

長方形管流の不安定性と乱流二次流の発生

巽 友正* 吉村 卓弘**

Instability of the Flow in a Rectangular Duct and Generation of the Turbulent Secondary Flow

Tomomasa TATSUMI
Kyoto Institute of Technology

Takahiro YOSHIMURA
Information System Developments, Hitachi Ltd.

ABSTRACT

Nonlinear instability of the laminar flow in a rectangular duct is investigated extending the method for linear stability of the flow (Tatsumi & Yoshimura (1990)). The cross-sectional flow of the turbulent secondary flow is obtained as one of the velocity fields due to the zero-wave-number component of the disturbance of finite amplitude.

Key Words: secondary flow, nonlinear instability, duct flow

1. 長方形管内の乱流二次流

長方形管内の乱流における二次流の存在は、すでに Prandtl (1927) によって指摘されており、“乱流二次流”は、最も古くから知られた乱流の秩序構造であるといえる。しかしながら、その理論的解明は、長方形管流の流体力学的安定性の取扱いの難しさのために、最近まで試みられなかった。乱流の実用的計算には各種の乱流モデルが用いられるが、“乱流二次流”を再現することは乱流モデルにとって困難な仕事の一つであり、また、それを理論的に予知することはモデルとしての性格上無理であることは言うまでもない (Bradshaw (1987))。

著者たちは、この“乱流二次流”を、長方形管内の層流の非線形不安定性に基づく有限振幅攪乱の 0 波数成分として捉え、この攪乱を求める第一段階として、層流の線形安定性を調べ、その結果を第 8 回研究会において報告した (巽と吉村 (1991))。

今回は、この層流の非線形安定性問題の定式化と、少数個の Fourier 成分のみを考慮した近似における有限振幅攪乱の時間的发展を調べた結果について報告する。主要な結

果として、これまで実験的に観測された乱流二次流の断面内流線図に極めてよく似た流線図が、予想通り、有限振幅攪乱の 0 波数成分として得られた。面白いことに、0 波数成分が作る断面内流線図は、この他にもう 2 種類のものがある。これらの結果のさらに詳しい解析は、今後の問題である。

2. 長方形管流の非線形不安定性

直角座標 $x=(x, y, z)$ の x 軸を管軸の方向にとり、 y 軸と z 軸をそれぞれ長方形断面の短辺と長辺に平行にとる。短辺の長さを $2L$ 、長辺の長さを $2AL$ ($A \geq 1$) とし、すべての長さを L で無次元化する。管軸上の層流の速度を U_0 とし、すべての速度を U_0 で無次元化すると、層流の速度は、

$$U(x) = (U(y, z), 0, 0), U(0, 0) = 1 \quad (1)$$

のように表わされ、層流の Reynolds 数は、 $R = U_0 L / \nu$ (ν : 流体の動粘性率) で定義される。

層流(1)に加わる攪乱として、 x 軸方向に波数 $\alpha (> 0)$ の正弦波攪乱、

$$\hat{u}(x, t) = u(y, z) \exp [i\alpha(x - ct)] \quad (2)$$

を考える。ここに、 c は複素数 $c = c_r + ic_i$ で、 c_r は攪乱の位相速度を、 αc_i は対数増幅率を表わす。 $c_i > 0$ のとき、攪乱は時間的に増大するから層流は不安定となり、 $c_i < 0$ の

* 京都工芸繊維大学

** 日立製作所・情報システム開発本部

とき、攪乱は減衰するから層流は安定である。

攪乱(2)の振幅が微小である場合の層流(1)の線形安定性は、すでに著者らによって詳しく調べられ、攪乱にはパリティに関する4つのモード、I, II, III, IVが存在すること、層流はモードIおよびIIの攪乱に対し不安定で、IIIおよびIVの攪乱に対して安定であることなどが示された(Tatsumi & Yoshimura (1990))。

これに対して、(2)の形の攪乱が有限の大きさにまで成長したとすると、流体力学方程式の非線形性のために、高波数および0波数成分が発生し、攪乱はFourier級数、

$$\hat{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_n \mathbf{u}_n(y, z, t) \exp[in\alpha x] \quad (3)$$

の形をとる。ここに、 n はすべての整数値をとるものとする。左辺が実数であるために、 \mathbf{u}_n は条件 $\mathbf{u}_{-n} = \mathbf{u}_n^*$ (*は共役複素数を表す)を満たさなければならない。

攪乱(3)の波形を限定して、

$$\hat{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_n \mathbf{u}_n(y, z) \exp[in\alpha(x - ct)] \quad (4)$$

とおくと、すべての波数成分が同一の位相速度で伝播する波束形の攪乱を考えることになる。

(3), (4)のいずれの型の攪乱を考えるにせよ、攪乱の軸方向における平均値は0波数成分 \mathbf{u}_0 に一致し、

$$\langle \hat{u} \rangle = \mathbf{u}_0(y, z, t) \quad (5)$$

となるから、 \mathbf{u}_0 が乱流二次流に相当する縦渦を表わすことは明かであろう。また、乱流の平均流は、

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{U} + \hat{\mathbf{u}} \rangle = \mathbf{U}(y, z) + \mathbf{u}_0(y, z, t) \quad (6)$$

