

ベナール対流における形の形成

水 島 二 郎*

Pattern Formation in Rayleigh-Bénard Convection

Jiro MIZUSHIMA

Faculty of Engineering, Doshisha University

ABSTRACT

An attempt is made to clarify the mechanism of pattern formation in Rayleigh-Bénard convection. A set of model equations, which describe the time development of the amplitudes of Fourier modes, are proposed. It is shown that a hexagonal cellular pattern is a stable steady solution of the set of model equations. Results of numerical simulations for the set of model equations illustrate the mechanism of the pattern formation.

Key Words: pattern formation, Rayleigh-Bénard convection, stability

1. はじめに

下から熱せられた流体層に発生するきれいな六角形のセルパターンの写真を見て多くの人達が好奇心をかき立てられてきた。Bénard (1900) は実験によりこの対流の発生する条件を定量的に調べた。Rayleigh (1916) は Bénard の実験のモデル化を行い、流体層の不安定性によりこの対流が起ること、すなわち無次元量 (レイリー数) R がある臨界値 R_c よりも大きいとき対流が発生することを理論的に示した。Rayleigh のモデルは二枚の平行平板間に満たされた流体層の熱対流であり、一方 Bénard の実験は上の面が空気に接している厚さ 1 mm 程度の流体層中に発生する熱対流であった。このような違いはあっても Rayleigh の理論は対流の発生する機構を明解に示しており、線形安定性理論の有効性を示すことになった。後に、Pearson (1958) は Bénard の実験のような薄い流体層では浮力よりも表面張力の温度依存性による力の方がより大きな効果を及ぼすことを示し、どちらの影響がより大きいかが判定する基準を具体的に示した。今では、表面張力の影響が大きいときにはベナール対流と呼んでいる。したがって、Bénard が詳しく調べた対流はマランゴニ対流に分類される。

ベナール対流の発生の機構をみごとに説明した線形安定性理論も六角形セルパターンがなぜ選ばれるかという説明をすることはできなかった。六角形のセルパターンの説明にはなんらかの非線形理論が必要であった。非線形理論の試みとして Gor'kov (1957) と Malkus & Veronis (1958) はエネルギー方程式から、レイリー数が臨界値 R_c よりもわずかに大きいときに生じるベナール対流の定常解の振幅と平面形を求めた。計算を行ったいくつかの平面形に対して最も熱伝達効率が大きい対流が生じるという判定基準で調べると、上下対称な境界条件の下では通常の流体の場合、六角形よりも四角形の方が起こり易いという結論となった。同時期に Stuart (1958) は平面ポアズイユ流とテイラーケット流についてはほぼ同じ方法で定常解を求めている。

Lortz (1961) と Busse (1962) は Malkus & Veronis (1958) と同様な方法で定常解を計算しさらにその定常解の線形安定性を調べた。Lortz は浮力項以外は流体の物理的性質が一定であるとするブシネスク近似を用いたが、Busse は流体の粘性率・熱伝導率・定圧比熱・熱膨張係数が温度に依存する効果も取り入れた。定常解の線形安定性を調べた結果、上下対称な境界条件の下ではロール解のみが安定であるが、上下非対称な境界条件の下では臨界レイリー数の 3.4 倍以上のレイリー数で六角形セルパターンが安定となりうることを示した。Lortz と Busse のこれらの論文は出版されていないので直接に読むことはできないが、Segel (1965

