

# テイラー渦の数値シミュレーション

石垣 博\*

## Numerical Simulation of Laminar Flow between Concentric Rotating Cylinders

by

Hiroshi ISHIGAKI

Kakuda Research Center, National Aerospace Laboratory.

### ABSTRACT

A numerical simulation is made for laminar flow between concentric rotating cylinders with stationary end walls. When inner-cylinder rotates, Taylor vortices develop in addition to secondary flow vortices. The developments of flow pattern are shown for aspect ratio of 2, 3 and 15.

#### 1. 緒言

著者らは断面内に体積力が作用する管内流すなわち遠心力が作用する曲管<sup>(1),(2)</sup>、コリオリ力が作用する直交回転管<sup>(3),(4)</sup>、遠心力とコリオリ力が同時に作用する回転曲管<sup>(5)</sup>、浮力が作用する加熱管<sup>(6)</sup>など、二次流れをとともなう管内流の流動伝熱特性を相似性の考察と数値解析により研究している。これらの流れでは管断面形状が長方形になると、流体力学的不安定（Dean不安定、Benard不安定など）による渦流が発生して全体の流れはさらに複雑になることが知られている<sup>(7)</sup>。たとえば長方形曲管内の流れでは支配無次元数（Dean数）がある臨界値をこすと、流れ不安定によるDean渦が曲りの外側壁近くから発生し、二次流れと干渉しあう。

このような体積力による不安定としては内縁等が回転する二重円管内のテイラー渦がよく知られており、数多くの研究がなされている（解説論文としてたとえば文献（8）、（9）がある）。本研究では曲管流れとの類似性を念頭におき、二重円管内流路の二次流れと上下に静止壁を設けて二次流れを発生させ、テイラ

ー渦が共存する流れ場の数値シミュレーションを行なう。

#### 2. 主な記号

- $As$  : アスペクト比 =  $L/d$
- $d$  : 流路幅 =  $R_o - R_i$
- $L$  : 流路長さ
- $R$  : 流路中心の曲率半径 =  $0.5(R_o + R_i)$
- $Re_\Omega$  : 回転レイノルズ数 =  $R\Omega d/\nu$
- $T_o$  : テイラー数 =  $Re_\Omega/\sqrt{\lambda}$
- $\Omega$  : 回転角速度
- $\lambda$  : 曲率パラメータ =  $R/d$

#### 3. 基礎式と数値解法

図1に示すような同軸二重円管内流路を考える。軸方向をz軸とした円筒座標系を円環座標に変換した座標系  $(r, \theta, z)$  を用いる。流路内の流れが内円管の回転によって発生し、流れが定常、非圧縮性で完全に発達しているとすれば、連続式と運動量の式は次のようになる。

$$\frac{1}{R+r} \frac{\partial}{\partial r} \{ (R+r)u_r \} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{R+r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{(R+r)^2} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z \dots\dots\dots (3)$$

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{R+r} = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{(R+r)^2} \right) \dots\dots\dots (4)$$

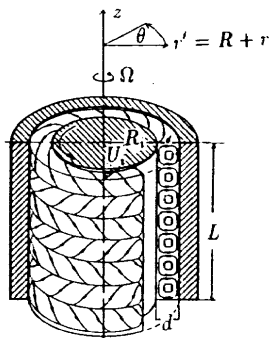


図1 回転二重円管内のテイラー渦

\* 航空宇宙技術研究所 角田支所

ここに

$$\nabla^2 = \frac{1}{R+r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (R+r) \frac{\partial}{\partial r} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots\dots\dots (5)$$

完全発達流では $\theta$ 方向の圧力勾配は一定となる。

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = C \dots\dots\dots (6)$$

境界条件は次のようになる。

$$r = -d/2 : u_\theta = R_1 \Omega$$

$$r = d/2 : u_\theta = 0$$

$$z = 0, L : u_r = u_\theta = u_z = 0$$

式(1)~(5)の数値解を求める計算プログラムは Patankar の著書<sup>(10)</sup>を参考にして作成したもので、著者らが曲管、直交回転管も含めた一連の研究に共通して用いているものである。すなわち基礎式を有限体積分法により離散化し、スタガード格子、べき乗スキーム、SIMPLE法を用いている。計算格子点数は $z$ 方向80、 $r$ 方向20である。

4. 流れ場の力学的相似性

$\theta$ 方向の代表速度は $R\Omega$ であるから、式(2)から $r$ 方向の代表速度は

$$U_s \sim \sqrt{Rd}\Omega = R\Omega/\sqrt{\lambda} \dots\dots\dots (7)$$

となる。テイラー渦の観察からわかるように $z$ 方向の代表速度も同じオーダーであるから、次の変換を考える。

$$\tilde{u}_r = \frac{u_r \sqrt{\lambda}}{R\Omega}, \tilde{u}_z = \frac{u_z \sqrt{\lambda}}{R\Omega}, \tilde{u}_\theta = \frac{u_\theta}{R\Omega}, \tilde{p} = \frac{p\lambda}{\rho(R\Omega)^2}$$

$$\tilde{C} = Cd\sqrt{\lambda}/\rho(R\Omega)^2, \tilde{r} = \frac{r}{d}, \tilde{z} = \frac{z}{d} \dots\dots\dots (8)$$