のように、層流と攪乱の0波数成分との和で表わされるから、二次流を含む乱流の平均速度分布は、 \mathbf{u}_0 が分かれば直ちに求められる。

3. 乱流二次流

前の報告(巽と吉村(1991))においても述べたように、長方形管の乱流二次流に関する実験と数値計算は、ほとんどが $A=1$ の正方形管の場合に限られている。このため、本報告も $A=1$ の場合に限定することとする。この場合、層流は微小攪乱に対しては安定であることが知られているが、ここでは、十分大きな攪乱に対しては、層流が非線形不安定となることを期待する。

非線形安定性と不安定性との境界として中立状態には、平衡状態と臨界状態とがある。いま、攪乱の振幅を a とすると、Reynolds数 R 、波数 α 、振幅 a を3つの座標軸とする空間において、中立状態に対応する曲面を考えれば、中立曲面上の上半面は平衡状態に、下半面は臨界状態に対応する。したがって、平衡振幅は常に臨界振幅よりも大きい。

もし、攪乱の初期振幅を0から徐々に上げていったとすると、まず臨界振幅が見出され、つぎに、臨界振幅以上の初期振幅に対して平衡振幅が見出されるという順序になるものと思われる。このような予想のもとに、(3)の形の一般型非線形攪乱について、さまざまな初期攪乱から出発した

場合の時間発展を追跡する。

計算の都合上、(3)の無限級数は有限項 $n=\pm N$ で打ち切り、さらに、 $N=1$ または2、ととることにする。このことは、一見乱暴な近似のようであるが、非線形安定性理論ではしばしば用いられる近似である。事実、 $A \rightarrow \infty$ の極限である二次元Poiseuille流の場合には、平衡および臨界振幅を与える中立曲面は、 $N=1$ または2ですでに定性的に正しい結果が得られており、 $N=3, 4$ は量的な補正を与えるに過ぎないことが知られている(Herbert(1977))。

ここでは、 $N=1$ 、すなわち $n=-1, 0, 1$ の3波数成分、実質的には、0, 1の2成分を取り、それらに対する発展方程式を $\alpha=1.0$ 、 $R=1000, 2000, 3000$ について、さまざまな初期攪乱に対して解いた。

初期攪乱としてはモードIをとり、さまざまな初期振幅 a のもとに解の時間発展を追跡したところ、 $R=3000$ では、 $a=0.0115$ に対して中立状態への漸近が見られたが、 $R=1000$ および2000では、どのような a の値に対しても中立状態は見出されなかった。このことから、中立曲面上のReynolds数の最小値である非線形臨界Reynolds数 R_{nc} は、2000と3000の間にあるものと推定される。

中立曲面をさらに詳細に確定するには、一般型の攪乱(3)に対する発展方程式を解くのは時間がかかるので、より限定された攪乱(4)に対する固有値方程式を解くのが効率的である。この作業は現在進行中であり、次の機会に報告することとしたい。

さて、本研究の主目標である乱流二次流についてであるが、以上の攪乱の時間発展の経過から分かったことは、攪乱の0波数成分の断面内流線の模様が、もっぱら初期攪乱のモードによって決まり、Reynolds数 R 、波数 α 、初期振幅 a 、時間 t などにはほとんど影響されないということである。

例として、初期攪乱のモードI(=IV)、II、IIIに対する攪乱の0波数成分の断面内流線図を、それぞれ図1, 2, 3に示す。図2から明かなように、モードIIに対する断面内流線図は、乱流二次流のそれと良く似ており、流れの向きもまた合致している。このことは、“乱流二次流”が、層流の非線形不安定性に基づく有限振幅攪乱の0波数成分であるとする、われわれの見解の正しさを裏付けるものであると思われる。

ただ、ここに新たな疑問が発生する。それは、では何故、モードIおよびIIIの初期攪乱による、図1および3のような断面内流線図が、乱流二次流においては観測されないのか、ということである。この疑問に対して明確な解答を与えるには、現在のわれわれの計算結果は不十分であり、そのためには、より広範囲のReynolds数 R 、波数 α 、振幅 a に対する計算を行う必要がある。このことは、さきに述べた中立曲面の確定によって自ずから達成されるものであり、

