

二次流れをともなう管内流熱伝達のアナロジー (曲管と直交回転管)

石垣 博*

Analogy between Convective Heat Transfer of Laminar Flow with Secondary Stream (Curved Pipe and Orthogonally Rotating Pipe)

by

Hiroshi ISHIGAKI

Kakuda Research Center, National Aerospace Laboratory.

ABSTRACT

Analogy between forced convective heat transfer of the fully developed laminar flow in a curved pipe and in an orthogonally rotating pipe is studied. Sets of non-dimensional parameters are obtained properly for each flow. When the curvature ratio and the Rossby number are large enough, it is shown that the Nusselt numbers for these two flows coincide with each other and heat transfer characteristics are very similar for equal Prandtl number.

1. 緒言

曲管内(図1)を流れる流体には遠心力が作用し、二次流れが発生する。また管軸に直交して回転している管路内(図2)の流体にはコリオリ力が作用し、同じように二次流れが発生する。この二次流れによる混合促進のために圧力損失や熱伝達率は静止直管にくらべて著しく増加する。

曲管内の完全発達流の特性は一般にはディーン数 K_{LC} と曲率比 λ の2つの無次元数によって決定され、 λ が大きいときには λ の影響が無視できて (loose coil approximation)、 K_{LC} が単一の支配無次元数になる。著者は直交回転管内の完全発達流についても無次元数の組合わせを K_{LR} とロスビー数 Ro にとれば、 Ro が大きいときに K_{LR} が単一支配無次元数となることを示し⁽¹⁾、 λ と Ro が大きい場合には2つの流れ特性のあいだに定量的な相似性(アナロジー)が成立することを示した^{(2),(3)}。また層流助走流れ⁽⁴⁾および乱流完全発達流⁽⁵⁾についても両者のアナロジーが成立することを示した。本報告では層流熱伝達についても、これら2つの流れのあいだにアナロジーが成立することを示し、その伝熱特性を議論する。ここで取扱う熱的境界条件は軸方向熱流束一定、周方向壁温一定で加熱された場合である。

2. 主な記号

d : 円管の内直径

- K_L : K_{LC}, K_{LR} の総称
- K_{LC} : ディーン数, 曲円管の層流特性数 $= Re/\sqrt{\lambda}$
- K_{LR} : 直交回転円管の層流特性数 $= Re/\sqrt{Ro}$
- Nu : 周平均ヌッセルト数 $= q_w d / [(T_w - T_b)k]$
- Pr : プラントル数 $= \nu/\alpha$
- R : 曲管の曲率半径
- Re : レイノルズ数 $= w_m d/\nu$
- Ro : ロスビー数 $= w_m/\Omega d$
- w_m : 管内平均流速
- λ : 曲円管の曲率パラメータ $= R/d$
- Ω : 直交回転円管の回転角速度

3. 基礎方程式と数値解法

流れの基礎式は既に報告した流れ解析に用いたのと同じなので、ここでは省略する。熱伝達を計算するエネルギー式は二つの流れについて共通に次のように表される。

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \dots \dots \dots (1)$$

$$r = d/2 : T = T_w, \theta = 0, \pi : \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

速度場、温度場ともに発達している場の計算方法は

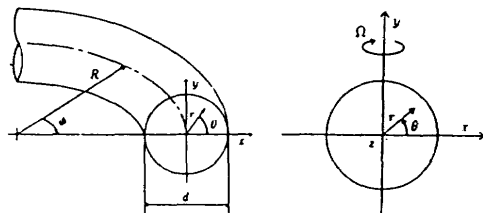


図1 曲円管の座標系

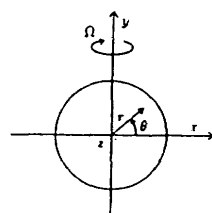


図2 直交回転円管の座標系

* 航空宇宙技術研究所 角田支所

Kays & Crawford の著書⁽⁶⁾を参考にした。数値計算プログラムは Patankar の著書⁽⁷⁾を参考にして作成したもので、著者らの一連の研究に用いているものである。有限体積法、スタガード格子、べき乗スキーム、SIMPLE法によっている。格子点は壁近傍で密な不等間隔にとり（ r 方向 32、周方向 27）、流れの対称性を仮定して計算は半断面について行った。

4. 温度場の基本構造

これらの流れでは遠心力あるいはコリオリ力のために管断面内に発生する二次流れが熱伝達を増加させる。熱伝達の増加はプラントル数によって大きく異なるが、既存の熱伝達の研究ではプラントル数の影響について系統的な議論、考察がなされていない。ここでは温度場の Pr 依存性を相似性の議論により考察し、その結論を温度場の計算結果により実証する。

