

二次流れをともなう管内層流助走流れの相似性 (曲管と直交回転管)

石垣 博*

Mutual Similarity of Developing Laminar Flows with Secondary Streams in Ducts. (Curved Pipe Flow and Orthogonal Rotating Pipe Flow)

by

Hiroshi ISHIGAKI
Kakuda Research Center, National Aerospace Laboratory.

ABSTRACT

Similarity between the developing laminar flows in a curved pipe and an orthogonally rotating pipe is discussed. Two nondimensional parameters and nondimensional axial distance Z are obtained properly for each flow. When the second parameters become large, computational results show that friction factors, flow patterns and flow characteristics become very similar for same value of K_L and Z .

1. 緒 言

遠心力、コリオリ力などの体積力が作用する管路内の流れは多くの実用機器に見られる。断面内に体積力が作用する管内流は一般に二次流れを有し、複雑な三次元流動になる。流れパラメータおよび流入条件に対して、このような流れが管入口から完全に発達するまでの助走区間において、どのような発達特性をもつのかをしらべることは基礎的、実用的に重要な課題である。

遠心力が作用する曲管内助走流れの実験測定は放物分布で流入する条件については Austin⁽¹⁾、一様分布の流入条件については Agrawal ら⁽²⁾によって行われている。また曲管内層流助走流れの数値解析は Patankar ら⁽³⁾、Austin ら⁽⁴⁾、Soh-Berger⁽⁵⁾、Humphrey ら⁽⁶⁾、秋山ら⁽⁷⁾、Ishigaki ら⁽⁸⁾によって行われている。他方、コリオリ力が作用する直交回転管内助走流れの数値解析は Skiadarresis ら⁽⁹⁾、

Ishigaki ら⁽¹⁰⁾によって行われている。

しかしこれらの実験あるいは計算の結果はすべて、管軸方向距離として z/d あるいは曲り角度で表示されているので、解は単なる計算例にとどまっていて、一般的な結論を導くに至っていない。これらの流れについても、静止直管の $Z^+ = (z/d)/Re$ のような力学的相似をあらわす軸方向無次元距離で表示すれば、一般性のある発達特性が記述できるはずである。本研究では相似性の議論により標記の二つの流れにおける軸方向無次元距離 Z_C 、 Z_R を求め、これを用いて計算結果を整理する。

ところで著者はさきに、曲管と直交回転管内層流の完全発達流を解析して、各2つの無次元数を適切に決定し、これを用いて表示すれば、2つの流れのあいだに相似性(アナロジー)が成立すること、管摩擦係数や熱伝達率は共通の式で記述できること、などを示した⁽¹¹⁾。本研究では文献(11)

* 航空宇宙技術研究所 角田支所

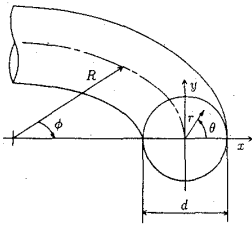


図1 曲管の座標系

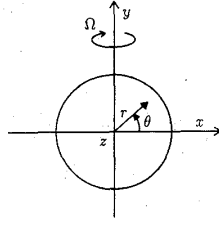


図2 直交回転管の座標系

の議論をさらに発展させて、 Z_C 、 Z_R を用いれば、管入口から完全発達領域のあいだの助走区間の流れにおいても $K_{LC} = K_{LR}$ のときの両者の相似性が成立することを示す。

2. 主な記号

d	: 円管の内直径
f	: 曲管あるいは直交回転管の管摩擦係数
K_L	: K_{LC} 、 K_{LR} の総称
K_{LC}	: 曲管の層流特性数, デーン数 $= Re/\sqrt{\lambda}$
K_{LR}	: 直交回転管の層流特性数 $= Re/\sqrt{R_0}$
\bar{p}	: 管断面平均圧力
p	: 管断面内圧力変化
\bar{p}^*	: 直交回転管の断面平均換算圧力 $= \bar{p} - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 z^2$
p^*	: 直交回転管の断面内換算圧力変化 $= \bar{p} - \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 \cos^2\theta$
R	: 曲管の曲率半径
Re	: レイノルズ数 $= w_m d/\nu$
R_0	: ロスビー数 $= w_m/\Omega d$
w_m	: 管内平均流速
Z	: Z_C 、 Z_R の総称
Z_C	: 曲管の z 方向無次元距離 $= R\phi/(d\sqrt{\lambda})$
Z_R	: 直交回転管の z 方向無次元距離 $= z/(d\sqrt{R_0})$
λ	: 曲管の曲率パラメータ $= R/d$
Ω	: 直交回転管の回転角速度

