

# 航空宇宙技術研究所特別資料

SPECIAL PUBLICATION OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

SP-27

第12回航空機計算空気力学シンポジウム論文集

航空機計算空気力学シンポジウム運営委員会

1994年12月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

**第12回航空機計算空気力学シンポジウム論文集**

Proceedings of the 12th NAL Symposium on  
Aircraft Computational Aerodynamics

**開催期日**    平成6年6月14日～16日

**開催場所**    航空宇宙技術研究所

**14 June ~ 16 June, 1994**

**National Aerospace Laboratory, Tokyo**

航空宇宙技術研究所

航空機計算空気力学シンポジウム運営委員会



## 目 次

1. Requirements and Trends of Computational Aerodynamics as a Tool for Aircraft Design .....	1
Princeton University Antony Jameson	
2. 数値シミュレーションによる翼列2次流れ制御設計 .....	51
石川島播磨重工業株式会社 大北 洋治, 児玉 秀和 航空宇宙技術研究所 菊地 一雄, 野崎 理, 田村 敦宏 Yoji OHKITA and Hidekazu KODAMA Kazuo KIKUCHI, Osamu NOZAKI and Atsuhiko TAMURA	
3. 3次元翼列解析 Euler code の収束性に関する一考察 .....	57
東京大学大学院 正木 大作 東京大学工学部 梶 昭次郎 Daisaku MASAKI Shojiro KAJI	
4. DSMC 法による燃焼反応流解析 .....	63
東京大学大学院 小幡 茂男 東京大学工学部 長島 利夫 Shigeo OBATA Toshio NAGASHIMA	
5. Numerical Study on Stabilization of a Diffusion Flame over a Flat Plate .....	69
Saitama University Xiao WANG, Shigeharu OHYAGI and Tri Agung ROHMAT	
6. 翼端間隙を有するタービン翼列流れの検証 .....	75
三菱重工業株式会社 清水 邦弘, 三宅 慶明 航空宇宙技術研究所 野崎 理, 菊地 一雄, 田村 敦宏 Kunihiro SHIMIZU and Yoshiaki MIYAKE Osamu NOZAKI, Kazuo KIKUCHI and Atsuhiko TAMURA	
7. ランプ型インジェクタによる超音速混合流れ場に関する研究 .....	81
石川島播磨重工業株式会社 山根 善行, 澤口 誠一, 安藤 安則 九州大学工学部 麻生 茂 航空宇宙技術研究所 福田 正大 Yoshiyuki YAMANE, Seiichi SAWAGUCHI and Yasunori ANDO Shigeru ASO Masahiro FUKUDA	
8. スクラムジェットエンジンにおける超音速燃焼流の計算 .....	87
三菱重工業株式会社 田口 秀之, 川又 善博 東北大学工学部 中橋 和博 Hideyuki TAGUCHI and Yoshihiro KAWAMATA Kazuhiro NAKAHASHI	
9. 高温衝撃風洞流れの数値シミュレーション .....	93
航空宇宙技術研究所 伊藤 勝宏 クィーンズランド大学 高橋 政浩 Katsuhiko ITOH Masahiro TAKAHASHI	

34. 領域分割法による航空機形状まわりの遷音速流の並列計算 .....	237
	大興電子通信株式会社 伊藤 良三 航空宇宙技術研究所 高梨 進 Ryozo ITO Susumu TAKANASHI
35. 遷音速風洞内全機模型流れのベクトル・パラレル・シミュレーション .....	243
	東京農工大学工学部 高倉 葉子 航空宇宙技術研究所 小川 哲 Yoko TAKAKURA Satoru OGAWA
36. 並列化による大規模3次元 Navier-Stokes 解析の試み .....	249
	川崎重工業株式会社 岸本 琢司 Takuji KISHIMOTO
37. 設計における数値解析の活用について(その12) ——粒子的風上法とその検証—— .....	255
	川崎重工業株式会社 嶋 英志 核融合科学研究所 城之内 忠正 Eiji SHIMA Tadamasa JOUNOUCHI
38. 超音速輸送機全機形状の数値解析 .....	261
	富士重工業株式会社 山崎 哲夫 日本航空機開発協会 内田 隆志 Tetsuo YAMAZAKI Takashi UCHIDA
39. 極超音速飛行実験機空力設計における CFD 技術の適用 .....	267
	航空宇宙技術研究所 山本 行光 宇宙開発事業団 渡辺 重哉 三菱重工業株式会社 石黒 満津夫, 小笠原 宏 Yukimitsu YAMAMOTO Shigeya WATANABE Mitsuo ISHIGURO and Kou OGASAWARA
40. 密度界面と衝撃波の干渉過程のシミュレーション .....	273
	埼玉大学大学院 村田 喜昭 埼玉大学工学部 小原 哲郎, 大八木 重治 Yoshiaki MURATA Tetsuro OBARA and Shigeharu OHYAGI
41. スペースプレーンまわりの低マッハ数流れの数値計算 .....	279
	富士通株式会社 松島 紀佐 航空宇宙技術研究所 高梨 進 Kisa MATSUSHIMA Susumu TAKANASHI
42. 回転する曲管内の流れと熱伝達 .....	285
	航空宇宙技術研究所 石垣 博 Hiroshi ISHIGAKI

43. 低速流におけるダイナミックストール現象の数値計算 .....	291
	九州大学工学部 麻生 茂 九州大学大学院 隈本 雄一 Shigeru ASO Yuichi KUMAMOTO
44. 振動するスポイラを持つ2次元翼まわりの流れの数値シミュレーション .....	297
	九州大学工学部 磯貝 紘二 航空宇宙技術研究所 吉田 正廣 Koji ISOGAI Masahiro YOSHIDA
45. 2次元 PAR-WIG の数値シミュレーション .....	303
	船舶技術研究所 平田 信行 Nobuyuki HIRATA
46. 遷音速ロータ騒音の CFD による直接解析 .....	309
	航空宇宙技術研究所 青山 剛史, 齊藤 茂 Takashi AOYAMA and Shigeru SAITO
47. 境界層流れの計算格子に対する依存性 .....	315
	航空宇宙技術研究所 野村 聡幸 Toshiyuki NOMURA
48. 振り子運動する物体の空気力による減衰過程のシミュレーション .....	321
	名古屋大学工学部 カスマラ, 中村 佳朗 Casmara and Yoshiaki NAKAMURA
49. 境界要素法を用いた2次元フラップ付き翼周りの計算格子の生成 .....	327
	東京理科大学 岩佐 正道, 柳澤 三憲 Masamichi IWASA and Mitsunori YANAGIZAWA
50. 星間分子雲における高密度コアの形成 .....	333
	航空宇宙技術研究所 木村 俊哉 Toshiya KIMURA
51. 高速鉄道に係わる空力問題の数値シミュレーション(その2) .....	339
	鉄道総合技術研究所 飯田 雅宣, 吉田 康夫, 前田 達夫 航空宇宙技術研究所 小川 哲, 和田 安弘 Masanobu IIDA, Yasuo YOSHIDA and Tatsuo MAEDA Satoru OGAWA and Yasuhiro WADA
52. 壁乱流中を伝播する孤立波の解について .....	345
	筑波大学大学院 白 布日其其格 航空宇宙技術研究所 松尾 裕一 筑波大学構造工学系 柘植 俊一 Burtsitsig BAI Yuichi MATSUO Shunichi TSUGE
53. 大規模計算とボリューム・ビジュアライゼーション .....	351
	株式会社ソフテック 白山 晋 Susumu SHIRAYAMA
54. 非構造格子による2次元圧縮性非粘性流れの計算 .....	357
	三菱重工業株式会社 坪井 伸幸 Nobuyuki TSUBOI

55. マルチトランスペュータシステムにおける2次元非圧縮性流れの並列計算 .....	363
京都工芸繊維大学 小幡 正規, 里深 信行 京都工芸繊維大学大学院 鈴木 智博 Masanori OBATA and Nobuyuki SATOFUKA Toshihiro SUZUKI	
56. 2次元 Euler 方程式に対する風上法の適用について .....	369
航空宇宙技術研究所 橘 正和 Masakazu TACHIBANA	
57. ガスタービン冷却系の中空軸部分での旋回流による静圧降下 .....	375
東京大学大学院 岸部 忠晴 東京大学工学部 梶 昭次郎 Tadaharu KISHIBE Shojiro KAJI	

# Requirements and Trends of Computational Aerodynamics as a Tool for Aircraft Design

*Antony Jameson*

Department of Mechanical and Aerospace Engineering  
Princeton University  
Princeton, New Jersey 08544 USA

## 1 Introduction

Computational methods first began to have a significant impact on aerodynamics analysis and design in the period of 1965-75. This decade saw the introduction of panel methods which could solve the linear flow models for arbitrarily complex geometry in both subsonic and supersonic flow [54, 134, 165]. It also saw the appearance of the first satisfactory methods for treating the nonlinear equations of transonic flow [113, 112, 58, 59, 40, 50], and the development of the hodograph method for the design of shock free supercritical airfoils [15].

In a landmark paper of 1975 [31], Chapman, Mark and Pirtle anticipated that "computers should begin to supplant wind tunnels in the aerodynamic design and testing process". In effect, computers would ultimately provide a numerical wind tunnel. They listed three main objectives of computational aerodynamics:

1. To provide flow simulations that are either impractical or impossible to obtain in wind tunnels or other ground based experimental test facilities.
2. To lower the time and cost required to obtain aerodynamic flow simulations necessary for the design of new aerospace vehicles.
3. Eventually, to provide more accurate simulations of flight aerodynamics than wind tunnels can.

Chapman, Mark, and Pirtle also noted that the inherent limitations of computational and wind tunnel simulations are complementary. Wind tunnels are limited by the size of the models that can be placed in them, and by the density, temperature and velocity of the flow that they can sustain, with the consequence that flight-Reynolds numbers cannot be realized with complete models. Their accuracy is also limited by wall and support interference, and by aeroelastic distortion. Computers are not limited in any of these ways, but they are limited in speed and memory, which in turn limit the attainable complexity and resolution of the simulations.

Computational Fluid Dynamics (CFD) has now matured to the point at which it is widely accepted as a key tool for aerodynamic design. Algorithms have been the subject of intensive development for the past two decades. The principles underlying the design and implementation of robust schemes which can accurately resolve shock waves and contact discontinuities in compressible flows are now quite well established. It is also quite well understood how to design high order schemes for viscous flow, including compact schemes and spectral methods. Adaptive refinement of the mesh interval ( $h$ ) and the order of approximations ( $p$ ) has been successfully exploited both separately and in combination in the  $h$ - $p$  method [116]. Despite these advances, CFD is still not being exploited as effectively as one would like in the design process. This is partially due to the long set-up times and high costs, both human and computational, of complex flow simulations. A

continuing obstacle to the treatment of configurations with complex geometry has been the problem of mesh generation. Several general techniques have been developed, including algebraic transformations and methods based on the solution of elliptic and hyperbolic equations. In the last few years methods using unstructured meshes have also begun to gain more general acceptance. The Dassault-INRIA group led the way in developing a finite element method for transonic potential flow. They obtained a solution for a complete Falcon 50 as early as 1982 [24]. Euler methods for unstructured meshes have been the subject of intensive development by several groups since 1985 [101, 75, 74, 152, 14], and Navier-Stokes methods on unstructured meshes have also been demonstrated [108, 109, 11].

The fidelity of mathematical modelling of high Reynolds number flows continues to be limited by computational costs, thus, accurate and cost-effective simulation of viscous flow at high Reynolds numbers associated with full scale flight remains a challenge. Improvements are still needed in a number of areas, including

1. mesh generation techniques to assure proper resolution of boundary layers
2. turbulence modeling for separated flows
3. algorithms to reduce computational costs.

Several routes are available toward the reduction of computational costs, including the reduction of mesh requirements by the use of higher order schemes, improved convergence to steady state by sophisticated acceleration methods, and the exploitation of massively parallel computers.

In addition to more accurate and cost-effective flow prediction methods, better optimization methods are also needed, so that not only can designs be rapidly evaluated, but directions of improvement can be identified which enable the rapid evaluation of a satisfactory design. Possession of techniques which result in a faster design cycle gives a crucial advantage in a competitive environment.

In the next section, this paper discusses steps needed for the implementation of computational simulation techniques which could meet industrial needs. A critical issue examined in Section 3 is the choice of mathematical models: what level of complexity is needed to provide sufficient accuracy for aerodynamic design, and what is the impact on cost and turn-around. Section 4 addresses issues in the formulation of numerical algorithms which provide the fundamental building blocks for a numerical wind tunnel. Section 5 presents the results of some numerical calculations which require moderate computer resources and could be completed with the fast turn around needed for effective industrial use. Section 6 discusses automatic design procedures which can be used to produce optimum aerodynamic designs. Finally, Section 7 discusses the outlook for achieving the goal of a numerical wind tunnel.

## 2 Steps Needed for the Implementation of Simulation Methods

The principal requirements of effective CFD methods for engineering design are

1. assured accuracy
2. acceptable computational cost
3. fast turn around.

Improvements are still needed in all three areas. Effective use of CFD for design is presently limited by the lack of good interfaces to CAD systems, which prevent full automation of the mesh generation process. This bottleneck needs to be eliminated and the CFD system should be fully integrated in a numerical design environment.

The core requirement for the successful exploitation of CFD is the development of the basic software for the computational simulation of complex fluid flows. A level of accuracy sufficient to assure confidence in the aerodynamic design must be achieved with acceptable computational costs and rapid turn around. Five principal steps can be identified in the development of software for aerodynamic simulation. These are:

1. Choice of a mathematical model appropriate to the requirements.
2. Mathematical analysis of the model to ensure that the problem is properly formulated (for example, definition of far field boundary conditions, conditions for uniqueness).
3. Formulation of a numerical approximation scheme.
4. Implementation as a computer program.
5. Validation.

All of these steps need to be carefully carried out to produce the reliable, robust, and accurate software that is needed.

Software which meets the basic requirements for the computational simulation of aerodynamic flows is the first step towards a numerical simulation system for design, but not by itself sufficient. The simulation software should also be embedded in a more comprehensive environment to provide user-friendly interfaces and efficient data management. The transfer of large volumes of data representing the geometries and computational results can become a major bottleneck. It is essential to develop procedures allowing the easy transfer of geometric data from computer aided design (CAD) systems. A numerical wind tunnel should also contain automatic measurement systems capable of determining the geometry of real objects. These interfaces should be general enough to allow the substitution of alternative CAD systems, and also of alternative aerodynamic simulation modules. Efficient methods for handling the output data are equally important. These must provide both for visualization of the results, and for their quantitative evaluation. Visualization is important because it can provide the designer with the insights needed to make an improvement, while quantitative evaluation is needed both for verification of the performance, and to allow optimization of the design.

### 3 Mathematical Models of Fluid Flow and Computational Costs

The choice of a model depends on the complexity of the flow, the level of accuracy required, and the computational cost. The Reynolds number of aerodynamic flows associated with the flight envelopes of full scale aircraft are very large (of the order of 10 million and up). Correspondingly the flows that need to be predicted are generally turbulent. The size of the smallest eddies in a turbulent flow may be estimated by dimensional analysis to be of the order of  $Re^{-\frac{1}{3}}$ , where  $Re$  is the Reynolds number based on a representative global length scale. In a three-dimensional simulation, allowing for the need to resolve time scales which correspond to the smallest length scales, the computational complexity of a full simulation of a turbulent flow, down to the smallest scales in space and time, can therefore be estimated as proportional to the cube of the Reynolds number. Consequently a direct simulation of the full Navier-Stokes equations is not feasible, forcing the use of mathematical models with some level of simplification. Figure 1 indicates a hierarchy of models at different levels of simplification which have proved useful in practice. Efficient flight is generally achieved by the use of smooth and streamlined shapes which avoid flow separation and minimize viscous effects, with the consequence that useful predictions can be made using inviscid models. Inviscid calculations with boundary layer corrections can provide quite accurate predictions of lift and drag when the flow remains attached, but iteration between the inviscid outer solution and the inner boundary layer solution becomes increasingly difficult with the onset of separation. Procedures for solving the full viscous equations are likely to be needed for the simulation of arbitrary complex separated flows, which may occur at high angles of attack or with bluff bodies. In order to treat flows at high Reynolds numbers, one is generally forced to estimate turbulent effects by Reynolds averaging of the fluctuating components. This requires the introduction of a turbulence model. As the available computing power increases one may also aspire to large eddy simulation (LES) in which the larger scale eddies are directly calculated, while the influence of turbulence at scales smaller than the mesh interval is represented by a subgrid scale model.

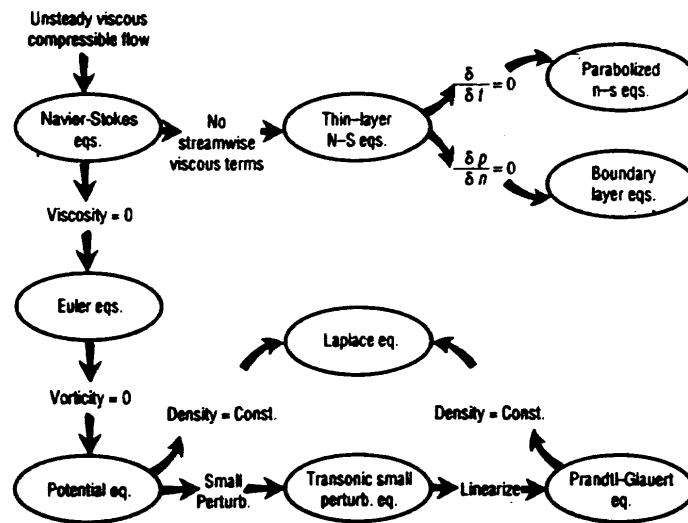


Figure 1: Equations of Fluid Dynamics for Mathematical Models of Varying Complexity (Supplied by Luis Miranda, Lockheed Corporation).

Computational costs vary drastically with the choice of mathematical model. Panel methods can be effectively implemented with higher-end personal computers (with an Intel 80486 microprocessor, for example). Studies of the dependency of the result on mesh refinement, performed by this author and others, have demonstrated that inviscid transonic potential flow or Euler solutions for an airfoil can be accurately calculated on a mesh with 160 cells around the section, and 32 cells normal to the section. Using multigrid techniques 10 to 25 cycles are enough to obtain a converged result. Consequently airfoil calculations can be performed in seconds on a Cray YMP, and can also be performed on 486-class personal computers. Correspondingly accurate three-dimensional inviscid calculations can be performed for a wing on a mesh, say with  $192 \times 32 \times 48 = 294,912$  cells, in about 5 minutes on a single processor Cray YMP, or less than a minute with eight processors, or in 1 or 2 hours on a workstation such as a Hewlett Packard 735 or an IBM 560 model.

Viscous simulations at high Reynolds numbers require vastly greater resources. Careful two-dimensional studies of mesh requirements have been carried out at Princeton by Martinelli [105]. He found that on the order of 32 mesh intervals were needed to resolve a turbulent boundary layer, in addition to 32 intervals between the boundary layer and the far field, leading to a total of 64 intervals. In order to prevent degradations in accuracy and convergence due to excessively large aspect ratios (in excess of 1,000) in the surface mesh cells, the chordwise resolution must also be increased to 512 intervals. Reasonably accurate solutions can be obtained in a  $512 \times 64$  mesh in 100 multigrid cycles. Figure 2 shows a comparison of experimental data with a calculated result for the RAE 2822 airfoil at a Mach number of 0.729, an angle of attack of  $2.31^\circ$  and a Reynolds number of 6 million. Translated to three dimensions, this would imply the need for meshes with 5–10 million cells (for example,  $512 \times 64 \times 256 = 8,388,608$  cells). When simulations are performed on less fine meshes with, say, 500,000 to 1 million cells, it is very hard to avoid mesh dependency in the solutions as well as sensitivity to the turbulence model.

A typical algorithm requires of the order of 5,000 floating point operations per mesh point in one multigrid iteration. With 10 million mesh points, the operation count is of the order of  $0.5 \times 10^{11}$  per cycle. Given a computer capable of sustaining  $10^{11}$  operations per second (100 gigaflops), 200 cycles could then be performed in 100 seconds. Simulations of unsteady viscous flows (flutter, buffet) would be likely to require 1,000–10,000 time steps. A further progression to large eddy simulation of complex configurations would require even greater resources. The following estimate is due to W.H. Jou [84]. Suppose that a conservative estimate of the size of



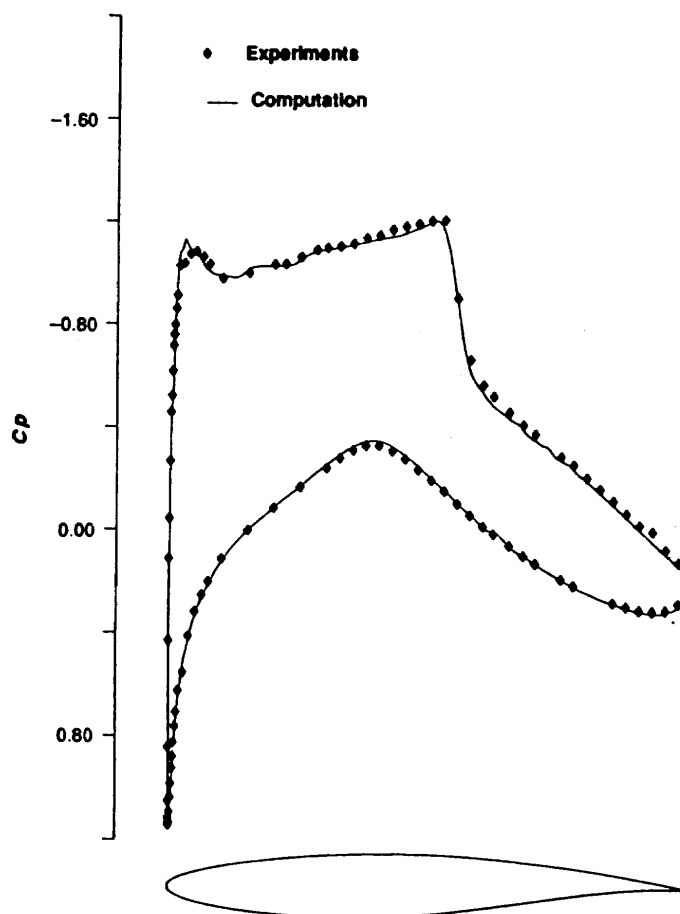


Figure 2: Comparison of the Calculated Result and Experimental Data for the RAE 2822 Airfoil at Mach 0.729 and 2.31° Angle of Attack (Supplied by Luigi Martinelli, Princeton University).

eddies in a boundary layer that ought to be resolved is  $1/5$  of the boundary layer thickness. Assuming that 10 points are needed to resolve a single eddy, the mesh interval should then be  $1/50$  of the boundary layer thickness. Moreover, since the eddies are three-dimensional, the same mesh interval should be used in all three directions. Now, if the boundary layer thickness is of the order of 0.01 of the chord length, 5,000 intervals will be needed in the chordwise direction, and for a wing with an aspect ratio of 10, 50,000 intervals will be needed in the spanwise direction. Thus, of the order of  $50 \times 5,000 \times 50,000$  or 12.5 billion mesh points would be needed in the boundary layer. If the time dependent behavior of the eddies is to be fully resolved using time steps on the order of the time for a wave to pass through a mesh interval, and one allows for a total time equal to the time required for waves to travel three times the length of the chord, of the order of 15,000 time steps would be needed. Performance beyond the teraflop ( $10^{12}$  operations per second) will be needed to attempt calculations of this nature, which also have an information content far beyond what is needed for engineering analysis and design. The designer does not need to know the details of the eddies in the boundary layer. The primary purpose of such calculations is to improve the calculation of averaged quantities such as skin friction, and the prediction of global behavior such as the onset of separation. The current use of Navier-Stokes and large eddy simulations is to try to gain an improved insight into the physics of turbulent flow, which may in turn lead to the development of more comprehensive and reliable turbulence models.

It is doubtful whether a universally valid turbulence model, capable of describing all complex flows, could be devised [48]. Algebraic models [28, 9] have proved fairly satisfactory for the calculation of attached and slightly separated wing flows. These models rely on the boundary layer concept, usually incorporating separate formulas for the inner and outer layers, and they require an estimate of a length scale which depends on the thickness of the boundary layer. The estimation of this quantity by a search for a maximum of the

vorticity times a distance to the wall, as in the Baldwin-Lomax model, can lead to ambiguities in internal flows, and also in complex vortical flows over slender bodies and highly swept or delta wings [37, 106]. The Johnson-King model [82], which allows for non-equilibrium effects through the introduction of an ordinary differential equation for the maximum shear stress, has improved the prediction of flows with shock induced separation [135, 85].

Closure models depending on the solution of transport equations are widely accepted for industrial applications. These models eliminate the need to estimate a length scale by detecting the edge of the boundary layer. Eddy viscosity models typically use two equations for the turbulent kinetic energy  $k$  and the dissipation rate  $\epsilon$ , or a pair of equivalent quantities [83, 164, 149, 1, 111, 33]. Models of this type generally tend to present difficulties in the region very close to the wall. They also tend to be badly conditioned for numerical solution. The  $k-l$  model [143] is designed to alleviate this problem by taking advantage of the linear behaviour of the length scale  $l$  near the wall. In an alternative approach to the design of models which are more amenable to numerical solution, new models requiring the solution of one transport equation have recently been introduced [10, 148]. The performance of the algebraic models remains competitive for wing flows, but the one- and two-equation models show promise for broader classes of flows. In order to achieve greater universality, research is also being pursued on more complex Reynolds stress transport models, which require the solution of a larger number of transport equations.

Another direction of research is the attempt to devise more rational models via renormalization group (RNG) theory [168, 144]. Both algebraic and two-equation  $k-\epsilon$  models devised by this approach have shown promising results [107].

The selection of sufficiently accurate mathematical models and a judgment of their cost effectiveness ultimately rests with industry. Aircraft and spacecraft designs normally pass through the three phases of conceptual design, preliminary design, and detailed design. Correspondingly, the appropriate CFD models will vary in complexity. In the conceptual and preliminary design phases, the emphasis will be on relatively simple models which can give results with very rapid turn-around and low computer costs, in order to evaluate alternative configurations and perform quick parametric studies. The detailed design stage requires the most complete simulation that can be achieved with acceptable cost. In the past, the low level of confidence that could be placed on numerical predictions has forced the extensive use of wind tunnel testing at an early stage of the design. This practice was very expensive. The limited number of models that could be fabricated also limited the range of design variations that could be evaluated. It can be anticipated that in the future, the role of wind tunnel testing in the design process will be more one of verification. Experimental research to improve our understanding of the physics of complex flows will continue, however, to play a vital role.

## 4 Challenges for CFD Algorithms

The computational simulation of fluid flow presents a number of severe challenges for algorithm design. At the level of inviscid modeling, the inherent nonlinearity of the fluid flow equations leads to the formation of singularities such as shock waves and contact discontinuities. Moreover, the geometric configurations of interest are extremely complex, and generally contain sharp edges which lead to the shedding of vortex sheets. Extreme gradients near stagnation points or wing tips may also lead to numerical errors that can have global influence. Numerically generated entropy may be convected from the leading edge for example, causing the formation of a numerically induced boundary layer which can lead to separation. The need to treat exterior domains of infinite extent is also a source of difficulty. Boundary conditions imposed at artificial outer boundaries may cause reflected waves which significantly interfere with the flow. When viscous effects are also included in the simulation, the extreme difference of the scales in the viscous boundary layer and the outer flow, which is essentially inviscid, is another source of difficulty, forcing the use of meshes with extreme variations in mesh interval. For these reasons CFD, has been a driving force for the development of numerical algorithms.

## 4.1 Structured and Unstructured Meshes

The algorithm designer faces a number of critical decisions. The first choice that must be made is the nature of the mesh used to divide the flow field into discrete subdomains. The discretization procedure must allow for the treatment of complex configurations. The principal alternatives are Cartesian meshes, body-fitted curvilinear meshes, and unstructured tetrahedral meshes. Each of these approaches has advantages which have led to their use. The Cartesian mesh minimizes the complexity of the algorithm at interior points and facilitates the use of high order discretization procedures, at the expense of greater complexity, and possibly a loss of accuracy, in the treatment of boundary conditions at curved surfaces. This difficulty may be alleviated by using mesh refinement procedures near the surface. With their aid, schemes which use Cartesian meshes have recently been developed to treat very complex configurations [110, 136, 21, 88].

Body-fitted meshes have been widely used and are particularly well suited to the treatment of viscous flow because they readily allow the mesh to be compressed near the body surface. With this approach, the problem of mesh generation itself has proved to be a major pacing item. The most commonly used procedures are algebraic transformations [7, 41, 43, 145], methods based on the solution of elliptic equations, pioneered by Thompson [157, 158, 146, 147], and methods based on the solution of hyperbolic equations marching out from the body [150]. In order to treat very complex configurations it generally proves expedient to use a multiblock [163, 137] procedure, with separately generated meshes in each block, which may then be patched at block faces, or allowed to overlap, as in the Chimera scheme [18, 19]. While a number of interactive software systems for grid generation have been developed, such as EAGLE, GRIDGEN, GRAPE, and ICEM, the generation of a satisfactory grid for a very complex configuration may require months of effort.

The alternative is to use an unstructured mesh in which the domain is subdivided into tetrahedrons. This in turn requires the development of solution algorithms capable of yielding the required accuracy on unstructured meshes. This approach has been gaining acceptance, as it is becoming apparent that it can lead to a speed-up and reduction in the cost of mesh generation that more than offsets the increased complexity and cost of the flow simulations. Two competing procedures for generating triangulations which have both proved successful are Delaunay triangulation [38, 11], based on concepts introduced at the beginning of the century by Voronoi [161], and the moving front method [102].

## 4.2 Finite Difference, Finite Volume, and Finite Element Schemes

Associated with choice of mesh type is the formulation of the discretization procedure for the equations of fluid flow, which can be expressed as differential conservation laws. In the Cartesian tensor notation, let  $x_i$  be the coordinates,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ , and  $E$  the pressure, density, temperature, and total energy, and  $u_i$  the velocity components. Each conservation equation has the form

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = 0. \quad (1)$$

For the mass equation

$$w = \rho, \quad F_j = \rho u_j.$$

For the  $i$  momentum equation

$$w_i = \rho u_i, \quad F_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij},$$

where  $\sigma_{ij}$  is the viscous stress tensor. For the energy equation

$$w = \rho E, \quad F_j = (\rho E + p) u_j - \sigma_{jk} u_k - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

where  $\kappa$  is the coefficient of heat conduction. The pressure is related to the density and energy by the equation of state

$$p = (\gamma - 1) \rho \left( E - \frac{1}{2} u_i u_i \right)$$

in which  $\gamma$  is the ratio of specific heats. In the Navier-Stokes equations the viscous stresses are assumed to be linearly proportional to the rate of strain, or

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right), \quad (2)$$

where  $\mu$  and  $\lambda$  are the coefficients of viscosity and bulk viscosity, and usually  $\lambda = -2\mu/3$ .

The finite difference method, which requires the use of a Cartesian or a structured curvilinear mesh, directly approximates the differential operators appearing in these equations. In the finite volume method [103], the discretization is accomplished by dividing the domain of the flow into a large number of small subdomains, and applying the conservation laws in the integral form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Here  $\mathbf{F}$  is the flux appearing in equation (1) and  $d\mathbf{S}$  is the directed surface element of the boundary  $\partial\Omega$  of the domain  $\Omega$ . The use of the integral form has the advantage that no assumption of the differentiability of the solutions is implied, with the result that it remains a valid statement for a subdomain containing a shock wave. In general the subdomains could be arbitrary, but it is convenient to use either hexahedral cells in a body conforming curvilinear mesh or tetrahedrons in an unstructured mesh.

Alternative discretization schemes may be obtained by storing flow variables at either the cell centers or the vertices. These variations are illustrated in Figure 3 for the two-dimensional case. With a cell-centered scheme the discrete conservation law takes the form

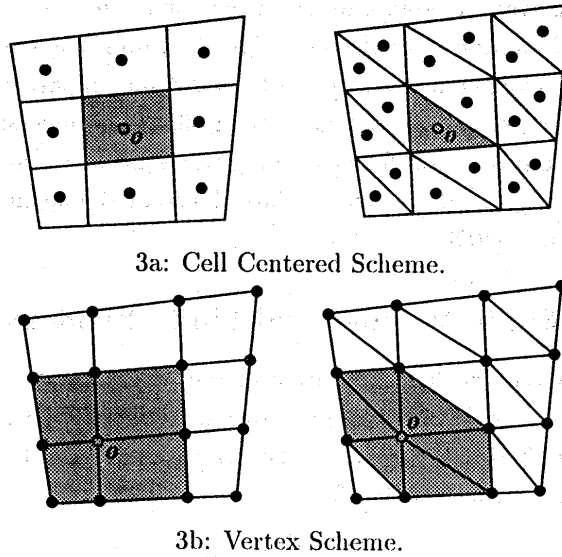


Figure 3: Structured and Unstructured Discretizations.

$$\frac{d}{dt} wV + \sum_{\text{faces}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (3)$$

where  $V$  is the cell volume, and  $\mathbf{F}$  is now a numerical estimate of the flux vector through each face.  $\mathbf{F}$  may be evaluated from values of the flow variables in the cells separated by each face, using upwind biasing to allow for the directions of wave propagation. With hexahedral cells, equation (3) is very similar to a finite difference scheme in curvilinear coordinates. Under a transformation to curvilinear coordinates  $X_j$ , equation (1) becomes

$$\frac{\partial}{\partial t} (Jw) + \frac{\partial}{\partial X_i} \left( J \frac{\partial X_i}{\partial x_j} F_j \right) = 0,$$

where  $J$  is the Jacobian determinant of the transformation matrix  $\left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right]$ . The transformed flux  $J \frac{\partial X_i}{\partial x_j} F_j$  corresponds to the dot product of the flux  $\mathbf{F}$  with a vector face area  $J \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ , while  $J$  represents the transformation of the cell volume. The finite volume form (3) has the advantages that it is valid for both structured and unstructured meshes, and that it assures that a uniform flow exactly satisfies the equations, because  $\sum_{\text{faces}} \mathbf{S} = 0$  for a closed control volume. Finite difference schemes do not necessarily satisfy this constraint because of the discretization errors in evaluating  $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$  and the inversion of the transformation matrix. A cell-vertex finite volume scheme can be derived by taking the union of the cells surrounding a given vertex as the control volume for that vertex [51, 66, 127]. In equation (3),  $V$  is now the sum of the volumes of the surrounding cells, while the flux balance is evaluated over the outer faces of the polyhedral control volume. In the absence of upwind biasing the flux vector is evaluated by averaging over the corners of each face. This has the advantage of remaining accurate on an irregular or unstructured mesh.

An alternative route to the discrete equations is provided by the finite element method. Whereas the finite difference and finite volume methods approximate the differential and integral operators, the finite element method proceeds by inserting an approximate solution into the exact equations. On multiplying by a test function  $\phi$  and integrating by parts over space, one obtains the weak form

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \phi w d\Omega = \iiint_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla \phi d\Omega - \iint_{\partial\Omega} \phi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (4)$$

which is also valid in the presence of discontinuities in the flow. In the Galerkin method the approximate solution is expanded in terms of the same family of functions as those from which the test functions are drawn. By choosing test functions with local support, separate equations are obtained for each node. For example, if a tetrahedral mesh is used, and  $\phi$  is piecewise linear, with a nonzero value only at a single node, the equations at each node have a stencil which contains only the nearest neighbors. In this case the finite element approximation corresponds closely to a finite volume scheme. If a piecewise linear approximation to the flux  $\mathbf{F}$  is used in the evaluation of the integrals on the right hand side of equation (4), these integrals reduce to formulas which are identical to the flux balance of the finite volume scheme.

Thus the finite difference and finite volume methods lead to essentially similar schemes on structured meshes, while the finite volume method is essentially equivalent to a finite element method with linear elements when a tetrahedral mesh is used. Provided that the flow equations are expressed in the conservation law form (1), all three methods lead to an exact cancellation of the fluxes through interior cell boundaries, so that the conservative property of the equations is preserved. The important role of this property in ensuring correct shock jump conditions was pointed out by Lax and Wendroff [91].

## 4.3 Non-oscillatory Shock Capturing Schemes

### 4.3.1 Local Extremum Diminishing (LED) Schemes

The discretization procedures which have been described in the last section lead to nondissipative approximations to the Euler equations. Dissipative terms may be needed for two reasons. The first is the possibility of undamped oscillatory modes. The second reason is the need for the clean capture of shock waves and contact discontinuities without undesirable oscillations. An extreme overshoot could result in a negative value of an inherently positive quantity such as the pressure or density. The development of non-oscillatory schemes has been a prime focus of algorithm research for compressible flow. Consider a general semi-discrete scheme of the form

$$\frac{d}{dt} v_j = \sum_{k \neq j} c_{jk} (v_k - v_j). \quad (5)$$

A maximum cannot increase and a minimum cannot decrease if the coefficients  $c_{jk}$  are non-negative, since at a maximum  $v_k - v_j \leq 0$ , and at a minimum  $v_k - v_j \geq 0$ . Thus the condition

$$c_{jk} \geq 0, \quad k \neq j \quad (6)$$

is sufficient to ensure stability in the maximum norm. Moreover, if the scheme has a compact stencil, so that  $c_{jk} = 0$  when  $j$  and  $k$  are not nearest neighbors, a local maximum cannot increase and local minimum cannot decrease. This local extremum diminishing (LED) property prevents the birth and growth of oscillations. The one-dimensional conservation law

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

provides a useful model for analysis. In this case waves are propagated with a speed  $a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}$ , and the solution is constant along the characteristics  $\frac{dx}{dt} = a(u)$ . Thus the LED property is satisfied. In fact the total variation

$$TV(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx$$

of a solution of this equation does not increase, provided that any discontinuity appearing in the solution satisfies an entropy condition [90]. Harten proposed that difference schemes ought to be designed so that the discrete total variation cannot increase [52]. If the end values are fixed, the total variation can be expressed as

$$TV(u) = 2 \left( \sum \text{maxima} - \sum \text{minima} \right).$$

Thus a LED scheme is also total variation diminishing (TVD). Positivity conditions of the type expressed in equations (5) and (6) lead to diagonally dominant schemes, and are the key to the elimination of improper oscillations. The positivity conditions may be realized by the introduction of diffusive terms or by the use of upwind biasing in the discrete scheme. Unfortunately, they may also lead to severe restrictions on accuracy unless the coefficients have a complex nonlinear dependence on the solution.