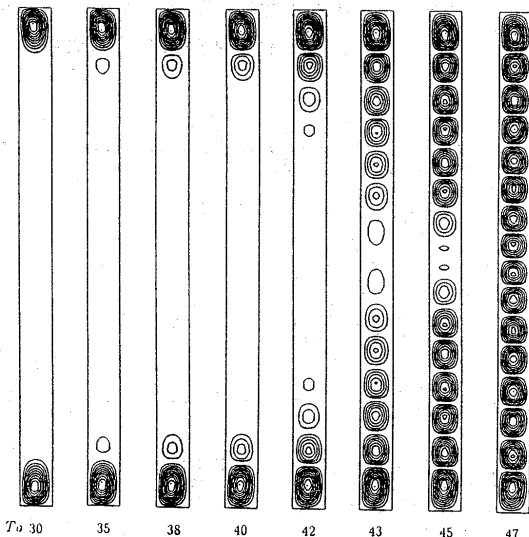


図2 内円筒の回転数増加にともなうテイラー渦の発達 ( $\lambda = R/d = 50, A_s = 15$ , 上下側壁と外円筒は静止)

この変換を式(1)~(5)にほどこして次の無次元式を得る。

$$\frac{1}{\lambda + \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} [(\lambda + \tilde{r}) \tilde{u}_r] + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$\tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{r}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial \tilde{z}} - \frac{\lambda \tilde{u}_\theta^2}{\lambda + \tilde{r}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{T_a} \left[ \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}_r - \frac{\tilde{u}_r}{(\lambda + \tilde{r})^2} \right] \dots\dots\dots (10)$$

$$\tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{r}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \frac{1}{T_a} \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}_z \dots\dots\dots (11)$$

$$\tilde{u}_r \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{r}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{u}_r \tilde{u}_\theta}{\lambda + \tilde{r}} = -\tilde{C} + \frac{1}{T_a} \left[ \tilde{\nabla}^2 \tilde{u}_\theta - \frac{\tilde{u}_\theta}{(\lambda + \tilde{r})^2} \right] \dots\dots\dots (12)$$

ここに

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{\lambda + \tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left[ (\lambda + \tilde{r}) \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right] + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \dots\dots\dots (13)$$

上式からわかるように回転二重円管内流れの支配無次元数はテイラー数  $Ta = Re_\Omega/\sqrt{\lambda}$  と  $\lambda = R/d$  であり、さらにアスペクト比  $As = L/d$  が関与する。他方、長方形断面曲り流路内層流の支配無次元数はディーン数  $Dn = Re/\sqrt{\lambda}$  と  $\lambda = R/d$ 、さらに  $As = L/d$  である。ここに  $Re = w_m d/\nu$  は流れのレイノルズ数であるから、二つの流れの類似性が明らかになる。ちなみに  $As$  が無限大で  $\lambda$  が大きいとき、流体力学不安定が粘性にうちかって発生する無次元数の臨界値はそれぞれ  $Ta \cong 41$ 、 $Dn \cong 36 \sim 39$  であることが知られている。

5. 結果と考察

式(9)-(13)において  $\lambda \rightarrow \infty$  とすると (narrow-gap approximation)、方程式系から  $\lambda$  が消え、このとき流れ特性は  $Ta$  のみに支配される。これは曲管内流れで流れ特性がディーン数のみにより支配される "loose-coil approximation" ( $\lambda \gtrsim 8$ ) と呼ばれる状況と同じである。

図2に示した計算例は  $As = 15$  のときのテイラー渦発生の様子を示した二次流線図である。 $Ta = 30$  で

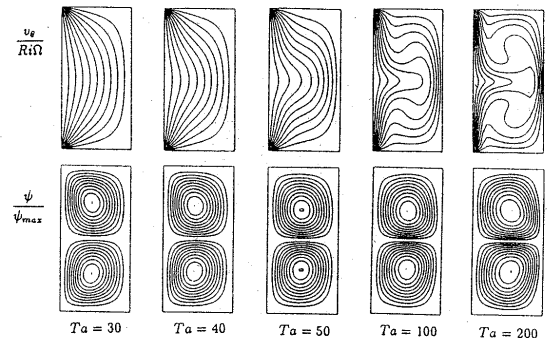


図3 アスペクト比  $As = 2$  の場合の流れ場等高線 ( $\lambda = 10$ )

はテイラー渦は発生せず、上下側壁が存在することによる二次流れ渦のみであるが、 $Ta = 35$ では二次流れによる攪乱をうけて、弱いテイラー渦が二次流れ渦に隣接して発生しはじめる。以下  $Ta$  の増加につれてテイラー渦の発生が流路の中央部におよんでいく様子がわかる。この場合には二次流れは流れ不安定の発生をうながす攪乱となり、 $As = \infty$  の場合よりも小さい  $Ta$  でテイラー渦が発生しはじめる。