3. 曲管の基礎方程式と軸方向無次元距離

図1に示すように、曲管に固定して円環座標(r, θ, ϕ)をとる。速度成分を(u, v, w)とし、流れは定常、非圧縮の層流であり、さらに曲率比 $\lambda = R/d$ は十分に大きいと仮定する($\lambda > 8$)。

$z = R\phi$ として、入口にごく近い $z \sim 0(d)$ の領域を除けば、流れは連続式と z 方向の拡散項を無視した放物化Navier-Stokes式とにより記述される。

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{w^2 \cos^2 \theta}{R} + \nu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{w^2 \sin \theta}{R} + \nu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \quad (4)$$

ここに

$$p(r, \theta, z) = \bar{p}(z) + p(r, \theta)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

完全発達流と同様の二次流れの速度スケールを考慮した次の相似変換を考える。

$$\tilde{u} = \frac{u}{w_m} \sqrt{\lambda}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{w_m} \sqrt{\lambda}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{w_m}, \quad \tilde{p} = \frac{p\lambda}{\rho w_m^2},$$

$$\tilde{\bar{p}} = \frac{\bar{p}}{\rho w_m^2}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{d}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{d\sqrt{\lambda}} \quad (5)$$

この変換を施すと式(2)~(4)は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{r}\tilde{u}) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}(\tilde{r}\tilde{w}) = 0$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{r}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{w}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{K_{LC}} \left(\nabla^2 \tilde{u} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right), \quad (6)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{r}} = -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} - \tilde{w}^2 \sin \theta + \frac{1}{K_{LC}} \left(\nabla^2 \tilde{v} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right), \quad (7)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\partial \tilde{\bar{p}}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{K_{LC}} \nabla^2 \tilde{w}, \quad (8)$$

上式から式(5)の形で表示すれば、 $\lambda > 8$ の曲管層流助走区間の特性はデーン数 K_{LC} だけで決定されることがわかる。このときの変換(5)の \tilde{z} が本研究で用いる軸方向無次元距離 Z_C になる。

4. 直交回転管の基礎式と軸方向無次元距離

紙数の都合により直交回転管(図2)の基礎式と相似性の議論は省略するが、概要は文献(1)を参照していただきたい。このときの変換は式(5)の λ を R_0 におきかえたもので、 K_{LC} に相当するものは K_{LR} 、直交回転管の軸方向無次元距離 Z_R は $z/d\sqrt{R_0}$ になる。無次元数の物理的意味を説明すれば、 K_{LR} は(慣性力/粘性力)×(コリオリ力/粘性力)の平方根であり、 R_0 は(慣性力/コリオリ力)の平方根である。

り力)をあらわす。 K_{LR} と R_0 のコリオリ力を遠心力におきかえれば、曲管の K_{LC} と λ になる。

文献(12)、(13)の相似性の議論と文献(11)の経験から、 λ 、 $R_0 > 8$ の場合に二つの流れ特性の軸方向変化を Z_C 、 Z_R で表示すれば、 K_{LC} と K_{LR} の同じ値に対して、二つの助走流れのあいだに相似性が成立することが期待される。

図3と4は計算結果の信頼性を確認するため、曲管助走流れについてのAustin⁽¹⁾およびAgrawalら⁽²⁾実験条件に合わせて行なった計算結果を示したもので、計算は実験結果をよく再現していることがわかる。