#### 4.3.2 Artificial Diffusion and Upwinding

Following the pioneering work of Godunov [47], a variety of dissipative and upwind schemes designed to have good shock capturing properties have been developed during the past two decades [151, 22, 92, 93, 133, 120, 52, 119, 154, 5, 63, 169, 57, 166, 13, 12, 11]. If the one-dimensional scalar conservation law

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = 0 \quad (7)$$

is represented by a three point scheme

$$\frac{dv_j}{dt} = c_{j+\frac{1}{2}}^+ (v_{j+1} - v_j) + c_{j-\frac{1}{2}}^- (v_{j-1} - v_j),$$

the scheme is LED if

$$c_{j+\frac{1}{2}}^+ \geq 0, \quad c_{j-\frac{1}{2}}^- \geq 0. \quad (8)$$

A conservative semidiscrete approximation to the one-dimensional conservation law can be derived by subdividing the line into cells. Then the evolution of the value  $v_j$  in the  $j$ th cell is given by

$$\Delta x \frac{dv_j}{dt} + h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}} = 0, \quad (9)$$

where  $h_{j+\frac{1}{2}}$  is an estimate of the flux between cells  $j$  and  $j+1$ . The simplest estimate is the arithmetic average  $(f_{j+1} + f_j)/2$ , but this leads to a scheme that does not satisfy the positivity conditions. To correct this, one may add a dissipative term and set

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) - \alpha_{j+\frac{1}{2}} (v_{j+1} - v_j). \quad (10)$$

In order to estimate the required value of the coefficient  $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$ , let  $a_{j+\frac{1}{2}}$  be a numerical estimate of the wave speed  $\frac{\partial f}{\partial v}$ ,

$$a_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f_{j+1} - f_j}{v_{j+1} - v_j} & \text{if } v_{j+1} \neq v_j \\ \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=v_j} & \text{if } v_{j+1} = v_j \end{cases} \quad (11)$$

Now

$$\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}} &= f_j + \frac{1}{2}(f_{j+1} - f_j) - \alpha_{j+\frac{1}{2}}(v_{j+1} - v_j) \\ &= f_j - \left( \alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}a_{j+\frac{1}{2}} \right) (v_{j+1} - v_j), \end{aligned}$$

and similarly

$$h_{j-\frac{1}{2}} = f_j - \left( \alpha_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a_{j-\frac{1}{2}} \right) (v_j - v_{j-1}).$$

Then

$$\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}} &= + \left( \frac{1}{2}a_{j+\frac{1}{2}} - \alpha_{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta v_{j+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left( \frac{1}{2}a_{j-\frac{1}{2}} + \alpha_{j-\frac{1}{2}} \right) \Delta v_{j-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

where

$$\Delta v_{j+\frac{1}{2}} = v_{j+1} - v_j.$$

Thus the LED condition (8) is satisfied if

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} |a_{j+\frac{1}{2}}|. \quad (12)$$

If one takes

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} |a_{j+\frac{1}{2}}|,$$

the diffusive flux becomes

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} |a_{j+\frac{1}{2}}| \Delta v_{j+\frac{1}{2}}$$

and one obtains the first order upwind scheme

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_j & \text{if } a_{j+\frac{1}{2}} > 0 \\ f_{j+1} & \text{if } a_{j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}.$$

This is the least diffusive first order scheme which satisfies the LED condition. In this sense upwinding is a natural approach to the construction of non-oscillatory schemes.

Another important requirement of discrete schemes is that they should exclude nonphysical solutions which do not satisfy appropriate entropy conditions [89], which require the convergence of characteristics towards admissible discontinuities. This places more stringent bounds on the minimum level of numerical viscosity [104, 156, 118, 121]. In the case that the numerical flux function is strictly convex, Aiso has recently proved [2] that it is sufficient that

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} > \max \left\{ \frac{1}{2} |a_{j+\frac{1}{2}}|, \epsilon \operatorname{sign}(v_{j+1} - v_j) \right\}$$

for  $\epsilon > 0$ . Thus the numerical viscosity should be rounded out and not allowed to reach zero at a point where the wave speed  $a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}$  approaches zero. This justifies, for example, Harten's entropy fix [52].

It may be noted that the successful treatment of transonic potential flow also involved the use of upwind biasing. This was first introduced by Murman and Cole to treat the transonic small disturbance equation [113]. The author's rotated difference scheme [58], which extended their technique to treat the general transonic potential flow equation, proved to be very robust. TVD schemes can yield sharp discrete shock waves without oscillations, but in this simple form they are at best first order accurate.

Higher order schemes can be constructed by introducing higher order diffusive terms. Unfortunately these have larger stencils and coefficients of varying sign which are not compatible with the conditions (6) for a LED scheme, and it is known that schemes which satisfy these conditions are at best first order accurate in the neighborhood of an extremum. It proves useful in the following development to introduce the concept of essentially local extremum diminishing (ELED) schemes. These are defined to be schemes which satisfy the condition that in the limit as the mesh width  $\Delta x \rightarrow 0$ , local maxima are non-increasing, and local minima are non-decreasing.

### 4.3.3 High Resolution Switched Schemes: Jameson-Schmidt-Turkel (JST) Scheme

Higher order non-oscillatory schemes can be derived by introducing anti-diffusive terms in a controlled manner. An early attempt to produce a high resolution scheme by this approach is the Jameson-Schmidt-Turkel (JST) scheme [78]. Suppose that anti-diffusive terms are introduced by subtracting neighboring differences to produce a third order diffusive flux

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( \Delta v_{j+\frac{3}{2}} + \Delta v_{j-\frac{1}{2}} \right) \right\}, \quad (13)$$

which is an approximation to  $\frac{1}{2}\alpha\Delta x^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3}$ . The positivity condition (6) is violated by this scheme. It proves that it generates substantial oscillations in the vicinity of shock waves, which can be eliminated by switching locally to the first order scheme. The JST scheme therefore introduces blended diffusion of the form

$$d_{j+\frac{1}{2}} = +\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - \epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)} \left( \Delta v_{j+\frac{3}{2}} - 2\Delta v_{j+\frac{1}{2}} + \Delta v_{j-\frac{1}{2}} \right), \quad (14)$$

The idea is to use variable coefficients  $\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}$  and  $\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)}$  which produce a low level of diffusion in regions where the solution is smooth, but prevent oscillations near discontinuities. If  $\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}$  is constructed so that it is of order  $\Delta x^2$  where the solution is smooth, while  $\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)}$  is of order unity, both terms in  $d_{j+\frac{1}{2}}$  will be of order  $\Delta x^3$ .

The JST scheme has proved very effective in practice in numerous calculations of complex steady flows, and conditions under which it could be a total variation diminishing (TVD) scheme have been examined by Swanson and Turkel [153]. An alternative statement of sufficient conditions on the coefficients  $\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}$  and  $\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)}$  for the JST scheme to be LED is as follows:

#### Theorem 1 (Positivity of the JST scheme)

Suppose that whenever either  $v_{j+1}$  or  $v_j$  is an extremum the coefficients of the JST scheme satisfy

$$\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} \geq \frac{1}{2} \left| \alpha_{j+\frac{1}{2}} \right|, \quad \epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)} = 0. \quad (15)$$

Then the JST scheme is local extremum diminishing (LED).

**Proof:** We need only consider the rate of change of  $v$  at extremal points. Suppose that  $v_j$  is an extremum. Then

$$\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)} = \epsilon_{j-\frac{1}{2}}^{(4)} = 0,$$

and the semi-discrete scheme (9) reduces to

$$\Delta x \frac{dv_j}{dt} = \left( \epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} - \frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - \left( \epsilon_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} + \frac{1}{2} a_{j-\frac{1}{2}} \right) \Delta v_{j-\frac{1}{2}},$$

and each coefficient has the required sign.  $\square$

In order to construct  $\epsilon_{j-\frac{1}{2}}^{(2)}$  and  $\epsilon_{j-\frac{1}{2}}^{(4)}$  with the desired properties define

$$R(u, v) = \begin{cases} \left| \frac{u-v}{|u|+|v|} \right|^q & \text{if } u \neq 0 \text{ or } v \neq 0 \\ 0 & \text{if } u = v = 0, \end{cases} \quad (16)$$

where  $q$  is a positive integer. Then  $R(u, v) = 1$  if  $u$  and  $v$  have opposite signs. Otherwise  $R(u, v) < 1$ . Now set

$$Q_j = R(\Delta v_{j+\frac{1}{2}}, \Delta v_{j-\frac{1}{2}}), \quad Q_{j+\frac{1}{2}} = \max(Q_j, Q_{j+1}).$$



and

$$\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} Q_{j+\frac{1}{2}}, \quad \epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)} = \beta_{j+\frac{1}{2}} (1 - Q_{j+\frac{1}{2}}), \quad (17)$$

where

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} |a_{j+\frac{1}{2}}|, \quad \beta_{j+\frac{1}{2}} \text{ is proportional to } |a_{j+\frac{1}{2}}|.$$

At a extremum  $Q_j = 1$ , since then  $\Delta v_{j+\frac{1}{2}}$  and  $\Delta v_{j-\frac{1}{2}}$  have opposite signs. Elsewhere  $Q_j \leq 1$  and is of order  $\Delta x$  if the solution is smooth. Thus the conditions (15) for a LED scheme are satisfied, and if  $q \geq 2$ ,  $\epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}$  is of order  $\Delta x^2$  in smooth regions not containing an extremum.

#### 4.3.4 Symmetric Limited Positive (SLIP) Scheme

An alternative route to high resolution without oscillation is to introduce flux limiters to guarantee the satisfaction of the positivity condition (6). The use of limiters dates back to the work of Boris and Book [22]. A particularly simple way to introduce limiters, proposed by the author in 1984 [63], is to use flux limited dissipation. In this scheme the third order diffusion defined by equation (13) is modified by the insertion of limiters which produce an equivalent three point scheme with positive coefficients. The original scheme [63] can be improved in the following manner so that less restrictive flux limiters are required. Let  $L(u, v)$  be a limited average of  $u$  and  $v$  with the following properties:

P1.  $L(u, v) = L(v, u)$

P2.  $L(\alpha u, \alpha v) = \alpha L(u, v)$

P3.  $L(u, u) = u$

P4.  $L(u, v) = 0$  if  $u$  and  $v$  have opposite signs; otherwise  $L(u, v)$  has the same sign as  $u$  and  $v$ .

Properties (P1–P3) are natural properties of an average. Property (P4) is needed for the construction of a LED or TVD scheme.

It is convenient to introduce the notation

$$\phi(r) = L(1, r) = L(r, 1),$$

where according to (P4)  $\phi(r) \geq 0$ . It follows from (P2) on setting  $\alpha = \frac{1}{u}$  or  $\frac{1}{v}$  that

$$L(u, v) = \phi\left(\frac{v}{u}\right) u = \phi\left(\frac{u}{v}\right) v.$$

Also it follows on setting  $v = 1$  and  $u = r$  that

$$\phi(r) = r \phi\left(\frac{1}{r}\right).$$

Thus, if there exists  $r < 0$  for which  $\phi(r) > 0$ , then  $\phi\left(\frac{1}{r}\right) < 0$ . The only way to ensure that  $\phi(r) \geq 0$  is to require  $\phi(r) = 0$  for all  $r < 0$ , corresponding to property (P4).

Now one defines the diffusive flux for a scalar conservation law as

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - L\left(\Delta v_{j+\frac{3}{2}}, \Delta v_{j-\frac{1}{2}}\right) \right\}. \quad (18)$$

Also define

$$r^+ = \frac{\Delta v_{j+\frac{3}{2}}}{\Delta v_{j-\frac{1}{2}}}, \quad r^- = \frac{\Delta v_{j-\frac{3}{2}}}{\Delta v_{j+\frac{1}{2}}}.$$

Then, the scalar scheme (9) reduces to

$$\begin{aligned}
\Delta x \frac{dv_j}{dt} &= -\frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2}} \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a_{j-\frac{1}{2}} \Delta v_{j-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left( \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - \phi(r^+) \Delta v_{j-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad - \alpha_{j-\frac{1}{2}} \left( \Delta v_{j-\frac{1}{2}} - \phi(r^-) \Delta v_{j+\frac{1}{2}} \right) \\
&= + \left\{ \alpha_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2}} + \alpha_{j-\frac{1}{2}} \phi(r^-) \right\} \Delta v_{j+\frac{1}{2}} \\
&\quad - \left\{ \alpha_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_{j-\frac{1}{2}} + \alpha_{j+\frac{1}{2}} \phi(r^+) \right\} \Delta v_{j-\frac{1}{2}}. \tag{19}
\end{aligned}$$

Thus the scheme satisfies the LED condition if  $\alpha_{j+\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} |a_{j+\frac{1}{2}}|$  for all  $j$ , and  $\phi(r) \geq 0$ , which is assured by property (P4) on  $L$ . At the same time it follows from property (P3) that the first order diffusive flux is canceled when  $\Delta v$  is smoothly varying and of constant sign. Schemes constructed by this formulation will be referred to as symmetric limited positive (SLIP) schemes. This result may be summarized as

### Theorem 2 (Positivity of the SLIP scheme)

Suppose that the discrete conservation law (9) contains a limited diffusive flux as defined by equation (18). Then the positivity condition (12), together with the properties (P1-P4) for limited averages, are sufficient to ensure satisfaction of the LED principle that a local maximum cannot increase and a local minimum cannot decrease.  $\square$

A variety of limiters may be defined which meet the requirements of properties (P1-P4). Define

$$S(u, v) = \frac{1}{2} \{ \text{sign}(u) + \text{sign}(v) \}$$

so that

$$S(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } u > 0 \text{ and } v > 0 \\ 0 & \text{if } u \text{ and } v \text{ have opposite sign} \\ -1 & \text{if } u < 0 \text{ and } v < 0. \end{cases}$$

Then two limiters which are appropriate are the following well-known schemes:

1. Minmod:

$$L(u, v) = S(u, v) \min(|u|, |v|)$$

2. Van Leer:

$$L(u, v) = S(u, v) \frac{2|u||v|}{|u| + |v|}.$$

In order to produce a family of limiters which contains these as special cases it is convenient to set

$$L(u, v) = \frac{1}{2} D(u, v)(u + v),$$

where  $D(u, v)$  is a factor which should deflate the arithmetic average, and become zero if  $u$  and  $v$  have opposite signs. Take

$$D(u, v) = 1 - R(u, v) = 1 - \left| \frac{u - v}{|u| + |v|} \right|^q, \tag{20}$$

where  $R(u, v)$  is the same function that was introduced in the JST scheme, and  $q$  is a positive integer. Then  $D(u, v) = 0$  if  $u$  and  $v$  have opposite signs. Also if  $q = 1$ ,  $L(u, v)$  reduces to minmod, while if  $q = 2$ ,  $L(u, v)$  is equivalent to Van Leer's limiter. By increasing  $q$  one can generate a sequence of limited averages which approach a limit defined by the arithmetic mean truncated to zero when  $u$  and  $v$  have opposite signs.

When the terms are regrouped, it can be seen that with this limiter the SLIP scheme is exactly equivalent to the JST scheme, with the switch is defined as

$$\begin{aligned} Q_{j+\frac{1}{2}} &= R\left(\Delta v_{j+\frac{3}{2}}, \Delta v_{j+\frac{1}{2}}\right) \\ \epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} &= \alpha_{j+\frac{1}{2}} Q_{j+\frac{1}{2}} \\ \epsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(4)} &= \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left(1 - Q_{j+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

This formulation thus unifies the JST and SLIP schemes.

#### 4.3.5 Essentially Local Extremum Diminishing (ELED) Scheme with Soft Limiter

The limiters defined by the formula (20) have the disadvantage that they are active at a smooth extrema, reducing the local accuracy of the scheme to first order. In order to prevent this, the SLIP scheme can be relaxed to give an essentially local extremum diminishing (ELED) scheme which is second order accurate at smooth extrema by the introduction of a threshold in the limited average. Therefore redefine  $D(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  as

$$D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1 - \left| \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{\max(|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|, \epsilon \Delta x^r)} \right|^q, \quad (21)$$

where  $r = \frac{3}{2}$ ,  $q \geq 2$ . This reduces to the previous definition if  $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| > \epsilon \Delta x^r$ . Now

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} D_{j+\frac{1}{2}} \left( \Delta v_{j+\frac{3}{2}} + \Delta v_{j-\frac{1}{2}} \right) \right\},$$

where

$$D_{j+\frac{1}{2}} = D\left(\Delta v_{j+\frac{3}{2}}, \Delta v_{j-\frac{1}{2}}\right).$$

In any region where the solution is smooth,  $\Delta v_{j+\frac{3}{2}} - \Delta v_{j-\frac{1}{2}}$  is of order  $\Delta x^2$ . In fact if there is a smooth extremum in the neighborhood of  $v_j$  or  $v_{j+1}$ , a Taylor series expansion indicates that  $\Delta v_{j+\frac{3}{2}}$ ,  $\Delta v_{j+\frac{1}{2}}$  and  $\Delta v_{j-\frac{1}{2}}$  are each individually of order  $\Delta x^2$ , since  $\frac{dv}{dx} = 0$  at the extremum. Then  $D_{j+\frac{1}{2}} = 1 - A$  where  $A$  is of order  $\Delta x^{\frac{3}{2}}$ , and

$$\begin{aligned} d_{j+\frac{1}{2}} &= \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left( \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta v_{j+\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \Delta v_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + \alpha_{j+\frac{1}{2}} A \left( \Delta v_{j+\frac{3}{2}} + \Delta v_{j-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

where the first term is of order  $\Delta x^3$  and the second of order  $\Delta x^{1+\frac{3}{2}}$ . Therefore taking  $q \geq 2$  is sufficient to ensure at least second order accuracy at a smooth extremum.

Consider now the possible growth of the extrema. The limiter acts in the usual way if either  $|\Delta v_{j+\frac{3}{2}}| > \epsilon \Delta x^r$  or  $|\Delta v_{j-\frac{1}{2}}| > \epsilon \Delta x^r$ . If  $v_j$  is a maximum, it may then be verified that

$$\Delta x \frac{dv_j}{dt} \leq \frac{1}{2} (\alpha_{j+\frac{1}{2}} + \alpha_{j-\frac{1}{2}}) \epsilon \Delta x^r.$$

Therefore, if  $v_j$  is a maximum  $\frac{dv_j}{dt} \leq B$ , and similarly if  $v_j$  is a minimum  $\frac{dv_j}{dt} \geq -B$ , where  $B \rightarrow 0$  as  $\Delta x \rightarrow 0$  as long as  $r > 1$ . Thus the SLIP scheme with the limiter (21) is essentially local extremum diminishing (ELED).

The effect of the "soft limiter" is not only to improve the accuracy: the introduction of a threshold below which extrema of small amplitude are accepted also usually results in a faster rate of convergence to a steady state, and decreases the likelihood of limit cycles in which the limiter interacts unfavorably with the corrections produced by the updating scheme. In a scheme recently proposed by Venkatakrishnan a threshold is introduced precisely for this purpose [160].

#### 4.3.6 Upstream Limited Positive (USLIP) Schemes

By adding the anti-diffusive correction purely from the upstream side one may derive a family of upstream limited positive (USLIP) schemes. Corresponding to the original SLIP scheme defined by equation (18), a USLIP scheme is obtained by setting

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - L \left( \Delta v_{j+\frac{1}{2}}, \Delta v_{j-\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

if  $a_{j+\frac{1}{2}} > 0$ , or

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_{j+\frac{1}{2}} \left\{ \Delta v_{j+\frac{1}{2}} - L \left( \Delta v_{j+\frac{1}{2}}, \Delta v_{j+\frac{3}{2}} \right) \right\}$$

if  $a_{j+\frac{1}{2}} < 0$ . If  $\alpha_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} |a_{j+\frac{1}{2}}|$  one recovers a standard high resolution upwind scheme in semi-discrete form. Consider the case that  $a_{j+\frac{1}{2}} > 0$  and  $a_{j-\frac{1}{2}} > 0$ . If one sets

$$r^+ = \frac{\Delta v_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta v_{j-\frac{1}{2}}}, \quad r^- = \frac{\Delta v_{j-\frac{3}{2}}}{\Delta v_{j-\frac{1}{2}}},$$

the scheme reduces to

$$\Delta x \frac{dv_j}{dt} = -\frac{1}{2} \left\{ \phi(r^+) a_{j+\frac{1}{2}} + (2 - \phi(r^-)) a_{j-\frac{1}{2}} \right\} \Delta v_{j-\frac{1}{2}}.$$

To assure the correct sign to satisfy the LED criterion the flux limiter must now satisfy the additional constraint that  $\phi(r) \leq 2$ .

The USLIP formulation is essentially equivalent to standard upwind schemes [120, 154]. Both the SLIP and USLIP constructions can be implemented on unstructured meshes [70, 72]. The anti-diffusive terms are then calculated by taking the scalar product of the vectors defining an edge with the gradient in the adjacent upstream and downstream cells.

#### 4.3.7 Systems of Conservation Laws: Flux Splitting and Flux-Difference Splitting

Steger and Warming [151] first showed how to generalize the concept of upwinding to the system of conservation laws

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0 \quad (22)$$

by the concept of flux splitting. Suppose that the flux is split as  $f = f^+ + f^-$  where  $\frac{\partial f^+}{\partial w}$  and  $\frac{\partial f^-}{\partial w}$  have positive and negative eigenvalues. Then the first order upwind scheme is produced by taking the numerical flux to be

$$h_{j+\frac{1}{2}} = f_j^+ + f_{j+1}^-.$$

This can be expressed in viscosity form as

$$\begin{aligned} h_{j+\frac{1}{2}} &= +\frac{1}{2} (f_{j+1}^+ + f_j^+) - \frac{1}{2} (f_{j+1}^+ - f_j^+) \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{j+1}^- + f_j^-) + \frac{1}{2} (f_{j+1}^- - f_j^-) \\ &= \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_j) - d_{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

where the diffusive flux is

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Delta (f^+ - f^-)_{j+\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Roe derived the alternative formulation of flux difference splitting [133] by distributing the corrections due to the flux difference in each interval upwind and downwind to obtain

$$\Delta x \frac{dw_j}{dt} + (f_{j+1} - f_j)^- + (f_j - f_{j-1})^+ = 0,$$

where now the flux difference  $f_{j+1} - f_j$  is split. The corresponding diffusive flux is

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^+ - \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^- \right).$$

Following Roe's derivation, let  $A_{j+\frac{1}{2}}$  be a mean value Jacobian matrix exactly satisfying the condition

$$f_{j+1} - f_j = A_{j+\frac{1}{2}}(w_{j+1} - w_j). \quad (24)$$

$A_{j+\frac{1}{2}}$  may be calculated by substituting the weighted averages

$$u = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}u_{j+1} + \sqrt{\rho_j}u_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}}, H = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}H_{j+1} + \sqrt{\rho_j}H_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \quad (25)$$

into the standard formulas for the Jacobian matrix  $A = \frac{\partial f}{\partial w}$ . A splitting according to characteristic fields is now obtained by decomposing  $A_{j+\frac{1}{2}}$  as

$$A_{j+\frac{1}{2}} = T\Lambda T^{-1}, \quad (26)$$

where the columns of  $T$  are the eigenvectors of  $A_{j+\frac{1}{2}}$ , and  $\Lambda$  is a diagonal matrix of the eigenvalues. Then

$$\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{\pm} = T\Lambda^{\pm}T^{-1}\Delta w_{j+\frac{1}{2}}.$$

Now the corresponding diffusive flux is

$$\frac{1}{2} |A_{j+\frac{1}{2}}| (w_{j+1} - w_j),$$

where

$$|A_{j+\frac{1}{2}}| = T|\Lambda|T^{-1}$$

and  $|\Lambda|$  is the diagonal matrix containing the absolute values of the eigenvalues.

#### 4.3.8 Alternative Splittings

Characteristic splitting has the advantages that it introduces the minimum amount of diffusion to exclude the growth of local extrema of the characteristic variables, and that with the Roe linearization it allows a discrete shock structure with a single interior point. To reduce the computational complexity one may replace  $|A|$  by  $\alpha I$  where if  $\alpha$  is at least equal to the spectral radius  $\max|\lambda(A)|$ , then the positivity conditions will still be satisfied. Then the first order scheme simply has the scalar diffusive flux

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_{j+\frac{1}{2}}\Delta w_{j+\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

The JST scheme with scalar diffusive flux captures shock waves with about 3 interior points, and it has been widely used for transonic flow calculations because it is both robust and computationally inexpensive.

An intermediate class of schemes can be formulated by defining the first order diffusive flux as a combination of differences of the state and flux vectors

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_{j+\frac{1}{2}}(w_{j+1} - w_j) + \frac{1}{2}\beta_{j+\frac{1}{2}}(f_{j+1} - f_j). \quad (28)$$

Schemes of this class are fully upwind in supersonic flow if one takes  $\alpha_{j+\frac{1}{2}} = 0$  and  $\beta_{j+\frac{1}{2}} = \text{sign}(M)$  when the absolute value of the Mach number  $M$  exceeds 1. The flux vector  $f$  can be decomposed as

$$f = uw + f_p, \quad (29)$$

where

$$f_p = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ up \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Then

$$f_{j+1} - f_j = \bar{u}(w_{j+1} - w_j) + \bar{w}(u_{j+1} - u_j) + f_{p,j+1} - f_{p,j}, \quad (31)$$

where  $\bar{u}$  and  $\bar{w}$  are the arithmetic averages

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(u_{j+1} + u_j), \quad \bar{w} = \frac{1}{2}(w_{j+1} + w_j).$$

Thus these schemes are closely related to schemes which introduce separate splittings of the convective and pressure terms, such as the wave-particle scheme [129, 8], the advection upwind splitting method (AUSM) [98, 162], and the convective upwind and split pressure (CUSP) schemes [71].

In order to examine the shock capturing properties of these various schemes, consider the general case of a first order diffusive flux of the form

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha_{j+\frac{1}{2}}B_{j+\frac{1}{2}}(w_{j+1} - w_j), \quad (32)$$

where the matrix  $B_{j+\frac{1}{2}}$  determines the properties of the scheme and the scaling factor  $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$  is included for convenience. All the previous schemes can be obtained by representing  $B_{j+\frac{1}{2}}$  as a polynomial in the matrix  $A_{j+\frac{1}{2}}$  defined by equation (24). According to the Cayley-Hamilton theorem, a matrix satisfies its own characteristic equation. Therefore the third and higher powers of  $A$  can be eliminated, and there is no loss of generality in limiting  $B_{j+\frac{1}{2}}$  to a polynomial of degree 2,

$$B_{j+\frac{1}{2}} = \alpha_0 I + \alpha_1 A_{j+\frac{1}{2}} + \alpha_2 A_{j+\frac{1}{2}}^2. \quad (33)$$

The characteristic upwind scheme for which  $B_{j+\frac{1}{2}} = |A_{j+\frac{1}{2}}|$  is obtained by substituting  $A_{j+\frac{1}{2}} = T\Lambda T^{-1}$ ,  $A_{j+\frac{1}{2}}^2 = T\Lambda^2 T^{-1}$ . Then  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , and  $\alpha_2$  are determined from the three equations

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_k + \alpha_2 \lambda_k^2 = |\lambda_k|, \quad k = 1, 2, 3.$$

The same representation remains valid for three dimensional flow because  $A_{j+\frac{1}{2}}$  still has only three distinct eigenvalues  $u$ ,  $u + c$ ,  $u - c$ .

#### 4.3.9 Analysis of Stationary Discrete Shocks

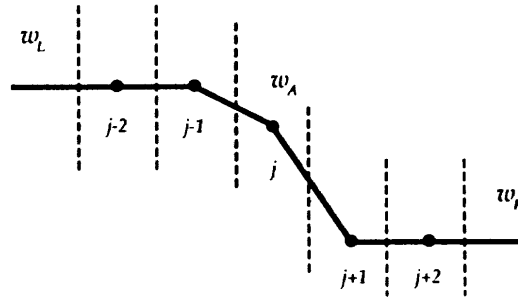


Figure 4: Shock structure for single interior point.

The ideal model of a discrete shock is illustrated in figure (4). Suppose that  $w_L$  and  $w_R$  are left and right states which satisfy the jump conditions for a stationary shock, and that the corresponding fluxes are  $f_L = f(w_L)$  and  $f_R = f(w_R)$ . Since the shock is stationary  $f_L = f_R$ . The ideal discrete shock has constant states  $w_L$  to the left and  $w_R$  to the right, and a single point with an intermediate value  $w_A$ . The intermediate value is needed to allow the discrete solution to correspond to a true solution in which the shock wave does not coincide with an interface between two mesh cells. According to equation (22)

$$\int_0^L w(T)dx = \int_0^L w(0)dx - \int_0^T (f_{RB} - f_{LB})dt,$$

where  $f_{LB}$  and  $f_{RB}$  are the fluxes at the left and right boundaries. Assuming that the boundary conditions are compatible with a steady solution containing a stationary shock, the location  $x_s$  of the shock is fixed by

this equation, since

$$\int_0^L w(T) dx = x_* w_L + (L - x_*) w_R.$$

Similarly, in the semi-discrete system

$$\Delta x \sum_j w_j(T) = \Delta x \sum_j w_j(0) - \int_0^T (f_{RB} - f_{LB}) dt. \quad (34)$$

Thus  $\sum_j w_j(T)$  has a value which is determined by the initial and boundary conditions. In general it is not possible for this value to be attained by a discrete solution without an intermediate point, because then the sum would be quantized, increasing by  $\Delta x(w_R - w_L)$  whenever the shock location is shifted one cell to the right.

Three diffusion models of varying complexity which belong to the class defined by equation (33) are examined in Reference [73] to determine their ability to support the ideal shock structure containing a single interior point. These correspond to one, two or three terms in equation (33). The analysis of these three cases shows that a discrete shock structure with a single interior point is supported by artificial diffusion that satisfies the two conditions that

1. it produces an upwind flux if the flow is determined to be supersonic through the interface
2. it satisfies a generalized eigenvalue problem for the exit from the shock of the form

$$(A_{AR} - \alpha_{AR} B_{AR})(w_R - w_A) = 0,$$

where  $A_{AR}$  is the linearized Jacobian matrix and  $B_{AR}$  is the matrix defining the diffusion for the interface  $AR$ . These two conditions are satisfied by both the characteristic schemes and also the CUSP scheme, provided that the coefficients of convective diffusion and pressure differences are correctly balanced. Scalar diffusion does not satisfy the first condition.

#### 4.3.10 CUSP and Characteristic Schemes Admitting Constant Total Enthalpy in Steady Flow

In steady flow the stagnation enthalpy  $H$  is constant, corresponding to the fact that the energy and mass conservation equations are consistent when the constant factor  $H$  is removed from the energy equation. Discrete and semi-discrete schemes do not necessarily satisfy this property. In the case of a semi-discrete scheme expressed in viscosity form, equations (9) and (10), a solution with constant  $H$  is admitted if the viscosity for the energy equation reduces to the viscosity for the continuity equation with  $\rho$  replaced by  $\rho H$ . When the standard characteristic decomposition (26) is used, the viscous fluxes for  $\rho$  and  $\rho H$  which result from composition of the fluxes for the characteristic variables do not have this property, and  $H$  is not constant in the discrete solution. In practice there is an excursion of  $H$  in the discrete shock structure which represents a local heat source. In very high speed flows the corresponding error in the temperature may lead to a wrong prediction of associated effects such as chemical reactions.

The source of the error in the stagnation enthalpy is the discrepancy between the convective terms

$$u \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{pmatrix},$$

in the flux vector, which contain  $\rho H$ , and the state vector which contains  $\rho E$ . This may be remedied by introducing a modified state vector

$$w_h = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho H \end{pmatrix}.$$

Then one introduces the linearization

$$f_R - f_L = A_h(w_{hR} - w_{hL}).$$

Here  $A_h$  may be calculated in the same way as the standard Roe linearization. Introduce the weighted averages defined by equation (25). Then

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{u^2}{2} & \frac{\gamma+1}{\gamma} u & \frac{\gamma-1}{\gamma} \\ -uH & H & u \end{pmatrix}.$$

The eigenvalues of  $A_h$  are  $u$ ,  $\lambda^+$  and  $\lambda^-$  where

$$\lambda^\pm = \frac{\gamma+1}{2\gamma} u \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} u\right)^2 + \frac{c^2 - u^2}{\gamma}}. \quad (35)$$

Now both CUSP and characteristic schemes which preserve constant stagnation enthalpy in steady flow can be constructed from the modified Jacobian matrix  $A_h$  [73]. These schemes also produce a discrete shock structure with one interior point in steady flow. Then one arrives at four variations with this property, which can conveniently be distinguished as the E- and H-CUSP schemes, and the E- and H-characteristic schemes.

#### 4.3.11 Multidimensional Upwinding, High Order Godunov Schemes, and Kinetic Flux Splitting

A substantial body of current research is directed toward the implementation of truly multi-dimensional upwind schemes [55, 123, 94]. Some of the most impressive simulations of time dependent flows with strong shock waves have been achieved with higher order Godunov schemes [166]. In these schemes the average value in each cell is updated by applying the integral conservation law using interface fluxes predicted from the exact or approximate solution of a Riemann problem between adjacent cells. A higher order estimate of the solution is then reconstructed from the cell averages, and slope limiters are applied to the reconstruction. An example is the class of essentially non-oscillatory (ENO) schemes, which can attain a very high order of accuracy at the cost of a substantial increase in computational complexity [30, 140, 138, 139]. Methods based on reconstruction can also be implemented on unstructured meshes [13, 12]. Recently there has been an increasing interest in kinetic flux splitting schemes, which use solutions of the Boltzmann equation to predict the interface fluxes [39, 34, 42, 124, 167].

#### 4.4 Discretization of the Viscous Terms

The discretization of the viscous terms of the Navier Stokes equations requires an approximation to the velocity derivatives  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  in order to calculate the tensor  $\sigma_{ij}$ , equation (2). Then the viscous terms may be included in the flux balance (3). In order to evaluate the derivatives one may apply the Gauss formula to a control volume  $V$  with the boundary  $S$ .

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv = \int_S u_i n_j ds$$

where  $n_j$  is the outward normal. For a tetrahedral or hexahedral cell this gives

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{1}{\text{vol}} \sum_{\text{faces}} \bar{u}_i n_j s \quad (36)$$

where  $\bar{u}_i$  is an estimate of the average of  $u_i$  over the face. If  $u$  varies linearly over a tetrahedral cell this is exact. Alternatively, assuming a local transformation to computational coordinates  $X_j$ , one may apply the chain rule

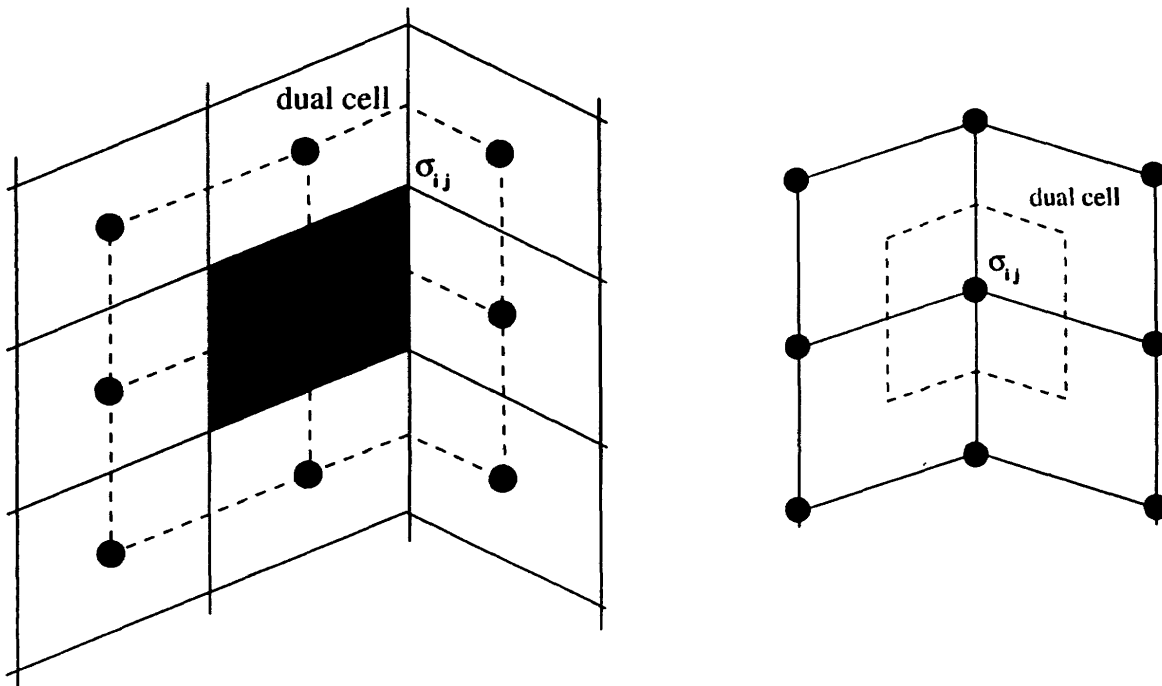
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[ \frac{\partial u}{\partial X} \right] \left[ \frac{\partial X}{\partial x} \right] = \frac{\partial u}{\partial X} \left[ \frac{\partial x}{\partial X} \right]^{-1} \quad (37)$$



Here the transformation derivatives  $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$  can be evaluated by the same finite difference formulas as the velocity derivatives  $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ . In this case  $\frac{\partial u}{\partial X}$  is exact if  $u$  is a linearly varying function.

For a cell-centered discretization (figure 5a)  $\frac{\partial u}{\partial X}$  is needed at each face. The simplest procedure is to evaluate  $\frac{\partial u}{\partial X}$  in each cell, and to average  $\frac{\partial u}{\partial X}$  between the two cells on either side of a face [81]. The resulting discretization does not have a compact stencil, and supports undamped oscillatory modes. In a one dimensional calculation, for example,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  would be discretized as  $\frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}}{4\Delta x^2}$ . In order to produce a compact stencil  $\frac{\partial u}{\partial x}$  may be estimated from a control volume centered on each face, using formulas (36) or (37) [131]. This is computationally expensive because the number of faces is much larger than the number of cells. In a hexahedral mesh with a large number of vertices the number of faces approaches three times the number of cells.

This motivates the introduction of dual meshes for the evaluation of the velocity derivatives and the flux balance as sketched in figure 5. The figure shows both cell-centered and cell-vertex schemes. The dual mesh



5a: Cell-centered scheme.  $\sigma_{ij}$  evaluated at vertices of the primary mesh

5b: Cell-vertex scheme.  $\sigma_{ij}$  evaluated at cell centers of the primary mesh

Figure 5: Viscous discretizations for cell-centered and cell-vertex algorithms.

connects cell centers of the primary mesh. If there is a kink in the primary mesh, the dual cells should be formed by assembling contiguous fractions of the neighboring primary cells. On smooth meshes comparable results are obtained by either of these formulations [105, 106, 80]. If the mesh has a kink the cell-vertex scheme has the advantage that the derivatives  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  are calculated in the interior of a regular cell, with no loss of accuracy.

A desirable property is that a linearly varying velocity distribution, as in a Couette flow, should produce a constant stress and hence an exact stress balance. This property is not necessarily satisfied in general by finite difference or finite volume schemes on curvilinear meshes. The characterization  $k$ -exact has been proposed for schemes that are exact for polynomials of degree  $k$ . The cell-vertex finite volume scheme is linearly exact if the derivatives are evaluated by equation (37), since then  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  is exactly evaluated as a constant, leading to constant viscous stresses  $\sigma_{ij}$ , and an exact viscous stress balance. This remains true when there is a kink in the mesh, because the summation of constant stresses over the faces of the kinked control volume sketched in

figure 5 still yields a perfect balance. The use of equation (37) to evaluate  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ , however, requires the additional calculation or storage of the nine metric quantities  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  in each cell, whereas equation (36) can be evaluated from the same face areas that are used for the flux balance.