上式に二次流れのスケールを考慮した文献(2),(3)と同様の変換をほどこす。曲管流れに対しては

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{w_m} \sqrt{\lambda}, & \tilde{v} &= \frac{v}{w_m} \sqrt{\lambda}, & \tilde{w} &= \frac{w}{w_m} \\ \tilde{T} &= \frac{T_w - T}{T_s}, & \tilde{r} &= \frac{r}{d}, & \tilde{z} &= \frac{z}{d\sqrt{\lambda}} \end{aligned} \quad (2)$$

温度スケール T_s は、熱流束一定の場合には $q_w d/k$ にとる。直交回転管流れに対しては λ を Ro におきかえればよい。その結果、無次元基礎式を後の説明に便利ないように変形して示せば、次のようになる。

$$Pr \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\theta}} \right] + Pr \tilde{w} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{K_L} \tilde{\nabla}^2 \tilde{T} \quad (3)$$

ここに

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\theta}^2} \quad (4)$$

K_L は曲管については K_{LC} 、直交回転管については K_{LR} にとる。

軸方向に熱流束一定で加熱される場合には熱的に完全発達した場に対して

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_b}{dz} = \frac{4q_w}{\rho C_p w_m d} \quad (5)$$

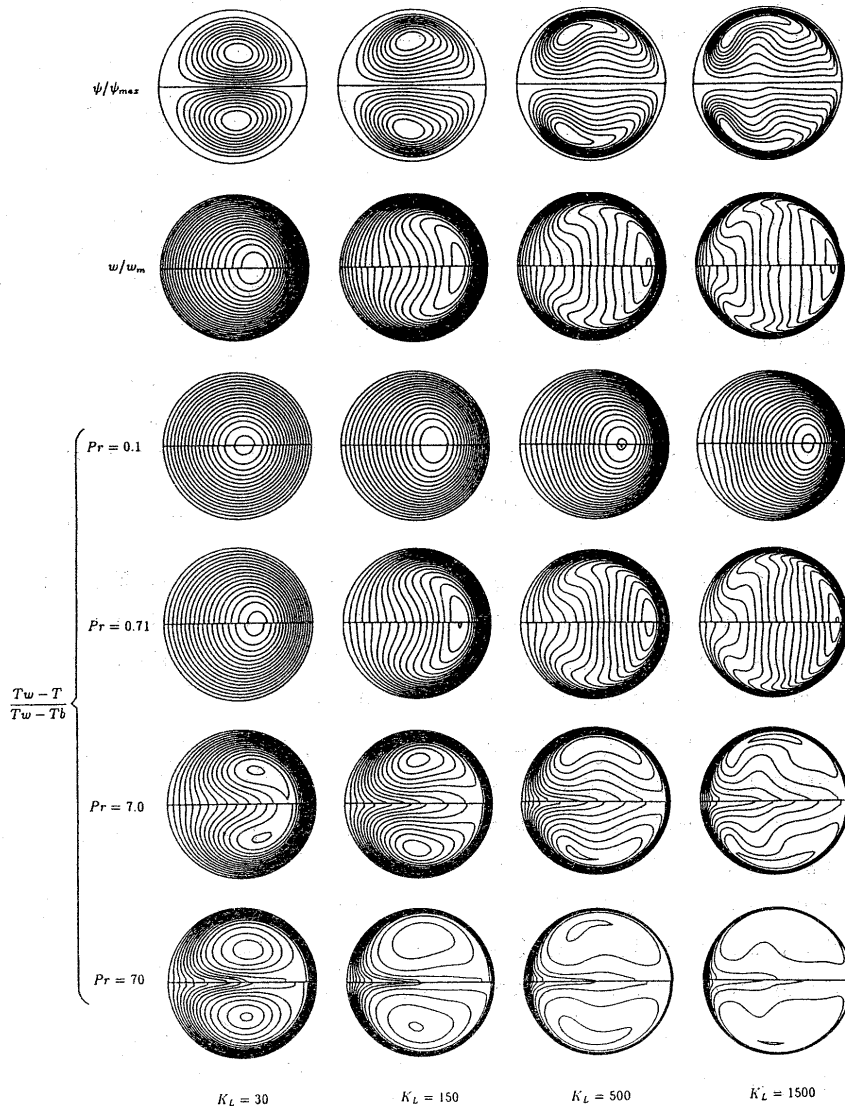


図3 K_L および Pr による二次流線，軸速度，温度の等高線の変化（上半部は曲管，下半部は直交回転管の結果を示す）

の関係が成立するから、式(3)は次式になる。

$$Pr \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} \right] + \frac{4\bar{w}}{K_L} = \frac{1}{K_L} \nabla^2 \bar{T} \dots \dots \dots (6)$$

Pr が小さいときには断面内の二次流れによる熱輸送は無視できて、次のように簡単化される。

$$4\bar{w} = \nabla^2 \bar{T} \dots \dots \dots (7)$$

この式は軸速度分布を分布熱源とする熱伝導式であり、解は Pr に大きく依存しない非境界層形の解になる。

Pr が大きいくときには断面内の二次流れによる熱輸送が支配的になって、軸方向の熱輸送は小さくなる。すなわち

$$Pr \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{K_L} \nabla^2 \bar{T} \dots \dots \dots (8)$$