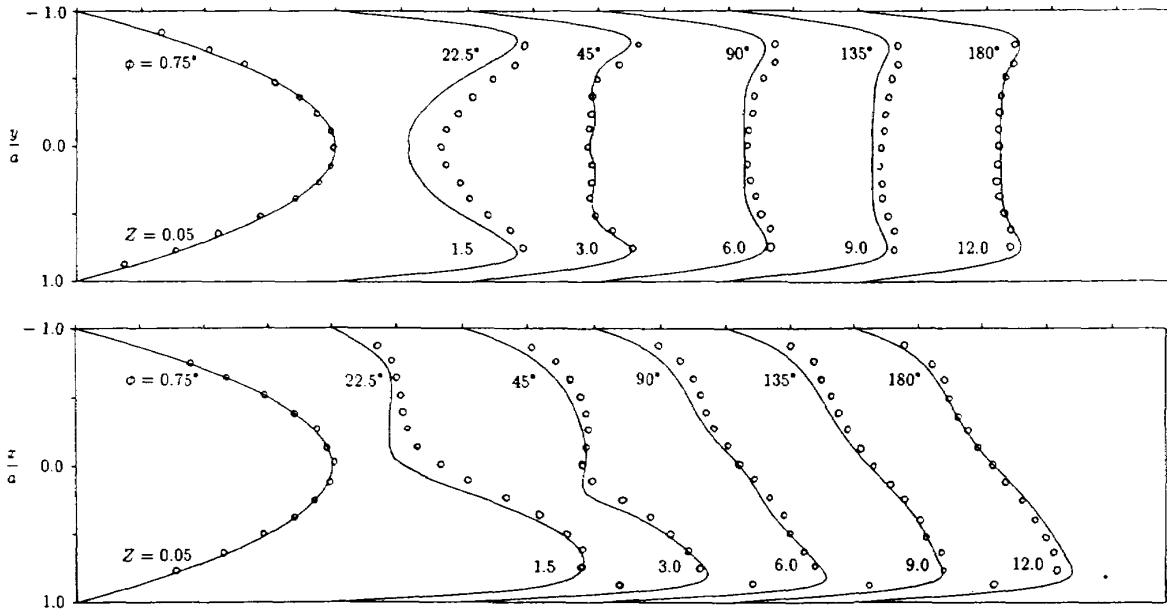


図3 曲管実験データとの比較 $K_{LC} = 526$, $\lambda = 14.55$, $KUIN = 1$
 ○ Austinの実験データ

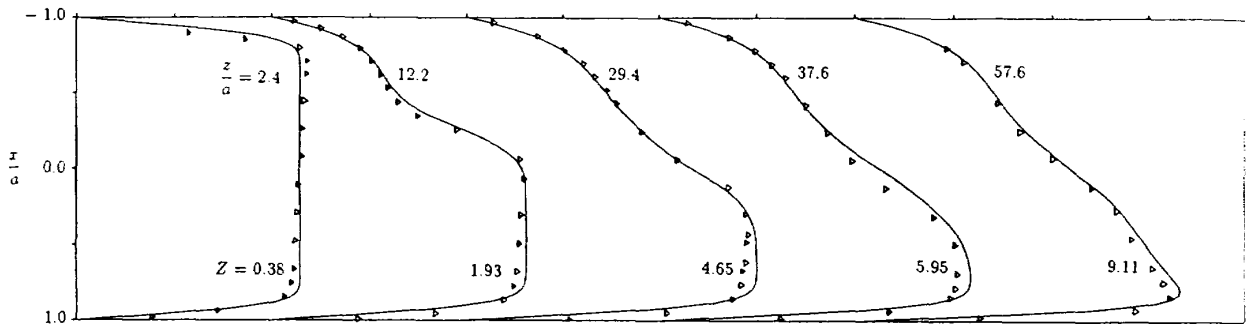


図4 曲管実験データとの比較 $K_{LC} = 800$, $\lambda = 10$, $KUIN = 0$
 △ Agrawal, Talbot & Gongの実験データ