In the case of an unstructured mesh, the weak form (4) leads to a natural discretization with linear elements, in which the piecewise linear approximation yields a constant stress in each cell. This method yields a representation which is globally correct when averaged over the cells, as is proved by energy estimates for elliptic problems [15]. It should be noted, however, that it yields formulas that are not necessarily locally consistent with the differential equations, if Taylor series expansions are substituted for the solution at the vertices appearing in the local stencil. Figure 6 illustrates the discretization of the Laplacian  $u_{xx} + u_{yy}$  which is obtained with linear elements. It shows a particular triangulation such that the approximation is locally consistent with  $u_{xx} + 3u_{yy}$ . Thus the use of an irregular triangulation in the boundary layer may significantly degrade the accuracy.

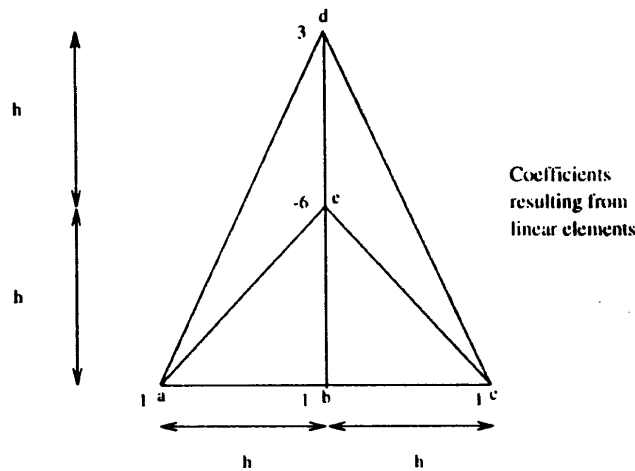


Figure 6: Example of discretization  $u_{xx} + u_{yy}$  on a triangular mesh. The discretization is locally equivalent to the approximation  $u_{xx} = \frac{u_a - 2u_b + u_c}{h^2}$ ,  $3u_{yy} = \frac{3u_d - 6u_c + 3u_b}{h^2}$ .

#### 4.5 Time Stepping Schemes

If the space discretization procedure is implemented separately, it leads to a set of coupled ordinary differential equations, which can be written in the form

$$\frac{dw}{dt} + \mathbf{R}(w) = 0, \quad (38)$$

where  $w$  is the vector of the flow variables at the mesh points, and  $\mathbf{R}(w)$  is the vector of the residuals, consisting of the flux balances defined by the space discretization scheme, together with the added dissipative terms. If the objective is simply to reach the steady state and details of the transient solution are immaterial, the time-stepping scheme may be designed solely to maximize the rate of convergence. The first decision that must be made is whether to use an explicit scheme, in which the space derivatives are calculated from known values of the flow variables at the beginning of the time step, or an implicit scheme, in which the formulas for the space derivatives include as yet unknown values of the flow variables at the end of the time step, leading to the need to solve coupled equations for the new values. The permissible time step for an explicit scheme is limited by the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition, which states that a difference scheme cannot be a convergent and stable approximation unless its domain of dependence contains the domain of dependence of the corresponding differential equation. One can anticipate that implicit schemes will yield convergence

in a smaller number of time steps, because the time step is no longer constrained by the CFL condition. Implicit schemes will be efficient, however, only if the decrease in the number of time steps outweighs the increase in the computational effort per time step consequent upon the need to solve coupled equations. The prototype implicit scheme can be formulated by estimating  $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$  at  $t + \mu \Delta t$  as a linear combination of  $\mathbf{R}(\mathbf{w}^n)$  and  $\mathbf{R}(\mathbf{w}^{n+1})$ . The resulting equation

$$\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^n - \Delta t \{ (1 - \mu) \mathbf{R}(\mathbf{w}^n) + \mu \mathbf{R}(\mathbf{w}^{n+1}) \}$$

can be linearized as

$$\left( \mathbf{I} + \mu \Delta t \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{w}} \right) \delta \mathbf{w} + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{w}^n) = 0.$$

If one sets  $\mu = 1$  and lets  $\Delta t \rightarrow \infty$  this reduces to the Newton iteration, which has been successfully used in two-dimensional calculations [159, 46]. In the three-dimensional case with, say, an  $N \times N \times N$  mesh, the bandwidth of the matrix that must be inverted is of order  $N^2$ . Direct inversion requires a number of operations proportional to the number of unknowns multiplied by the square of the bandwidth of the order of  $N^7$ . This is prohibitive, and forces recourse to either an approximate factorization method or an iterative solution method.

Alternating direction methods, which introduce factors corresponding to each coordinate, are widely used for structured meshes [17, 125]. They cannot be implemented on unstructured tetrahedral meshes that do not contain identifiable mesh directions, although other decompositions are possible [99]. If one chooses to adopt the iterative solution technique, the principal alternatives are variants of the Gauss-Seidel and Jacobi methods. A symmetric Gauss-Seidel method with one iteration per time step is essentially equivalent to an approximate lower-upper (LU) factorization of the implicit scheme [79, 115, 29, 170]. On the other hand, the Jacobi method with a fixed number of iterations per time step reduces to a multistage explicit scheme, belonging to the general class of Runge-Kutta schemes [32]. Schemes of this type have proved very effective for wide variety of problems, and they have the advantage that they can be applied equally easily on both structured and unstructured meshes [77, 62, 64, 132].

If one reduces the linear model problem corresponding to (38) to an ordinary differential equation by substituting a Fourier mode  $\hat{w} = e^{ipx}$ , the resulting Fourier symbol has an imaginary part proportional to the wave speed, and a negative real part proportional to the diffusion. Thus the time stepping scheme should have a stability region which contains a substantial interval of the negative real axis, as well as an interval along the imaginary axis. To achieve this it pays to treat the convective and dissipative terms in a distinct fashion. Thus the residual is split as

$$R(w) = Q(w) + D(w),$$

where  $Q(w)$  is the convective part and  $D(w)$  the dissipative part. Denote the time level  $n\Delta t$  by a superscript  $n$ . Then the multistage time stepping scheme is formulated as

$$\begin{aligned} w^{(n+1,0)} &= w^n \\ &\dots \\ w^{(n+1,k)} &= w^n - \alpha_k \Delta t \left( Q^{(k-1)} + D^{(k-1)} \right) \\ &\dots \\ w^{n+1} &= w^{(n+1,m)}, \end{aligned}$$

where the superscript  $k$  denotes the  $k$ -th stage,  $\alpha_m = 1$ , and

$$\begin{aligned} Q^{(0)} &= Q(w^n), \quad D^{(0)} = D(w^n) \\ &\dots \\ Q^{(k)} &= Q(w^{(n+1,k)}) \\ D^{(k)} &= \beta_k D(w^{(n+1,k)}) + (1 - \beta_k) D^{(k-1)}. \end{aligned}$$

The coefficients  $\alpha_k$  are chosen to maximize the stability interval along the imaginary axis, and the coefficients  $\beta_k$  are chosen to increase the stability interval along the negative real axis.

These schemes do not fall within the standard framework of Runge-Kutta schemes, and they have much larger stability regions [64]. Two schemes which have been found to be particularly effective are tabulated below. The first is a four-stage scheme with two evaluations of dissipation. Its coefficients are

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{3} & \beta_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= \frac{4}{15} & \beta_2 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_3 &= \frac{5}{9} & \beta_3 &= 0 \\ \alpha_4 &= 1 & \beta_4 &= 0\end{aligned}\quad (39)$$

The second is a five-stage scheme with three evaluations of dissipation. Its coefficients are

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{4} & \beta_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= \frac{1}{6} & \beta_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= \frac{3}{8} & \beta_3 &= 0.56 \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2} & \beta_4 &= 0 \\ \alpha_5 &= 1 & \beta_5 &= 0.44\end{aligned}\quad (40)$$

## 4.6 Multigrid Methods

### 4.6.1 Acceleration of Steady Flow Calculations

Radical improvements in the rate of convergence to a steady state can be realized by the multigrid time-stepping technique. The concept of acceleration by the introduction of multiple grids was first proposed by Fedorenko [44]. There is by now a fairly well-developed theory of multigrid methods for elliptic equations based on the concept that the updating scheme acting as a smoothing operator on each grid [23, 49]. This theory does not hold for hyperbolic systems. Nevertheless, it seems that it ought to be possible to accelerate the evolution of a hyperbolic system to a steady state by using large time steps on coarse grids so that disturbances will be more rapidly expelled through the outer boundary. Various multigrid time-stepping schemes designed to take advantage of this effect have been proposed [114, 60, 51, 66, 27, 6, 53, 76, 87].

One can devise a multigrid scheme using a sequence of independently generated coarser meshes by eliminating alternate points in each coordinate direction. In order to give a precise description of the multigrid scheme, subscripts may be used to indicate the grid. Several transfer operations need to be defined. First the solution vector on grid  $k$  must be initialized as

$$w_k^{(0)} = T_{k,k-1} w_{k-1},$$

where  $w_{k-1}$  is the current value on grid  $k-1$ , and  $T_{k,k-1}$  is a transfer operator. Next it is necessary to transfer a residual forcing function such that the solution grid  $k$  is driven by the residuals calculated on grid  $k-1$ . This can be accomplished by setting

$$P_k = Q_{k,k-1} R_{k-1}(w_{k-1}) - R_k[w_k^{(0)}],$$

where  $Q_{k,k-1}$  is another transfer operator. Then  $R_k(w_k)$  is replaced by  $R_k(w_k) + P_k$  in the time-stepping scheme. Thus, the multistage scheme is reformulated as

$$\begin{aligned}w_k^{(1)} &= w_k^{(0)} - \alpha_1 \Delta t_k [R_k^{(0)} + P_k] \\ &\dots \\ w_k^{(q+1)} &= w_k^{(0)} - \alpha_{q+1} \Delta t_k [R_k^{(q)} + P_k].\end{aligned}$$

The result  $w_k^{(m)}$  then provides the initial data for grid  $k+1$ . Finally, the accumulated correction on grid  $k$  has to be transferred back to grid  $k-1$  with the aid of an interpolation operator  $I_{k-1,k}$ . With properly

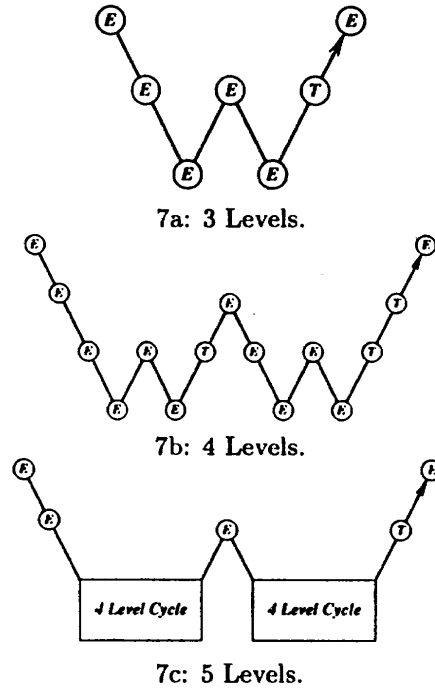


Figure 7: Multigrid *W*-cycle for managing the grid calculation. *E*, evaluate the change in the flow for one step; *T*, transfer the data without updating the solution.

optimized coefficients multistage time-stepping schemes can be very efficient drivers of the multigrid process. A *W*-cycle of the type illustrated in Figure 7 proves to be a particularly effective strategy for managing the work split between the meshes. In a three-dimensional case the number of cells is reduced by a factor of eight on each coarser grid. On examination of the figure, it can therefore be seen that the work measured in units corresponding to a step on the fine grid is of the order of

$$1 + 2/8 + 4/64 + \dots < 4/3,$$

and consequently the very large effective time step of the complete cycle costs only slightly more than a single time step in the fine grid.

#### 4.6.2 Multigrid Implicit Schemes for Unsteady Flow

Time dependent calculations are needed for a number of important applications, such as flutter analysis, or the analysis of the flow past a helicopter rotor, in which the stability limit of an explicit scheme forces the use of much smaller time steps than would be needed for an accurate simulation. In this situation a multigrid explicit scheme can be used in an inner iteration to solve the equations of a fully implicit time stepping scheme [69].

Suppose that (38) is approximated as

$$D_t w^{n+1} + R(w^{n+1}) = 0.$$

Here  $D_t$  is a  $k^{th}$  order accurate backward difference operator of the form

$$D_t = \frac{1}{\Delta t} \sum_{q=1}^k \frac{1}{q} (\Delta^-)^q,$$

where

$$\Delta^- w^{n+1} = w^{n+1} - w^n.$$

Applied to the linear differential equation

$$\frac{dw}{dt} = \alpha w$$

the schemes with  $k = 1, 2$  are stable for all  $\alpha\Delta t$  in the left half plane (A-stable). Dahlquist has shown that A-stable linear multi-step schemes are at best second order accurate [35]. Gear however, has shown that the schemes with  $k \leq 6$  are stiffly stable [45], and one of the higher order schemes may offer a better compromise between accuracy and stability, depending on the application.

Equation (38) is now treated as a modified steady state problem to be solved by a multigrid scheme using variable local time steps in a fictitious time  $t^*$ . For example, in the case  $k = 2$  one solves

$$\frac{\partial w}{\partial t^*} = R^*(w),$$

where

$$R^*(w) = \frac{3}{2\Delta t}w + R(w) + \frac{2}{\Delta t}w^n - \frac{1}{2\Delta t}w^{n-1},$$

and the last two terms are treated as fixed source terms. The first term shifts the Fourier symbol of the equivalent model problem to the left in the complex plane. While this promotes stability, it may also require a limit to be imposed on the magnitude of the local time step  $\Delta t^*$  relative to that of the implicit time step  $\Delta t$ . In the case of problems with moving boundaries the equations must be modified to allow for movement and deformation of the mesh.

This method has proved effective for the calculation of unsteady flows that might be associated with wing flutter [3, 4]. It has the advantage that it can be added as an option to a computer program which uses an explicit multigrid scheme, allowing it to be used for the efficient calculation of both steady and unsteady flows.

#### 4.7 High Order Schemes and Mesh Refinement

The need both to improve the accuracy of computational simulations, and to assure known levels of accuracy is the focus of ongoing research. The main routes to improving the accuracy are to increase the order of the discrete scheme, and reduce the mesh interval. High order difference methods are most easily implemented on Cartesian, or at least extremely smooth grids. The expansion of the stencil as the order is increased leads to the need for complex boundary conditions. Compact schemes keep the stencil as small as possible [128, 96, 26]. On simple domains, spectral methods are particularly effective, especially in the case of periodic boundary conditions, and can be used to produce exponentially fast convergence of the error as the mesh interval is decreased [117, 25]. A compromise is to divide the field into subdomains and introduce high order elements. This approach is used in the spectral element method [86].

High order difference schemes and spectral methods have proven particularly useful in direct Navier-Stokes simulations of transient and turbulent flows. High order methods are also beneficial in computational aero-acoustics, where it is desired to track waves over long distances with minimum error. If the flow contains shock waves or contact discontinuities, the ENO method may be used to construct high order non-oscillatory schemes.

In multi-dimensional flow simulations, global reduction of the mesh interval can be prohibitively expensive, motivating the use of adaptive mesh refinement procedures which reduce the local mesh width  $h$  if there is an indication that the error is too large [20, 36, 100, 56, 126, 95]. In such  $h$ -refinement methods, simple error indicators such as local solution gradients may be used. Alternatively, the discretization error may be estimated by comparing quantities calculated with two mesh widths, say on the current mesh and a coarser mesh with double the mesh interval. Procedures of this kind may also be used to provide *a posteriori* estimates of the error once the calculation is completed.

This kind of local adaptive control can also be applied to the local order of a finite element method to produce a  $p$ -refinement method, where  $p$  represents the order of the polynomial basis functions. Finally, both  $h$ - and  $p$ -refinement can be combined to produce an  $h$ - $p$  method in which  $h$  and  $p$  are locally optimized to

yield a solution with minimum error [116]. Such methods can achieve exponentially fast convergence, and are well established in computational solid mechanics.

## 5 Current Status of Numerical Simulation

This section presents some representative numerical results which confirm the properties of the algorithms which have been reviewed in the last section. These have been drawn from the work of the author and his associates. They also illustrate the kind of calculation which can be performed in an industrial environment, where rapid turn around is important to allow quick assessment of design changes, and computational costs must be limited.

### 5.1 One dimensional shock

In order to verify the discrete structure of stationary shocks, calculations were performed for a one dimensional problem with initial data containing left and right states compatible with the Rankine Hugoniot conditions. An intermediate state consisting of the arithmetic average of the left and right states was introduced at a single cell in the center of the domain. With this intermediate state the system is not in equilibrium, and the time dependent equations were solved to find an equilibrium solution with a stationary shock wave separating the left and right states. Table 1 shows the result for a shock wave at Mach 20. This calculation used the H-CUSP scheme, which allows a solution with constant stagnation enthalpy. The SLIP construction was used with the limiter defined by equation (21), and  $q = 3$ . The table shows the values of  $\rho$ ,  $u$ ,  $H$ ,  $p$ ,  $M$  and the entropy  $S = \log \frac{p}{\rho \gamma} - \log \left( \frac{p_f}{\rho_f} \right)$ . A perfect one point shock structure is displayed. The entropy is zero to 4 decimal places upstream of the shock, exhibits a slight excursion at the interior point, and is constant to 4 decimal places downstream of the shock. It may be noted that the mass, momentum and energy of the initial data are not compatible with the final equilibrium state. According to equation (34) the total mass, momentum and energy must remain constant if the outflow flux  $f_R$  remains equal to the inflow flux  $f_L$ . Therefore  $f_R$  must be allowed to vary according to an appropriate outflow boundary condition to allow the total mass, momentum and energy to be adjusted to values compatible with equilibrium.

### 5.2 Airfoil calculations

The results of transonic flow calculations for two well known airfoils, the RAE 2822 and the NACA 0012, are presented in figures (10-13). The H-CUSP scheme was again used with the SLIP construction. The limiter defined by equation (21) was used with  $q = 3$ . The 5 stage time stepping scheme (40) was augmented by the multigrid scheme described in section 4.2 to accelerate convergence to a steady state. The equations were discretized on meshes with O-topology extending out to a radius of about 100 chords. In each case the calculations were performed on a sequence of successively finer meshes from 40x8 to 320x64 cells, while the multigrid cycles on each of these meshes descended to a coarsest mesh of 10x2 cells. Figure 10 shows the inner parts of the 160x32 meshes for the two airfoils. Figures 11-13 show the final results on 320x64 meshes for the RAE 2822 airfoil at Mach .75 and 3° angle of attack, and for the NACA 0012 airfoil at Mach .8 and 1.25° angle of attack, and also at Mach .85 and 1° angle of attack. In the pressure distributions the pressure coefficient  $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty q_\infty^2}$  is plotted with the negative (suction) pressures upward, so that the upper curve represents the flow over the upper side of a lifting airfoil. The convergence histories show the mean rate of change of the density, and also the total number of supersonic points in the flow field, which provides a useful measure of the global convergence of transonic flow calculations such as these. In each case the convergence history is shown for 100 cycles, while the pressure distribution is displayed after a sufficient number of cycles for its convergence. The pressure distribution of the RAE 2822 airfoil converged in only 25 cycles. Convergence was slower for the NACA 0012 airfoil. In the case of flow at Mach .8 and 1.25° angle of attack, additional cycles were needed to damp out a wave downstream of the weak shock wave on the lower surface.

I	$\rho$	u	H	p	M	s
12	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
13	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
14	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
15	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
16	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
17	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
18	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
19	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
20	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
21	1.0000	23.6643	283.5000	1.0000	20.0000	0.0000
22	4.1924	7.3248	283.4960	307.4467	0.7229	40.3353
23	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
24	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
25	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
26	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
27	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
28	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
29	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
30	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
31	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355
32	5.9259	3.9935	283.4960	466.4889	0.3804	37.6355

Table 1: Shock Wave at Mach 20

As a further check on accuracy the drag coefficient should be zero in subsonic flow, or in shock free transonic flow. Table 2 shows the computed drag coefficient on a sequence of three meshes for three examples. The first two are subsonic flows over the RAE 2822 and NACA 0012 airfoils at Mach .5 and  $3^\circ$  angle of attack. The third is the flow over the shock free Korn airfoil at its design point of Mach .75 and  $0^\circ$  angle of attack. In all three cases the drag coefficient is calculated to be zero to four digits on a 160x32 mesh.

Mesh	RAE 2822	NACA 0012	Korn Airfoil
	Mach .50 $\alpha$ $3^\circ$	Mach .50 $\alpha$ $3^\circ$	Mach .75 $\alpha$ $0^\circ$
40x8	.0062	.0047	.0098
80x16	.0013	.0008	.0017
160x32	.0000	.0000	.0000

Table 2: Drag Coefficient on a sequence of meshes

### 5.3 Three dimensional calculations for a swept wing

As a further test of the performance of the H-CUSP scheme, the flow past the ONERA M6 wing was calculated on a mesh with C-H topology and  $192 \times 32 \times 48 = 294912$  cells. Figure 14 shows the result at Mach .84 and  $3.06^\circ$  angle of attack. This again verifies the non-oscillatory character of the solution, and the sharp resolution of shock waves. In this case 50 cycles were sufficient for convergence of the pressure distributions.



## 6 Aerodynamic Design

### 6.1 The Design Problem as a Control Problem

Aerodynamic design has traditionally been carried out on a cut and try basis, with the aerodynamic expertise of the designer guiding the selection of each shape modification. Although considerable gains in aerodynamic performance have been achieved by this approach, continued improvement will most probably be much more difficult to attain. The subtlety and complexity of fluid flow is such that it is unlikely that repeated trials in an interactive analysis and design procedure can lead to a truly optimum design. Automatic design techniques are therefore needed in order to fully realize the potential improvements in aerodynamic efficiency.

Numerical optimization methods have been applied successfully to some simplified cases, such as two-dimensional airfoils in viscous flows [130] and wings in inviscid flows. However, this approach requires the computation of a large number of flow solutions before an optimum point can be located in the design space.

An alternative approach is to cast the design problem as a search for the shape that will generate the desired pressure distribution. This inverse approach recognizes that the designer usually has an idea of the the kind of pressure distribution that will lead to the desired performance. Thus, it is useful to consider the inverse problem of calculating the shape that will lead to a given pressure distribution. The method is advantageous, since only one flow solution is required to obtain the desired design. Unfortunately, a physically realizable shape may not necessarily exist, unless the pressure distribution satisfies certain constraints. Thus the problem must be very carefully formulated.

A particularly attractive way to circumvent the difficulty that the objective may be unattainable is to regard the design problem as a control problem in which the control is the shape of the boundary. A variety of alternative formulations of the design problem can then be treated systematically within the framework of the mathematical theory for control of systems governed by partial differential equations [97]. This approach to optimal aerodynamic design was introduced by Jameson [67, 68], who examined the design problem for compressible flow with shock waves, and devised adjoint equations to determine the gradient for both potential flow and also flows governed by the Euler equations. More recently Ta'asan, Kuruvila, and Salas, implemented a one shot approach in which the constraint represented by the flow equations is only required to be satisfied by the final converged solution [155]. Pironneau has studied the use of control theory for optimum shape design of systems governed by elliptic equations [122], while adjoint methods have also been used by Baysal and Eleshaky [16].

Suppose that the control is defined by a function  $\mathcal{F}(\xi)$  of some independent variable  $\xi$  or in the discrete case a vector with components  $\mathcal{F}_i$ . Also suppose that the desired objective is measured by a cost function  $I$ . This may, for example, measure the deviation from a desired surface pressure distribution, but it can also represent other measures of performance such as lift and drag. Thus the design problem is recast into a numerical optimization procedure. This has the advantage that if the objective, say, of a target pressure distribution, is unattainable, it is still possible to find a minimum of the cost function. Now a variation  $\delta\mathcal{F}$  in the control produces a variation  $\delta I$  in the cost. Following control theory,  $\delta I$  can be expressed to first order as an inner product

$$\delta I = (\mathcal{G}, \delta\mathcal{F}),$$

where the gradient  $\mathcal{G}$  is independent of the particular variation  $\delta\mathcal{F}$ , and can be determined by solving an adjoint equation. For a discrete system of equations

$$(\mathcal{G}, \delta\mathcal{F}) \equiv \sum G_i \delta\mathcal{F}_i$$

and for an infinitely dimensional system

$$(\mathcal{G}, \delta\mathcal{F}) \equiv \int \mathcal{G}(\xi) \delta\mathcal{F} d\xi.$$

In either case, if one makes a shape change

$$\delta\mathcal{F} = -\lambda\mathcal{G}, \tag{41}$$

where  $\lambda$  is sufficiently small and positive, then

$$\delta I = -\lambda(\mathcal{G}, \mathcal{G}) < 0$$

assuring a reduction in  $I$ .

For flow about an airfoil or wing, the aerodynamic properties which define the cost function are functions of the flow-field variables ( $w$ ) and the physical location of the boundary, which may be represented by the function  $\mathcal{F}$ , say. Then

$$I = I(w, \mathcal{F}),$$

and a change in  $\mathcal{F}$  results in a change

$$\delta I = \frac{\partial I^T}{\partial w} \delta w + \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{F}} \delta \mathcal{F}, \quad (42)$$

in the cost function. Brute force methods evaluate the gradient by making a small change in each design variable separately, and then recalculating both the grid and flow-field variables. This requires a number of additional flow calculations equal to the number of design variables. Using control theory, the governing equations of the flowfield are introduced as a constraint in such a way that the final expression for the gradient does not require reevaluation of the flow field. In order to achieve this,  $\delta w$  must be eliminated from (42). The governing equation  $R$  expresses the dependence of  $w$  and  $\mathcal{F}$  within the flowfield domain  $D$ ,

$$R(w, \mathcal{F}) = 0,$$

Thus  $\delta w$  is determined from the equation

$$\delta R = \left[ \frac{\partial R}{\partial w} \right] \delta w + \left[ \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}} \right] \delta \mathcal{F} = 0. \quad (43)$$

Next, introducing a Lagrange Multiplier  $\psi$ , we have

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{\partial I^T}{\partial w} \delta w + \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{F}} \delta \mathcal{F} - \psi^T \left( \left[ \frac{\partial R}{\partial w} \right] \delta w + \left[ \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}} \right] \delta \mathcal{F} \right) \\ &= \left\{ \frac{\partial I^T}{\partial w} - \psi^T \left[ \frac{\partial R}{\partial w} \right] \right\} \delta w + \left\{ \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{F}} - \psi^T \left[ \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}} \right] \right\} \delta \mathcal{F} \end{aligned}$$

Choosing  $\psi$  to satisfy the adjoint equation

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial w} \right]^T \psi = \frac{\partial I}{\partial w} \quad (44)$$

the first term is eliminated, and we find that

$$\delta I = \mathcal{G} \delta \mathcal{F} \quad (45)$$

where

$$\mathcal{G} = \frac{\partial I^T}{\partial \mathcal{F}} - \psi^T \left[ \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}} \right].$$

The advantage is that (45) is independent of  $\delta w$ , with the result that the gradient of  $I$  with respect to an arbitrary number of design variables can be determined without the need for additional flow-field evaluations. The main cost is in solving the adjoint equation (44). In general, the adjoint problem is about as complex as a flow solution. If the number of design variables is large, the cost differential between one adjoint solution and the large number of flowfield evaluations required to determine the gradient by brute force becomes compelling. Instead of introducing a Lagrange multiplier,  $\psi$ , one can solve (43) for  $\delta w$  as

$$\delta w = - \left[ \frac{\partial R}{\partial w} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial R}{\partial \mathcal{F}} \right] \delta \mathcal{F},$$

and insert the result in (42). This is the implicit gradient approach, which is essentially equivalent to the control theory approach, as has been pointed out by Shubin and Frank [141, 142]. In any event there is an advantage in determining the gradient  $\mathcal{G}$  by the solution of the adjoint equation.

After making such a modification, the gradient can be recalculated and the process repeated to follow a path of steepest descent (41) until a minimum is reached. In order to avoid violating constraints, such as a minimum acceptable wing thickness, the gradient may be projected into the allowable subspace within which the constraints are satisfied. In this way one can devise procedures which must necessarily converge at least to a local minimum, and which can be accelerated by the use of more sophisticated descent methods such as conjugate gradient or quasi-Newton algorithms. There is the possibility of more than one local minimum, but in any case the method will lead to an improvement over the original design. Furthermore, unlike the traditional inverse algorithms, any measure of performance can be used as the cost function.

## 6.2 Implementation for Swept Wings

In order to illustrate the application of control theory to aerodynamic design problems we present a three-dimensional wing design using the inviscid Euler equations as the mathematical model for compressible flow. Since three dimensional calculations require substantial computational resources, it is extremely important for the practical implementation of the method to use fast solution algorithms for the flow and the adjoint equations. In this case the author's FLO87 computer program has been used as the basis of the design method. FLO87 solves the three dimensional Euler equations with a cell-centered finite volume scheme, and uses residual averaging and multigrid acceleration to obtain very rapid steady state solutions, usually in 25 to 50 multigrid cycles [61, 65]. Upwind biasing is used to produce non-oscillatory solutions, and assure the clean capture of shock waves. This is introduced through the addition of carefully controlled numerical diffusion terms, with a magnitude of order  $\Delta x^3$  in smooth parts of the flow. The adjoint equations are treated in the same way as the flow equations. The fluxes are first estimated by central differences, and then modified by downwind biasing through numerical diffusive terms which are supplied by the same subroutines that were used for the flow equations.

The method has been tested for the optimization of a swept wing. The wing planform was fixed while the sections were free to be changed arbitrarily by the design method, with a restriction on the minimum thickness. The wing has a unit semi-span, with 38 degrees leading edge sweep. It has a modified trapezoidal planform, with straight taper from a root chord of 0.38, and a curved trailing edge in the inboard region blending into straight taper outboard of the 30 percent span station to a tip chord of 0.10, with an aspect ratio of 9.0. The initial wing sections were based on a section specifically designed by the author's two dimensional design method [67] to give shock free flow at Mach 0.78 with a lift coefficient of 0.6. The pressure distribution is displayed in figure 15. This section, which has a thickness to chord ratio of 9.5 percent, was used at the tip. Similar sections with an increased thickness were used inboard. The variation of thickness was non-linear with a more rapid increase near the root, where the thickness to chord ratio of the basic section was multiplied by a factor of 1.47. The inboard sections were rotated upwards to give the initial wing 3.0 degrees twist from root to tip.

The two dimensional pressure distribution of the basic wing section at its design point was introduced as a target pressure distribution uniformly across the span. This target is presumably not realizable, but serves to favor the establishment of relatively benign pressure distribution. The total inviscid drag coefficient, due to the combination of vortex and shock wave drag, was also included in the cost function. Calculations were performed with the lift coefficient forced to approach a fixed value by adjusting the angle of attack every fifth iteration of the flow solution. It was found that the computational costs can be reduced by using only 15 multigrid cycles in each flow solution, and in each adjoint solution. Although this is not enough for full convergence, it proves sufficient to provide a shape modification which leads to an improvement. Figures 16 and 17 show the result of a calculation at Mach number of 0.85, with the lift coefficient forced to approach a value of 0.5. This calculation was performed on a mesh with 192 intervals in the  $\xi$  direction wrapping around the wing, 32 intervals in the normal  $\eta$  direction and 48 intervals in the spanwise  $\zeta$  direction, giving a total of 294912 cells. The wing was specified by 33 sections, each with 128 points, giving a total of 4224 design variables. The plots show the initial wing geometry and pressure distribution, and the modified geometry and

pressure distribution after 10 design cycles. The total inviscid drag was reduced from 0.0209 to 0.0119. The initial design exhibits a very strong shock wave in the inboard region. It can be seen that this is completely eliminated, leaving a very weak shock wave in the outboard region. The drag reduction is mainly accomplished in the first four design cycles but the pressure distribution continues to be adjusted to become more like the target pressure distribution. To verify the solution, the final geometry, after 10 design cycles, was analyzed with another method using the computer program FLO67. This program uses a cell-vertex formulation, and has recently been modified to incorporate a local extremum diminishing algorithm with a very low level of numerical diffusion [71]. When run to full convergence it was found that the redesigned wing has a drag coefficient of 0.0096 at Mach 0.85 at a lift coefficient of 0.5, with a corresponding lift to drag ratio of 52. The result for  $\alpha = 0.0^\circ$  and  $C_L = 0.505$  is illustrated in Figure 18: this seems to be the nearest to a shock free condition. A calculation at Mach 0.500 shows a drag coefficient of 0.0089 for a lift coefficient of 0.5. Since in this case the flow is entirely subsonic, this provides an estimate of the vortex drag for this planform and lift distribution, which is just what one obtains from the standard formula for induced drag,  $C_D = C_L^2 / \epsilon \pi AR$ , with an aspect ratio  $AR = 9$ , and an efficiency factor  $\epsilon = 0.97$ . Thus the design method has reduced the shock wave drag coefficient to about 0.0007 at a lift coefficient of 0.5. For a representative transport aircraft the parasite drag coefficient of the wing due to skin friction is about 0.0045. Also the fuselage drag coefficient is about 0.0050, the nacelle drag coefficient is about 0.0015, the empennage drag coefficient is about 0.0020, and excrescence drag coefficient is about 0.0010. This would give a total drag coefficient  $C_D = 0.0236$  for a lift coefficient of 0.5, corresponding to a lift to drag ratio  $L/D = 21$ . This would be a substantial improvement over the values obtained by currently flying transport aircraft. These results suggest that the method can be a very useful tool for the design of new airplanes. Even in the case of three dimensional flows, the computational requirements are so moderate that the calculations can be performed with workstations such as the IBM RISC 6000 series. A design cycle on a  $192 \times 32 \times 48$  mesh takes about  $1\frac{1}{2}$  hours on an IBM model 530 workstation, allowing overnight completion of a design calculation for a swept wing.

## 7 Outlook and Conclusions

Better algorithms and better computer hardware have contributed about equally to the progress of computational science in the last two decades. In 1970 the Control Data 6600 represented the state of the art in computer hardware with a speed of about  $10^6$  operations per second (one megaflop), while in 1990 the 8 processor Cray YMP offered a performance of about  $10^9$  operations per second (one gigaflop). Correspondingly, steady-state Euler calculations which required 5,000–10,000 steps prior to 1980 could be performed in 10–50 steps in 1990 using multigrid acceleration. With the advent of massively parallel computers it appears that the progress of computer hardware may even accelerate. Teraflop machines offering further improvement by a factor of 1,000 are likely to be available within a few years. Parallel architectures will force a reappraisal of existing algorithms, and their effective utilization will require the extensive development of new parallel software.

In parallel with the transition to more sophisticated algorithms, the present challenge is to extend the effective use of CFD to more complex applications. A key problem is the treatment of multiple space and time scales. These arise not only in turbulent flows, but also in many other situations such as chemically reacting flows, combustion, flame fronts and plasma dynamics. Another challenge, is presented by problems with moving boundaries. Examples include helicopter rotors, and rotor-stator interaction in turbomachinery. Algorithms for these problems can be significantly improved by innovative concepts, such as the idea of time inclining. It can be anticipated that interdisciplinary applications in which CFD is coupled with the computational analysis of other properties of the design will play an increasingly important role. These applications may include structural, thermal and electromagnetic analysis. Aeroelastic problems and integrated control system and aerodynamic design are likely target areas.

The development of improved algorithms continues to be important in providing the basic building blocks for

numerical simulation. In particular, better error estimation procedures must be developed and incorporated in the simulation software to provide error control. The basic simulation software is only one of the needed ingredients, however. The flow solver must be embedded in a user-friendly system for geometry modeling, output analysis, and data management that will provide a complete numerical design environment. These are the ingredients which are needed for the full realization of the concept of a numerical wind tunnel. Figures 8 and 9 illustrate the way in which a numerical wind tunnel might evolve from current techniques, which involve massive data handling tasks, to a fully integrated design environment.

In the long run, computational simulation should become the principal tool of the aerodynamic design process because of the flexibility it provides for the rapid and comparatively inexpensive evaluation of alternative designs, and because it can be integrated with a multi-disciplinary optimization (MDO) procedure. Experimental facilities are likely to be used principally for fundamental investigations of the basic physics of fluid flow, and for final verification of the design prior to flight testing. This is already the accepted procedure in the structural design process.

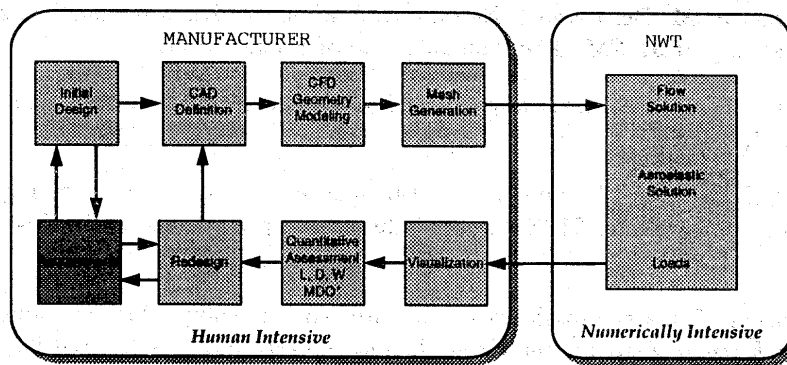


Figure 8: Concept for a numerical wind tunnel.

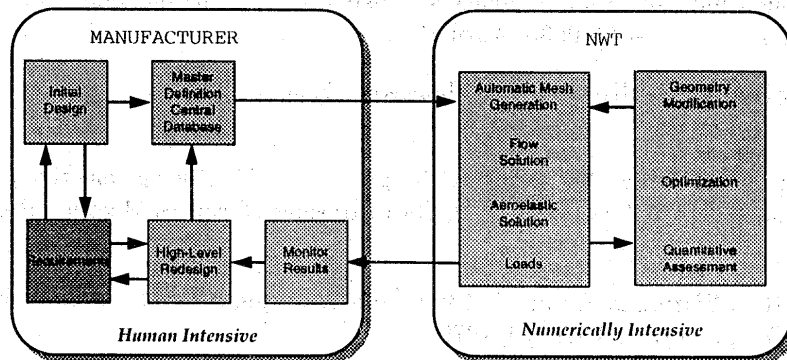


Figure 9: Advanced numerical wind tunnel.

## References

- [1] R. Abid, C.G. Speziale, and S. Thangam. Application of a new  $k-\tau$  model to near wall turbulent flows. AIAA Paper 91-0614, AIAA 29th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, January 1991.