* 同志社大学工学部

b) が自分の論文の中でこれらの論文の簡単な紹介を行っている。

ランダウが提案したような攪乱の振幅を支配する発展方程式の導出は Palm (1960), Segel & Stuart (1962), Segel (1962, 1965a, 1965b) によって行われ、弱非線形安定性理論の基礎づけが行われた。同時期に Stuart (1960) と Watson (1960) が弱非線形安定性理論の基礎固めを行い、ランダウの提案した振幅方程式を流体の運動方程式から導き、平面ポアズイユ流や平面クエット流の安定性を調べている。Palm や Segel たちは動粘性係数が温度に線形に依存すると仮定し、二つの自由境界面に挟まれた流体層の安定性を調べた。彼らは、互いに 60° 傾いた波数ベクトルをもつ三つのモードの振幅とそれらのモードの位相に対する発展方程式系を導き、その方程式系の係数を定め、その解の性質を調べることによりロール解と六角形セルパターンの安定性を調べた。その結果によれば、六角形セルパターンは臨界レイリー数 R_c よりも小さいレイリー数で現れ、レイリー数を大きくしていくと $R=R_2$ で不安定となり、やがてロール状の対流が発生する。逆に大きいレイリー数で安定であるロール状の対流はレイリー数を小さくしていくと $R=R_1$ で不安定となり六角形セルパターンが生じる。すなわちヒステリシスの現象が観察される。これで六角形セルパターンの発生の機構は明らかになったかに見えるが、まだ解明されていない点が二つある。その一つはなぜある特定の大きさの波数を持ったモードだけが生き残るのか。もう一つはなぜお互いに 60° 傾いた波数ベクトルを持つモードだけが生き残るのか。

Mizushima (1993) は下面が固体、上面が自由境界を持つ水平流体層における二次元ロール解の非線形平衡解をニュートン法により求め、その振幅分布は二次の共鳴項を持つ振幅方程式系で記述できることを示した。さらに彼はそこで得られた振幅方程式を一般化し Zakharov (1968) が重力波に対して求めた連続波数に対する方程式に似た形をモデル方程式として提案した。モデル方程式系の解の性質を詳しく調べた結果、二次の共鳴項がなく、三次の非線形項の係数が一定のときは最大増幅波数をもつモードのみが生き残り単一モードが得られること、二次の共鳴項があるときには混合モード解が存在することを示した。

この論文では Mizushima (1993) の提案したモデル方程式を二次元波数を持つモードに対する振幅方程式に拡張し、三次元ベナール対流における平面形の選択を調べる。ここでも、Mizushima と同様下面が固体、上面が自由境界を持つ水平流体層における熱対流を取り扱う。上下境界条件の非対称性により系全体の非対称性を実現しているので Busse (1962) や Segel (1965a, 1965b) が考慮にいられた粘性の温度依存性はここでは考えない。

2. 三次元攪乱に対するモデル方程式

Mizushima (1993) が提案した二次元ロールに対するモデル方程式を三次元攪乱に拡張し、ベナール対流の平面形を調べる。二次元波数領域 $-a_{max} \leq \alpha_x, \alpha_y \leq a_{max}$ の範囲にあるモードを考える。 α_x および α_y をそれぞれを N 等分して、 $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y) = (\Delta\alpha \times n_x, \Delta\alpha \times n_y)$ (ただし、 $-N \leq n_x, n_y \leq N$) を持つ $(2N+1)^2$ 個のモードのみを取り扱うことにする。ここで $\Delta\alpha = a_{max}/N$ である。波数 $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y) = (\Delta\alpha \times n_x, \Delta\alpha \times n_y)$ を持つモードの振幅 A_n を支配する方程式を次のように仮定する。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p f_{np} A_{n-p} A_p + \sum_{p,q} g_{npq} A_{n-p-q} A_p A_q, \quad (1)$$

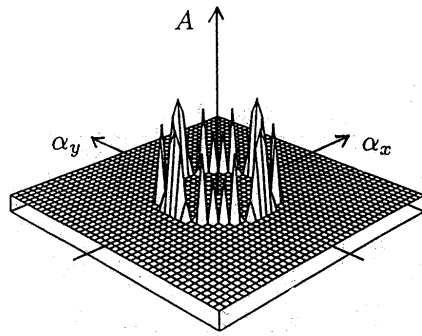
ここで、 $n = (n_x, n_y)$, $(-N \leq n_x, n_y \leq N)$ である。 a_n は線形増幅率であり、 $|a| = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$ のみの関数である。 f_{np} は非線形共鳴項の係数、 g_{npq} は広い意味でのランダウ係数である。