5. 数値解法

計算に使用したプログラムは二次流れをとまなう管内流についての著者らの一連の研究で用いているもので、Patankar⁽¹⁴⁾の著書を参考にして作成したものである。有限体積法、スタガード格子、べき乗スキーム、SIMPLE法を用いている。計算は x 軸に関する流れの対称性を仮定して、半断面について行なった(不等間隔格子の点数 32×27)。

6. 流れの発達の様子

流れ発達の様子を示す計算例として、 $K_{LC} = K_{LR} = 500$ 、 $\lambda = R_0 = 20$ の場合の軸速度等高線の変化を示す。図5、6の上半部は曲管、下半部は直交回転管である。

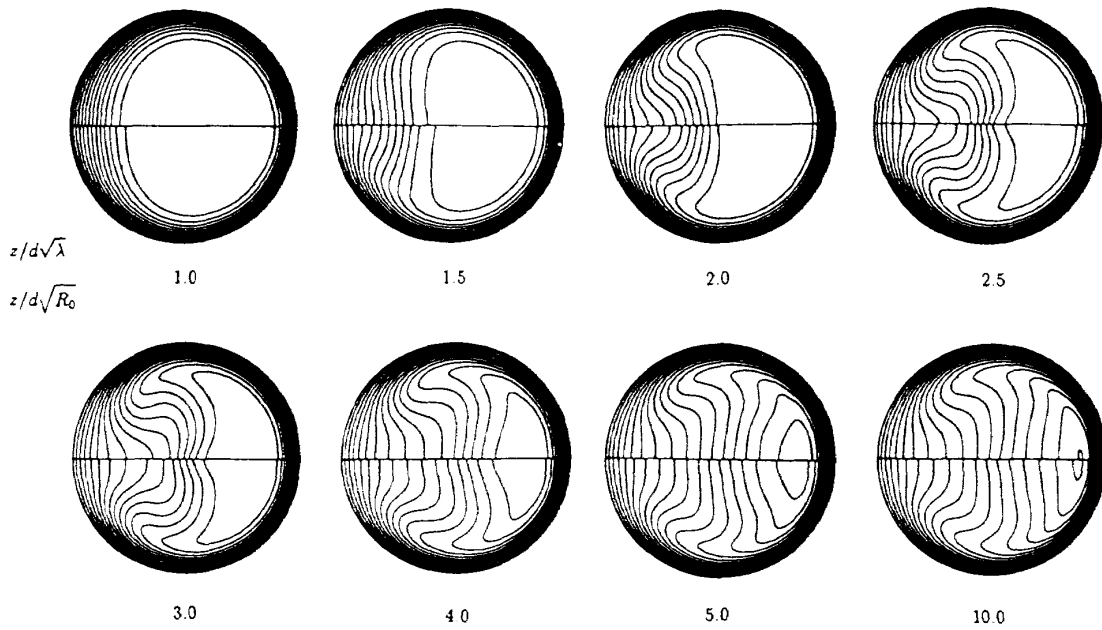


図5 軸速度等高線の変化(上半部は曲円管, 下半部は直交回転円管)
 $K_L = 500$, $\lambda = R_0 = 20$, 入口速度分布は一様流れ.