- [2] H. Aiso. Admissibility of difference approximations for scalar conservation laws. *Hiroshima Math. Journal*, 23:15–61, 1993.
- [3] J. J. Alonso and A. Jameson. Fully-implicit time-marching aeroelastic solutions. *AIAA paper 94-0056*, AIAA 32nd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1994.
- [4] J. J. Alonso, L. Martinelli, and A. Jameson. Multigrid unsteady Navier-Stokes calculations with aeroelastic applications. *AIAA paper 95-0048*, To be presented at the AIAA 33rd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1995.
- [5] B.K. Anderson, J.L. Thomas, and B. Van Leer. A comparison of flux vector splittings for the Euler equations. AIAA Paper 85-0122, Reno, NV, January 1985.
- [6] W.K. Anderson, J.L. Thomas, and D.L. Whitfield. Multigrid acceleration of the flux split Euler equations. AIAA Paper 86-0274, AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1986.
- [7] T.J. Baker. Mesh generation by a sequence of transformations. *Appl. Num. Math.*, 2:515–528, 1986.
- [8] N. Balakrishnan and S. M. Deshpande. New upwind schemes with wave-particle splitting for inviscid compressible flows. *Report 91 FM 12*, Indian Institute of Science, 1991.
- [9] B. Baldwin and H. Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flow. AIAA Paper 78-257, 1978.
- [10] B.S. Baldwin and T.J. Barth. A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows. AIAA Paper 91-0610, AIAA 29th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, January 1991.
- [11] T. J. Barth. Aspects of unstructured grids and finite volume solvers for the Euler and Navier Stokes equations. In *von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series Notes 1994-05*, Brussels, 1994.
- [12] T.J. Barth and P.O. Frederickson. Higher order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction. AIAA paper 90-0013, January 1990.
- [13] T.J. Barth and D.C. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *AIAA paper 89-0366*, AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1989.
- [14] J.T. Batina. Implicit flux-split Euler schemes for unsteady aerodynamic analysis involving unstructured dynamic meshes. AIAA paper 90-0936, April 1990.
- [15] F. Bauer, P. Garabedian, D. Korn, and A. Jameson. *Supercritical Wing Sections II*. Springer Verlag, New York, 1975.
- [16] O. Baysal and M. E. Eleshaky. Aerodynamic design optimization using sensitivity analysis and computational fluid dynamics. *AIAA paper 91-0471*, 29th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1991.
- [17] R.W. Beam and R.F. Warming. An implicit finite difference algorithm for hyperbolic systems in conservation form. *J. Comp. Phys.*, 23:87–110, 1976.
- [18] J.A. Benek, P.G. Buning, and J.L. Steger. A 3-D Chimera grid embedding technique. In *Proceedings AIAA 7th Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 507–512, Cincinnati, OH, 1985. AIAA Paper 85-1523.
- [19] J.A. Benek, T.L. Donegan, and N.E. Suhs. Extended Chimera grid embedding scheme with applications to viscous flows. AIAA Paper 87-1126, AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, HI, 1987.
- [20] M. Berger and A. Jameson. Automatic adaptive grid refinement for the Euler equations. *AIAA Journal*, 23:561–568, 1985.
- [21] M. Berger and R.J. LeVeque. An adaptive Cartesian mesh algorithm for the Euler equations in arbitrary geometries. AIAA Paper 89-1930, 1989.

- [22] J.P. Boris and D.L. Book. Flux corrected transport, 1 SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comp. Phys.*, 11:38–69, 1973.
- [23] A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems. *Math. Comp.*, 31:333–390, 1977.
- [24] M.O. Bristeau, R. Glowinski, J. Periaux, P. Perrier, O. Pironneau, and C. Poirier. On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element methods (II), application to transonic flow simulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 51:363–394, 1985.
- [25] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and D.A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 1987.
- [26] M.H. Carpenter, D. Gottlieb, and S. Abarbanel. Time-stable boundary conditions for finite-difference schemes solving hyperbolic systems: Methodology and application to high-order compact schemes. ICASE Report 93-9, Hampton, VA, March 1993.
- [27] D.A. Caughey. A diagonal implicit multigrid algorithm for the Euler equations. AIAA Paper 87-453, 25th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1987.
- [28] T. Cebeci and A.M.O. Smith. *Analysis of Turbulent Boundary Layers*. Academic Press, 1974.
- [29] S.R. Chakravarty. Relaxation methods for unfactored implicit upwind schemes. AIAA Paper 84-0165, AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1984.
- [30] S.R. Chakravarty, A. Harten, and S. Osher. Essentially non-oscillatory shock capturing schemes of uniformly very high accuracy. AIAA Paper 86-0339, AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1986.
- [31] D.R. Chapman, H. Mark, and M.W. Pirtle. Computers vs wind tunnels in aerodynamic flow simulations. *Aeronautics and Astronautics*, 13(4):22–30 and 35, 1975.
- [32] R. Chipman and A. Jameson. Fully conservative numerical solutions for unsteady irrotational transonic flow about airfoils. AIAA Paper 79-1555, AIAA 12th Fluid and Plasma Dynamics Conference, Williamsburg, VA, July 1979.
- [33] T.J. Coakley. Numerical simulation of viscous transonic airfoil flows. AIAA Paper 87-0416, AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1987.
- [34] J.P. Croisille and P. Villedieu. Kinetic flux splitting schemes for hypersonic flows. In M. Napolitano and F. Sobotta, editors, *Proc 13th International Congress on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 310–313, Rome, July 1992. Springer Verlag.
- [35] G. Dahlquist. A special stability problem for linear multistep methods. *BIT*, 3:27–43, 1963.
- [36] J.F. Dannenhoffer and J.R. Baron. Robust grid adaptation for complex transonic flows. AIAA Paper 86-0495, AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1986.
- [37] D. Degani and L. Schiff. Computation of turbulent supersonic flows around pointed bodies having crossflow separation. *J. Comp. Phys.*, 66:173–196, 1986.
- [38] B. Delaunay. Sur la sphere vide. *Bull. Acad. Science USSR. VII: Class Sci., Mat. Nat.*, pages 793–800, 1934.
- [39] S.M. Deshpande. On the Maxwellian distribution, symmetric form and entropy conservation for the Euler equations. NASA TP 2583, 1986.
- [40] A. Eberle. A finite volume method for calculating transonic potential flow around wings from the minimum pressure integral. NASA TM 75324, 1978. Translated from MBB UFE 1407(0).
- [41] P.R. Eiseman. A multi-surface method of coordinate generation. *J. Comp. Phys.*, 33:118–150, 1979.
- [42] W. Eppard and B. Grossman. A multi-dimensional kinetic-based upwind solver for the Euler equations. AIAA Paper 93-3303, AIAA 11th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, FL, July 1993.
- [43] L.E. Eriksson. Generation of boundary-conforming grids around wing-body configurations using transfinite interpolation. *AIAA Journal*, 20:1313–1320, 1982.

- [44] R.P. Fedorenko. The speed of convergence of one iterative process. *USSR Comp. Math. and Math. Phys.*, 4:227-235, 1964.
- [45] C.W. Gear. The numerical integration of stiff ordinary differential equations. Report 221, University of Illinois Department of Computer Science, 1967.
- [46] M. Giles, M. Drela, and W.T. Thompkins. Newton solution of direct and inverse transonic Euler equations. AIAA Paper 85-1530, Cincinnati, 1985.
- [47] S.K. Godunov. A difference method for the numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations. *Mat. Sbornik*, 47:271-306, 1959. Translated as JPRS 7225 by U.S. Dept. of Commerce, 1960.
- [48] M.H. Ha. The impact of turbulence modelling on the numerical prediction of flows. In M. Napolitano and F. Solbetta, editors, *Proc. of the 13th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 27-46, Rome, Italy, July 1992. Springer Verlag, 1993.
- [49] W. Hackbusch. On the multi-grid method applied to difference equations. *Computing*, 20:291-306, 1978.
- [50] M. Hafez, J.C. South, and E.M. Murman. Artificial compressibility method for numerical solutions of the transonic full potential equation. *AIAA Journal*, 17:838-844, 1979.
- [51] M.G. Hall. Cell vertex multigrid schemes for solution of the Euler equations. In *Proc. IMA Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Reading, April 1985.
- [52] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 49:357-393, 1983.
- [53] P.W. Hemker and S.P. Spekreijse. Multigrid solution of the steady Euler equations. In *Proc. Oberwolfach Meeting on Multigrid Methods*, December 1984.
- [54] J.L. Hess and A.M.O. Smith. Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies. Douglas Aircraft Report ES 40622, 1962.
- [55] C. Hirsch, C. Lacol, and H. Deconinck. Convection algorithms based on a diagonalization procedure for the multi-dimensional Euler equations. In *Proc. AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 667-676, Hawaii, June 1987. AIAA Paper 87-1163.
- [56] D.G. Holmes and S.H. Lamson. Adaptive triangular meshes for compressible flow solutions. In *Proceedings First International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*, pages 413-424, Landshut, FRG, July 1986.
- [57] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics, I, Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics. *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 59:223-231, 1986.
- [58] A. Jameson. Iterative solution of transonic flows over airfoils and wings, including flows at Mach 1. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 27:283-309, 1974.
- [59] A. Jameson. Transonic potential flow calculations in conservation form. In *Proc. AIAA 2nd Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 148-161, Hartford, 1975.
- [60] A. Jameson. Solution of the Euler equations by a multigrid method. *Appl. Math. and Comp.*, 13:327-356, 1983.
- [61] A. Jameson. Solution of the Euler equations for two dimensional transonic flow by a multigrid method. *Appl. Math. Comp.*, 13:327-356, 1983.
- [62] A. Jameson. Multigrid algorithms for compressible flow calculations. In *Second European Conference on Multigrid Methods*, Cologne, October 1985. Princeton University Report MAE 1743.
- [63] A. Jameson. Non-oscillatory shock capturing scheme using flux limited dissipation. In B.E. Engquist, S. Osher, and R.C.J. Somerville, editors, *Lectures in Applied Mathematics, Vol. 22, Part 1, Large Scale Computations in Fluid Mechanics*, pages 345-370. AMS, 1985.



- [64] A. Jameson. Transonic flow calculations for aircraft. In F. Brezzi, editor, *Lecture Notes in Mathematics, Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 156–242. Springer Verlag, 1985.
- [65] A. Jameson. Multigrid algorithms for compressible flow calculations. In W. Hackbusch and U. Trottenberg, editors, *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1228*, pages 166–201. Proceedings of the 2nd European Conference on Multigrid Methods, Cologne, 1985, Springer-Verlag, 1986.
- [66] A. Jameson. A vertex based multigrid algorithm for three-dimensional compressible flow calculations. In T.E. Tezduar and T.J.R. Hughes, editors, *Numerical Methods for Compressible Flow - Finite Difference, Element And Volume Techniques*, 1986. ASME Publication AMD 78.
- [67] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. *J. Sci. Comp.*, 3:233–260, 1988.
- [68] A. Jameson. Automatic design of transonic airfoils to reduce the shock induced pressure drag. In *Proceedings of the 31st Israel Annual Conference on Aviation and Aeronautics, Tel Aviv*, pages 5–17, February 1990.
- [69] A. Jameson. Time dependent calculations using multigrid, with applications to unsteady flows past airfoils and wings. *AIAA paper 91-1596*, AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, Hawaii, June 1991.
- [70] A. Jameson. Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flows. AIAA Paper 93-3359, AIAA 11th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, FL, July 1993.
- [71] A. Jameson. Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flow. *AIAA paper 93-3359*, AIAA 11th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, July 1993.
- [72] A. Jameson. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1, artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on multigrid convergence. *Int. J. of Comp. Fluid Dyn.*, To Appear.
- [73] A. Jameson. Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 2, artificial diffusion and discrete shock structure. *Int. J. of Comp. Fluid Dyn.*, To Appear.
- [74] A. Jameson and T.J. Baker. Improvements to the aircraft Euler method. AIAA Paper 87-0452, AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1987.
- [75] A. Jameson, T.J. Baker, and N.P. Weatherill. Calculation of inviscid transonic flow over a complete aircraft. AIAA Paper 86-0103, AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1986.
- [76] A. Jameson and D.J. Mavriplis. Multigrid solution of the Euler equations on unstructured and adaptive grids. In S. McCormick, editor, *Multigrid Methods, Theory, Applications and Supercomputing. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, volume 110, pages 413–430, April 1987.
- [77] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes. AIAA Paper 81-1259, 1981.
- [78] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods with Runge-Kutta time stepping schemes. *AIAA paper 81-1259*, January 1981.
- [79] A. Jameson and E. Turkel. Implicit schemes and LU decompositions. *Math. Comp.*, 37:385–397, 1981.
- [80] F. Liu and A. Jameson. Multigrid Navier-Stokes calculations for three-dimensional cascades. *AIAA paper 92-0190*, AIAA 30th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1992.
- [81] M. Jayaram and A. Jameson. Multigrid solution of the Navier-Stokes equations for flow over wings. *AIAA paper 88-0705*, AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1988.
- [82] D. Johnson and L. King. A mathematically simple turbulence closure model for attached and separated turbulent boundary layers. *AIAA Journal*, 23:1684–1692, 1985.
- [83] W.P. Jones and B.E. Launder. The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence. *Int. J. of Heat Tran.*, 16:1119–1130, 1973.

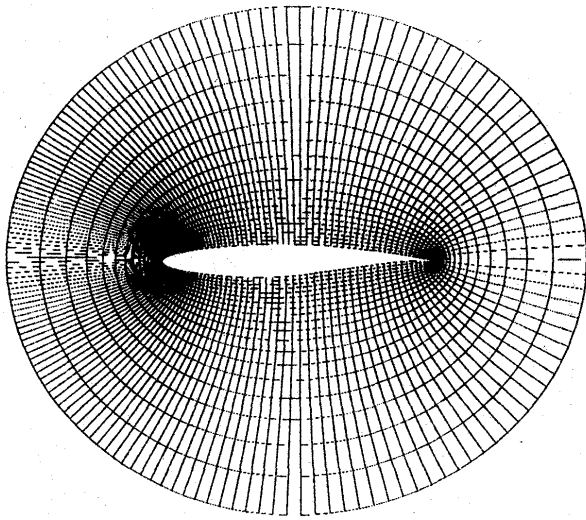
- [84] W.H. Jou. Boeing Memorandum AERO-B113B-L92-018, September 1992. To Joseph Shang.
- [85] T.J. Kao, T.Y. Su, and N.J. Yu. Navier-Stokes calculations for transport wing-body configurations with nacelles and struts. AIAA Paper 93-2945, AIAA 24th Fluid Dynamics Conference, Orlando, July 1993.
- [86] G.E. Karniadakis and S.A. Orszag. Nodes, modes and flow codes. *Physics Today*, pages 34–42, March 1993.
- [87] M.H. Lallemand and A. Devrioux. A multigrid finite-element method for solving the two-dimensional Euler equations. In S.F. McCormick, editor, *Proceedings of the Third Copper Mountain Conference on Multigrid Methods, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, pages 337–363, Copper Mountain, April 1987.
- [88] A.M. Landsberg, J.P. Boris, W. Sandberg, and T.R. Young. Naval ship superstructure design: Complex three-dimensional flows using an efficient, parallel method. *High Performance Computing 1993: Grand Challenges in Computer Simulation*, 1993.
- [89] P. D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws. *SIAM Regional Series on Appl. Math.*, II, 1973.
- [90] P.D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. *SIAM Regional Series on Appl. Math.*, 11, 1973.
- [91] P.D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 13:217–237, 1960.
- [92] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *J. Comp. Phys.*, 14:361–370, 1974.
- [93] B. Van Leer. Flux vector splitting for the Euler equations. In E. Krause, editor, *Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 507–512, Aachen, 1982.
- [94] B. Van Leer. Progress in multi-dimensional upwind differencing. In M. Napolitano and F. Solbetta, editors, *Proc. 13th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 1–26, Rome, July 1992. Springer Verlag, 1993.
- [95] D. Lefebvre, J.Peraire, and K.Morgan. Finite element least squares solutions of the Euler equations using linear and quadratic approximations. *Int. J. Comp. Fluid Dynamics*, 1:1–23, 1993.
- [96] S.K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. CTR Manuscript 107, 1990.
- [97] J.L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1971. Translated by S.K. Mitter.
- [98] M-S. Liou and C.J. Steffen. A new flux splitting scheme. *J. Comp. Phys.*, 107:23–39, 1993.
- [99] R. Lohner and D. Martin. An implicit linelet-based solver for incompressible flows. AIAA paper 92-0668, AIAA 30th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, January 1992.
- [100] R. Lohner, K. Morgan, and J. Peraire. Improved adaptive refinement strategies for the finite element aerodynamic configurations. AIAA Paper 86-0499, AIAA 24th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1986.
- [101] R. Lohner, K. Morgan, J. Peraire, and O.C. Zienkiewicz. Finite element methods for high speed flows. In *Proc. AIAA 7th Computational Fluid Dynamics Conference*, Cincinnati, OH, 1985. AIAA Paper 85-1531.
- [102] R. Lohner and P. Parikh. Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing front method. AIAA Paper 88-0515, Reno, NV, January 1988.
- [103] R.W. MacCormack and A.J. Paullay. Computational efficiency achieved by time splitting of finite difference operators. AIAA Paper 72-154, 1972.
- [104] A. Majda and S. Osher. Numerical viscosity and the entropy condition. *Comm. on Pure Appl. Math.*, 32:797–838, 1979.
- [105] L. Martinelli and A. Jameson. Validation of a multigrid method for the Reynolds averaged equations. *AIAA paper 88-0414*, 1988.

- [106] L. Martinelli, A. Jameson, and E. Malfa. Numerical simulation of three-dimensional vortex flows over delta wing configurations. In M. Napolitano and F. Solbetta, editors, *Proc. 19th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 534–538, Rome, Italy, July 1992. Springer Verlag, 1993.
- [107] L. Martinelli and V. Yakhot. RNG-based turbulence transport approximations with applications to transonic flows. AIAA Paper 89-1950, AIAA 9th Computational Fluid Dynamics Conference, Buffalo, NY, June 1989.
- [108] D.J. Mavriplis and A. Jameson. Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on triangular meshes. *AIAA Journal*, 28(8):1415–1425, August 1990.
- [109] D.J. Mavriplis and L. Martinelli. Multigrid solution of compressible turbulent flow on unstructured meshes using a two-equation model. AIAA Paper 91-0237, January 1991.
- [110] J.E. Melton, S.A. Pandya, and J.L. Steger. 3D Euler flow solutions using unstructured Cartesian and prismatic grids. AIAA Paper 93-0331, Reno, NV, January 1993.
- [111] F. Menter. Zonal two-equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows. AIAA Paper 93-2906, AIAA 24th Fluid Dynamics Meeting, Orlando, July 1993.
- [112] E.M. Murman. Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods. *AIAA Journal*, 12:626–633, 1974.
- [113] E.M. Murman and J.D. Cole. Calculation of plane steady transonic flows. *AIAA Journal*, 9:114–121, 1971.
- [114] R.H. Ni. A multiple grid scheme for solving the Euler equations. *AIAA Journal*, 20:1565–1571, 1982.
- [115] S. Obayashi and K. Kuwakara. LU factorization of an implicit scheme for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA Paper 84-1670, AIAA 17th Fluid Dynamics and Plasma Dynamics Conference, Snowmass, June 1984.
- [116] J.T. Oden, L. Demkowicz, T. Liszka, and W. Rachowicz.  $h-p$  adaptive finite element methods for compressible and incompressible flows. In S. L. Venneri A. K. Noor, editor, *Proceedings of the Symposium on Computational Technology on Flight Vehicles*, pages 523–534, Washington, D.C., November 1990. Pergamon.
- [117] S. Orszag and D. Gottlieb. Numerical analysis of spectral methods. *SIAM Regional Series on Appl. Math.*, 26, 1977.
- [118] S. Osher. Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations. *SIAM J. Num. Anal.*, 121:217–235, 1984.
- [119] S. Osher and S. Chakravarthy. High resolution schemes and the entropy condition. *SIAM J. Num. Anal.*, 21:955–984, 1984.
- [120] S. Osher and F. Solomon. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Math. Comp.*, 38:339–374, 1982.
- [121] S. Osher and E. Tadmor. On the convergence of difference approximations to scalar conservation laws. *Math. Comp.*, 50:19–51, 1988.
- [122] O. Pironneau. *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [123] K.G. Powell and B. van Leer. A genuinely multidimensional upwind cell-vertex scheme for the Euler equations. AIAA Paper 89-0095, AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1989.
- [124] K. Prendergast and K. Xu. Numerical hydrodynamics from gas kinetic theory. *J. Comp. Phys.*, 109:53–66, November 1993.
- [125] T.H. Pulliam and J.L. Steger. Implicit finite difference simulations of three-dimensional compressible flow. *AIAA Journal*, 18:159–167, 1980.
- [126] J.J. Quirk. An alternative to unstructured grids for computing gas dynamics flows about arbitrarily complex two-dimensional bodies. ICASE Report 92-7, Hampton, VA, February 1992.

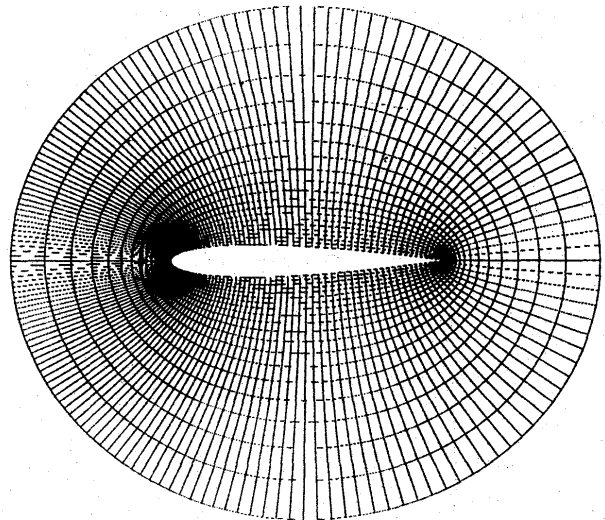
- [127] R. Radespiel, C. Rossow, and R.C. Swanson. An efficient cell-vertex multigrid scheme for the three-dimensional Navier-Stokes equations. In *Proc. AIAA 9th Computational Fluid Dynamics Conference*, pages 249-260, Buffalo, NY, June 1989. AIAA Paper 89-1953-CP.
- [128] M.M. Rai and P. Moin. Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer. AIAA Paper 91-1607 CP, AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, HI, June 1991.
- [129] S. V. Rao and S. M. Deshpande. A class of efficient kinetic upwind methods for compressible flows. *Report 91 FM 11*, Indian Institute of Science, 1991.
- [130] J. Reuther, C.P. van Dam, and R. Hicks. Subsonic and transonic low-Reynolds-number airfoils with reduced pitching moments. *J. Aircraft*, 29:297-298, 1992.
- [131] H. Rieger and A. Jameson. Solution of steady three-dimensional compressible Euler and Navier-Stokes equations by an implicit LU scheme. *AIAA paper 88-0619*, AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1988.
- [132] A. Rizzi and L.E. Eriksson. Computation of flow around wings based on the Euler equations. *J. Fluid Mech.*, 148:45-71, 1984.
- [133] P.L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43:357-372, 1981.
- [134] P.E. Rubbert and G.R. Saaris. A general three-dimensional potential flow method applied to V/STOL aerodynamics. SAE Paper 680304, 1968.
- [135] C.L. Rumsey and V.N. Vatsa. A comparison of the predictive capabilities of several turbulence models using upwind and centered - difference computer codes. AIAA Paper 93-0192, AIAA 31st Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1993.
- [136] S.S. Samant, J.E. Bussolletti, F.T. Johnson, R.H. Burkhart, B.L. Everson, R.G. Melvin, D.P. Young, L.L. Erickson, and M.D. Madson. TRANAIR: A computer code for transonic analyses of arbitrary configurations. AIAA Paper 87-0034, 1987.
- [137] K. Sawada and S. Takanashi. A numerical investigation on wing/nacelle interferences of USB configuration. In *Proceedings AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV, 1987. AIAA paper 87-0455.
- [138] C.W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comp. Phys.*, 77:439-471, 1988.
- [139] C.W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II. *J. Comp. Phys.*, 83:32-78, 1989.
- [140] C.W. Shu, T.A. Zang, G. Erlebacher, D. Whitaker, and S. Osher. High-order ENO schemes applied to two- and three-dimensional compressible flow. *Appl. Num. Math.*, 9:45-71, 1992.
- [141] G. R. Shubin. Obtaining cheap optimization gradients from computational aerodynamics codes. *Internal paper AMS-TR-164*, Boeing Computer Services, June 1991.
- [142] G. R. Shubin and P. D. Frank. A comparison of the implicit gradient approach and the variational approach to aerodynamic design optimization. *internal paper AMS-TR-164*, Boeing Computer Services, April 1991.
- [143] B. R. Smith. A near wall model for the  $k-l$  two equation turbulence model. *AIAA paper 94-2386*, 25th AIAA Fluid Dynamics Conference, Colorado Springs, CO, June 1994.
- [144] L.M. Smith and W.C. Reynolds. On the Yaghot-Orszag renormalization group for deriving turbulence statistics and models. *Phys. Fluids A*, 4:364-390, 1992.
- [145] R.E. Smith. Three-dimensional algebraic mesh generation. In *Proc. AIAA 6th Computational Fluid Dynamics Conference*, Danvers, MA, 1983. AIAA Paper 83-1904.

- [146] R.L. Sorenson. Elliptic generation of compressible three-dimensional grids about realistic aircraft. In J. Hauser and C. Taylor, editors, *International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*, Landshut, F. R. G., 1986.
- [147] R.L. Sorenson. Three-dimensional elliptic grid generation for an F-16. In J.L. Steger and J.F. Thompson, editors, *Three-Dimensional Grid Generation for Complex Configurations: Recent Progress*, 1988. AGARDograph.
- [148] P. Spalart and S. Allmaras. A one-equation turbulent model for aerodynamic flows. AIAA Paper 92-0439, AIAA 30th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, January 1992.
- [149] C.G. Speziale, E.C. Anderson, and R. Abid. A critical evaluation of two-equation models for near wall turbulence. AIAA Paper 90-1481, June 1990. ICASE Report 90-46.
- [150] J.L. Steger and D.S. Chaussee. Generation of body-fitted coordinates using hyperbolic partial differential equations. *SIAM J. Sci. and Stat. Comp.*, 1:431-437, 1980.
- [151] J.L. Steger and R.F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations with applications to finite difference methods. *J. Comp. Phys.*, 40:263-293, 1981.
- [152] B. Stoufflet, J. Periaux, F. Fezoui, and A. Dervieux. Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements. AIAA paper 87-0560, January 1987.
- [153] R.C. Swanson and E. Turkel. On central-difference and upwind schemes. *J. Comp. Phys.*, 101:297-306, 1992.
- [154] P.K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Num. Anal.*, 21:995-1011, 1984.
- [155] S. Ta'asan, G. Kuruvila, and M. D. Salas. Aerodynamic design and optimization in one shot. *AIAA paper 92-005*, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, January 1992.
- [156] E. Tadmor. Numerical viscosity and the entropy condition for conservative difference schemes. *Math. Comp.*, 32:369-382, 1984.
- [157] J.F. Thompson, F.C. Thames, and C.W. Mastin. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *J. Comp. Phys.*, 15:299-319, 1974.
- [158] J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, and C.W. Mastin. Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations: A review. *J. Comp. Phys.*, 47:1-108, 1982.
- [159] V. Venkatakrishnan. Newton solution of inviscid and viscous problems. AIAA paper 88-0413, January 1988.
- [160] V. Venkatakrishnan. Convergence to steady state solutions of the Euler equations on unstructured grids with limiters. *AIAA paper 93-0880*, AIAA 31st Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1993.
- [161] G. Voronoi. Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques. Deuxieme memoire: Recherches sur les paralleloedres primitifs. *J. Reine Angew. Math.*, 134:198-287, 1908.
- [162] Y. Wada and M-S. Liou. A flux splitting scheme with high-resolution and robustness for discontinuities. *AIAA paper 94-0083*, AIAA 32nd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 1994.
- [163] N.P. Weatherill and C.A. Forsey. Grid generation and flow calculations for aircraft geometries. *J. Aircraft*, 22:855-860, 1985.
- [164] D.C. Wilcox. A half a century historical review of the  $k-\omega$  model. AIAA Paper 91-0615, AIAA 29th Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, January 1991.
- [165] F. Woodward. An improved method for the aerodynamic analysis of wing-body-tail configurations in subsonic and supersonic flow, Part 1 -- theory and application. NASA CR 2228 Pt. 1, May 1973.

- [166] P. Woodward and P. Colella. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comp. Phys.*, 54:115-173, 1984.
- [167] K. Xu, L. Martinelli, and A. Jameson. Gas-kinetic finite volume methods, flux-vector splitting and artificial diffusion. *Submitted to the J. Comp. Phys.*, 1994.
- [168] V. Yakhot and S.A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory. *J. Sci. Comp.*, 1:3-51, 1986.
- [169] H.C. Yee. On symmetric and upwind TVD schemes. In *Proc. 6th GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, Gottingen, September 1985.
- [170] S. Yoon and A. Jameson. Lower-upper Symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations. AIAA Paper 87-0600, AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting, Reno, January 1987.

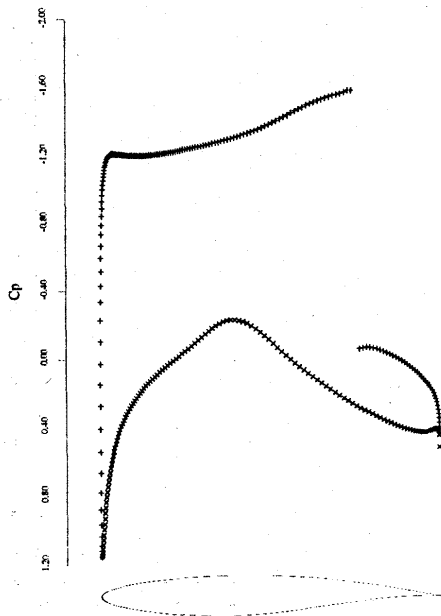


10a: RAE-2822 Airfoil

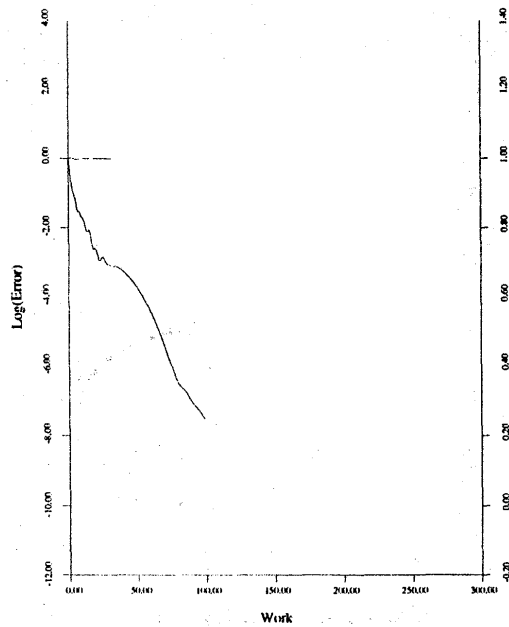


10b: NACA-0012 Airfoil

Figure 10: O-Topology Meshes, 160x32

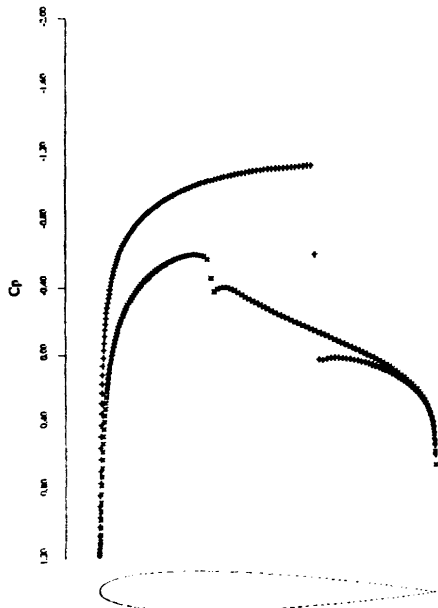


11a:  $C_p$  after 25 Cycles.  
 $C_l = 1.1312$ ,  $C_d = 0.0469$ .

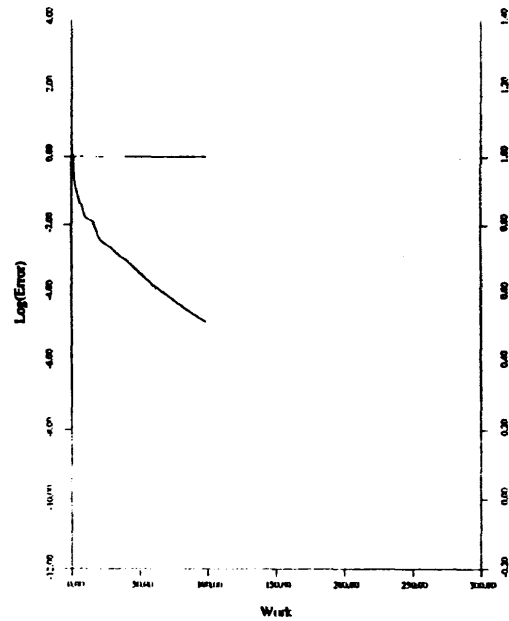


11b: Convergence.

Figure 11: RAE-2822 Airfoil at Mach 0.750 and  $\alpha = 3.0^\circ$   
 H-CUSP Scheme.

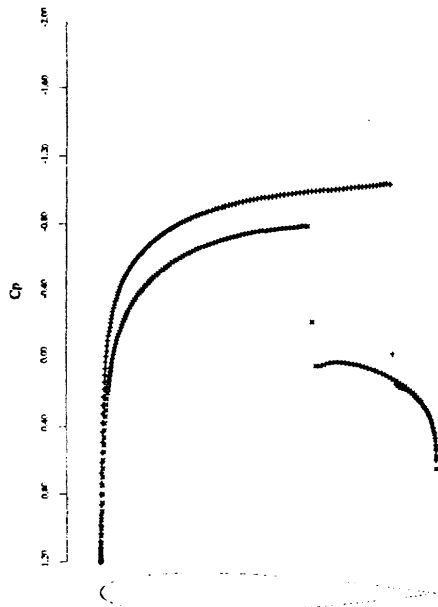


12a:  $C_p$  after 35 Cycles.  
 $C_l = 0.3654, C_d = 0.0232.$

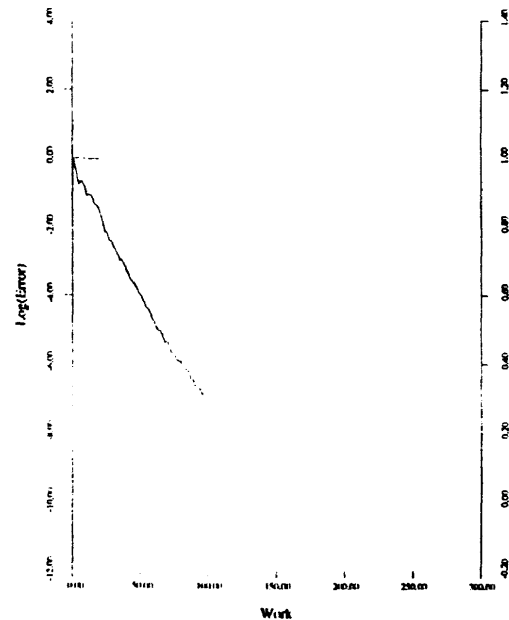


12b: Convergence.

Figure 12: NACA-0012 Airfoil at Mach 0.800 and  $\alpha = 1.25^\circ$   
 H-CUSP Scheme.



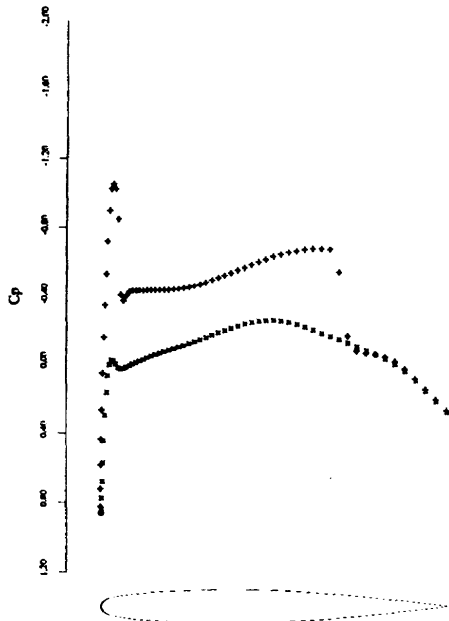
13a:  $C_p$  after 35 Cycles.  
 $C_l = 0.3861, C_d = 0.0582.$



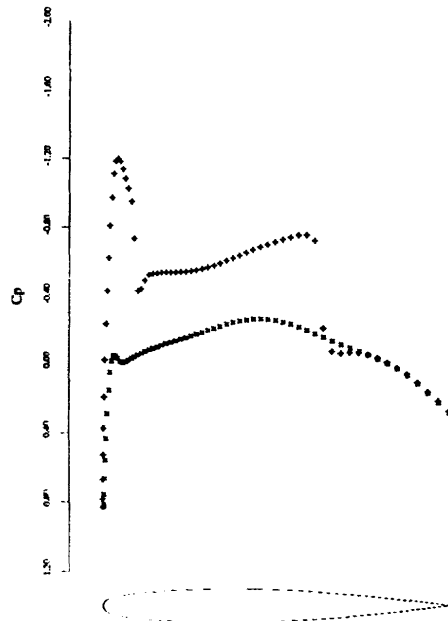
13b: Convergence.

Figure 13: NACA-0012 Airfoil at Mach 0.850 and  $\alpha = 1.0^\circ$   
 H-CUSP Scheme.

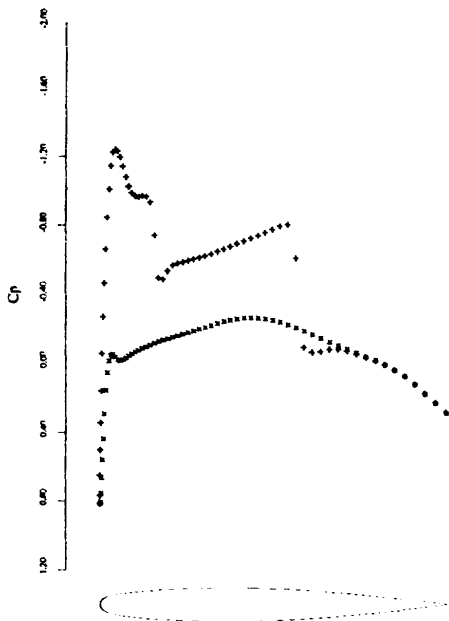




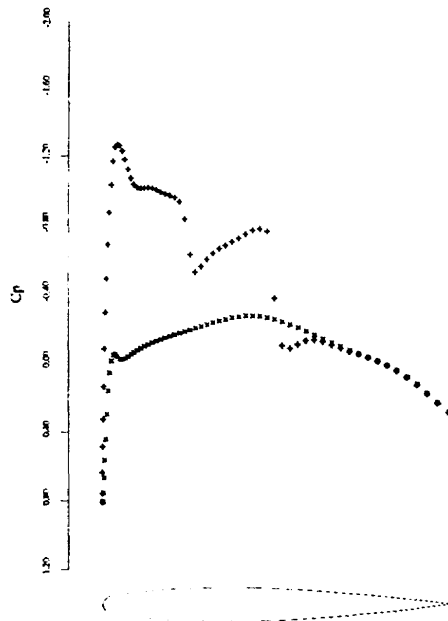
14a: 12.50% Span.  
 $C_l = 0.2933$ ,  $C_d = 0.0274$ .