これについても、現在進行中の計算がまとまり次第報告する予定である。

一方、管内乱流の実験や数値シミュレーションにおいて

も、従来の研究では、初期攪乱は自然発生的であるか、あるいは乱数による励起によるものがほとんどであった。これでは、管内流における乱流遷移を論ずるには不十分であ

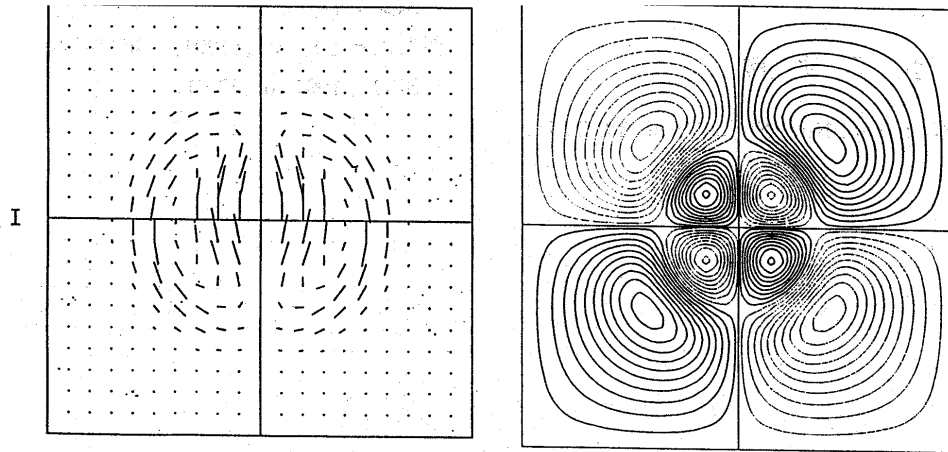


図1 モードⅠ(=Ⅳ)。左図：初期攪乱，右図：攪乱の0波数成分。
 $A=1, R=1000, \alpha=1.0$

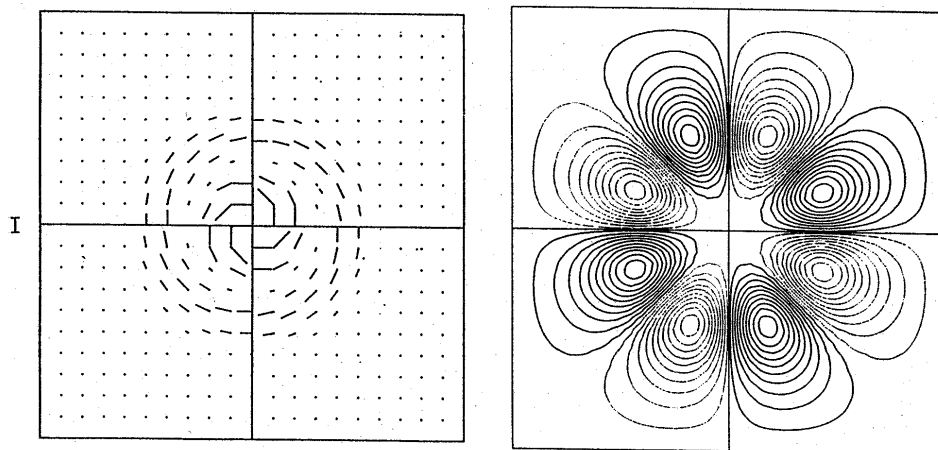


図2 モードⅡ。左図：初期攪乱，右図：攪乱の0波数成分。
 $A=1, R=1000, \alpha=1.0$

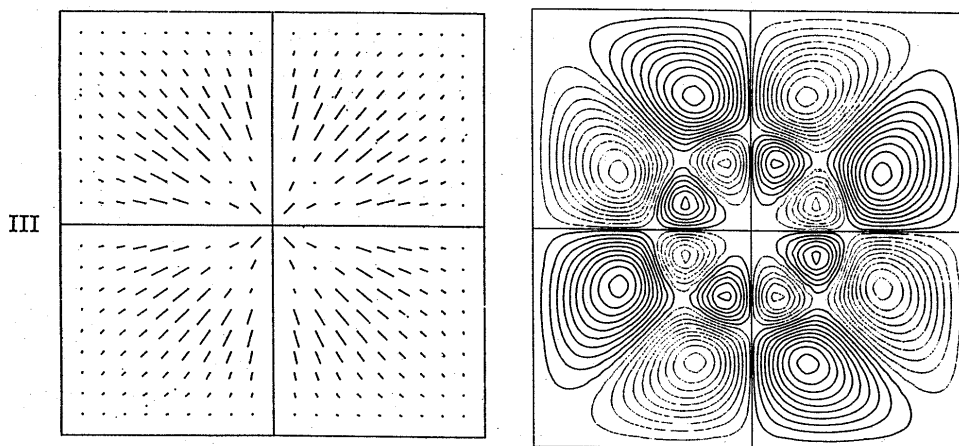


図3 モードⅢ。左図：初期攪乱，右図：攪乱の0波数成分。
 $A=1, R=1000, \alpha=1.0$

り、そのためには、人為的に制御された初期攪乱を導入することが不可欠であると思われる。そのような管内流における乱流遷移の本格的な実験、あるいは数値シミュレーションの結果が、遠からず利用できるようになることを期待したい。

引用文献

Bradshaw, P. (1987) : Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 53-74.

Herbert, T. (1977) : AGARD, cp-224.

Prandtl, L. (1927) : Verh. 2 intern. Kongr. techn. Mech. Zurich, 1926, pp.70-74.

Tatsumi, T. & Yoshimura, T. (1990) : J. Fluid Mech. **212**, 437-449.

巽友正と吉村卓弘 (1991) : 航空宇宙技術研究所 特別資料 SP-15, 1991, pp.57-61.