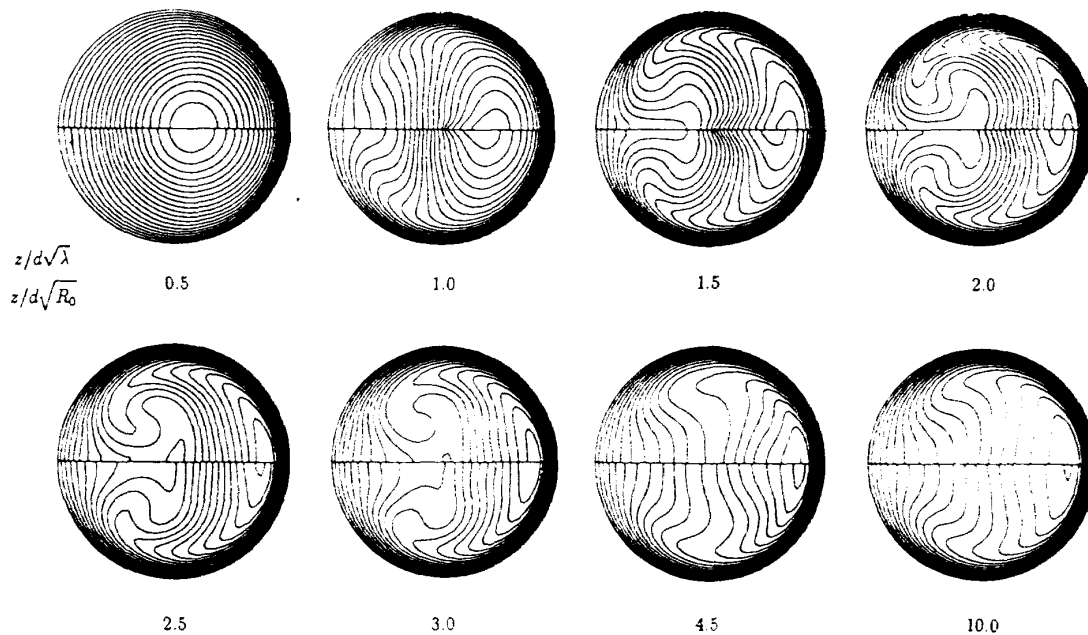


図6 軸速度等高線の変化(上半部は曲円管, 下半部は直交回転円管)
 $K_L = 500$, $\lambda = R_0 = 20$, 入口速度分布はポワズイユ流れ.

図5は一様速度分布で流入した場合の結果であり、壁近くを $\theta = 0^\circ$ から 180° に向かい、 $\theta = 180^\circ$ で合流して x 軸上を $\theta = 0^\circ$ の壁に還流する二次流れが、壁境界層内の低速流体を中心コア部に押し出していく様子がわかる。 $Z = 10$ では完全に発達した状態になっている。

図6は完全発達直管流のポワズイユ分布で流入した場合で、この場合の発達の様子は図5の一様流入よりもダイナミックである。体積力は w^2 ある

いは w に比例するため、一様速度の場合とはちがって各位置に作用する力の大きさが異なる。そのために低速部がコアに深く入りこみ、マッシュルーム状の等高線パターンをつくる。

以上の図5と6から Z の同じ値に対して、上半部の曲管と下半部の直交回転管の流れパターンは、体積力項のちがいにもかかわらず、全体としてよく似た経過をたどりながら発達することがわかる。

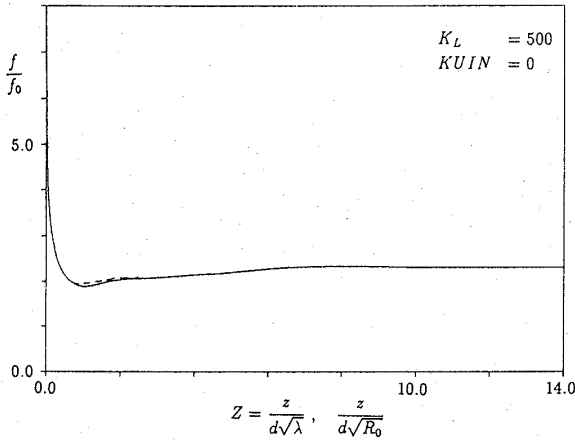


図7 壁摩擦係数の変化(一様流入)
—— 曲管 --- 直交回転管

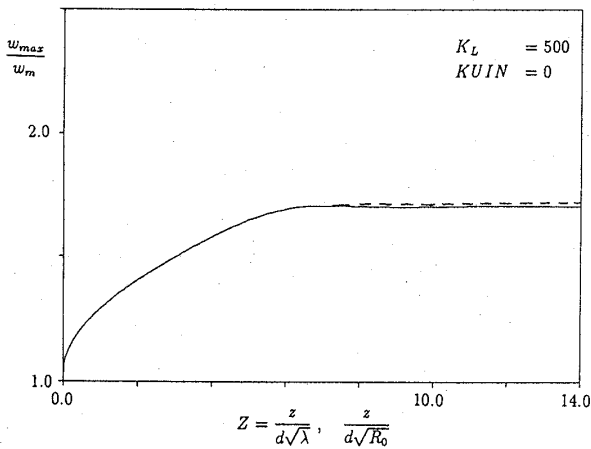


図8 最大軸速度の変化(一様流入)