まず、モデル方程式(1)において非線形共鳴項の係数がゼロ、すなわち $f_{np} \equiv 0$ の場合を調べる。さらに簡単化のために、 $p+q=0$ に対して $g_{npq} = d_{np}$, $p+q \neq 0$ に対して $g_{npq} \equiv 0$ であり、しかも d_{np} は $|n|$ および $|p|$ にのみ依存する特別な場合を考える。このとき方程式(1)は、

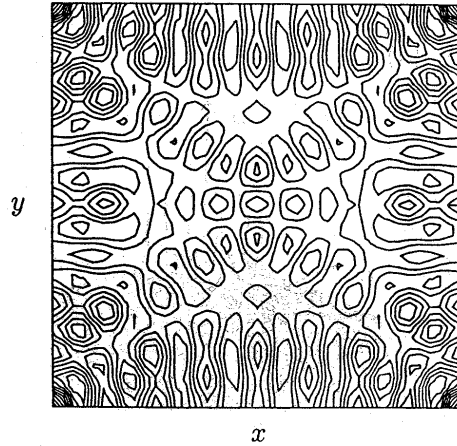
$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p d_{np} A_p^2 A_n, \quad (2)$$

となる。 A_n の初期条件 $|n|$ のみに依存しているときには方程式(2)の解は $|n| \equiv n$ と時間 t のみの関数となる。その定常解は単一モード解と混合モード解が可能である。単一モード解は $A_{neq} = \sqrt{-a_n/(2\pi n d_{nn})}$ となる。この単一モード解に対する安定性は、自分自身のゆらぎに対しては常に安定であるが $q \neq n$ であるモード q ($=|q|$) のゆらぎに対しては $a_q < a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき安定であり、 $a_q > a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき不安定である。このことから、もし d_{qn} が q に依存せずに一定であるならば線形増幅率が最大のモードだけが安定に残り、それ以外のモードは不安定になり、そのエネルギーは線形増幅率最大のモードに吸収されてしまうことが想像できる。このことから安定モードは線形増幅率最大のモードであり波数空間において半径 $|a|$ の円周上に存在することがわかる。 pd_{dp} が作る行列式が正則であれば混合モード解も存在し得るが、ここでは議論を行わない。

方程式(2)を初期値問題として数値的に解く。ここで $a_{max} = 10.0$, $\Delta\alpha = 0.5$, $N = 20$ とした。線形増幅率は実際に線形固有値問題を解いて求めたものを用い、ランダウ係数に相当する係数 d_{np} は最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いることにする。初期条件は $A_n = 0.01$ ($-N \leq n_x, n_y \leq N$) とした。 $R = 10000$ の場合の $t = 10$ での波数空間における振幅の分布図を図1(a)に示す。また、そのときの (x, y) - 平面