つぎに  $As = 2$  の場合のテイラー渦と二次流れの干渉の様子を見る (図 3)。上は周速度の等速度線、下は二次流れの等高線を示す。 $Ta = 30$  の場合には上下側壁による二次流れのみであるが、 $Ta = 40$  ではテイラー渦が発生している。これは  $z = L/2$  あたりの  $v_\theta$  等高線が流路中心に向けてせり出してくることからわかる。 $Ta$  が大きくなるにつれてテイラー渦は勢いを増すが、発生位置は  $z \cong L/2$  なので、二次流れに重畳して渦運動を強化している。

つぎに  $As = 3$  の場合を見る (図 4)。 $Ta = 20$  では上下側壁による二次流れのみである。 $Ta = 50$  では内壁中央部の周速度が外側に向ってふくらんでいることから、すでにテイラー渦が発生し、二次流れ渦に重畳されていることがわかる。しかしこのテイラー渦は二次流れの攪乱により生じたもので、安定な位置にない。したがってさらに遠心力を強めると、Taylor 不安定が内壁中央部近くの別の安定な位置 (2 箇所) に発生し、渦は 4 個になる。これ以上  $Ta$  を大きくしてもテイラー渦の位置は変わることはない。

図 5 は  $As$  を変えたときの摩擦モーメント係数の変化を示したものである。 $\lambda$  は narrow gap approximation が成立する  $\lambda \cong 8$  にとってあるから、摩擦モーメント係数比は  $Ta$  と  $As$  のみの関数である。 $As = 50$  の場合の値は  $As = \infty$  の実験値<sup>(11)</sup>より若干大きくでている。二次流れの寄与は  $Ta$  に無関係で、 $Ta \cong 40$  でテイラー渦の発生により急激に増加しはじめる。アスペクト比が小さくなるとテイラー渦発生による  $C_M$  曲線の不連続増加はそれほど鮮明ではなくなり、 $C_M$  へのテイラー渦の寄与は相対的に小さくなることがわかる。

文 献

- (1) 石垣・田村, 機論, 57-540, B (1991), 2523.
- (2) 石垣, 機論, 58-550, B (1992), 1661.
- (3) 石垣・山田, 機論, 57-544, B (1991), 4044.
- (4) 石垣, 機論, 59-550, B (1993), 1486.
- (5) 石垣, 機論, 59-561, B (1993), 1494.
- (6) 石垣, 機論, 59-560, B (1993), 1094.
- (7) たとえば Drazin, P. G. & Reid, W. H., Hydrodynamic Stability, (1981), 108, Cambridge Univ. Press.

- (8) 山田・今尾, 機論, 52-484, B (1986), 3829.
- (9) Maron, D. M. & Cohen, S., Advances in Heat Transfer, vol.21, (1991), 141.
- (10) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980), 113, Hemisphere.
- (11) 中林・山田ほか 2 名, 機論, 38-312, B (1972), 2075.

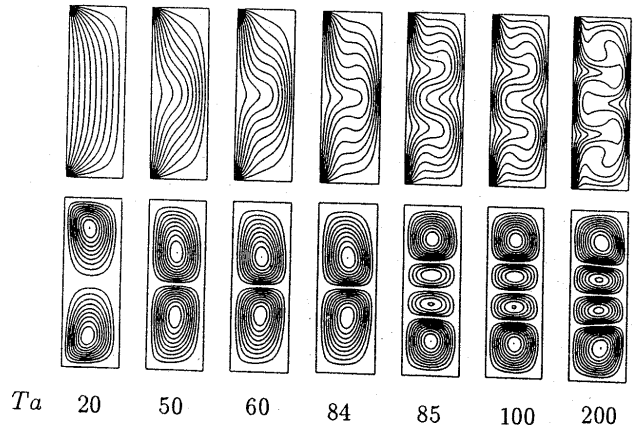


図 4 テイラー渦の変位をともなう流れ場の一例 ( $As = 3, \lambda = 10$ )

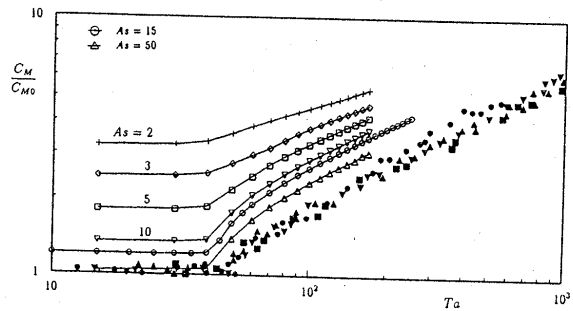


図 5 アスペクト比によるモーメント係数比の変化 ( $C_{M0} = 1/Re_n$ は  $As = \infty$  かつテイラー渦がないときの値),  $\lambda = 50$   
 ●▲▼■ :  $As = \infty$  の実験値 (中林ら),  $\lambda = 10.1 \sim 61$