7. 流れ特性

二つの流れ特性の軸方向変化が定量的にどの程度相似であるかを $K_L = 500$ 、一様流入の場合を例にとって示す。図7はFanningの管摩擦係数 f (壁面摩擦の周平均値) を f_0 (静止直円管の値) で無次元化した f/f_0 を Z で表示したもので、二つの流れの値は $1 < Z < 3$ でわずかに異なるだけである。図8は軸速度の最大値 w_{max} を平均流速 w_m で無次元化したもの、図9は二次流れの最大速度 V_s を変換(5)にしたがって無次元化したものである。図7~9は二つの流れ特性のあいだの相似性も定量的によい精度で成立することを示している。

8. あとがき

曲管と直交回転管内層流助走区間の力学的相似をあらわす軸方向無次元距離 Z_C , Z_R をもとめ、 λ と R_0 が8以上のときに曲管流を K_{LC} と Z_C 、直交回転管内流と K_{LR} と Z_R で表わせば、 $K_{LC} =$

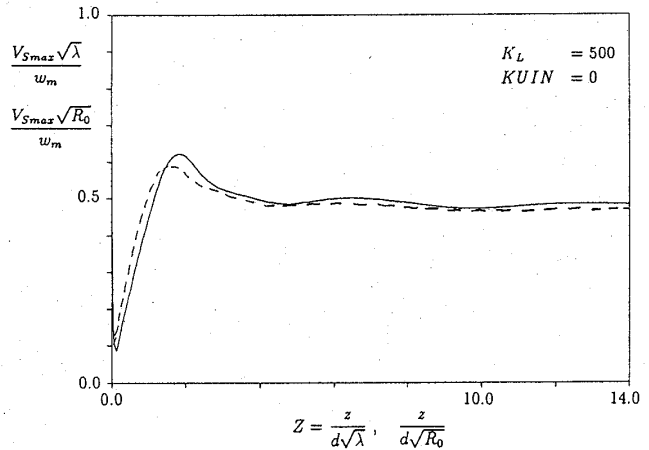


図9 二次流れ $V_S = \sqrt{u^2 + v^2}$ の最大値 V_{Smax} の変化(一様流入)

K_{LR} , $Z_C = Z_R$ に対して定量的な相似性が成立することを示した。

引用文献

- (1) Austin, L. R., Ph. D Thesis, (1971) Univ. of Utah.
- (2) Agrawal, Y., Talbot, L. and Gong, K., J. Fluid Mech. 85(1978) 497.
- (3) Patankar, S. V., Prapat, V. S. and Spalding, D. B., J. Fluid Mech. 62(1974). 532.
- (4) Austin, L. R. and Seader, J. D., AIChE J. 20(1974) 820. 978) 497.
- (5) Soh, W. Y. and Berger, S. A., J. Fluid Mech. 148(1984) 109.
- (6) Humphrey, J. A. C., Iacovides, H. and Launder, B. E., J. Fluid Mech. 154(1985) 357.
- (7) 秋山・ほか4名, 機論 50-452, B(1984) 990.
- (8) Ishigaki, H. & Ueda, S., Int. Symp. CFD Nagoya (1989), p.867.
- (9) Skiadaressis. D and Spaldeng, D. B., Imperial College Heat Transfer Report, HTS/77/3, (1977), 1.
- (10) Ishigaki, H. & Tamura, H., The 3rd Japan-China Joint Conference on Fluid Machinery, (1990) II-267.
- (11) 石垣, 機論, 58-550-B(1992), 1661.
- (12) 石垣・山田, 機論 57-544-B(1991), p.54.
- (13) 石垣・田村, 機論 57-540-B(1991), p.43.
- (14) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980), Hemisphere.