(a) 波数空間での振幅の分布



(b) (x, y) 空間での振幅の分布

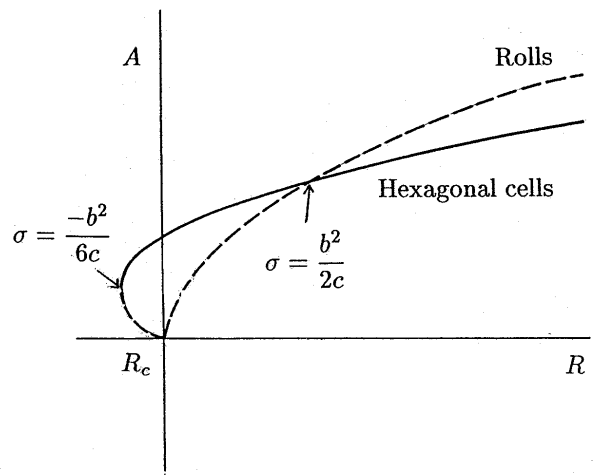
図1 非線形共鳴がないときの振幅の分布. $R=10000$, $t=10$

での振幅の分布を図1(b)に示す。今回の計算は予備的な計算であり、 $t=10$ ではまだ充分に平衡状態には達していないが、非線形効果によって各モードはより増幅率の大きいモードによりその成長が抑えられ、最大増幅率を持つモードのみが生き残りそのモードは最大線形増幅波数を半径とする円周上に存在しているのがわかる。この結果は上の単一モードの安定性の解析結果とよく一致している。

次に、各モードが非線形共鳴を行う場合を取り扱う。さきに述べたように非線形共鳴項がないときには最大増幅率を持つモードのみが生き残り、他のモードはすべて減衰してしまう。すなわち、波数空間では原点を中心として最大増幅波数の円周上に有限振幅のモードが並んでいる。二次の非線形共鳴は三つのモードの波数が $p+q=n$ の関係を満たしているときにのみ可能である。波数空間で原点を中心とした円周上にあるモードがこの条件を満たすためには三つのモードの波数ベクトル p , q と n は正三角形をなしていなければならない。すなわち、三つのベクトルの方向が互いに 60° 異なっている必要がある。したがって、非線形共鳴を行うモードは $|\alpha|$ の大きさが同じで方向が互いに 60° 異なる三つのモードである。これらの三つのモードの振幅をそれぞれ A_1 , A_2 , A_3 とすると方程式(1)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \sigma A_1 + 2bA_2A_3 - 2cA_1(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2), \\ \frac{dA_2}{dt} &= \sigma A_2 + 2bA_1A_3 - 2cA_2(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2), \\ \frac{dA_3}{dt} &= \sigma A_3 + 2bA_1A_2 - 2cA_3(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2). \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 σ は最大増幅モードの線形増幅率である。また、簡単化のために $f_{np} = b$ とおいた。さらに $p+q=0$ に対して $g_{npq} = c$, $p+q \neq 0$ に対して $g_{npq} = 0$ とおいた。単一モード解すなわち二次元ロール解は $A_1 \neq 0$, $A_2 = A_3 = 0$ とおくこ

図2 二次元ロール解と六角形セル状解の平衡振幅。
実線は安定な平衡振幅、波線は不安定な平衡振幅。

とにより得られる。その定常解は、

$$A_{1eq} = \sqrt{\frac{\sigma}{2c}}$$

となる。この単一モード解は自分自身のゆらぎに対しては安定であるがその他の二つのモードのゆらぎに対しては不安定である。すなわち、二次元ロール解は全てのレイリー数において不安定である。六角形セルパターンは混合モード解の一つであり、 $A_1 = A_2 = A_3 \neq 0$ とおくことにより得られる。その定常解は、

$$A_{neq} = 0, \quad \frac{b - \sqrt{b^2 + 6c\sigma}}{6c}, \quad \frac{b + \sqrt{b^2 + 5c\sigma}}{6c}$$

の三つである。このうちはじめの二つは不安定であるが、定常解 $A_{neq} = (b + \sqrt{b^2 + 6c\sigma})/6c$ は $-b^2/6c < \sigma$ であるすべての σ に対して安定である。すなわち全てのレイリー数で安定である。これらの結果まとめると図2のようになる。この図において波線は不安定な平衡振幅を表し、実線は安