14b: 31.25% Span.  
 $C_l = 0.3139$ ,  $C_d = 0.0159$ .



14c: 50.00% Span.  
 $C_l = 0.3262$ ,  $C_d = 0.0089$ .



14d: 68.75% Span.  
 $C_l = 0.3195$ ,  $C_d = 0.0026$ .

Figure 14: Onera M6 Wing.  
 Mach 0.840, Angle of Attack 3.06°, 192×32×48 Mesh.  
 $C_L = 0.3041$ ,  $C_D = 0.0131$ .  
 H-CUSP scheme.

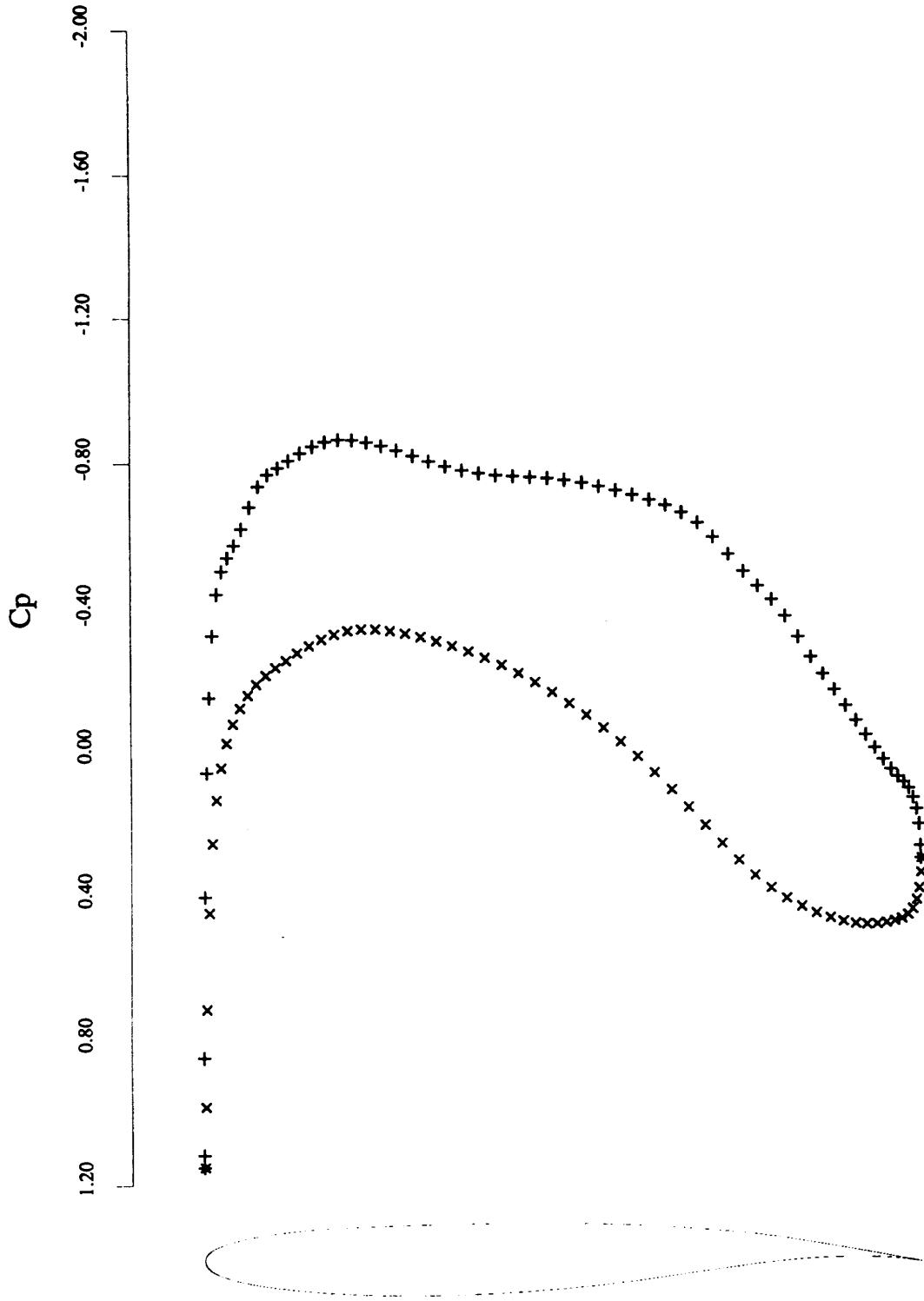
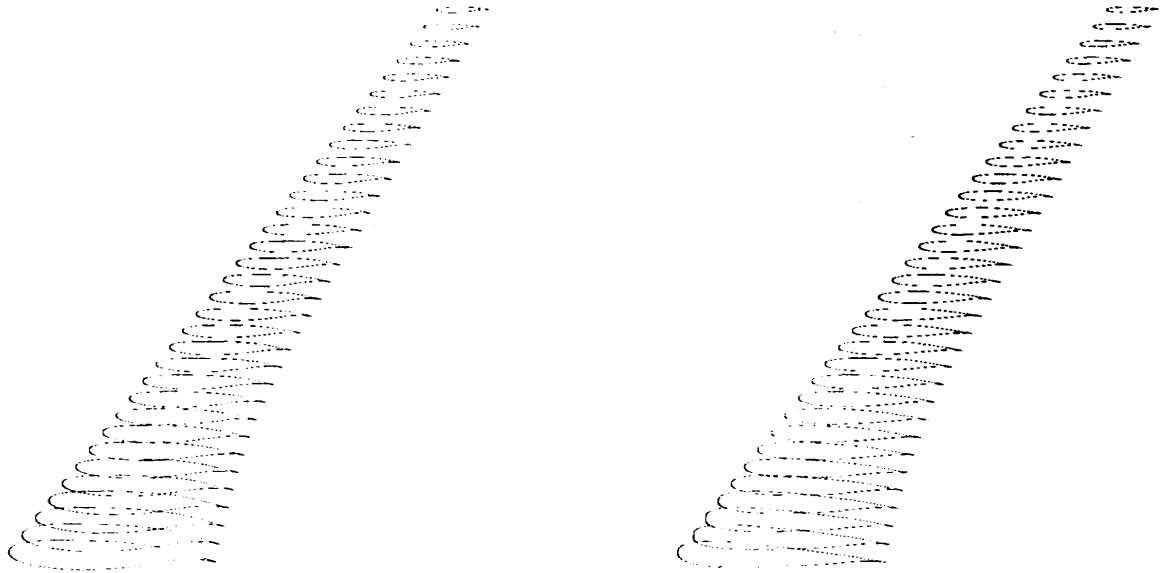


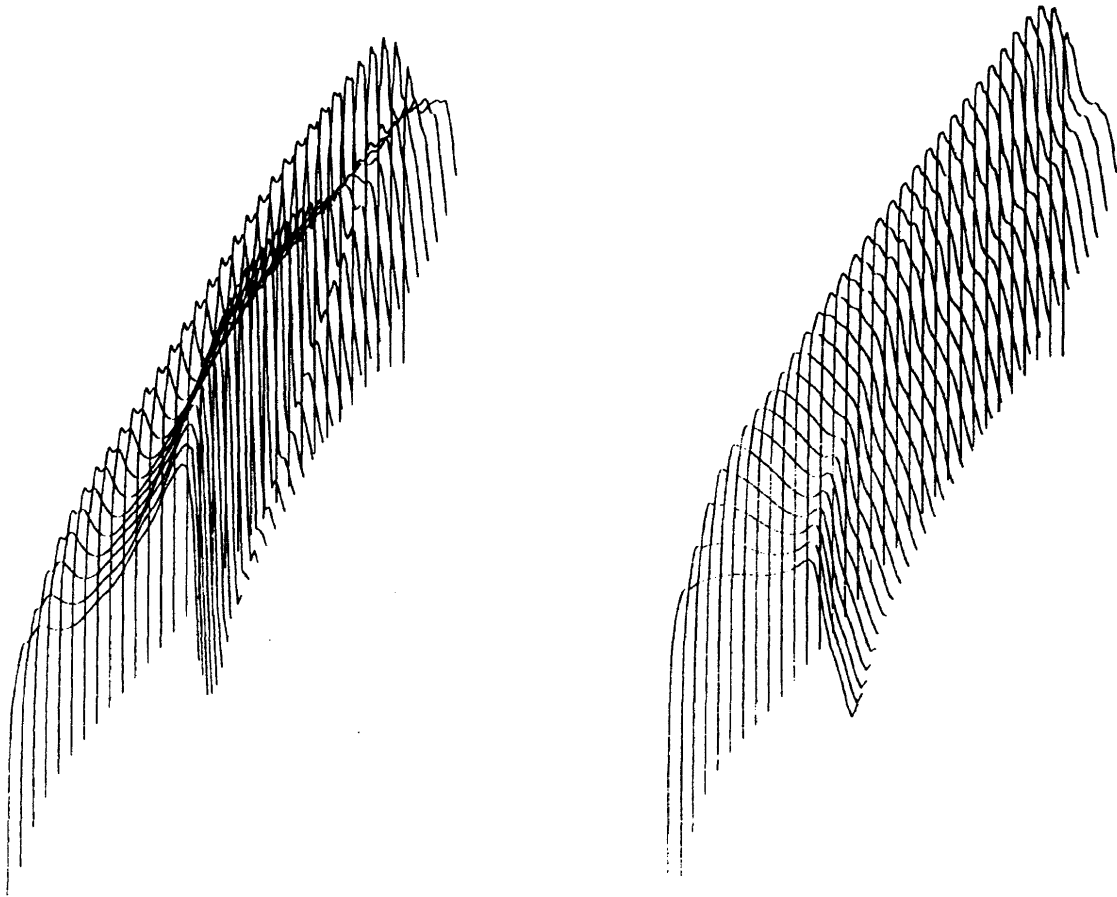
Figure 15: Initial Wing Section and Target Pressure Distribution



**16a: Initial Wing**  
 $C_l = 0.5000, C_d = 0.0209, \alpha = -1.349^\circ$

**16b: 10 Design Iterations**  
 $C_l = 0.5000, C_d = 0.0119, \alpha = 0.033^\circ$

**Figure 16: Lifting Design Case,  $M = 0.85$ , Fixed Lift Mode.  
Drag Reduction**



UPPER SURFACE PRESSURE

UPPER SURFACE PRESSURE

17a: Initial Wing

Lifting Design Case,  $M = 0.85$ , Fixed Lift Mode.

$C_L = 0.5000$ ,  $C_D = 0.0209$ ,  $\alpha = -1.349^\circ$

Drag Reduction

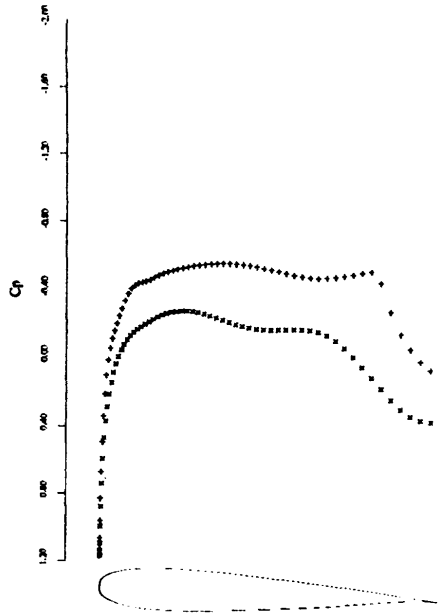
17b: 10 Design Iterations

Lifting Design Case,  $M = 0.85$ , Fixed Lift Mode.

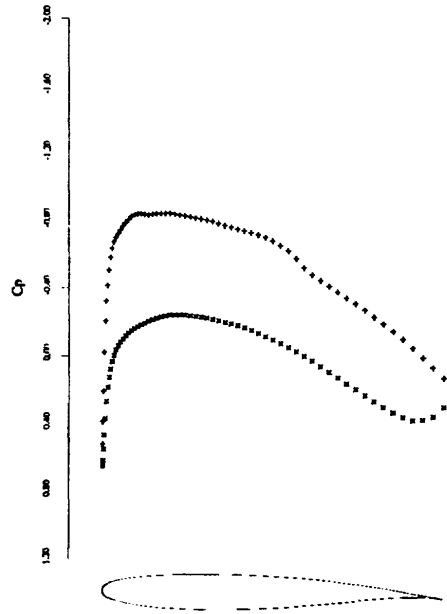
$C_L = 0.5000$ ,  $C_D = 0.0119$ ,  $\alpha = 0.033^\circ$

Drag Reduction

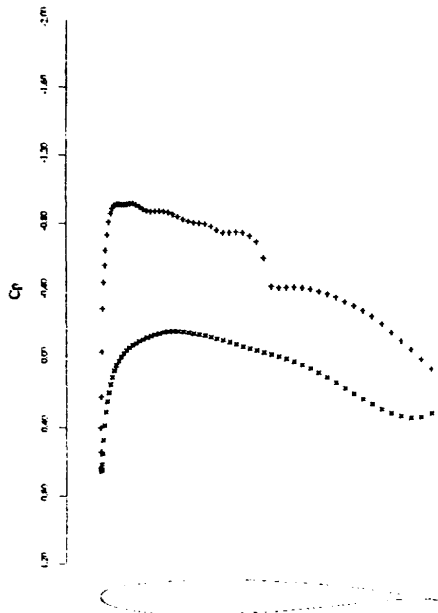
Figure 17: Lifting Design Case,  $M = 0.85$ , Fixed Lift Mode.  
Drag Reduction



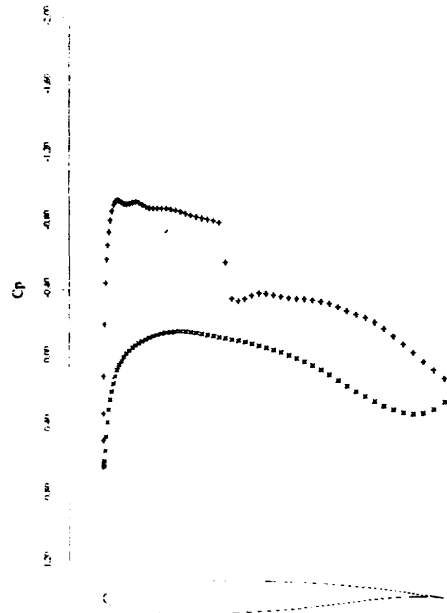
18a: span station  $z = 0.00$



18b: span station  $z = 0.312$



18c: span station  $z = 0.625$



18d: span station  $z = 0.937$

Figure 18: FLO67 check on redesigned wing.  
 $M = 0.85, C_L = 0.5051, C_D = 0.0099, \alpha = 0.0^\circ$ .



## 2

## 数値シミュレーションによる翼列2次流れ制御設計

大北洋治、 児玉秀和 (IHI)、 菊地一雄、 野崎理、 田村敦宏(航技研)

## Design of Secondary Flow Control Cascade Using Numerical Simulation

Y. Ohkita, H. Kodama (IHI), K. Kikuchi, O. Nozaki, A. Tamura (NAL)

## ABSTRACT

The trend of axial turbomachine design is toward higher blade loadings which places more emphasis on secondary flow effects and the associated losses.

Measurements of these complex three-dimensional flows in high speed compressor cascades has proven to be very difficult.

On the other hand, a sophisticated numerical simulation can predict these flows and the losses successfully.

This paper presents the results of a design which aim to reduce secondary flow and the losses at endwall regions of compressor stators, using numerical simulations.

A comparison with the results obtained in rig tests will be also presented.

## 1 まえがき

圧縮機の設計および性能解析を難しくしている要因の1つに翼列内の2次流れがある。高速圧縮機翼列の2次流れは、計測によりその機構を調べることは困難であるが、数値シミュレーションにより詳細を把握できることが明らかになった。1)

今回の研究ではこの成果を利用して、2次流れ制御設計に数値シミュレーションを応用する試みを行った。対象とした圧縮機静翼列では、2次流れにより特に翼端部で圧力損失が大きく、性能を低下させている。そこで2次流れが抑制されるような最適な翼列を、数値解析を用いて設計する。

また、翼列試験により、性能向上の実証を行い、設計法の有効性を確認する。

## 2 翼列およびその設計法

## (1) 翼列諸元

研究の対象とする圧縮機静翼の代表諸元を表1に示す。また図1に設計点における入口マッハ数、図2に流入角の径方向分布をそれぞれ示す。これらの分布は翼列試験における計測値を補間して求めたものであり、両翼端壁の値は内側の計測点の値から外挿している。

## (2) 2次流れ制御設計

改良翼では、両翼端部に対して2次流れ制御設計を施す。その他の部分は元の翼列と同じ翼型を用いる。

設計は以下の過程で行う。まず、2次流れ渦を低減させるように翼型のパラメタを変化させて翼を生成する。この翼について、3次元粘性流れ解析(次項で詳細を述べる)を行い、2次流れの減少及び圧力損失の低減について定量的に調査する。この過程を繰り返しながら最適な2次流れ制御翼列を設計する。

### 3 数値解析手法

#### (1) 解析コード

本解析コードは、航空宇宙技術研究所により、産業科学技術研究開発制度—超音速輸送機用推進システム研究開発—の中で開発されたものである。

基礎式は3次元レイノルズ平均ナビエーストークス方程式で、これを差分法により時間方向に解いて定常解を求める。計算スキームは近似因子分解を用いた陰解法で、乱流モデルはBALDWIN・LOMAXモデルである。 2)

#### (2) 計算格子

図3に計算に用いた格子の子午面(周方向中央位置)及び図4に翼間断面(径方向中央位置)を示す。H型の計算格子を用いている。格子数は、流れ方向に118点、径方向、周方向はともに61点ずつである。計算領域は、翼前縁の1翼弦長上流から、翼後縁の1翼弦長下流までである。

#### (3) 境界条件

入口境界では、全圧、全温、流入角(径方向、周方向の2方向)を与え、出口境界では静圧を与える。入口、出口ともにその他の物理量は内点から外挿する。

### 4 数値解析による翼列性能の比較

元の翼列と最適な2次流れ制御設計を行った翼列について数値シミュレーションを行い、比較した。解析は設計点の流れについて行われた。

#### (1) 2次流れ

図5に静翼流出角(後縁より50%翼弦長下流位置)の径方向分布を比較する。流出角は軸方向を基準とし、転向角の大きくなる方を負側とする。まずチップ側に注目すると、2次流れ制御翼列は元の翼列に比べ、壁面近傍での転向角の増大及び壁面からやや内側における転向角の急激な減少という2次流れに特徴的な流出角の偏向が緩和されている。一方ハブ側にゆくにつれ、元の翼列では流出角が徐々に負側にずれていく傾向があるが、2次流れ制御翼列では、より軸流出に近づいている。またハブ壁面近傍の転向角の増大も改善されている。

図6に翼前縁より80%翼弦長下流における、流れ方向に垂直な断面内の2次流れ速度ベクトルを示す。元の翼列ではチップ部の壁面と翼の負圧面との角に強い2次流れが生じていることがわかる。これに対して、2次流れ制御翼列では2次流れ成分が大幅に減少していることがわかる。

図7に静翼負圧面上の流線を比較する。2次流れ制御翼列ではチップ部の流線の偏向が小さくなっている。これも2次流れが抑制されていることを示している。

#### (2) 圧力損失

図8に後縁より90%翼弦長下流位置における圧力損失率の径方向分布を比較する。2次流れ制御翼列では、チップ部の圧力損失が大幅に減少している。一方、ハブ部では圧力損失の低減は見られない。これは、図1の入口流分布からわかるように、チップ部においては平均径付近からの広い範囲にわたり速度勾配があるために大きな2次流れが生じているのに対し、ハブ部では壁面境界層中のせん断により生じる比較的狭い範囲の2次流れであり、2次流れ制御設計の効果が小さいと考えられる。

図9に、流れ方向に垂直な断面内の圧力損失係数分布を示す。位置は図の左側より順に前縁より40%翼弦長下流、88%翼弦長下流、後縁より42%翼弦長下流、96%翼弦長下流である。元の翼列ではチップ部において高圧損領域が翼列内から徐々に増大していることがわかる。一方、2次流れ制御翼列では高圧損領域の生成が抑えられている。これは2次流れが抑制されることにより、2次流れ渦が散逸する際に生み出す混合圧力損失が低減されることによると考えられる。

### 5 試験方法

図10に環状翼列試験の概要を示す。元の翼と改良翼の2種類の静翼について試験する。上流の動翼は同一のものを用い、両静翼に対して同じ入口条件となるようにする。

前縁より1翼弦長上流において全圧、全温を、後縁より5翼弦長下流において全圧を計測している。また、十分上流において全体流量を計測している。

動翼の回転数を変えることにより、静翼の負荷を変えて、2種類の試験条件で試験を行った。

### 6 試験結果

図11に静翼列の圧力損失率を元の翼列と2次流れ制御翼列とで比較する。圧力損失は、静翼の5翼弦長下流における計測値を流れ方向に垂直な断面内で流量平均した全圧を用いて求めている。いずれの回転数においても2次流れ制御翼列の方が圧力損失が減少している。そして、静翼の負荷が上がるにつれて圧力損失の減少幅が大きくなることがわかった。



7 結論

(1) 数値シミュレーションを翼列2次流れ制御設計に応用し、最適な設計を行うことができた。

(2) また、試験においても、2次流れ制御翼列の性能向上が確認され、本設計手法の有効性が証明された。

8 参考文献

1) 大北ほか、3次元圧縮機静翼の粘性解析、平成5年ガスタービン秋期講演会

2) 野崎ほか、Development of Software of Three-Dimensional Cascade Flow Analysis for HYPR Aerodynamic Components、大型工業技術国際シンポジウム、超音速機用推進システム、(平成4年1-0月) 予稿集 P.143 - 150

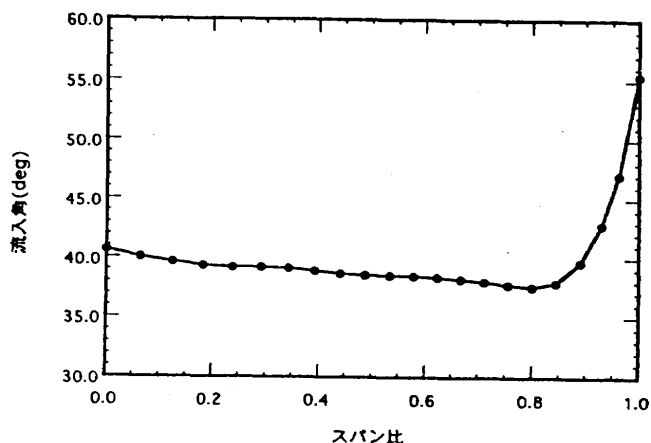


図2 流入角分布

設計流入角 (径方向中央位置)	38.5deg
設計流出角	0.0deg
縦横比	3.0
ピッチコード比 (径方向中央位置)	0.75

表1 翼諸元

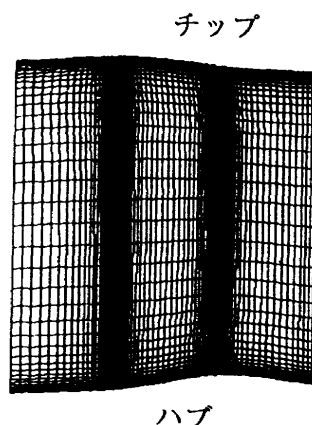


図3 格子 (子牛面)

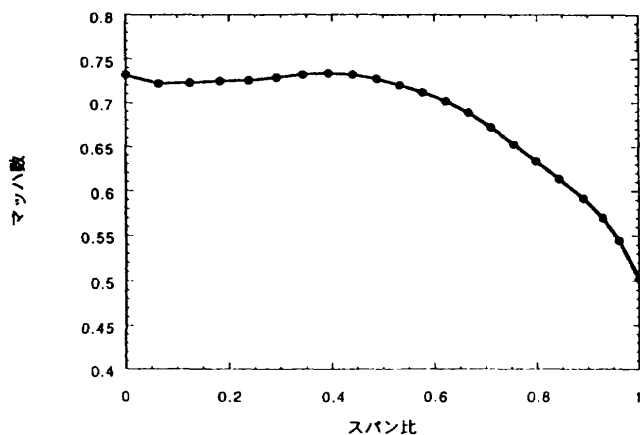


図1 入口マッハ数分布

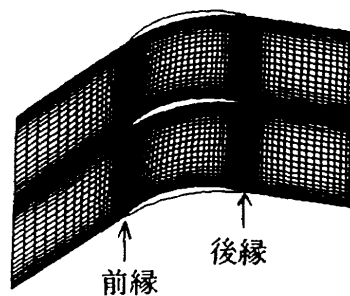


図4 格子 (翼間)

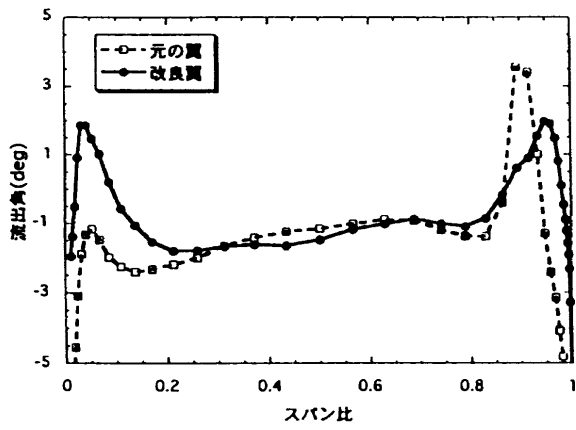
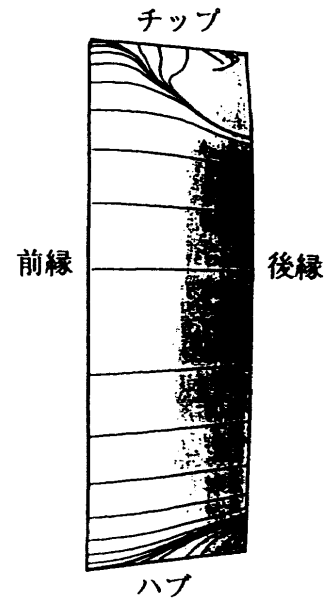
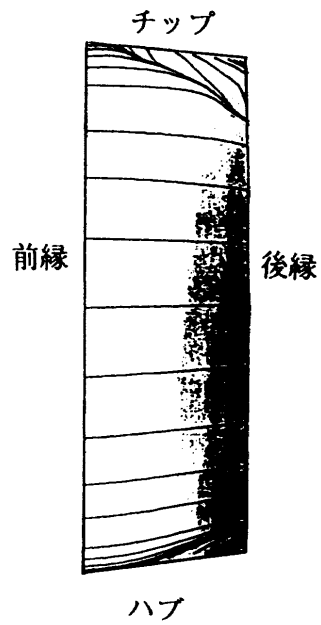


図5 流出角分布の比較



(元の翼)



(改良翼)

図7 翼面上流線

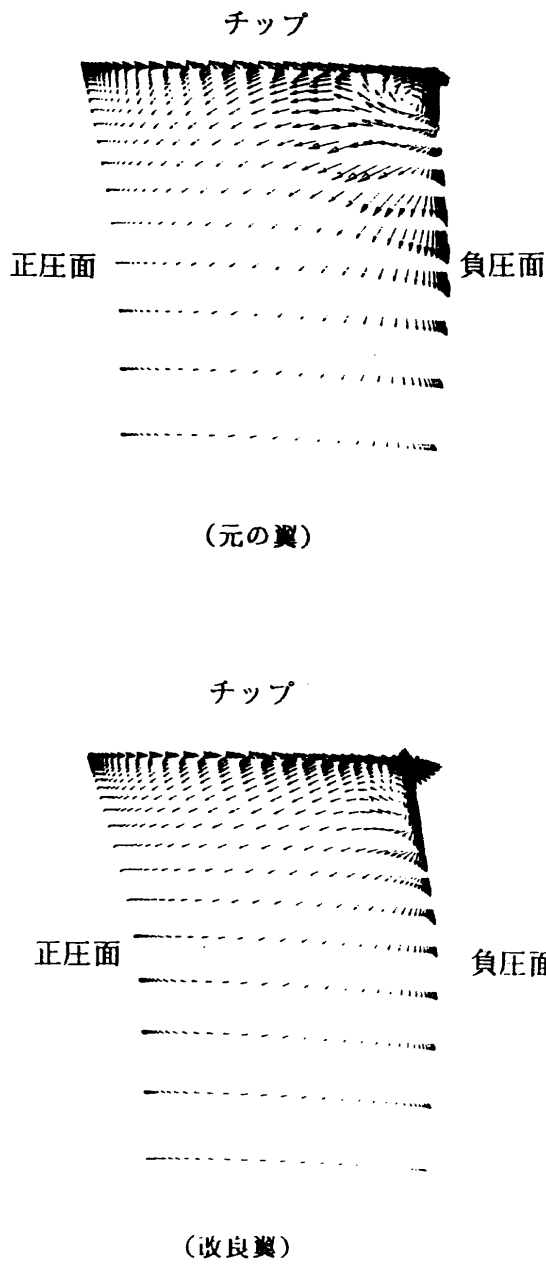


図6 2次流れベクトル

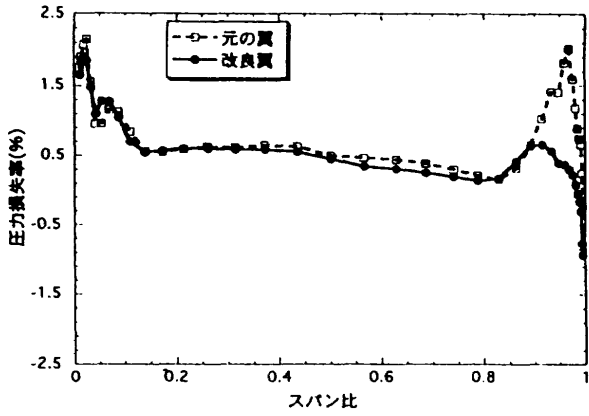


図8 圧力損失分布の比較

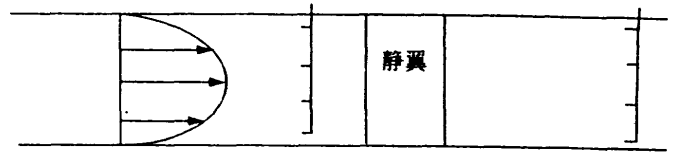


図10 試験法概要

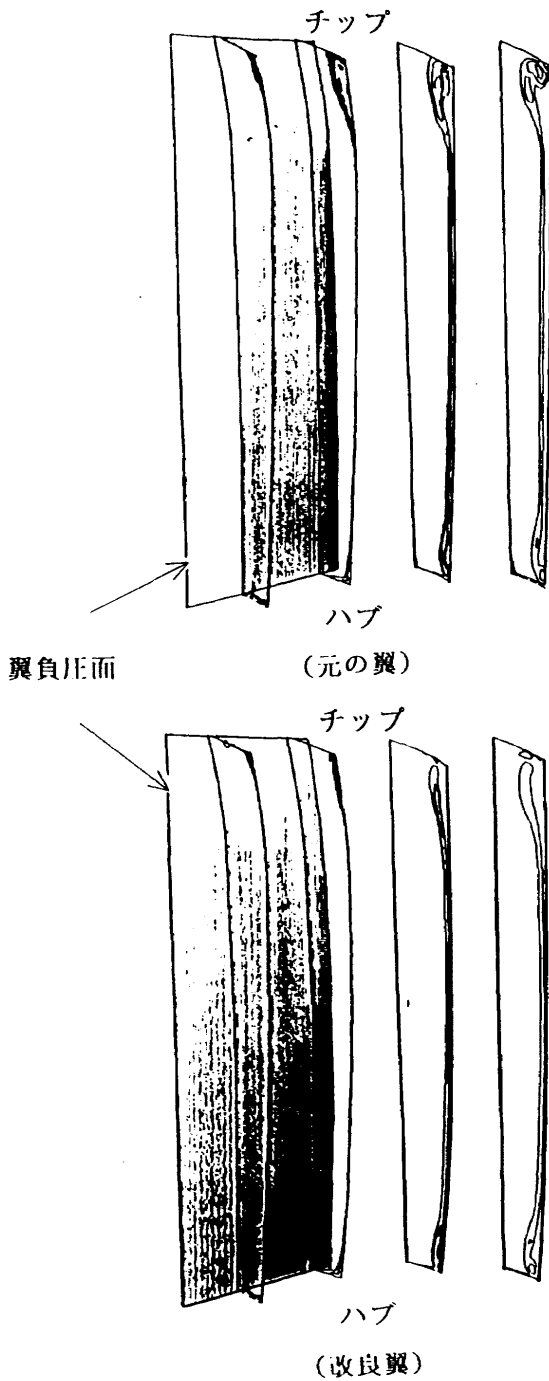


図9 流れ方向に垂直な断面内の圧力損失分布

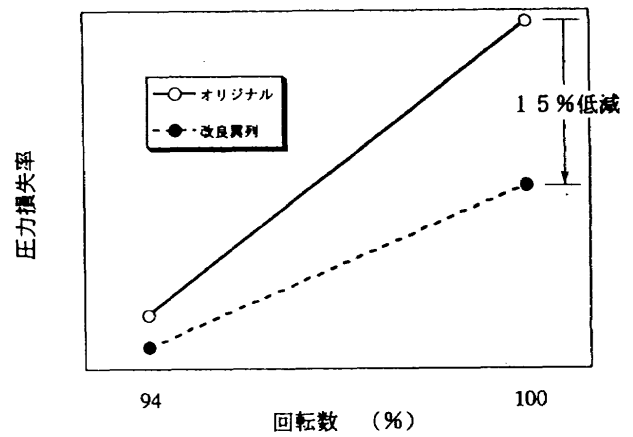


図11 試験結果 (圧力損失)



## 3次元翼列解析Euler codeの収束性に関する一考察

正木 大作\*      梶 昭次郎\*\*

A Study on the Convergence of a 3-D Euler code for Cascade Flow Calculation

by

Daisaku Masaki

Graduate School, University of Tokyo

and Shojiro Kaji

Department of Aeronautics and Astronautics, University of Tokyo

### ABSTRACT

A three-dimensional Euler code for cascade flow calculation has been developed to investigate unsteady flow phenomena such as rotating stall or surge. The time-dependent Euler solvers provide a single approach for subsonic, transonic and supersonic flows, and have inherent shock capturing capability. So they can provide important information of flow field such as shock location and pressure distribution. Moreover, they form a very essential part of N-S solvers, so it is important to develop a robust, accurate, and convergent Euler code. During this development, an insight which is thought to be important is obtained. There exists ambiguity about "Roe's averaging" on density, and it was found that if this density average is used in inappropriate ways, it is not only analytically incorrect, but can have detrimental effects on numerical simulations. The example for such a case is shown. Also, the result for a transonic compressor rotor cascade at its design point is presented.

