に入り、壁関数の妥当性が失われる。 20×20 による静止直円管の計算結果は $Re = 10^4 \sim 10^8$ の範囲で既存の実験式 (Blasius, Karman-Nikradse, Petukhov) と非常によく一致している。以下に示す二次流れのある場合の計算結果は 20×20 の格子点数で行なったものである。

5. 管摩擦係数

図4に乱流管摩擦係数 f の実験式と計算値を比較したものを示す。伊藤⁽²⁾の曲管実験式 (実線) と、伊藤-南部⁽³⁾の直交回転管実験式 (破線) を K_{TC}, K_{TR} で書きなおして比較すると両者はほとんど一致することがわかる。また壁関数型 $k-\varepsilon$ 乱流モデルを用いた計算結果も一線に重なり、かつ実験式ともほとんど一致している。

6. 流れのパターン

特性数を $K_{LC} = K_{LR}$ にとったとき、2つの流れパターンがどの程度の相似性を示すかを見る。図5は無次元化した軸速度と二次流線の等高線を K_T の小、中、大について示したもので、上半部が曲円管、下半部が直交回転円管の計算結果である。

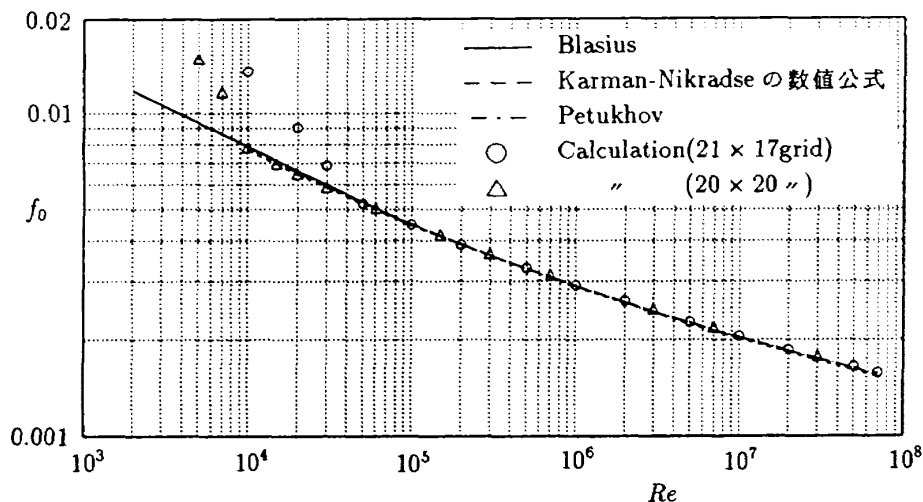


図3 非回転直円管の計算値と実験式の比較

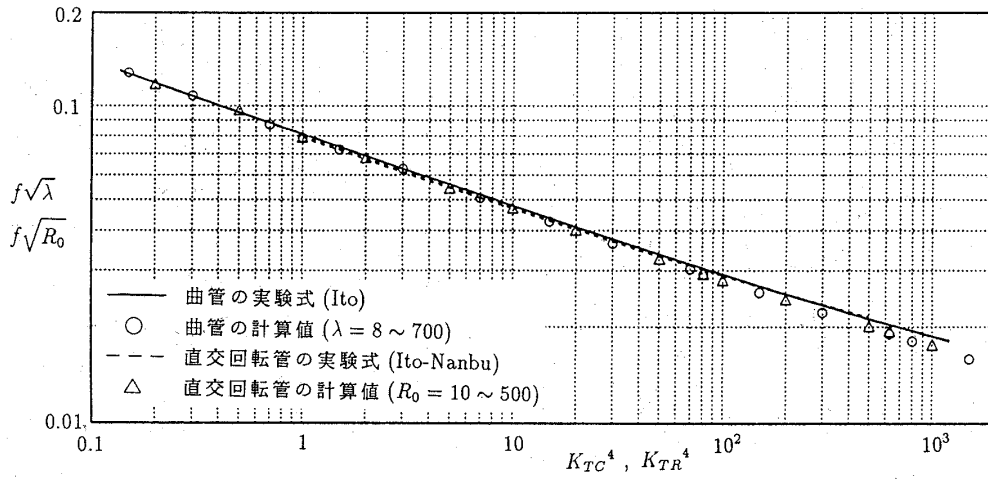


図4 二つの流れの乱流管摩擦係数(実験式と計算値)

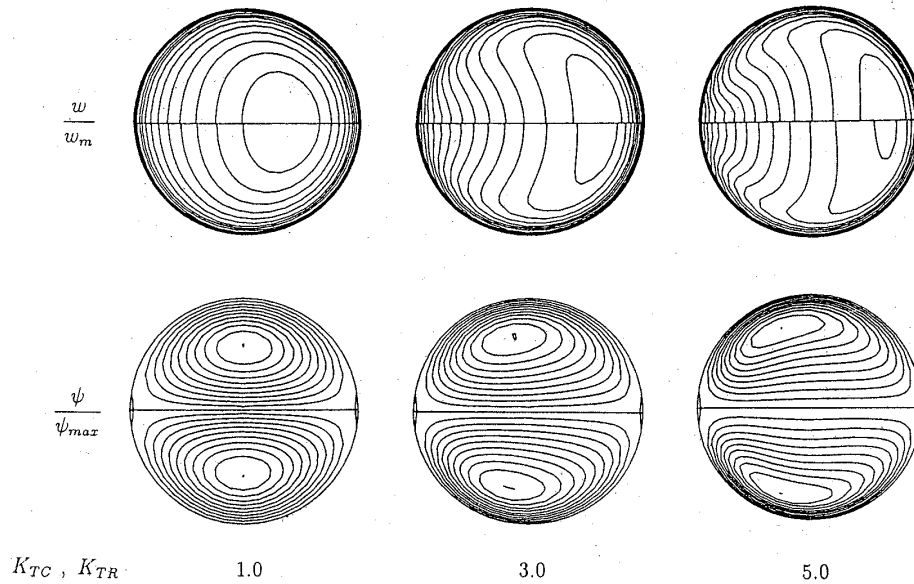


図5 軸速度、二次流線の等高線(上半部は曲円管、下半部は直交回転円管)

K_T のそれぞれの値について両者の分布が相似であること、とくに二次流線についてはほとんど一致していることがわかる。

(3) Ito, H. & Nanbu, K.(1971) Trans ASME. J. Basic Engng., 93, pp.383.

7. あとがき

二次流れをともなう二つの流れ、すなわち曲管と直交回転管内の乱流流動特性についてしらべ、両者のあいだに相似性があることを示した。

引用文献

- (1) 石垣, 機械学会論文集 58-550-B(1992), 1669.
- (2) Ito, H.(1959) Trans ASME. J. Basic Engng., 81, pp.123.