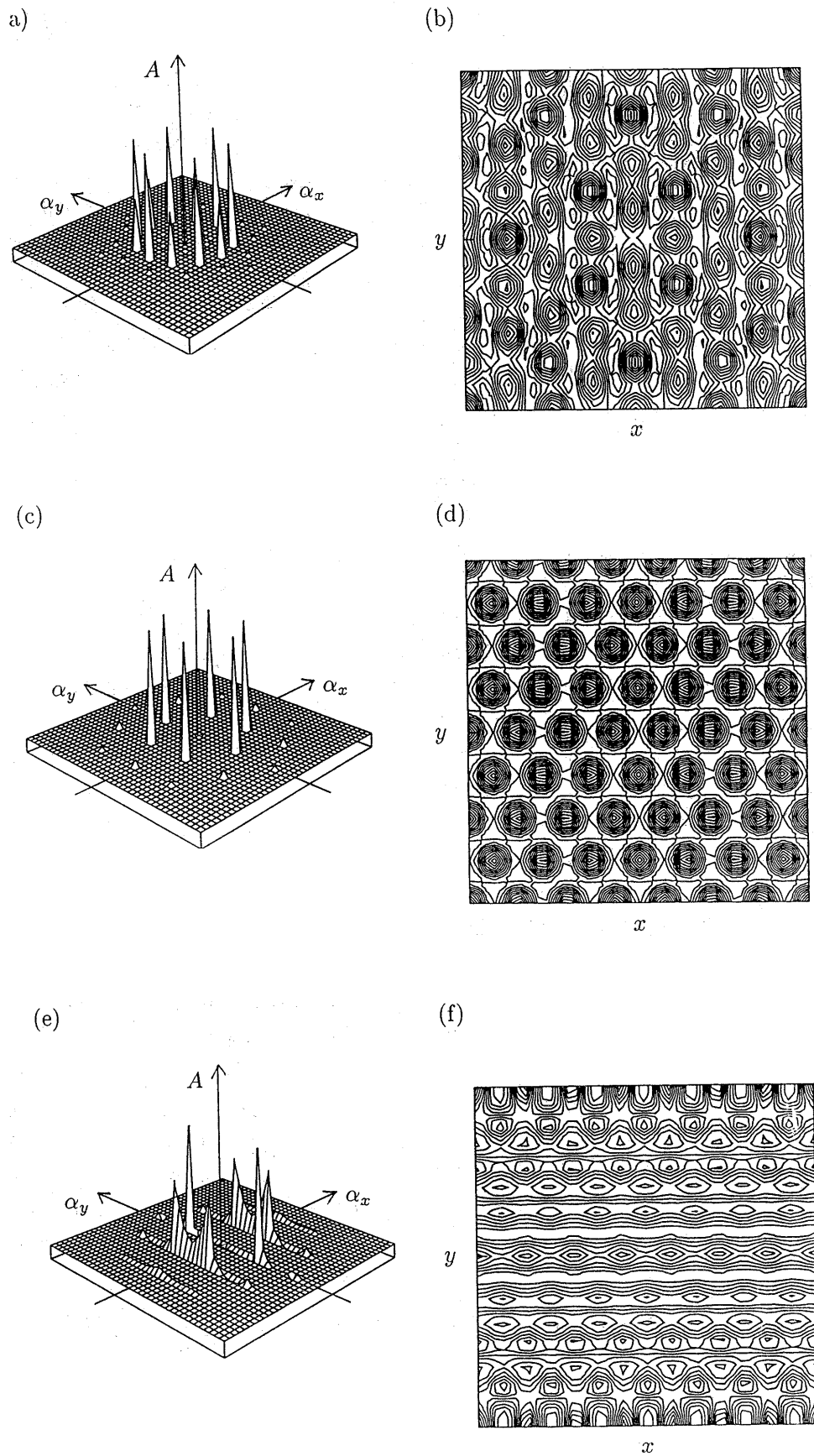


図3 非線形共鳴があるときの振幅の分布. $R=10000$. $t=10$ (a), (c), (e): 波数空間での振幅の分布. (b), (d), (f): (x, y) 空間での振幅の分布. (a), (b): $\beta=0.1$. (c), (d): $\beta=0.3$. (e), (f): $\beta=0.5$.