#### 1 序論

遷音速ファン・圧縮機のnear-stall付近の流れ場をN-S方程式を用いて数値解析することにより旋回失速やサージの発生機構を究明することを目的として研究を進めて来ており、これまでは、その前段階として、3次元Euler codeの開発を行ってきた。非粘性流れは、粘性のある実際の流れとは異なるものの、N-S solverの重要な部分を構成するため、安定で且つ高精度なEuler-solverを開発することは極めて重要である。この度完全に残差の落ちた収束解を得ることができたが、この開発過程において、数値計算上かなり重要と思われる知見を得たので計算結果とともに報告する。

#### 2 密度に関するRoeの平均について

Roeの近似Riemann solverは、TVD schemeを多次元化する場合に用いられる方法の一つであるが、この方法では、各方向に1次元のRiemann問題を解く際に中間面での物理量を定義する必要がある。Roeの近似Riemann solverにおいては、この中間面での物理量を定義する場合に、不連続を正確に捉え得ることからRoeの平均が用いられる。ところが、密度に関するRoeの平均

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_L \rho_R} \quad (1)$$

には曖昧さが存在しており、もしこれが流束のヤコビアンの評価に誤って用いられると、Roeの"Property U"が物理的に満たされなくなる恐れがあるばかりか、数値的に有害に振る舞い得ることを見出した。

Roeの近似Riemann solverは、1次元Riemann問題を解く際に、非線形方程式

$$Q_x + F_x = 0 \quad (2)$$

を解くと、反復計算になり、必要とされる演算量の割にはそれに見合った精度が得られないために、局所線型化

\* 東京大学大学院

\*\* 東京大学工学部航空宇宙工学科

した式

$$Q_t + \tilde{A}Q_x = 0 \quad (3)$$

を解くもので、特に $\tilde{A}$ がある条件を満たしている場合には、線型化による計算効率の向上が得られるとともに、妥当な精度でoriginalの式の持つ非線形な振る舞いを充分に再現し得るというものである。Roeは、その $\tilde{A}$ の満たすべき条件として次の4つを挙げていて、"Property U"と命名している。それらは、

(I)  $\tilde{A}$ は $Q$ から $F$ への線型写像でなければならない

(II)  $Q_L, Q_R \rightarrow Q$ ならば $\tilde{A}(Q_L, Q_R) \rightarrow A$   
但し $A = \partial F / \partial Q$

(III)  $F_R - F_L = \tilde{A}(\bar{Q}) * (Q_R - Q_L)$

(IV)  $\tilde{A}$ の固有ベクトルは線型的に独立であること  
このうち最も重要なのは条件(III)で、これは $Q_L$ と $Q_R$ が互いにshockやcontact discontinuityをまたいで存在するとき、Rankine-Hugoniotの関係式を正確に満たし、shock speedを正しく算出することができ、結果としてこの場合にはRiemann問題を厳密に解くことができるという条件である。Roeは巧妙な方法でこの条件を満たす $\bar{Q}$ を算出して[1]、結果は次のようになる。

$$\bar{u} = \frac{u_L + Du_R}{1+D} \quad (4)$$

$$\bar{H} = \frac{H_L + DH_R}{1+D} \quad (5)$$

但し、 $D = \sqrt{\rho_R / \rho_L}$ 、 $u$ は速度、 $H$ はtotal enthalpy  
理想気体の場合、 $\bar{Q}$ は上式のように一意的に定まり、これらで閉じている。一方密度に関する平均は、Roe自身が次のようにして求めている[2]。

$$\Delta(\rho u) = \bar{\rho} \Delta u + \bar{u} \Delta \rho \quad (6)$$

(6)式に(4)式の $\bar{u}$ を代入することにより(1)式が求まる訳であるが、この導出法の示唆するところは、同式が本来恒等的に満たされているProperty Uの条件(III)の第一式を無理に変形したものから得られたものであること、および(6)式の $\bar{\rho}$ はヤコビアン $\tilde{A}$ からではなく、 $(Q_R - Q_L)$ の第二成分に由来するものであるということに注意しなければならない。従って、密度に関する"Roeの平均"は、その導出法からしてヤコビアンの評価に使用するには適していないことが判る。しかもこの密度に関するRoeの平均が、近似Riemann solverのヤコビアン $\tilde{A}$ の評価に用いられると、数值的に極めて有害に振る舞い得ることを見出した。一例として、密度に関する"Roeの平均"をPulliam & Chaussee,あるいはPulliam & Steger[3]系列の固有ベクトルとともに用いた計算結果の一例をfig.1に示す。遷音速圧縮機翼列に対する計算例で、tip付近の密度場であるが、もはや流れ場はchaoticである。この場合fig.2に示すとおり、圧力場は一見まともに見えている。むしろこの例では、残差は全く落ちていない。

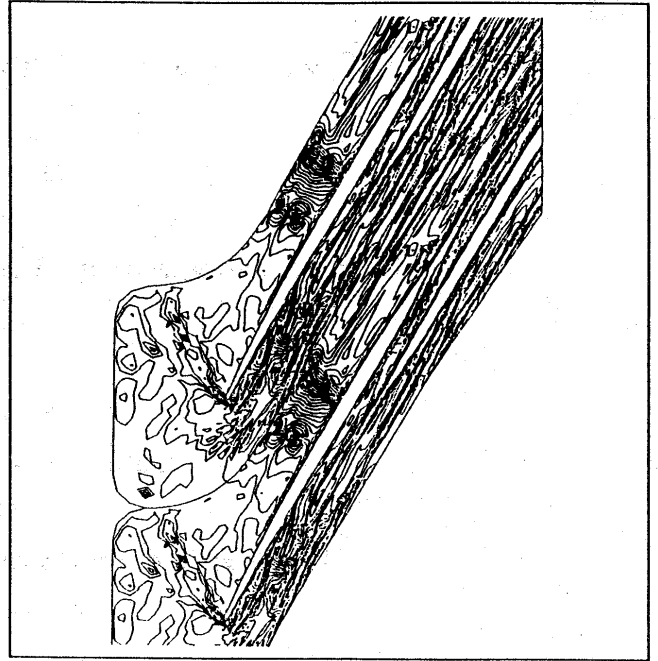


fig.1 density contours

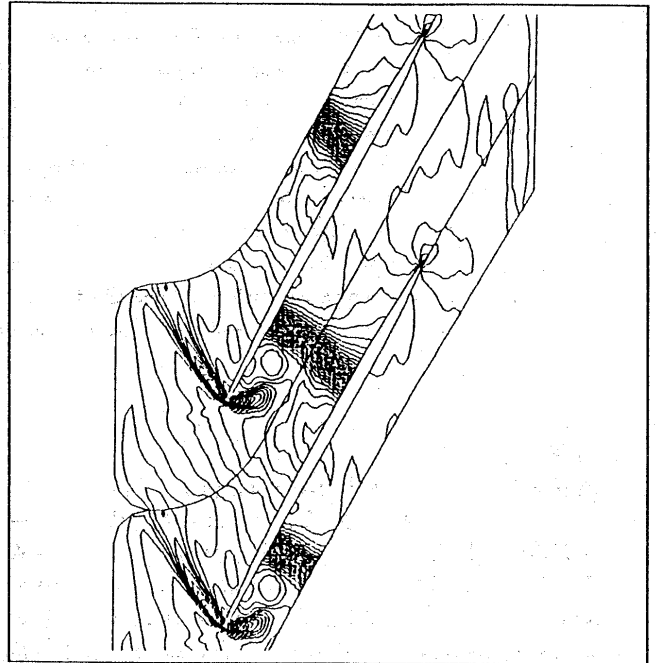


fig.2 static pressure contours

またhub付近に向かっても、程度の差はあれ同様な結果となってしまっている。このような非物理的な解を生ずる原因は、密度に関する"Roeの平均"をヤコビアンの評価に用いることにより、その固有ベクトルのscalingを崩してしまい、その結果非物理的な波の強さを算出してしまふことにある。

近似Riemann solverに於いては、特性量

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} \Delta \mathbf{Q} \quad (7)$$

を求め、これにlimiterを作用させているが、これは物理的には、波の強さ、即ち各特性波に沿って一定の値を取るRiemann不変量(の全微分)を意味している。もし密度に関する"Roeの平均"が、例えばPulliam-Steger, Pulliam-Chaussee系列の固有ベクトルとともに用いられると、次のような波の強さを算出する。

$$\alpha_1 = \tilde{\xi}_x (\bar{c}^2 \Delta \rho - \Delta p) / \bar{c}^2 + \tilde{\xi}_x \{ \Delta(\rho v) - \bar{v} \Delta \rho \} / \bar{\rho} - \tilde{\xi}_y \{ \Delta(\rho w) - \bar{w} \Delta \rho \} / \bar{\rho} \quad (8)$$

第一項はエントロピー波に対するRiemann不変量(の全微分)の差分近似になっていることが判る。問題となるのは密度に関する"Roeの平均"を積極的に用いたことに伴って出てくる第二項および第三項である。第一項が密度のオーダーであるのに対し、第二項と第三項は速度のオーダーになってしまっていて、このような波の強さが物理的に受け入れられないのは明らかである。なぜこのような波の強さを算出するかというとscalingの崩れた固有ベクトル

$$\tilde{\xi}_x v + \tilde{\xi}_z \rho \quad (9)$$

etc.を用いているからであるが、一方固有ベクトルのscalingを崩さずに密度に関する"Roeの平均"を用いようとすると、各固有ベクトルの係数として用いるしかなく、その場合定数と区別できないので、(1)式の形は解析的意味を失い、よって又この時密度の平均の定義に他のいかなる式を用いても同等に演算可能である。結局これは無駄な演算量を増やしているに過ぎない。

以上の議論から、理想気体の場合、密度に対してはRoeの平均はProperty Uからは導出され得ず、また無理に定義したところでヤコビアン $\hat{A}$ の評価には使い途がないものであることが判る。ここで注意しなければならないのは、前述のような非物理的な波の強さが算出されていても、無次元化して計算していると、見かけ上計算が通ってしまうことがあるということである。

例として、(9)式を無次元化すると、

$$\tilde{\xi}_x \dot{v} + \tilde{\xi}_z \dot{\rho} \quad (10)$$

但し、( )は無次元量を表す。

これを再び有次元に戻すと

$$\tilde{\xi}_x v + \tilde{\xi}_z \rho (v_{ref} / \rho_{ref}) \quad (11)$$

但し、( )<sub>ref</sub>はreference値を示す。

つまり、無次元化して計算が行われる場合、 $v_{ref} / \rho_{ref}$ のようなscaling factorが自動的に掛かり、見かけ上のオーダーが釣り合ってしまうことを示している。むしろこのような調節は物理的に意味のあるものではなく、また $\rho(v_{ref} / \rho_{ref})$ のような量が流れ場のどのような状態量を表しているのかも不明であり、このような量を用いて計算された波の強さが正しく流れ場を反映していないのは明らかである。また、計算が通ったとしても数値粘性項が正しく評価されていないわけであるから、安定性や収束性に影響を及ぼしている可能性は大きい。

### 3 支配方程式

支配方程式は、 $x$ 軸まわりに角速度 $\Omega$ で回転するデカルト座標系で表されたEuler方程式を保存型で一般曲線座標系に変換すると以下ようになる。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \hat{T}$$

$\hat{Q}$ は保存変数、 $\hat{E}$ ,  $\hat{F}$ および $\hat{G}$ はそれぞれ $\xi$ -,  $\eta$ -および $\zeta$ -方向の流束ベクトルを表し、 $\hat{T}$ は回転によって生ずる生成項を示す。

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ (e + p)U - \xi_x p \end{bmatrix}$$

$$\hat{T} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \rho w \\ -\Omega \rho v \\ 0 \end{bmatrix}$$

但し

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w, \xi_t = \Omega(\xi_y z - \xi_z y)$$

また、静圧は

$$p = (\gamma - 1) [e - .5\rho(u^2 + v^2 + w^2)]$$

$\hat{F}$ ,  $\hat{G}$ も $\hat{E}$ ,  $U$ 中の $\xi$ をそれぞれ $\eta$ ,  $\zeta$ に変換することにより同様に得られる。

$\rho$ は密度、 $u, v, w$ はデカルト座標系での速度成分、 $e$ は全内部エネルギーである。

メトリックや、座標変換のヤコビアンは全て有限体積的に評価されている。

### 4 計算格子

本研究においては、leading edgeにおいて高い解像度の得られるC型格子を用いた (fig.3)。C型格子は、StegerとSorensonによって開発された手法[4]と同様の方法を用いて解析的に作成されている。翼面上では直交性と細かな格子間隔が得られるように、また周期境界とwakecut境界では上下面で格子が滑らかに接続し、且つ適度な格子間隔が得られるよう制御されている。このようにして作成された2次元格子を半径方向にstackingすることにより3次元格子を作成した。格子点数は155×21×19である。

## 5 解析手法

数値解法としては近似Riemann solverである、Harten-Yeeのnon-MUSCL型Implicit Upwind TVD Scheme[5]を用いている。

右辺の数値流束関数は、有限体積法的に評価されていて、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{E}_{j+1/2,k,l} = & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} (Q_{j,k,l} + Q_{j+1,k,l}) + \left( \frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} (E_{j,k,l} + E_{j+1,k,l}) \right. \\ & + \left( \frac{\xi_y}{J} \right)_{j+1/2} (F_{j,k,l} + F_{j+1,k,l}) + \left( \frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} (G_{j,k,l} + G_{j+1,k,l}) \\ & \left. + \frac{1}{J_{j+1/2}} R_{j+1/2} \Phi_{j+1/2} \right] \end{aligned}$$

上式の数値粘性項  $R_{j+1/2} \Phi_{j+1/2}$  には前述の考察に基づいてRoeの平均を用いている。

$\Phi_{j+1/2}$  はupwind型で、

$$\phi'_{j+1/2} = \frac{1}{2} \psi(a'_{j+1/2})(g'_j + g'_{j+1}) - \psi(a'_{j+1/2} + \gamma'_{j+1/2}) \alpha'_{j+1/2}$$

ここで、

$$\gamma'_{j+1/2} = \frac{1}{2} \psi(a'_{j+1/2}) \begin{cases} (g'_{j+1} - g'_j) / \alpha'_{j+1/2} & \alpha'_{j+1/2} \neq 0 \\ 0 & \alpha'_{j+1/2} = 0 \end{cases}$$

また、 $\psi$  はentropy correction functionで、

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \delta_1 \\ z^2 + \delta_1^2 & |z| < \delta_1 \\ 2\delta_1 & \end{cases}$$

本計算では、流束制限関数としては van Leer の Monotonized Central Difference Algorithmを用いた。

$$g'_j = \min \text{mod}(2\alpha'_{j+1/2}, 2\alpha'_{j-1/2}, 1/2(\alpha'_{j+1/2} + \alpha'_{j-1/2}))$$

$\alpha'_{j+1/2}$  は前述の特性変数で

$$\alpha'_{j+1/2} = \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} (Q'_{j+1} - Q'_j)$$

一方、左辺はConservative Linearized Implicit Formを用いており、

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{I} + \frac{\lambda^{\xi} \theta}{1+\omega} (\mathbf{H}_{j+1/2,k,l}^{\xi} - \mathbf{H}_{j-1/2,k,l}^{\xi}) \right] \mathbf{D}^{**} \\ & - \frac{\lambda^{\xi}}{1+\omega} (\bar{\mathbf{E}}_{j+1/2,k,l}^n - \bar{\mathbf{E}}_{j-1/2,k,l}^n) - \frac{\lambda^{\eta}}{1+\omega} (\bar{\mathbf{F}}_{j,k+1/2,l}^n - \bar{\mathbf{F}}_{j,k-1/2,l}^n) \\ & - \frac{\lambda^{\zeta}}{1+\omega} (\bar{\mathbf{G}}_{j,k,l+1/2}^n - \bar{\mathbf{G}}_{j,k,l-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{1+\omega} \hat{\mathbf{T}}_{j,k,l}^n + \frac{\omega}{1+\omega} \Delta \hat{\mathbf{Q}}_{j,k,l}^{n+1} \\ & \left[ \mathbf{I} + \frac{\lambda^{\eta} \theta}{1+\omega} (\mathbf{H}_{j,k+1/2,l}^{\eta} - \mathbf{H}_{j,k-1/2,l}^{\eta}) \right] \mathbf{D}^* - \mathbf{D}^{**} \\ & \left[ \mathbf{I} + \frac{\lambda^{\zeta} \theta}{1+\omega} (\mathbf{H}_{j,k,l+1/2}^{\zeta} - \mathbf{H}_{j,k,l-1/2}^{\zeta}) \right] \mathbf{D}^* - \mathbf{D}^* \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}^n = \Delta \hat{\mathbf{Q}}^n ; \hat{\mathbf{Q}}^{n+1} = \hat{\mathbf{Q}}^n + \mathbf{D}^n$$

ここで、 $\lambda^{\xi} = \Delta t / \Delta \xi$ , etcを表す。

従って3組の3重対角行列群を反転することになる。本計算では非粘性解析ということで、backward Euler時間差分( $\theta = 1, \omega = 0$ )が用いられている。ここで、

$$\mathbf{H}_{j+1/2,k,l}^{\xi} \mathbf{D}^{**} = 1/2 \left[ \hat{\mathbf{A}}_{j+1,k,l} \mathbf{D}_{j+1,k,l}^{**} + \hat{\mathbf{A}}_{j,k,l} \mathbf{D}_{j,k,l}^{**} - \Omega_{j+1/2,k,l}^{\xi} \mathbf{D}^{**} \right]$$

左辺も右辺と同様有限体積的に評価されており、

$$\hat{\mathbf{A}}_{j,k,l} = \left[ \left( \frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} + \left( \frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} A_{j,k,l} + \left( \frac{\xi_y}{J} \right)_{j+1/2} B_{j,k,l} + \left( \frac{\xi_z}{J} \right)_{j+1/2} C_{j,k,l} \right]_{j,k,l}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{j+1,k,l} = \left[ \left( \frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} + \left( \frac{\xi_x}{J} \right)_{j+1/2} A_{j+1,k,l} + \left( \frac{\xi_y}{J} \right)_{j+1/2} B_{j+1,k,l} + \left( \frac{\xi_z}{J} \right)_{j+1/2} C_{j+1,k,l} \right]_{j+1,k,l}$$

また差分演算子  $\Omega_{j+1/2,k,l}^{\xi}$  に関しては、diagonal formを用いた。

$$\Omega_{j+1/2,k,l}^{\xi} \mathbf{D}^{**} = \text{diag} \left[ \max_i \psi(a'_{j+1/2}) \right] (\mathbf{D}_{j+1,k,l}^{**} - \mathbf{D}_{j,k,l}^{**})$$

## 5 境界条件及び初期条件

流入境界条件としては、tip付近でのunique incidenceを考慮して、全温、全圧、周方向速度、半径方向速度を規定し、上流方向に向かうRiemann不変量

$$R^- = q - \frac{2c}{\gamma - 1}$$

ただし、 $q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$

を外挿している。流出境界では静圧を各断面で規定し、密度及び速度を線形外挿している。

壁面境界では、速度に関してはslip条件、静圧はnormal momentum equationより算出し、密度は温度条件より求めている。周期境界及びwakecut境界は上下の物理量を平均して求めている。初期条件としては、inlet hubの一樣流からCFL = 3、local time stepを用いてimpulsive startしている。

## 6 計算結果

計算対象は単段の高負荷遷音速圧縮機動翼列である。主要諸元を表-1に示す。相対流入マッハ数はtipで1.3, hubで0.9となっている。設計点状態での計算結果をfig.4~6に示す。それぞれ hub, mid span, tipでの密度分布 ( $\Delta \rho = 0.05 [kg/m^3]$ ) を表している。fig.1との差は一目瞭然である。hubでは流入マッハ数が亜音速であるため衝撃波は見られず、翼間でスムーズに減速している。mid spanでは流入マッハ数が音速を超えるため、bow shockが見られ、なお且つ翼間に弱いpassage normal shockが現れ始めていて、multi-shock structureを鮮明に捉えている。tip付近では強いpassage normal shockが生じている。この場合、skewな格子の中を斜めに衝撃波が横切ってくるにも関わらず、4点以内で衝撃波を捉えている。この計算の場合の収束履歴をfig.7に示す。計算対象が遷音速の流れ場で、複雑な3次元衝撃波構造を有すること、かなり複雑な3次元格子にTVD schemeが適用されていることを考えれば、残差の落ちは単調で速く、3次元計算の収束の一つの目安である残差の3桁の落ちは簡単に達成されており、またいわゆる“flattening out”の気配は見られない。



7 結論

- 密度に関する”Roeの平均”はRoeの”Property U”から導出されるものではなく、従ってヤコビアンの評価に用いるには適していない。
- 密度に関する”Roeの平均”をヤコビアンに無理に(あるいは積極的に)用いると非物理的な波の強さ(Riemann不変量の全微分)が生じ、正しい解が得られない。
- また、そのような非物理的な波の強さを算出しても、無次元化して計算する場合、物理的に根拠のないscalingの調節が自動的に行われ、見かけ上計算が通ってしまうことがある。
- Roeの近似Riemann solverにおいては、流束のヤコビアン固有ベクトルは全く任意に選んで良いという訳ではない。
- Harten-Yeeの non-MUSCL 型 implicit upwind TVD schemeは3次元回転翼列計算に安定に適用でき、翼列内の複雑な遷音速の3次元衝撃波構造が鮮明に捉えられ、且つ十分な残差の落ちとmonotoneな収束性が得られた。

8 謝辞

本研究は東京大学と航技研の共同研究により航技研のNWTを用いて行われたものである。共同研究の幹事と第一著者の研修を担当された原動機部坂田公夫室長に感謝の意を表します。  
また翼型データを提供して下さった川崎重工株式会社にも感謝の意を表します。

表-1 圧縮機主要諸元

動翼枚数	24
回転数	49000rpm
空気流量	2.54kg/sec
圧力比	1.7

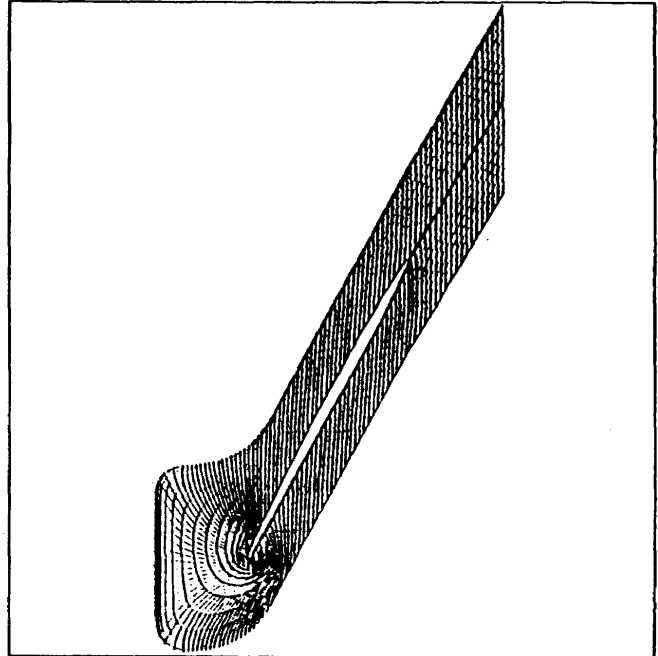


fig.3 C-type grid ( tip section )

Reference

[1]Roe, P.L.:Approximate Riemann Solvers, Parameter vectors,and Difference Schemes,J.Comp.Phys, 43, 357 -372 (1981)  
 [2]Roe, P.L.:Characteristic-based Schemes for the Euler Equations,Annual Review of Fluid Mechanics, 18,337-365 (1986)  
 [3]Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S.:A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm, J.Comp.Phys, 39, 372-397 (1981)  
 [4]Steger, J.L. and Sorenson, R.L.:Automatic Mesh-point Clustering near a Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations, J.Comp.Phys, 33, 405-410 (1979)  
 [5]Yee, H.C. , Klopfer, G.H. and Montagne, J.-L.:High-Resolution Shock-capturing Scheme for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows,J.Comp.Phys, 88, 31-61 (1990)

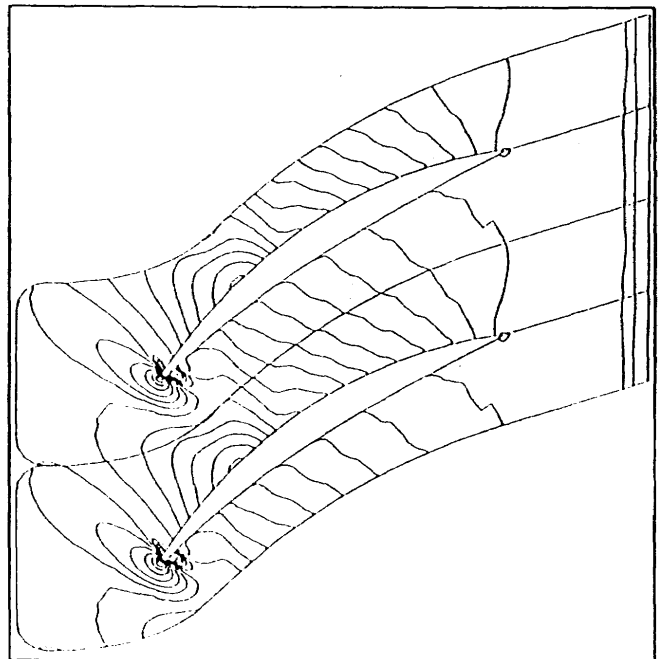


fig.4 density contours at hub

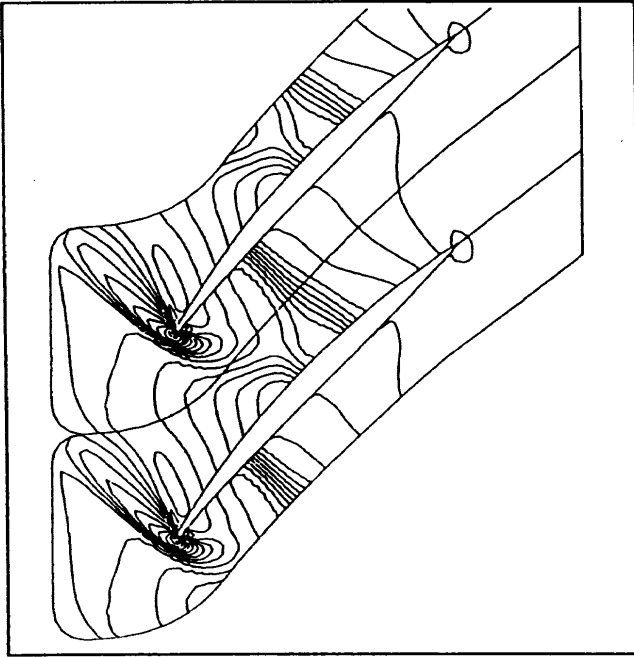


fig.5 density contours at mid span

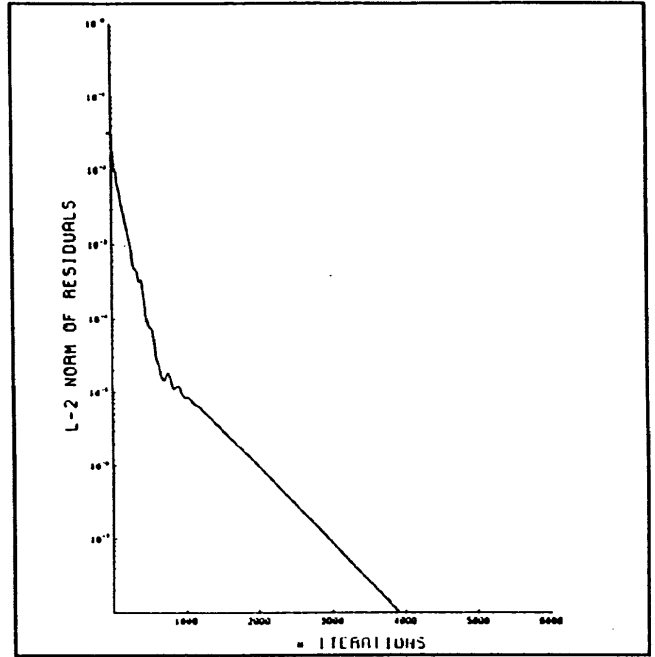


fig.7 convergence history

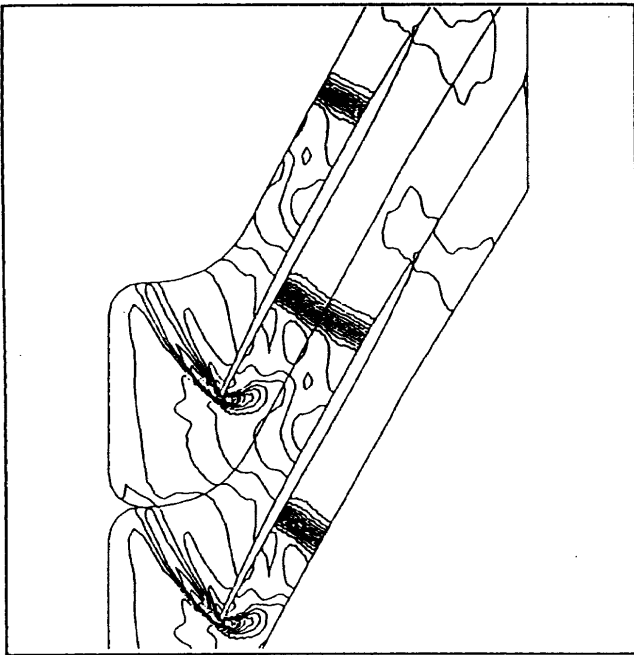


fig.6 density contours at tip

# DSMC法による燃焼反応流解析

○小幡茂男（東大院）、長島利夫（東大工）

## DSMC Method applied for Reacting Gas Flows

Shigeo Obata and Toshio Nagashima (Univ. of Tokyo)

### Abstract

A new reaction molecule model has been proposed for analyzing ignition process in supersonic shear flows. This model called Internal Energy (IE) Model takes into account the effects of internal (rotational) energy upon the reaction occurrence and treats it in the same way as the translation energy in reaction collision process. IE model can simulate reaction process precisely by many elementary reactions and is successful in clarifying the details of weak combustion in two dimensional parallel shear flows between supersonic air and sonic hydrogen. The influence of modified plasma (atomic oxygen) flow upon ignition in the supersonic shear flows has been also discussed.

### 1. 序論

スクラムジェットエンジン燃焼器内部の流動・燃焼形態の中でも、超音速空気流中へ気体燃料を平行に噴射するときに形成される超音速剪断流は、混合に伴う全圧損失を小さく抑ええることが出来る利点を持ち、超音速燃焼を実現させる基本流動形態として有望である。この流動形態においては、空気と燃料の混合開始直後の状態が下流部における混合・燃焼の進行に及ぼす影響は強く、そのために本研究は現象の初期過程を明らかにする必要があると考え、拡散・反応の初期過程を支配する微小領域を対象に、気体分子運動論とボルツマン方程式に基づくDSMC法による2次元超音速剪断流の数値解析を行った。

### 2. 反応分子モデル

流れ場を解くためのDSMC法にはModified Null-Collision法<sup>1</sup>、考慮した化学種8種には表Iの物性値を持った剛体球分子モデルと、Borgnakke-Larsenの内部自由度モデル<sup>2</sup>を用いているが、微細な燃焼反応の解析を行うための反応分子モデルを必要とする。

熱平衡状態にある自由度 $\chi$ の剛体球分子群の衝突頻度 $v_c$ は、衝突断面積 $\sigma_c$ と衝突分子の相対速度 $g$ に関するマクスウェル分布 $f^{(3)}$ を用いて(1)式で表現される。そこで、反応断面積 $\sigma_r$ を(2)式の様に未定定数 $j$ と $\sigma_{ref}$ を用いて定義し、衝突頻度式の $\sigma_c$ に代入して積分すると、(3)式のアレーニウス型の反応速度定数と同型の式が得られる。係数値の比較から $j$ と $\sigma_{ref}$ を決定でき、反応断面積

$$\begin{aligned} v_c &= \int_0^\infty (\sigma_c g) f_{rms}^{(3)}(g) dg & : g = |v_1 - v_2| \\ &= \int_0^\infty \sigma_c f_{rms}^{(3)}(e_g) de_g & : e_g = \frac{1}{2} \mu g^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} \left( \frac{1}{k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \sigma_c e_g \exp\left(-\frac{e_g}{k_B T}\right) de_g$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{ref} \left( \frac{e_a}{e_g} \right) \left( \frac{e_g - e_a}{e_a} \right)^{j+1} & : e_g > e_a \\ \sigma_r &= 0 & : e_g \leq e_a \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} v_r &= \int_0^\infty \sigma_r f_{rms}^{(3)}(e_g) de_g \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi \mu}} \Gamma(j+2) \sigma_{ref} \frac{(k_B T)^{j-\frac{1}{2}}}{e_a^{j-1}} \exp\left(-\frac{e_a}{k_B T}\right) \\ &\approx A T^n \exp\left(-\frac{e_a}{k_B T}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

積値が定まる。反応確率 $P_r = \sigma_r / \sigma_c$ に応じた衝突分子の化学種・化学エネルギーの変化により化学反応を表現出来る。一般的に良く用いられているこのモデル<sup>3</sup>は、衝突分子対の相対運動エネルギー (Kinetic Energy)  $e_g$ のみを考慮するので、KEモデルと呼ぶことにする。KEモデルでは相対運動エネルギーのみが活性化エネルギーとの大小を判断されるため、巨大な活性化エネルギー値を持つ吸熱反応への適応は困難で、本研究で対象とする微弱な燃焼反応解析には不利である。

$$\sigma_r = \sigma_{ref} \left(\frac{e_a}{e_g}\right) \left(\frac{e_a}{e_{i_1}}\right)^{\frac{\chi_1}{2}-1} \left(\frac{e_a}{e_{i_2}}\right)^{\frac{\chi_2}{2}-1} \left(\frac{e_a}{e_g+e_{i_1}+e_{i_2}}\right)^2 \left(\frac{e_g+e_{i_1}+e_{i_2}-e_a}{e_a}\right)^{j+1} \quad : (e_g+e_{i_1}+e_{i_2}) > e_a \quad (4)$$

$$\sigma_r = 0 \quad : (e_g+e_{i_1}+e_{i_2}) \leq e_a$$

KEモデルの欠点を解消するため、衝突分子対の内部エネルギー (Internal Energy)  $e_i$  も  $e_g$  と共に反応に寄与する新しい反応分子モデルを提案・導入する。(4)式、(5)式で定義されるこのモデルをIEモデルと呼ぶ。

$$v_r = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_r f_{trns}^{(3)}(e_g) f_{inl}^{(\chi_1)}(e_{i_1}) f_{inl}^{(\chi_2)}(e_{i_2}) de_g de_{i_1} de_{i_2}$$

$$= \frac{\chi_1 \chi_2}{\sqrt{8\pi\mu}} \frac{\Gamma(j+2)}{\Gamma\left(\frac{\chi_1}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{\chi_2}{2}+1\right)} \sigma_{ref} \frac{(k_B T)^{j-\frac{\chi_1}{2}-\frac{\chi_2}{2}+\frac{1}{2}}}{e_a^{j-\frac{\chi_1}{2}-\frac{\chi_2}{2}}} \exp\left(-\frac{e_a}{k_B T}\right) \quad (5)$$

KEモデルとIEモデルによる水素-空気の反応過程解析の結果を図1・2 (主要成分時間変化) と図3・4 (温度変化) に載せる。計算対象は定積、断熱、静止している容器内に封じ込めた、同モル濃度の空気 (10%酸素、40%窒素) と水素ガスで、初期温度: 1500[K]、初期圧力: 1[atm]から反応を開始する。化学種は表Iの8種、素反応は表IIの16個<sup>4</sup>を考慮した。ただ、計算時間短縮のための初期ラジカルとしてHとHO<sub>2</sub>を0.005%ずつ、OHを0.01%だけ混入して計算を開始した。共に横軸が時間、◇がDSMCによる解、実曲線が16個の素反応を差分数値計算した理論解を示し、水平実線は最終平衡値を示す。KEモデルは安定分子の分解を記述する吸熱反応に対応出来ないため、理論解との誤差が特に平衡状態で大きく表れている。一

表 I

species	mass [g/mol]	diameter [Å]	internal freedom
H <sub>2</sub>	2.00	2.827	2
O <sub>2</sub>	32.0	3.467	2
N <sub>2</sub>	28.0	3.798	2
H <sub>2</sub> O	18.0	2.800	3
H	1.00	2.070	0
O	16.0	3.050	0
OH	17.0	3.147	2
HO <sub>2</sub>	33.0	3.068	3

表 II

- ①: H<sub>2</sub>+O=H+OH
- ②: O<sub>2</sub>+H=O+OH
- ③: H<sub>2</sub>O+H=H<sub>2</sub>+OH
- ④: H<sub>2</sub>O+O=OH+OH
- ⑤: H<sub>2</sub>+O<sub>2</sub>=OH+OH
- ⑥: H<sub>2</sub>+O<sub>2</sub>=H+HO<sub>2</sub>
- ⑦: OH+OH=H+HO<sub>2</sub>
- ⑧: H<sub>2</sub>O+O=H+HO<sub>2</sub>
- ⑨: O<sub>2</sub>+OH=HO<sub>2</sub>+O
- ⑩: H<sub>2</sub>O+O<sub>2</sub>=HO<sub>2</sub>+OH
- ⑪: H<sub>2</sub>O+OH=H<sub>2</sub>+HO<sub>2</sub>
- ⑫: H<sub>2</sub>+M=H+H+M
- ⑬: O<sub>2</sub>+M=O+O+M
- ⑭: OH+M=H+O+M
- ⑮: HO<sub>2</sub>+M=H+O<sub>2</sub>+M
- ⑯: H<sub>2</sub>O+M=H+OH+M

16 Reaction System

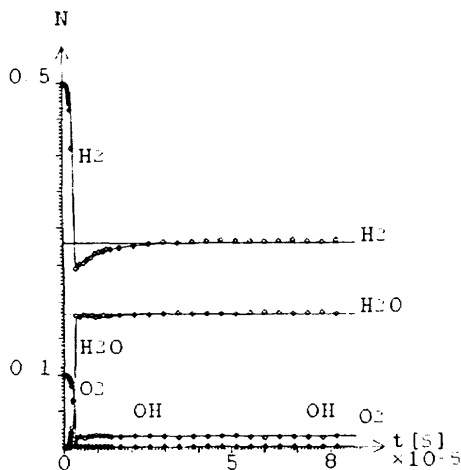


図 1: KEモデルによる化学種変化

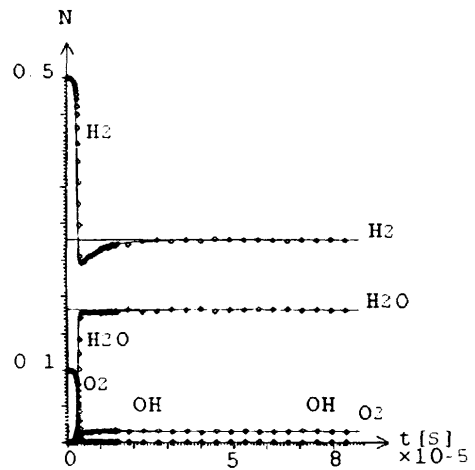


図 2: IEモデルによる化学種変化

方、I Eモデルは成分、温度共に理論解と非常に良い一致を示す事がよくわかる。

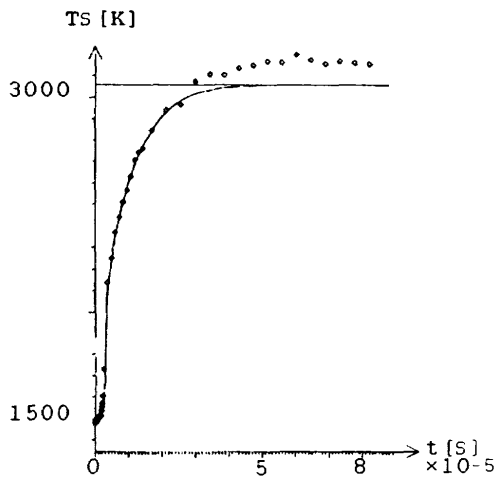


図 3 : K Eモデルによる温度変化

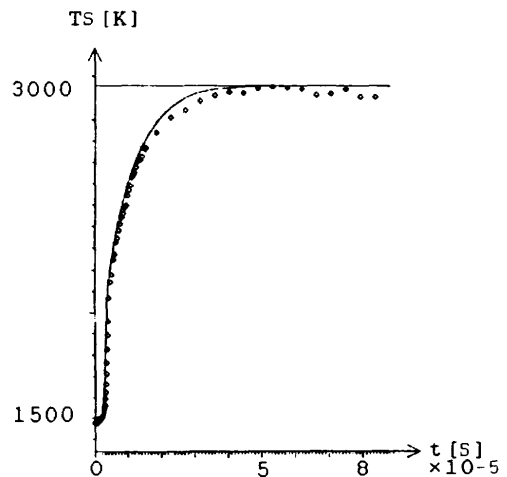


図 4 : I Eモデルによる温度変化

3. 2次元超音速剪断流

対象とした2次元超音速剪断流は図5の様に、上下を超音速の空気に挟まれた音速の水素噴流によって形成される。計算は図6に示すとおり、計算領域の上半分に対してのみ行い、計算領域の下側境界は対称境界、上側境界は超音速空気流条件に固定、出口境界は物理量変化無し超音速流出条件、空気と水素を仕切るリップは厚みなしの滑り境界である。入口境界では空気・水素ともに一様流入で、表Ⅲに示した流入条件を与えられている。空気と比べて水素の温度が非常に低い条件であり、燃焼反応解析にはI Eモデルを用いる。計算領域は一辺が空気流の平均自由行程長を持った立方体セルで流れ方向640個、垂直方向160個に分割されている。入口から出口までを代表長とすると、クヌーセン数は0.0015、レイノルズ数は1600である。

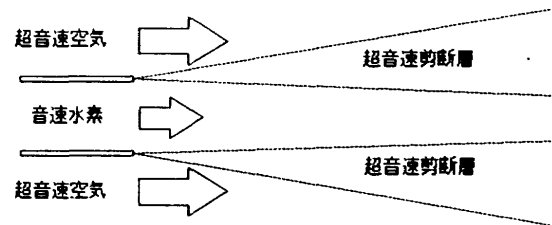


図 5 : 2次元超音速剪断流

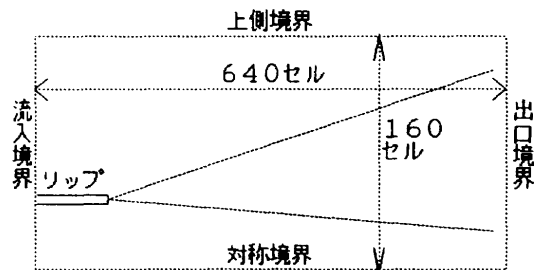


図 6 : 計算領域

表 III

空気流静圧:1.00[atm]	空気流マッハ数:2.44
水素流静圧:1.00[atm]	水素流マッハ数:1.00

空気静温 [K]	水素静温 [K]	速度比	運動量比
1500.0	250.0	1.56	5.95

流れ場の解析結果を図7～図9に示す。図7は0.05[atm]間隔の等圧力線図であり、混合に伴う弱い波がリップ先端から生じている。図8は等渦度線図である。リップ先端で出来る渦の拡散が非常にゆっくりと進行している。また、渦が拡散せずに残っている領域(帯)がリップよりも水素噴流側に寄っている。混合による運動量の交換が主に水素噴流内部で行われている事が分かる。図9は10%間隔の等水素濃度線図である。リップの直後から水素が空気側へ一方的に拡散している。また、水素は下部でも噴流中心に濃度90%以上の領域を保持しており、混合による物質輸送が主に水素の空気中への浸透により起きていることが分かる。渦度図と水素濃度図を重ねてみると、水素濃度90%の線と渦度帯の中心がほぼ一致している。つまり、低温で数密度の大きな水素が空気中へと輸送されることで物質交換が始まり、一旦空気と