上式より Pr 、 K_L が大きくなると、壁面のごく近傍を除けば等温線は大局的には二次流れ流線そのものに類似することがわかる。

図3は $K_L = 30, 150, 500, 1500$ について二次流線 (ψ/ψ_{max})、軸速度 (w/w_m) の計算結果、さらに同一の速度場でありながらプラントル数により温度場がどのように異なるかを見るために $Pr = 0.1, 0.71, 7.0, 70$ の4種のプラントル数について温度の計算結果を示したものである。断面の上半部は曲管、下半部は直交回転管の結果である。

プラントル数が1に近い $Pr = 0.71$ の場合には軸速度場とよく似た温度場になる。 Pr が小さい $Pr = 0.1$ の場合には無次元温度の最大値が軸速度場の最大値に追従するような分布をとり、分布の全体的様相はたとえば K_L が大きくなっても境界層型にはならない。他方、 Pr が大きい $Pr = 7$ の場合には軸速度場とは異なった二次流れそのものに類似した様相を示す。最大無次元温度を示す位置は2つに分岐して、 K_L の増加と共に $\theta = 90^\circ$ 付近まで移動し、 $\theta = 180^\circ$ の近傍を除けば二次流線の挙動に近く、式(8)の推論を立証している。

図3からわかるように曲管(上半部)と直交回転管(下半部)の等高線は各 Pr について強い相似性を持ち、二つの流れの熱伝達についてアナロジーが成立することを示している。

5. 平均ヌセルト数

図4に平均ヌセルト数比 Nu/Nu_0 (ただし $Nu_0 = 4.364$ は非回転直管流の値) の計算結果を示す。実線が曲管、点線が直交回転管の結果であるが、両者は各 Pr について K_L 全域でよく一致している。図3の温度場等高線から推定されるように、 Pr が大きいほど、遠心力およびコリオリ力による二次流れの伝熱促進効果が大きい。空気をを用いた森・中山⁽⁸⁾の曲管流の実験値は $Pr = 0.71$ の計算結果とよい一致を示している。

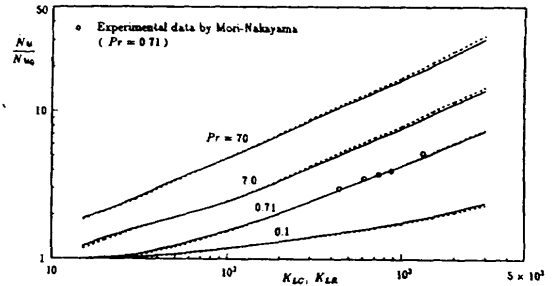


図4 二種の管内流のヌセルト数比 ($Nu_0 = 48/11$)
 — : 曲管内流 $\lambda = 20$, - - - : 直交回転管内流 $Ro = 100$

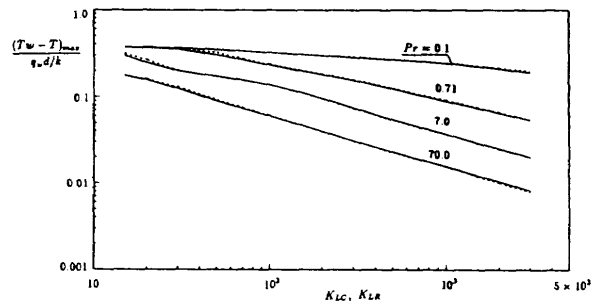


図5 二種の管内流の最大温度差

6. 温度場の特性

図5は無次元温度の最大値が Pr と K_L によりどのように変化するかを示したものである。図3からわかるように、 $Pr = 0.1$ の場合には最大温度差の値は K_L によってあまり変化せず、位置が移動するだけである。 $Pr = 0.71$ の場合は $K_L = 30$ では $Pr = 0.1$ とほぼ同じ等温線分布、したがって最大温度差であるが、 K_L が大きくなるにつれて w 分布が境界層形へ移行するため最大温度差は小さくなる。 $Pr = 7.0$ と 70 では $K_L = 30$ でも二次流れの熱伝達促進は顕著であるから、最大温度差も小さくなっている。ここでも曲管(実線)と直交回転管(点線)の結果は各 Pr について一致している。

引用文献

- (1) 石垣, 田村, 機論, 57-540-B (1991), 2523.
- (2) 石垣, 機論, 58-550-B (1992), 1661.
- (3) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. (1993) to be published.
- (4) 石垣, 機論, 59-561-B (1993), 1486.
- (5) Ishigaki, H., 9th Symp. Turbulent Shear Flows (1993) P311.
- (6) Kays, W. M. & Crawford, M. E., Convective Heat and Mass Transfer, 2nd ed. (1980), 90.
- (7) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980) Hemisphere.
- (8) 森, 中山, 機論, 33-254-B (1967), 1669.