定な平衡振幅を表す。六角セル状の攪乱は亜臨界不安定であり、その平衡解の下分岐が不安定、上分岐が安定である。ロール攪乱は超臨界不安定であるがその平衡解も不安定である。

方程式(1)を初期値問題として数値的に解く。ここでも $\alpha_{max}=10.0$, $\Delta\alpha=0.5$, $N=20$ とした。また、簡単化のために二次の共鳴項の係数 f_{np} は $|n| \geq |p|$ かつ $|n| \geq |n-p|$ ならば $f_{np}=\beta$, $|n| < |p|$ または $|n| < |n-p|$ ならば $f_{np}=-\beta$ とおいた。三次の非線形項の係数は共鳴を行わない場合と同様に $p+q=0$ に対して $g_{npq}=d_{np}$, $p+q \neq 0$ に対して $g_{npq} \equiv 0$ であり、さらに、最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いた。初期条件は $A_n=0.01$ ($-N \leq n_x, n_y \leq N$) とした。 $R=10000$, $\beta=0.1, 0.3, 0.5$ の場合の $t=10$ での波数空間における振幅の分布図を図 3(a), (c), (e) に示す。また、そのときの (x, y) - 平面の振幅の分布を図 3(b), (d), (f) に示す。 $\beta=0.1$ では、セル縦方向につながって見える。 $\beta=0.3$ の場合、振幅はすでに平衡状態に達しており、方向が互いに 60° 異なる三つのモードのみがほぼ同じ大ききで生き残りその他のモードは減衰していることがわかる。また (x, y) 平面の振幅分布では六角形のきれいなセルパターンが見られる。 $\beta=0.5$ では、セルは横方向につながって見える。これらの結果は上で述べた混合モード解の安定性の結果ともよく一致している。 β の値が 0.6 より大きくなると各モードは不規則に増幅、減衰を繰り返して平衡状態になることはない。

参 考 文 献

- Bénard, H. 1900 Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue Gén. Sci. Pur. Appl.* **11**, 1261-1271, 1309-1328.
- Busse, F. H. 1962 Das Stabilitätsverhalten der Zellulärkonvektion bei endlicher Amplitude. Inaugural Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, Munich.
- Gor'kov, L. P. 1957 Stationary convection in a plane liquid layer near the critical heat transfer point, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 402-407.
- Lortz, D. 1961 Instabilitäten der stationären Konvektionsströmungen endlicher Amplitude, Inaugural Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, Munich.
- Malkus, W. V. R. & Veronis, G. 1958 Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.* **4**, 225-260.
- Mizushima, J. 1993 Mechanism of mode selection in Rayleigh-Bénard convection with free-rigid boundaries, *Fluid Dynamics Research*, in print.
- Palm, E. 1960 On the tendency towards hexagonal cells in steady convection, *J. Fluid Mech.* **8**, 183-192.
- Pearson, J. R. A. 1958 On convection cells induced by surface tension, *J. Fluid Mech.* **4**, 489-500.
- Rayleigh, Lord 1916 On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Phil. Mag.* **32**, 529-546.
- Segel, L. A. 1962 The non-linear interaction of two disturbances in thermal convection problem, *J. Fluid Mech.* **14**, 97-114.
- Segel, L. A. 1965a The structure of non-linear cellular solutions to the Boussinesq equations, *J. Fluid Mech.* **21**, 345-358.
- Segel, L. A. 1965b The non-linear interaction of a finite number of disturbances to a layer of fluid heated from below, *J. Fluid Mech.* **21**, 359-384.
- Segel, L. A. & Stuart, J. T. 1962 On the question of the preferred mode in cellular thermal convection, *J. Fluid Mech.* **13**, 289-306.
- Stuart, J. T. 1958 On the non-linear mechanics of hydrodynamical stability, *J. Fluid Mech.* **4**, 1-21.
- Stuart, J. T. 1960 On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* **9**, 353-370.
- Watson, M. 1960 On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow, *J. Fluid Mech.* **9**, 371-389.
- Zakharov, M. 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **2**, 190-194.