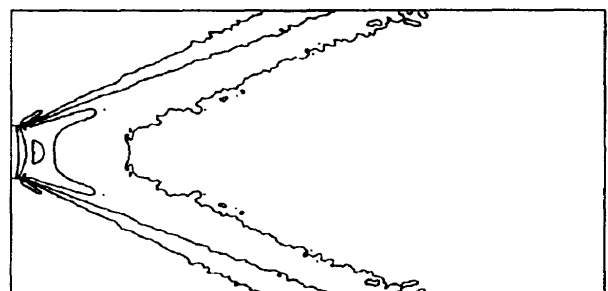


図 7 : 等静圧線図

混合した水素はその軽質量のためすぐに空気の流れに慣らされるので、水素100%の噴流面で運動量交換が行われ、渦が形成しているのである。

次に、燃焼過程解析結果を示す。I Eモデルにより、K Eモデルでは現れなかった微弱な初期反応を捉えることに成功した。図10に等水酸基(OH)数密度線図、図11に等水蒸気(H<sub>2</sub>O)数密度線図を示す。非常に弱い燃焼反応のため、気流中で起きている分枝反応の様子が良く分かる。水酸基は16 Reaction Systemの反応番号⑤を經由して生産されるので、混合開始直後から

存在している。一方、水蒸気はその生成に二つ以上の素反応を經由しなくてはならないため、水酸基と比べてやや時間遅れを伴って生成されている。特徴的なのは初期反応が水素噴流内部の水素濃度の高い領域では全く認められない点である。水素濃度線図を重ねてみると初期反応は水素濃度20%前後の領域でのみ起きている。これは噴射水素の温度の影響である。低温の水素はそのままでは反応を起こすことは無理であるが、空気中へと浸透しながら空気から熱エネルギーを奪って化学活性度を挙げてゆき、十分な熱交換の後で反応を開始している。

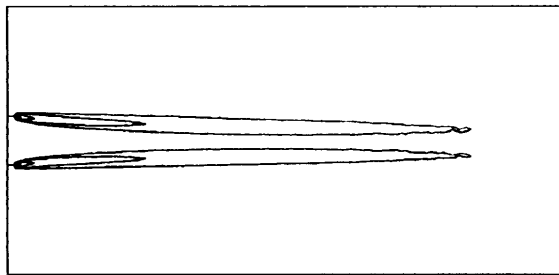


図 8 : 等温度線図

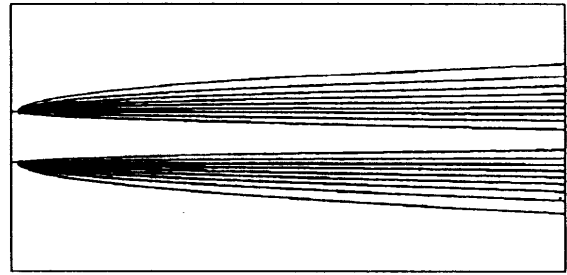


図 9 : 等水素濃度線図

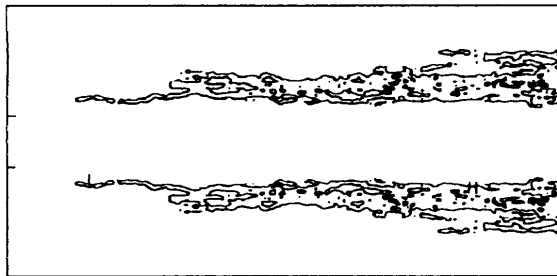


図 10 : 等水酸基密度線図

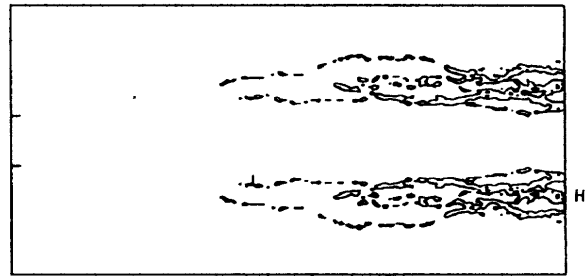


図 11 : 等水蒸気密度線図

#### 4. プラズマトーチ

プラズマトーチは、電気的に中性な高エネルギー気体であるプラズマを火花放電を用いて生産するシステムである。従来宇宙推進機関として開発・研究が行われてきたが、燃焼汚染物質を含まない高温化学活性種のみを多量に生産できる利点を持つので、超音速燃焼の着火・保炎を補助するサブシステムの一つとして近年盛んにその動作特性およびプラズマが燃焼場に及ぼす影響についての研究<sup>5-6</sup>が行われている。本研究では、前節の2次元超音速剪断流内部の微弱な燃焼場にプラズマを注入したときに起こる現象についての解析を行い、プラズマトーチの有効性を確かめた。

プラズマは簡単のため単原子酸素のみで構成されると仮定した。単原子酸素は水素-酸素系の反応において着火に最も敏感に影響を及ぼす<sup>7</sup>からである。プラズ

マトーチは計算領域外の上流部に設置され、噴射されたプラズマは超音速空気と共に流入境界から計算領域中へ流入すると仮定する。プラズマの流入状態の違いによる反応過程の変化を調べる目的から図12に示す通り、2種の流動形態を考慮している。左はトーチの設置位置が上流部のためプラズマが空気流全体に広がって流入する"拡散プラズマ条件"、右は下流部設置による"高密プラズマ条件"である。双方の条件とも、プラズマは超音速空気との混合による熱損失と化学的な物質損失を起こす事なく、等しい総質量流束と総熱流束を保持したまま流入境界から流入すると仮定した。本解析は、プラズマに超音速空気と同じ温度・速度を与えたので、プラズマ流入状態は表IVに示す通りである。

図13・14に等水酸基数密度線図を示す。図15・16は等水蒸気数密度線図である。共に、プラズマ注入の無い

図10・11と比べて格段に激しい反応が起きている。しかし、プラズマ流入条件により反応の進行過程は大きく異なっている。拡散プラズマでは下流部で反応領域の広い反応が起きているのに対して、高密度プラズマは反応開始位置がリップ直後にまで大きく前進している。また、拡散プラズマは下流部で広い範囲に渡って急激に多量の水酸基を生成しているが、高密度プラズマは下流部まで伸びる絞られた狭い領域で水酸基生成を行っているにも関わらず、その生成量は拡散プラズマほど多くはなく、また生成速度もゆっくりとしている。一方水蒸気生産に関してはその逆の傾向が見られ、拡散プラズマよりも高密度プラズマの方が多量の水蒸気を速やかに生成している。さらに、興味深いのは、それぞれが水素濃度の異なる領域で反応を起している点である。拡散プラズマは主に空気流側で反応を進行させているのに対して、高密度プラズマは従来反応を起さず事無かった、より水素噴流側へ寄った位置に反応領域を存在させている。水蒸気生産は主に反応番号③と④を経由して行われるが、反応生成物である水酸基同士による反応④よりも安定種である水素が参加する反応③の方が優勢である

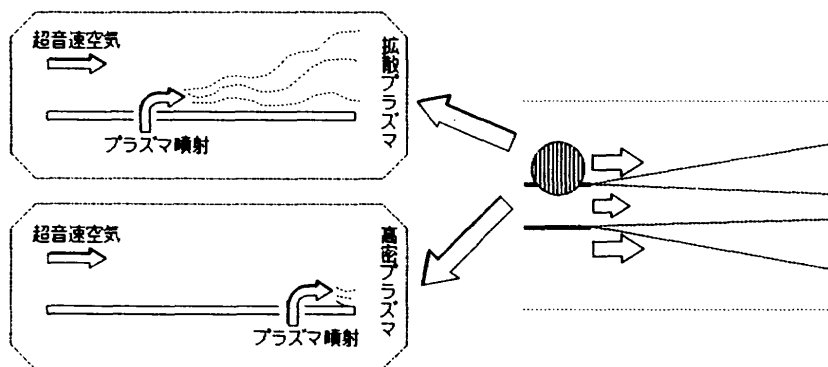


図 12：プラズマトーチ設置モデル

表 IV

	プラズマ 模擬物質	対空気流 混合部分高さ	対空気流 流入質量流速比	対空気流 流入熱量流速比
拡散プラズマ	単原子酸素	0.9231	$9.67 \times 10^{-4}$	$1.25 \times 10^{-3}$
高密度プラズマ	単原子酸素	0.0154	$9.67 \times 10^{-4}$	$1.25 \times 10^{-3}$

ため、たとえ水酸基存在量が小さくても大量の水素が存在する水素噴流中で反応を進行させる高密度プラズマの方が効率の良い水蒸気生産を行っていることになる。また、単原子酸素プラズマによる反応開始は反応①を経由して起こるので、水素濃度の高いリップ背後の領域にプラズマを集中的に注入する高密度プラズマでは拡散プラズマよりも多量の水酸基が生成されるが、高濃度水素中で反応③により即水蒸気へと還元されるので水酸基は足りなくなり、拡散プラズマの方は水酸基を余らせていることになる。以上の結果からプラズマトー

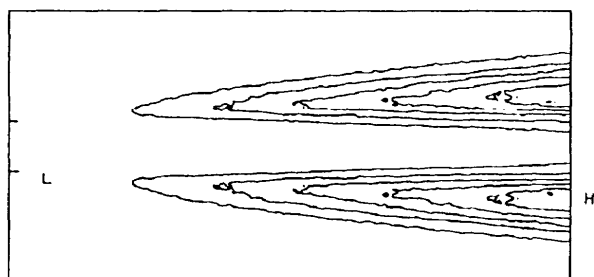


図 13：拡散プラズマによる等水酸基密度線図

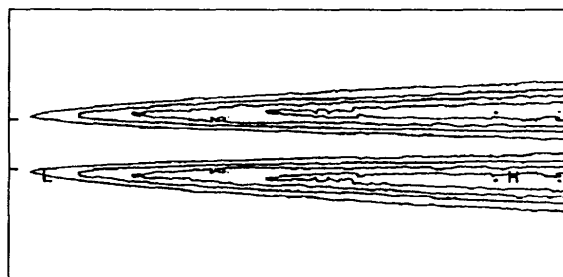


図 14：高密度プラズマによる等水酸基密度線図

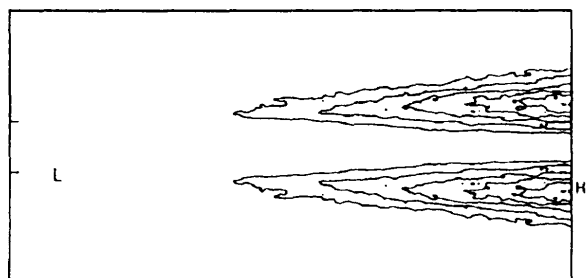


図 15：拡散プラズマによる等水蒸気密度線図

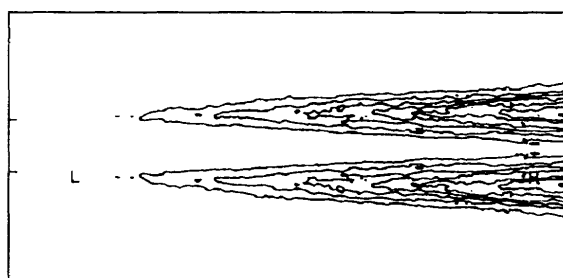


図 16：高密度プラズマによる等水蒸気密度線図

チ作動による着火促進が確認でき、また、高密度プラズマ条件の方がより効果的であることが明らかになった。

## 5. 結論

新しい反応分子モデル（I Eモデル）を導入し、2次元超音速剪断流の解析を行った結果以下の知見を得た。

- ① I Eモデルは微弱な初期燃焼反応解析に有効である。
- ② 混合は水素が空気流中へ浸透することで進行する。
- ③ 微弱な燃焼は高温空気流中でのみ進行する。
- ④ 上流からプラズマを導入することにより効率の良い燃焼が可能となる。

なお本研究結果は航空宇宙技術研究所の数値気体風洞（NWT）上にて16個のプロセッサエレメントを用いて、並列計算を行い得られたものである。

## 6. 参考文献

1. K.Koura "Null-Collision technique in direct-simulation Monte Carlo Method" Phys. Fluids 29 November 1986 3509-3511
2. C.Borgnakke and P.S.Larsen "Statistical Collision Model for Monte Carlo Simulation of Polyatomic Gas Mixture" J. Comp. Phys. 18 405-420,1975
3. G.A.Bird "Molecular Gas Dynamics" Oxford Univ. Press,London,1976
4. J.S.Evans and C.J.Schexnayder Jr "Influence of Chemical Kinetics and Unmixedness on Burning in Supersonic Hydrogen Flames" AIAA Journal Vol.18 No.2 188-193,1980.
5. 堀沢、木村、佐山 "スクラムジェットの着火・保炎機構に関する研究" 日本航空宇宙学会誌,40巻,460号,1992
6. Y.Sato, et al "Effectiveness of Plasma Torches for Ignition and Flameholding in Scramjet" J. Prop. Power , Vol.8, No.4, 1992
7. 三谷 徹 "スクラムジェットにおける化学反応簡略化反応系による考察" NAL,TR-1184,1992



# NUMERICAL STUDY ON STABILIZATION OF A DIFFUSION FLAME OVER A FLAT PLATE

Xiao Wang, Shigeharu Ohyagi, Tri Agung Rohmat  
 Department of Mechanical Engineering  
 Saitama University  
 Urawa Saitama

## ABSTRACT

A numerical study is performed of the effects on the stabilization of a diffusion flame in a flat plate boundary layer, into which fuel gas is injected vertically from the surface of the wall with a uniform velocity. A theoretical model is presented to couple fluid dynamics, chemistry and heat transfer on the surface of the flat plate. Governing equations of two-dimensional, compressible Navier-Stokes momentum, energy and chemical species are used and are numerically integrated by means of a finite difference method. Chemical reaction model is one-step, overall irreversible one with second-order, finite rate Arrhenius kinetics. Lots of computations are performed and five cases are discussed on understanding effects of Nusselt number, Damkohler numbers and free stream Reynolds number. By varying the Nusselt number, multiregion structures of mixing only, premixing- and diffusion-controlled reactions are observed near the leading edge of the flame. In the region of the premixing-controlled reaction, fuel lean and rich reactions can be found. As the flow velocity decreases, the flame tends to have a large stand-off distance and more fuel mass is transferred upstream of the burner to enforce the local reaction and to improve the stabilization of the flame.

## 1 INTRODUCTION

Laminar boundary layers over flat plates with chemical reaction are attracting much attentions because they are closely related not only to many practical problems such as combustion in hybrid rockets, fires over structures and liquid pools, but also to essential physical aspects of a system involving fluid dynamics, chemical kinetics and heat transfer. Understanding and controlling these problems relies on more accurately understanding the fundamental interactions among them. Sharing facets of this work, some experimental and numerical studies have been conducted. Using a boundary layer theory, Emmons<sup>1)</sup> studied the burning rate of condensed fuel in an oxidizing stream, according to the theory, burning rate would become infinite at the leading edge of the condensed fuel

plate. To describe the transition of the diffusion flame, Hirano, et al.<sup>2,3)</sup> investigated experimentally the flame stabilizing mechanism by changing injecting fuel and free stream velocity. But no details were reported on thermal and reacting zone structures when a diffusion flame underwent a transition. Miyashita et al.<sup>4)</sup> made an experimental study of the effects of free stream velocity on flame stabilization and found that, at a low velocity, a recirculation flow formed upstream the burner could act as a stabilizer of the diffusion flame. Using a finite-rate Arrhenius kinetics, Chen and T'ien<sup>5)</sup> investigated transition from an envelop to an open-tip flames when Damköhler number decreases. However, equal molecular weight of reactants and temperature-independent diffusion coefficients were assumed with a constant wall temperature of the burner. Blasi et al.<sup>6)</sup> constructed a model of pulsating flame spread across liquid fuels and predicted flame structure changing from a premixed type at the leading edge to a diffusive type downstream. But Bousinesq approximation was used and gas density is constant except for variations induced by buoyancy. In spite of these studies, there still remain some unknown mechanisms, for instance, on the local velocity anomaly, flame instability and sophisticated structures of the leading flame edges. Our previous numerical simulations have dealt with a diffusion flame established in a laminar boundary layers of a flat plate for an incompressible flow of nonexothermic chemical reaction<sup>7)</sup> and for a compressible flow by using a flame sheet model and accounting for reaction heat release<sup>8)</sup>. These works gave understandings about the mechanisms of the acceleration and deceleration of the flow across the flame zone which induces an anomaly in the velocity distribution, and the vortical generation which may disturb and wrinkle the flame sheet downstream. However, as fast chemistry was allowed, it is incapable of predicting behaviors of the leading flame edge and extinction, as observed in some related experiments.

In the present paper, we are particularly concerned with a air stream flowing parallelly over a flat plate, from a part surface of which (known as burner) fuel is vertically injected into the oxidizing stream and is reacted chemically. Under certain conditions, a diffusion flame may be

established and stabilized near the front end of the burner. Chemical reaction interacts closely with the flow and thermal states, for instance, the velocity of the free stream and the rate of heat transfer on the wall surface, which may be represented by the Reynolds, the Damkohler and the Nusselt numbers. Objectives of the study are to access multiregion structures of the leading flame edges and their dependence on the free stream velocity.

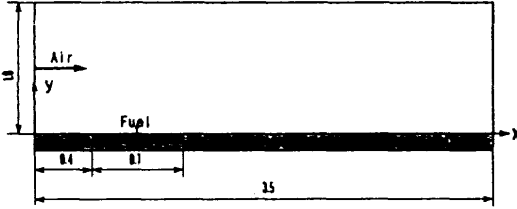


Fig.1 Configuration of the computation model

## 2 PHYSICAL MODEL AND GOVERNING EQUATIONS

Computational domain of the present study is shown in Fig.1, with 350mm in length and 100mm in width. The fuel of gaseous methane is injected from a porous plate within a region from  $x=40\text{mm}$  to  $110\text{mm}$  with uniform velocity, formed a burner with 70mm in length. The governing partial differential equations of mass, momentum, energy, and species are deduced for a two-dimensional laminar reacting boundary layer flow with the following assumptions:

- the flow is two-dimensional and laminar with Stokes' hypothesis,
- chemical reaction is one-step, irreversible with second-order, finite rate Arrhenius kinetics.
- the reactants and product are perfect gases with equal and constant specific heats, equal diffusion coefficients. The diffusion coefficients are assumed temperature-dependent obeying the law given by Strehlow<sup>9</sup>:  $\mu \propto T^{0.7}$ ,  $D \propto T^{1.7}$ ,  $\alpha \propto T^{1.7}$ .
- the Soret and Dufour effects, along with pressure diffusion, work done by pressure and body force are neglected,
- Lewis number is unity,

To normalize the governing equations, height of the computational domain is chosen as the characteristic length and the state of air main stream at  $T_\infty = 300\text{K}$  and one atmospheric pressure is specified as the reference. According to the above assumptions, the nondimensional governing equations can be written as follows:

Continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

Momentum equation

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mu}{R_e} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{R_e} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\mu}{R_e} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\mu}{R_e} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right], \quad (3)$$

Energy equation

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{R_e P_r} \frac{\partial T}{\partial x} \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{R_e P_r} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q w_{fu}, \quad (4)$$

Chemical species

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u Y_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v Y_i)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu}{R_e S_c} \frac{\partial Y_i}{\partial x} \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{R_e S_c} \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) + w_i, \quad (5)$$

where the consumption rate of fuel is

$$w_{fu} = -D_a \rho \rho Y_{fu} Y_{ox} \exp(-Z/T), \quad (6)$$

and  $\rho, u, v, p, T, Y_i$  are the density, velocity components of  $x$  and  $y$ -directions, pressure, temperature and mass fraction of  $i$ th chemical species for the mixture gas, respectively.  $B_f$  is the preexponent coefficient. Four species of fuel, oxidizer, inert and product are taken into account. The equation of thermodynamic state is

$$\rho = \frac{p}{C_1 T}, \quad (7)$$

where  $C_1 = RT_\infty^*/U_\infty^*/U_\infty^* = 1/kM^2$ ,  $k$  is the specific heat ratio of the mixture gas and  $M$  is the Mach number of free stream flow.  $R$  is the gas constant of the mixture and is estimated by

$$R = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{W_i} R_u. \quad (8)$$

$R_u$  is the universal gas constant and  $W_i$  is the molecular weight for  $i$ th species. Referencing Lee's work<sup>10</sup> on the gas phase chemical reaction where the fuel is taken as methane ( $CH_4$ ), the value of related properties are specified:  $P_r = 0.714$ ,  $Q^* = 116.8$ . The governing equations are numerically integrated by SIMPLE procedure and lots of numerical experiments have been done to properly specify the size of the computational domain and the mesh. A nonuniform mesh is adopted with grid nodes  $401 \times 146$ .

Table 1 Computed Cases

Case No.	Re No.	$Nu_{(6y)}$	Da No.
Case 1	6234	0.05	$1.85 \times 10^8$
Case 2	6234	0.062	$1.85 \times 10^8$
Case 3	6234	0.07	$1.85 \times 10^8$
Case 4	3117	$0.05 * \sqrt{U_\infty}$	$1.85 \times 10^8 / U_\infty$
Case 5	8104	$0.05 * \sqrt{U_\infty}$	$1.85 \times 10^8 / U_\infty$

### 3 RESULTS AND DISCUSSION

Five computation cases are listed in Table 1 and injecting velocity of the fuel is set 0.07m/s in all of the five cases. In the first three cases, the free stream velocity is fixed at 1m/s with variation of the Nu number. Effects of varying free stream velocity are reflected in cases 4 and 5. The determination of those velocities are based on our experimental study in which stabilized and transient diffusion flames have been observed<sup>(11)</sup>.

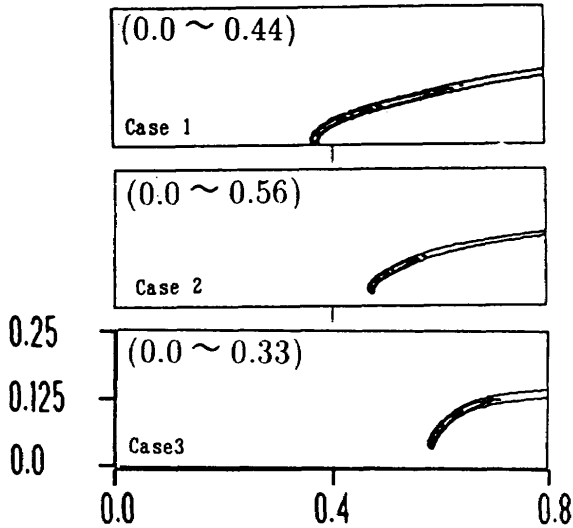


Fig.2 Contours of the fuel reaction rate for Cases 1, 2 and 3.

#### 3.1 Varying Nusselt number

The Nusselt number,  $Nu$ , defined by  $h\Delta y/\lambda$ , is proportional to the heat transfer rate  $h$  from the gas phase to the solid flat plate. The effect of varying Nusselt number is investigated by fixed the free stream velocity and by changing the  $h$  for a wide range for Cases 1, 2 and 3. Contours are depicted in Fig.2 for the fuel reaction rate of the three cases. In all of the three cases, concentrated reaction occurs in the apex of the reaction zone, meaning a highly exothermic reaction zone and serving as a holder of the diffusion flame. At  $Nu=0.05$  for Case 1, the reaction zone originates from upstream of the leading end of the burner, forming an enveloped flame and hindering the cold oxidizing stream penetrating into the fuel side. When the heat transfer rate to the wall increases for Cases 2 and 3, chemical reaction zones are retreated toward downstream and their apexes become open, no longer anchoring on the surface of the flat plate. This indicates a generation of a low temperature, nonreactive zone between the leading edge of the flame and the wall and is consistent with many experimental observations that at certain conditions, only premixing of the fuel and the oxidizer occur near the leading flame edge. Corresponding contours of the temperature are shown in Fig.3. For Case 1, the contours of high temperature enclose upstream of the leading end of the burner and there appear a concentrated stream-wise gradient, by which a large heat flux can be conducted

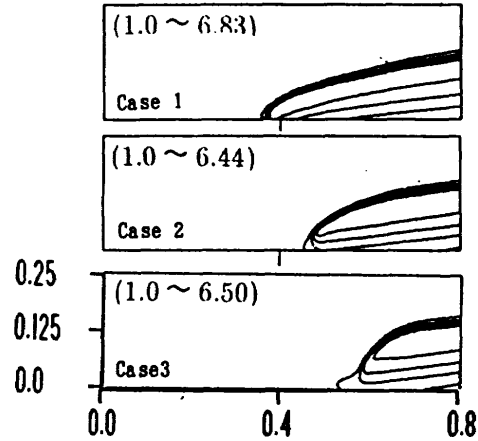


Fig.3 Contours of the temperature for Cases 1, 2 and 3.

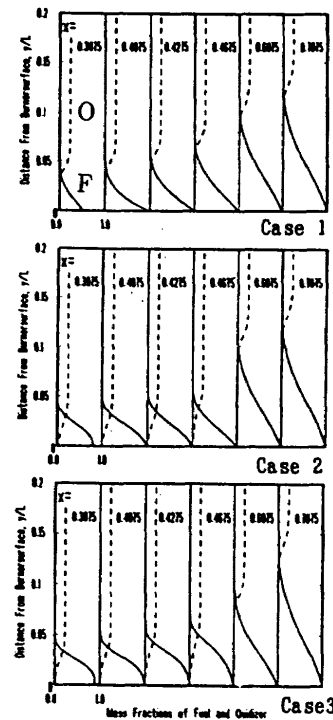


Fig.4 Profiles of the oxidizer and fuel mass fractions along y-direction at six positions for Cases 1, 2 and 3.

upstream to preheat the cold oxidizing stream and to stabilize the enveloped flame. With the increase of  $Nu$  for Cases 2 and 3, however, high temperature zones are lifted off and blown downstream. This results in less heat conduction toward upstream and low temperature zones near the apexes of these contours. Thus, chemical reaction is hard to sustain there as shown in Fig.2 and stabilization of the flames is weakened. Further decreasing in  $Nu$  will bring about the flame stabilization at the rear end of the burner or the flame disappearance in the computational zone. This implies a transition process of the flame from an enveloped to an open-tip ones, affected by variation of the heat loss rate on the wall.

To clarify the structures of the leading flame, it is important to understand the details on processes of the species mixing and the chemical reaction arising there. Fig.4 gives

profiles of oxidizer and fuel mass fractions along  $y$ -direction at six positions around the leading end of the burner at  $x=0.4$  for Cases 1, 2 and 3. Profiles for oxidizer and fuel mass fraction are indicated by dashed and solid lines respectively. For Case 1, because an enveloped flame is stabilized on the upstream of the leading end of the burner, mass fractions of fuel and oxidizer reach zero almost at the same spatial positions, meaning the establishment of a diffusion-controlled type of flame. For Cases 2 and 3, a co-existing zone of oxidizer and fuel, that is, a premixed zone of the two species can be clearly recognized. Considering the fact that locations of the apexes of the reaction zones are  $x_{Case2}=0.4635$  and  $x_{Case3}=0.5607$ , as shown in Fig.2, three stages can be divided along  $x$ -direction. First of all, fuel and oxidizer are mixed by diffusion and convection and no chemical reaction takes place, thus premixed zone of the reactants are formed until  $x_{Case2}$  and  $x_{Case3}$ . Downstream the  $x_{Case2}$  and  $x_{Case3}$ , chemical reaction takes place and premixed flames are expected to generate. Premixed zones, however, can still be found at  $x=0.4675$  for Case 2 and  $x=0.6075$  for Case 3 because of the low temperature and the low reaction rate there. At  $x=0.7075$ , diffusion flames are achieved since the mass fractions of fuel and oxidizer come to zero at the same spatial positions. It is reasonable to inference that there exist transition flames from a premixed one, through a comparably predominated one by both chemical kinetics and diffusion, to a diffusing one. Furthermore, fuel lean and fuel rich chemical reactions are found in the upper and lower parts of the premixed reaction region. Gradient of the profiles for the fuel near the wall decreases when Nu number increases, especially at the leading part of the burner at  $x=0.4$ . This tendency diminishes toward downstream for the three cases. There are no obvious distinction in the diffusion height (distance off the wall when mass fraction of fuel comes to zero).

To get an insight into the heat transfer between the flowing fluid and the wall, it is necessary to understand thermal status on the surface of the wall. Distributions of the wall temperature and its gradient of  $y$ -direction are shown in Fig.5 along  $x$ -direction. A similitude on the profiles can be seen that, the profiles increase very quickly and peak

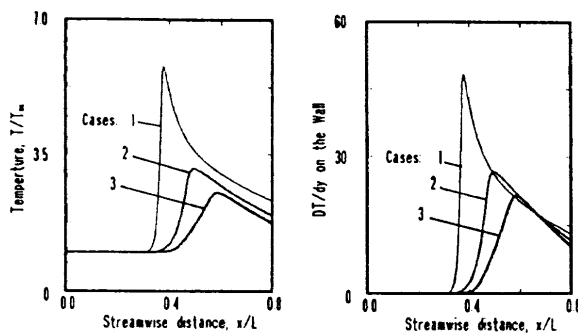


Fig.5 Distributions of the wall temperature and its gradient along  $x$ -direction.

in fronts of the leading flames, then become small toward downstream. The trend of temperature change is consistent with many experimental measures. With the increase of Nu number, the maximum of the profile decreases and moves downstream.

### 3.2 Varying free stream velocity

To examine the effect of varying free stream velocity, results for Cases 1, 4 and 5 are chosen with three different velocities. Results for Case 1 are used as the based data to compare throughout the present paper and most of its results have been given in section 3.1. Our discussion is covering the three cases but results for Cases 4 and 5 are mainly given in this section.

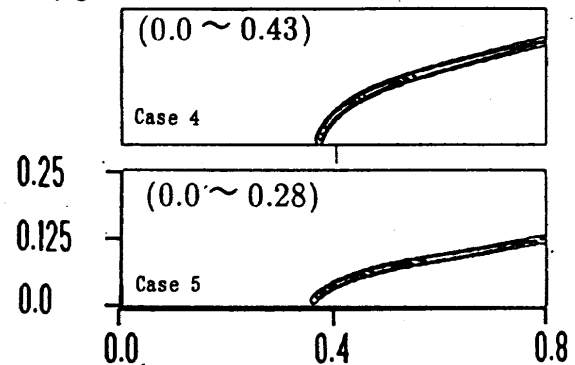


Fig.6 Contours of the fuel reaction rate for Cases 4 and 5.

Contours are depicted in Fig.6 for the fuel reaction rate of fuel for Cases 4 and 5. By comparing with the result of Case 1 in Fig.2, the chemical reaction takes place upstream of the burner and the reaction zones enclose on the wall of the plate for the three cases. However, with decrease of the velocity, the reaction zone becomes full and its rear part is lifted off the wall significantly, because the thickness of boundary layer increases when the velocity decreases. Maximum of the reaction rate has no big distinction for Cases 1 and 4, but decreases quickly when the velocity goes up to  $1.3m/s$ . Further increase of velocity results in blow-off flame or extinction.

Profiles of the oxidizer and fuel mass fractions are given in Fig.7 at six positions for Cases 4, and 5. Premixed zones of the reactants can not be found clearly for the three cases and similar to the reaction zones in Fig.6, the flame height increases with decrease of the velocity.

Profiles of the temperature at the six positions are shown in Fig.8 for Cases 4 and 5. Common trends in the profiles are found that the maximum temperature has less change with the variation of  $x$ , and that the temperature close to the wall decreases monotonously toward downstream for the three cases. When the velocity decreases, temperature gradient in the fuel side becomes mild because the thermal boundary layer increases. Corresponding distributions of the wall temperature and its gradient are shown in Fig.9. In the three cases, the wall temperature and its gradient are the largest for Case 1 and the smallest for Case 4. The temperature rises up in the most upstream position for Case 5 and almost at a same point for Cases 1 and 4,

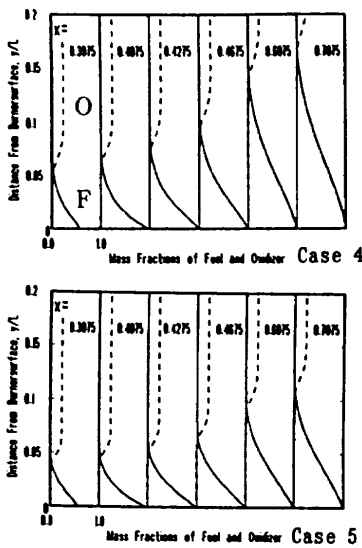


Fig.7 Profiles of the oxidizer and fuel mass fractions along y-direction at six positions for Cases 4 and 5.

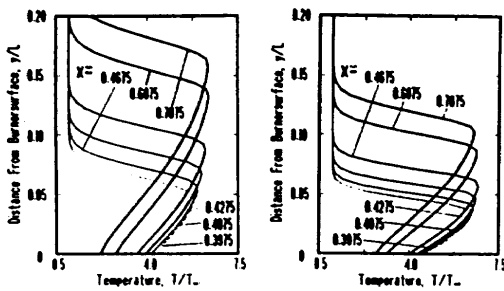


Fig.8 Profiles of the temperature at six positions in x-direction for Cases 4 and 5.

meaning much more heat is transferred toward upstream for Case 5 than for Cases 1 and 4.

CONCLUSIONS

(1) The leading flame edge anchors and stabilizes at the front end of the burner at the low Nusselt number, and is lifted off the wall with increase in the Nusselt number. This means a transient process of the leading flame edge dependent on the heat loss from the surface of the wall.

(2) In the case of lifted off flame, multiregion structures of the leading flame edge are found. Towards downstream, there are regions of mixing only, premixed and diffused flame and fuel lean and rich flames exist in the region of premixed flame.

(3) As the free stream velocity decreases, the flame has a large stand-off distance and more fuel mass is transferred upstream of the burner, showing a stabilizing tendency of the flame.

(4) For stabilized flames, the temperature and its gradient on the wall surface maximize nearly the front end, decrease quickly toward downstream of it.

REFERENCES

1. H. Emmons, 'The film combustion of liquid fuel,

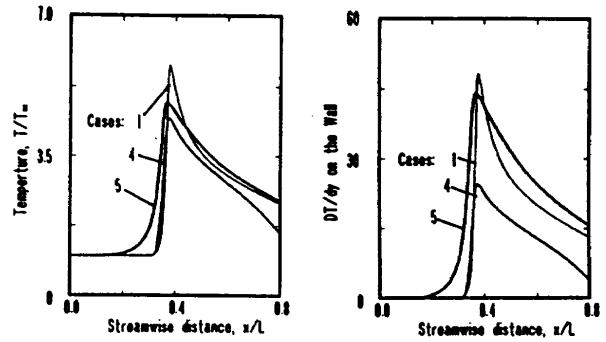


Fig.9 Distributions of the wall temperature and its gradient along x-direction.

Z. Agner, Math. 36, 1956, p. 60.

2. T. Hirano and Y. Kanno, Aerodynamic and thermal structures of the laminar boundary layer over a flat plate with a diffusion flame 14th Symp. (Intl.) on Combustion, 1972, pp.391-398.

3. T. Hirano and M. Kinoshita, Gas velocity and temperature profiles of a diffusion flame stabilized in the stream over liquid fuel, 15th Symp. (Intl.) on Combustion, 1974, pp.379-387.

4. M. Miyashita, M. Kawamata and T. Suzuki, Structures of the Thermal Fluid near the Leading Edge of a Diffusion Flame in a Gas Stream, 30th Combustion symposium of Japan, Nagoya, Dec. 1992.

5. C-H Chen and J. S. T'ien, Diffusion flame stabilization at the leading edge of a fuel plate, Combust. Sci. and Tech. 50, 1986, pp. 283-306.

6. N. Blasi and J. S. T'ien, Diffusion flame stabilization at the leading edge of a fuel plate, Combust. Sci. and Tech. 50, 1986, pp. 283-306.

7. X. Wang, H. Kato and S. Ohyagi, Diffusion Flame over a Flat Plate Boundary Layer with Fuel Injection', 31th Combustion symposium of Japan, Yokohama, Nov. 1993.

8. X. Wang, T.A. Rohmat and S. Ohyagi, Numerical Simulations of Exothermic Reacting Boundary Layer Flow over a Flat Plate, presented at 72th General Conference of the JSME, Sapporo, Japan, Aug. 1994.

9. R.A. Strehlow, Combustion Fundamentals, New York, McGraw-Hill, 1984, p.54.

10. S.T. Lee and J.S. T'ien, A numerical analysis of flame flashback in premixed laminar system, Combustion and Flame 48, 1982, p.273.

11. H. Katoh, X. Wang, T. Yoshihashi and S. Ohyagi, Stabilization of a diffusion flame behind obstacles, presented to the 4th ASME-JSME Thermal Engineering Conference, 1995.



## 6

## 翼端間隙を有するタービン翼列流れの検証

清水邦弘\* 三宅慶明\* 野崎 理\*\* 菊地一雄\*\* 田村敦宏\*\*

Verification of Turbine Cascade Flow with Tip Clearance

by

Kunihiro SHIMIZU, Yoshiaki MIYAKE

Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.

Osamu NOZAKI, Kazuo KIKUCHI, Atsuhiko TAMURA

National Aerospace Laboratory

## ABSTRACT

This paper presents verification results of a single stage turbine cascade with tip clearance. The flow through turbine cascades is calculated by using stage analysis code (CAS3DM) based on Chakravarthy-Osher's TVD<sup>1</sup> scheme developed by National Aerospace Laboratory. The results show good agreements with the experimental data on the total pressure loss of the stator and the total pressure and total temperature distributions of the rotor, indicating the effectiveness of the code as a design tool for estimating loss of the cascade.

## 1. はじめに

数値解析をエンジン要素の設計に適用していくためには、種々の要素に対して解析結果と試験データとの検証を十分に行い、数値解析に用いる解析コードの信頼性を高める必要がある。

ここでは、航空宇宙技術研究所で開発された解析コードCAS3DM<sup>2</sup>をエンジン要素の空力設計ツールとして実用化するために、単段タービンの試験結果を検証データとして、静翼と動翼の翼間距離の影響及び翼端間隙の無い場合と翼端間隙を有する場合の2ケースについて検証を行い、設計へ適用する場合の問題点について検討を行う。

## 2. 検証データ

検証データは、三菱重工業(株)で行われたタービン回転試験結果を用いた。

試験では、タービン入口において全圧、全温および境界層厚さを計測し、タービン出口では、後縁より0.5コード下流の位置でトラバース計測を実施し翼

端近傍の全圧および全温を細かく計測し、さらに2コード下流では、固定プローブによる性能計測を行っている。

検証データの試験条件を表1に示す。

表1 試験条件

入口全圧	kg/cm <sup>2</sup>	4.048
入口全温	K	435.1
流入角	deg	0
出口静圧 (h7*)	kg/cm <sup>2</sup>	1.034
回転数	rpm	6677.4

\* 三菱重工業(株)

\*\* 航空宇宙技術研究所

### 3. タービンの翼端間隙付き段解析

解析は、航空宇宙技術研究所で開発されたCAS3DMをベースとし、翼間部と翼端間隙部を単一領域として扱う単一格子版翼端間隙付き段解析コードを用いて行った。

タービンの場合、翼端部の翼が厚いため単一格子を用いると間隙部分の格子のひずみが大きくなり、計算精度を損ねる可能性があるため精度面を考えると翼端間隙部にも格子をはめ込む複合格子を用いるべきである。一方、計算効率の点では単一格子のほうが有利であり、設計ツールとしての活用を考えた場合、計算時間が短いほうが有利である。従って、設計フェーズに応じた解析コードの選択ができるように、単一格子の場合の解析精度を確認しておくことが重要となる。

また、翼端間隙による影響を検討するために翼端間隙の無い場合についても解析を行って比較した。

### 4. 計算格子及び境界条件

図1に解析に用いた格子を示す。格子点数は、静翼動翼いずれも101（流れ方向）×51（周方向）×51（径方向）である。静翼と動翼の間隔は試験機の2倍とし、ハブでの翼間中心を計算格子接続面とした。また、翼端間隙は試験で計測した値（0.31mm）を用い、この部分に10個の格子を用いた。

境界条件は、表1の試験条件を用いた。入口境界層厚さは、計測結果より5%と見積った。また出口の静圧は、ハブでの静圧を固定して半径方向の分布は半径方向圧力平衡式を用いた。

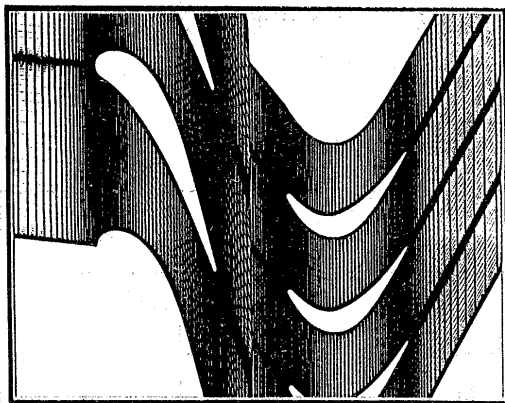


図1 計算格子

### 5. 解析結果

段解析では、境界条件となる静翼側の出口静圧は、動翼側の入口静圧を平均しピッチ方向に一様に与えられる。したがって、翼の後縁と境界面の距離が短いと、圧力の伝搬をスムーズに行うことができない。この問題は、翼の回転軸方向に対する計算格子の角度が大

きくなると発生し、特に衝撃波が発生する場合には顕著になる。

今回の場合、静翼出口の計算格子の角度が大きく、出口マッハ数が超音速となるため、翼間距離の影響が懸念される。そこで、静翼と動翼の翼間距離の影響を検討するために、翼間距離を実機と同じ場合と実機の2倍にした場合について解析結果を比較した。

図2は、ハブ側断面の等マッハ線図を、図3は、ミーン断面の等マッハ線図を、図4は、チップ側断面の等マッハ線図を示す。

静翼側のスロート以降のマッハ数分布を比較すると静翼と動翼の翼間距離の差による相違が明確に現れており、翼間距離を2倍にした場合ではミーン断面およびチップ側断面のマッハ数分布がスムーズになっている。ハブ側断面でも、かなり改善されているが、試験結果と一致させるには、もう少し翼間を広げた計算格子を用いる必要がある。

今回のケースは静翼と動翼のダクト部分がストレートであるため、翼間距離を実機より広げても解析結果への影響は小さいと考えられるが、静翼と動翼のダクト部分がディフューザになっている場合に翼間距離を広げると、翼間部分の損失が変化するため注意が必要である。

動翼側の等マッハ線図から前縁部分で流入角のずれによる剥離が発生し、チップ側では、翼端渦により翼の背側全域にわたり剥離しており、部分負荷の状態を捕らえていることがわかる。

また、図5に、翼端部分の格子と速度ベクトル図を示す。翼端間隙部分を流れて、背側に吹き出している様子や翼端渦が形成されている。

### 6. 検証結果

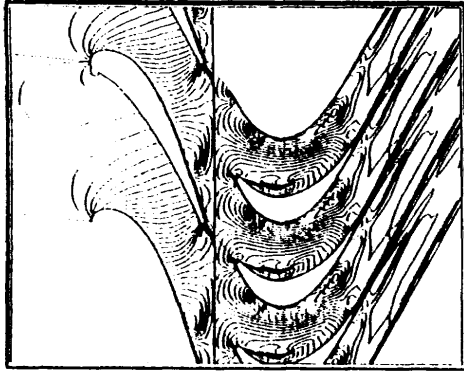
以下、試験データを基に解析結果との比較検証を行う。

まず、静翼の翼面マッハ数分布を比較したものを図6に示す。翼間距離の影響は、等マッハ線図で指摘したように背側の減速域で顕著に現れており、翼間距離を2倍にしたほうが試験結果とよく一致する。

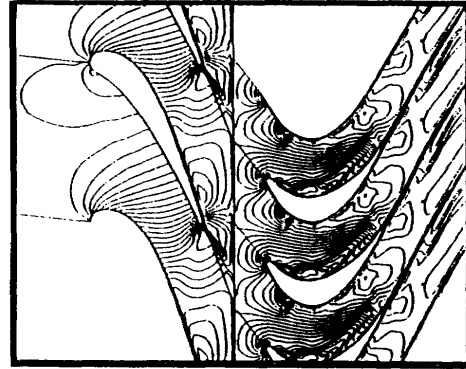
図7に静翼流出角分布、図8に静翼全圧損失分布を示す。今回用いた試験条件では、静翼の出口マッハ数 ( $M_{2th}$ ) が、ほぼ1.1であったため、環状翼列試験における  $M_{2th} = 1.1$  で計測された結果を用いて検証を行った。

翼間距離が実機と同じ場合では、チップ側の流出角分布が試験結果と一致していなかったが、翼間距離を2倍にした場合チップ側の分布も一致するようになり定性的にも、定量的にも改善された。



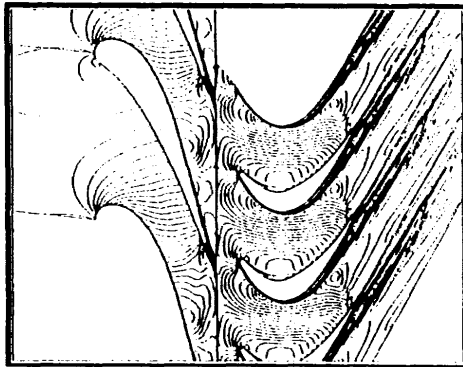


翼間距離実機と同じ



翼間距離実機の2倍

図2 等マッハ線図 (ハブ断面)

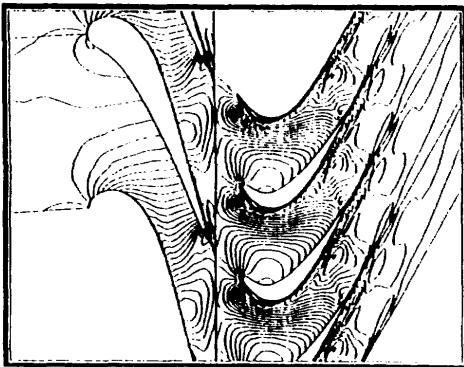


翼間距離実機と同じ



翼間距離実機の2倍

図3 等マッハ線図 (ミーン断面)



翼間距離実機と同じ



翼間距離実機の2倍

図4 等マッハ線図 (チップ断面)

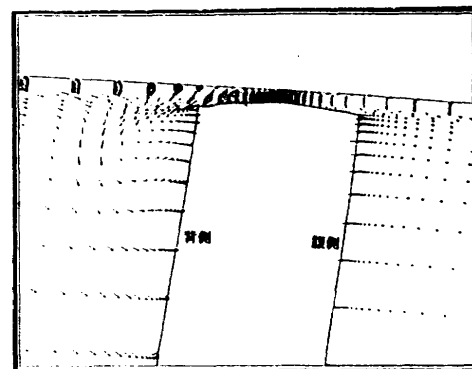
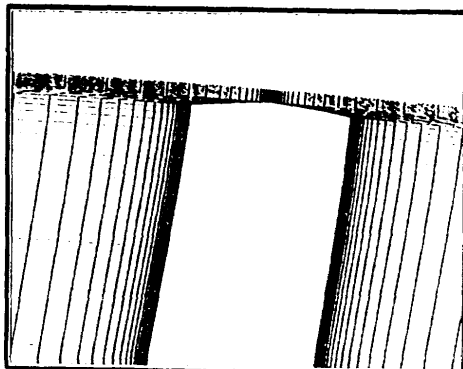


図5 翼端部の計算格子と速度ベクトル図

全圧損失について比較すると、翼間距離を実機と同じにした方が全体的によく一致している。一方、翼間距離を2倍にした場合では、80%高さの損失レベルが異なるが全体の損失レベルは両者とも大差はない。

つぎに、動翼について検証を行う。動翼については、翼端間隙のある場合と翼端間隙のない場合について解析を行い比較した。図9に動翼出口全圧分布、図10に動翼全温分布を示す。

全圧分布は、翼端間隙部の計算を考慮にいたしたことにより、チップ側での分布の傾向が改善されハブ側の分布の傾向も変化し、全体的に試験結果とよく一致するようになった。また、全温分布は、ハブ側の分布が改善され定性的な傾向は大幅に改善されたが、定量的には試験結果より若干低い値となっている。

## 7. 考察

翼端間隙付きの解析を行うことにより、チップ側の精度が向上することは予想されたが、ハブ側の分布も改善された。この点について、図11の動翼出口の相対全圧分布から考察を行う。

全体の傾向としては、ミーン部に損失の大きな領域があり、下流にいくにしたがって拡散していく様子が見られる。また、翼端間隙を有する場合の解析では、翼端渦によりミーン部に発生した損失領域が下流に行くにしたがってハブ側に押し下げられていく様子が見れており、翼端間隙のない場合と比較するとハブ側の全圧分布が異なっている。

つまり、実際には翼端渦の影響がハブ側まで及んでいるため、翼端間隙をシミュレートした翼端間隙のある場合のほうがより試験結果に近い分布を示したと考えられる。

このように、低アスペクト比の翼では翼端渦の影響が通路全体に大きく影響するため、翼端間隙無しで解析を行う場合、損失分布の変化を考慮に入れて解析結果を評価する必要がある。

## 8. まとめ

翼端間隙付き段解析コードを用いてタービンの段解析を実施し、試験結果との比較検証を行った。試験結果との検証により定性的、定量的によく一致し、翼端間隙付き段解析コードの有効性が確認できた。また、翼間距離が解析結果に及ぼす影響や翼端渦が全体の流れ場に及ぼす影響についても定性的、定量的に評価でき、設計に適用した場合の課題が明らかになった。

今後、さらに検証を進め、3種類の段解析コード（翼端間隙無し、翼端間隙付き（単一格子版）、翼端間隙付き（複合格子版））の解析精度の比較を行って、

計算時間も考慮しながら、設計フェーズに応じた選択基準を確立する必要がある。

なお、本研究は通商産業省工業技術院の産業科学技術研究開発制度による「超音速輸送機用推進システムの研究開発」の一環として、新エネルギー・産業技術総合開発機構（NEDO）からの委託を受けて実施したものである。

## 参考文献

- [1] S. R. Chakravarthy and S. Osher, "A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws", AIAA Paper 78-257, 1978
- [2] Y. Matsuo, "Computation of Three-Dimensional Viscous Flows in Turbomachinery Cascades", AIAA Paper 91-2237, 1991

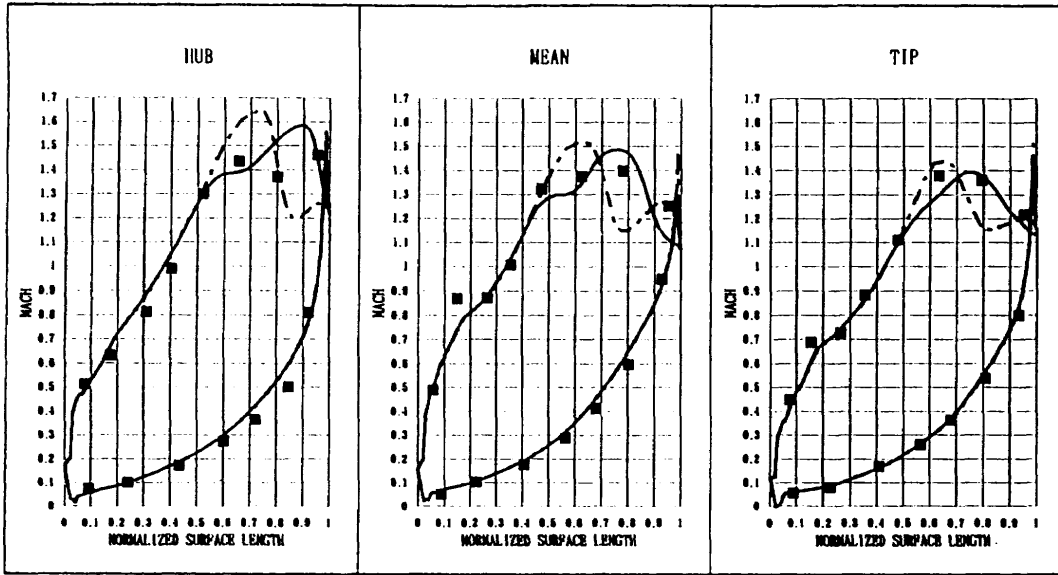


図6 静翼翼面マッハ数分布

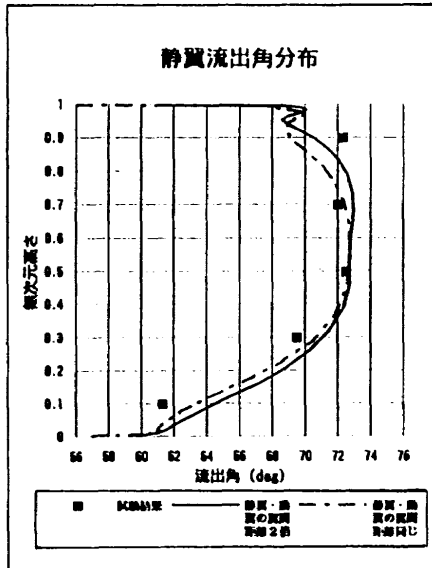


図7 静翼翼流出角分布

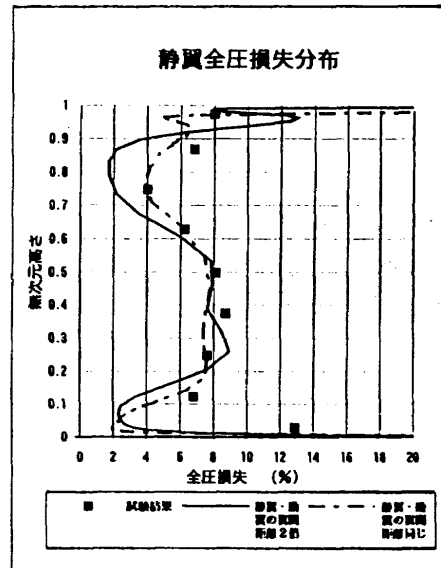


図8 静翼翼全圧損失分布

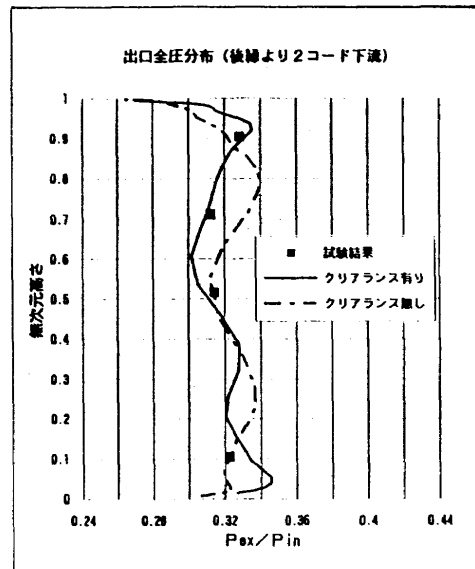
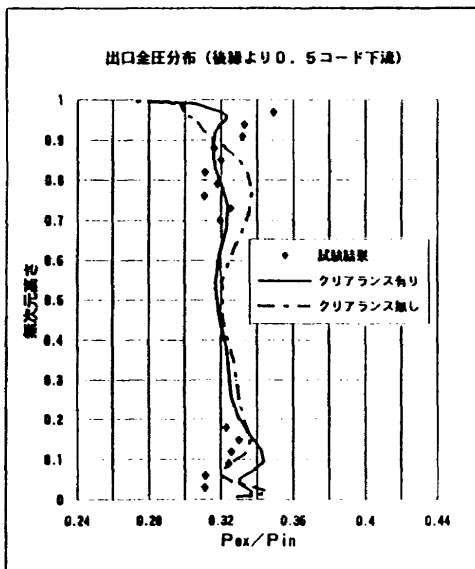


図9 動翼翼出口全圧分布

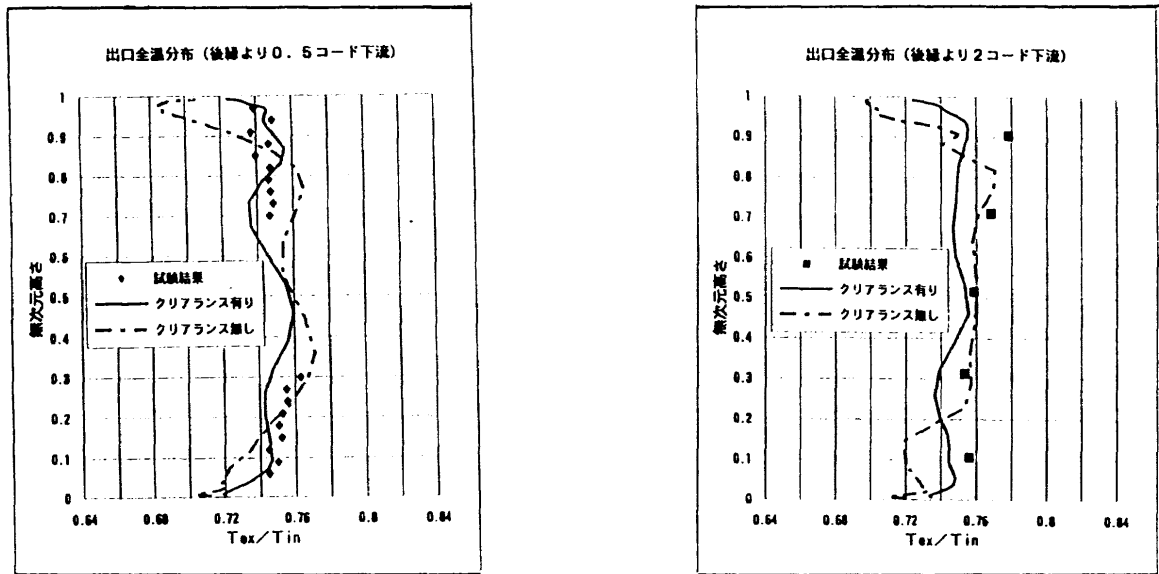


図10 動翼出口全温分布

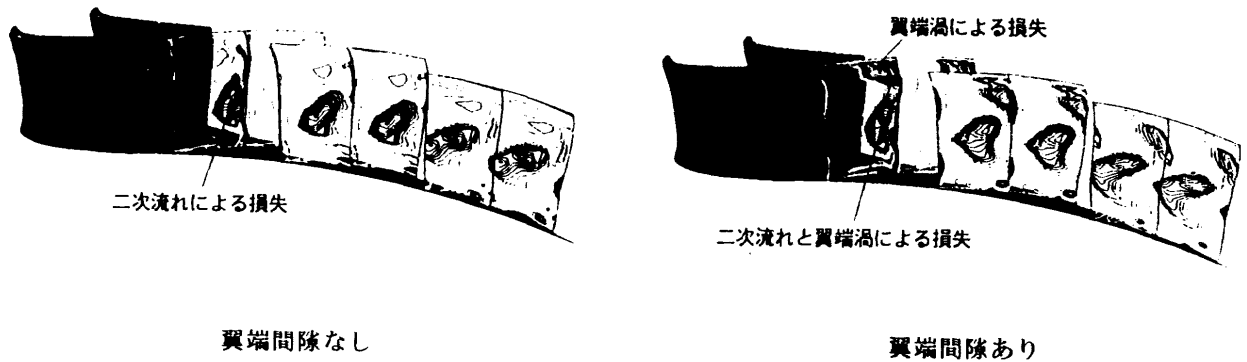


図11 動翼出口相対全圧分布の変化

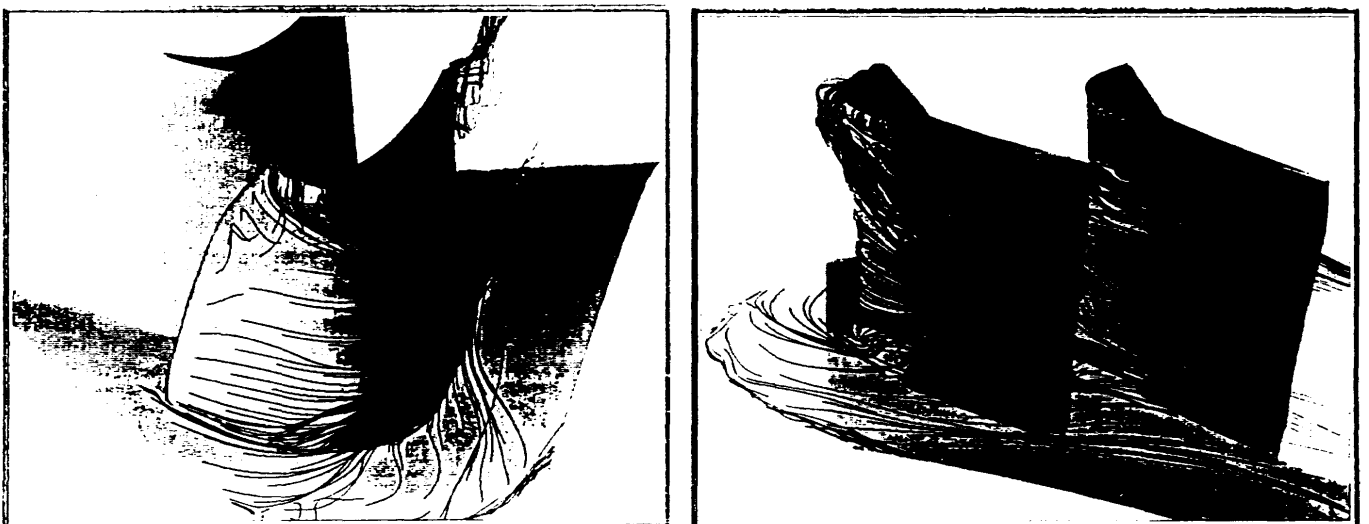


図12 動翼翼面流線

## ランプ型インジェクタによる超音速混合流れ場に関する研究

山根 善行, 澤口 誠一, 安藤 安則 (IHI)  
麻生 茂 (九大)  
福田 正大 (NAL)

### A Study on Supersonic Mixing Flow Field with Ramp Injector

by

Yoshiyuki YAMANE, Seiichi SAWAGUCHI, Yasunori ANDO (IHI)  
Shigeru ASO (Kyushu Univ.)  
Masahiro FUKUDA (NAL)

#### Abstract

The purposes of present paper are to investigate the structure of supersonic mixing flow field in ram/scramjet combustor and to develop the CFD code which will be used for the design of the combustor. One type of parallel injection method with ramp injector had been studied numerically and experimentally. The patterns of shock waves obtained by numerical simulations agreed with experimental results in schlieren photograph. Comparisons of static pressure distributions on the wall surface showed good agreement qualitatively. Numerical results captured the structures of flow field clearly, which were generating process of a pair of streamwise vortices and vortical roll-up of the jet. Oblique shocks made injectant gas lift off from wall surface, as found in calculations and experiments. According to these results, it could be said that the CFD code used in this study was useful for investigation of fuel-air mixing in supersonic flow field with parallel injection. From the numerical results, it was confirmed that the streamwise vortices generated by ramp injector and interaction between mixing field and oblique shocks were key factors for enhancement of fuel-air mixing in ram/scramjet combustor.

#### 1. 緒言

本論文は、超音速飛行を行う機体の推進装置として研究が行われているスクラムジェットエンジンの、燃焼器内における燃料と空気の混合に関する基礎研究について述べた。超音速流れ中における混合現象は、エンジン性能を左右する要素であり、スクラムジェットエンジン開発における重要課題の一つである。高い推進効率、すなわち高い混合効率を得ることの出来る燃料噴射方式が求められている。

超音速流入空気に対して燃料を噴射する角度は、一つのパラメータである。超音速流と並行に燃料を噴射する方法は、圧力損失が低く、噴出流の運動量が推進に寄与するという利点があり、現在ではこの並行噴射方式が、実機への採用候補として検討されている。しかし、例えば単純なバックステップ後方からの並行噴

射方式といった形状では、混合が十分に行われず、ひいては燃焼効率が上がらないという問題がある。

本研究の最終的な目的は、超音速混合流れ場における有効な混合促進法を探るとともにその構造を解明すること、および超音速燃焼器の設計に適用可能なCFDコードを開発することである。この論文では、流れ場中に縦渦を生成することで混合を促進させるとされるランプ型インジェクタ<sup>(1)~(4)</sup>を用いて、主流と並行に燃料を噴射した時の混合流れ場に対して、CFDと風洞実験により研究を行った。また、混合層に斜め衝撃波を入射した時の影響についても研究した。

#### 2. 数値解析手法

数値解析は、高い亜音速領域から超音速までの流れに対応した3次元圧縮性熱流動解析コードAIKOF3<sup>(5)</sup>

を用いて行った。このコードの支配方程式は、時間平均化された3次元圧縮性流れに対するNavier-Stokes方程式である。一般曲線座標系 $(\xi, \eta, \zeta)$ に対しては、この式は以下の様になる。

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \tilde{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{G}_v}{\partial \zeta} \right) \quad (1)$$

離散化は、対流項はYee-HartenのTVD法<sup>(6)</sup>を用いて、粘性項は中心差分を用いて陰的に差分化を行った。時間差分は局所時間進行法を用いた。また、乱流粘性の計算には、代数方程式型であるCebeci-Smithモデル<sup>(7)</sup>を用いた。

壁面境界においては、滑りなし条件とし、圧力勾配・温度勾配はともに零である。流入条件は、実験条件と同じに設定した。また本解析コードにおいては、主流と燃料を模擬するガスは同一気体として扱っている。さらに、比熱比は一定とした。

### 3. 実験装置と対象流れ場

実験は、IHI相生工場内の超音速風洞にて行った。この風洞は、200×250 mmの測定部断面を有し、主流マッハ数 $M$ は2.5と3.5の可変式である。今回の実験は、 $M=2.5$ で行った。この時、気流持続時間は約30秒である。この風洞における実験装置系を図1に示す。測定部中に主流に平行に平板を固定し、その表面にランプ型インジェクタを設置した。噴出流ガスは、ポンペより供給される。ここで、主流は空気、噴出流は窒素である。

ランプ型インジェクタの形状について、モデル図を図2に示す。ランプ型インジェクタを用いるに当たって、考慮すべきパラメータは多くある。形状に関しては、ランプ角やSwept角がある。また複数のランプを

用いる場合は、ランプ同士の間隔も重要なパラメータである。今回の研究では、ランプ形状により誘起される流れ場の構造を明らかにすることを目的としている。そのため、モデル形状は単一のUnswep型ランプという基礎的な形状を選択した。ランプ角は、最近の研究例<sup>(1)-(4)</sup>を参考にして、主流に対して $10^\circ$ の圧縮角を持つものとした。噴出面の断面寸法は13×13mmであり、この中に直径5mmの噴出孔を設けた。インジェクタの後方にあるのは、斜め衝撃波発生用に設置したショックジェネレータである。これは、主流に対して $5^\circ$ の圧縮角を持っており、この根本から圧縮波を発生させて、混合層に干渉させるためのものである。ショックジェネレータの大きさは、長さがランプ長さと同しく、高さは半分となっている。

流れ条件は、主流については $M=2.5$ 、全圧 $p_0=0.4$  MPa、全温 $T_0=283$  Kである。また、噴出流が $M=1.0$ 、 $p_0=0.18$  MPa、 $T_0=283$  Kである。この時、両者の全圧比は約0.45（噴出流/主流）である。また、噴出孔における静圧比および速度比（噴出流/主流）は、それぞれ約4.1と約0.56である。

図3に、今回の実験で撮影したシュリーレン写真の例を示す。中心から左側に見えるのがランプ型インジェクタの影であり、中心付近に噴射位置がある。ランプの根本およびショックジェネレータの根本から圧縮波が、ランプの頭頂部より膨脹波が発生しているのがはっきりと見える。

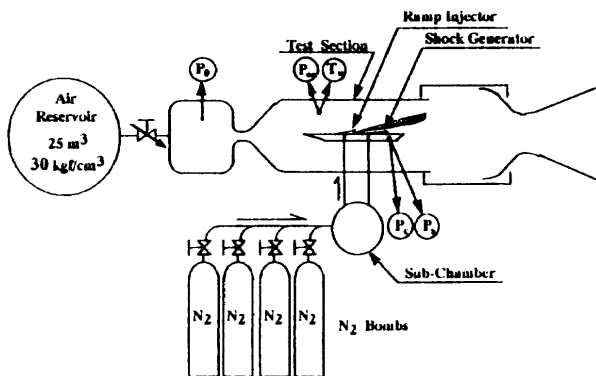


図1. 超音速風洞実験装置系

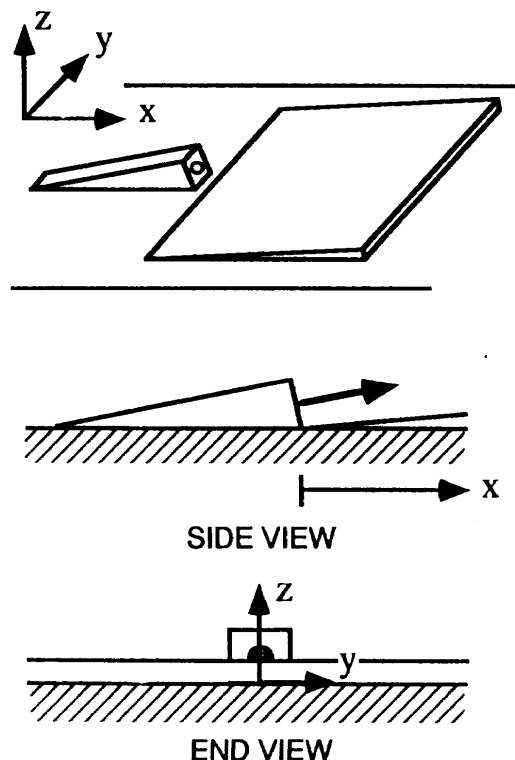


図2. ランプ型インジェクタ

また、今回の実験では、ショックジェネレータ上の壁面静圧分布を測定した。この測定は、噴出流と衝撃波の干渉による影響およびランプにより生成される渦の様子を観察するために行った。ここで、計測データはCFD結果の検証用としても用いた。図4に、測定点の位置を示す。

#### 4. 結果と考察

##### 4.1 実験および数値解析結果の比較

解析は、ランプの中心断面を対称境界として、その片側のみを対象とした。また、上方および下流出口境界においては、自由流出条件を採用した。ここで、計算格子のサイズは $70 \times 32 \times 52$ である。解析に用いた計算格子を図5に示す。

CFDより得られたランプ中心を通る流れ方向断面内のマッハ数分布を、図6に示す。実験で撮影したシュリーレン写真と比較して、ランプおよびショックジェネレータにより生成される圧縮波および膨張波が解析結果でも同様に形成され、その角度は同程度となっている。

続いて、ショックジェネレータ上の壁面静圧分布に

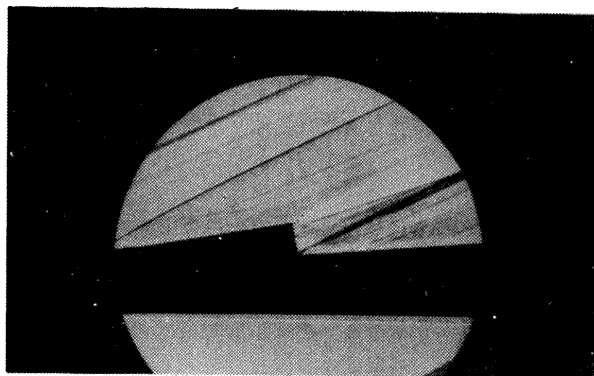


図3. シュリーレン写真

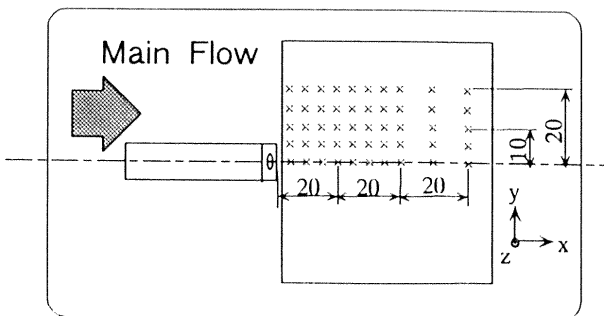


図4. 壁面静圧分布測定位置

ついて、実験とCFDの結果を比較したものを図7に示す。実験結果は白丸で、計算結果は実線で示した。これを見ると、圧力は噴射直後のランプ後方の位置で低い値になっており、下流に行くにつれて回復していく。またこの低圧領域は、ランプ側端から斜めに下流方向に向かって広がっている。この現象の原因としては、それぞれ以下のことが考えられる。まずランプ下流の低圧領域が徐々に回復していくのは、噴射後に膨張した噴出流体と後述する渦挙動により回り込んだ主流の影響によるものである。また、ランプ側端からの斜め下流への低圧領域の広がり、この端部から発生する膨張波が横切ることにより生じたものである。実験結果とCFDの結果を比較すると、定性的には良く一致しているものの、CFDの方が圧力の低下を過小評価している。特に、ランプ側端から広がる膨張波による影響が弱くなっている。この原因としては、用いた乱流モデルが代数方程式型であったため、このような複雑な乱流場を再現できなかったことが考えられる。

##### 4.2 混合流れ場構造の考察

前述の比較により、CFDによる結果は定性的には高く、定量的にもある程度の信頼性があると言える。よって、CFDの結果より、実験では観察できない混合流れ場における現象に対する考察を行うことを試みた。図8は、計算で得られた流れ場にポスト処理を施して、噴出流体の濃度分布の流れ方向における変化の

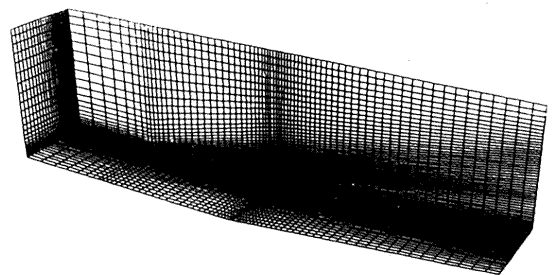


図5. 計算格子図

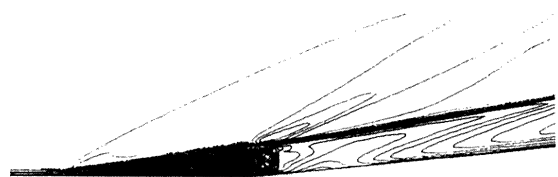


図6. ランプ中心断面内マッハ数分布

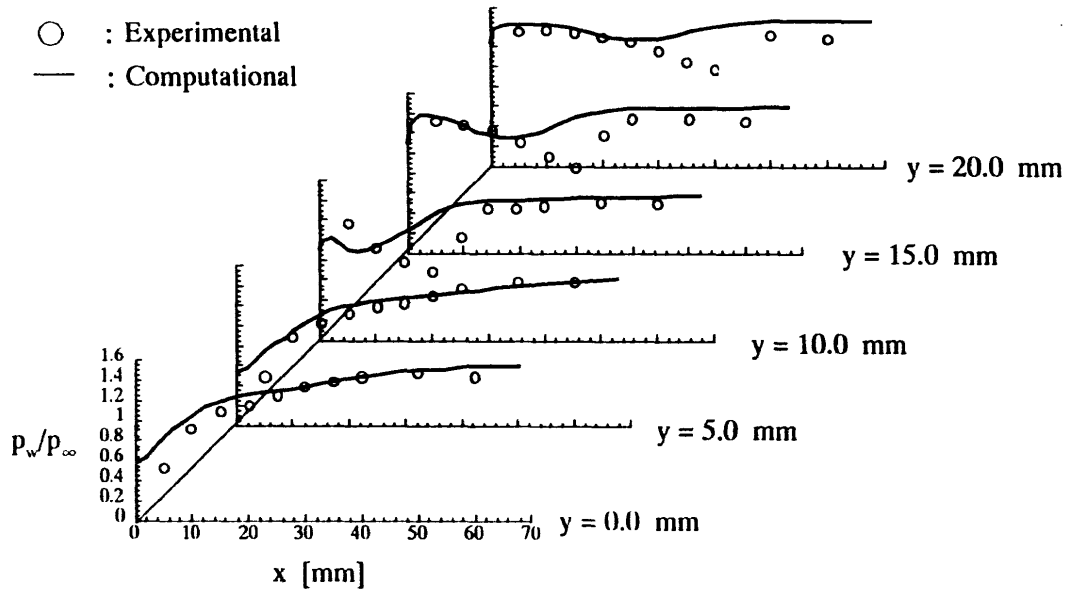


図7. 壁面静圧分布の比較

様子を可視化したものである。この図を見ると、ランプ後方において主流と噴出流により形成されるせん断層で生成する渦が成長することで発生した互いに逆回転する二つの縦渦の成長過程および渦による混合層の巻き上がりの様子が、はっきりと観察される。これらの渦は、噴出流体と主流空気を混ぜ合わせ、強い乱流混合を引き起こすことで混合促進に貢献していることが推測される。また、ランプ中心を通る断面内における噴出流の濃度分布を図9に示す。図8で観察されたように、このランプ中心断面内では渦の巻き上がりの効果が強いので、下流に行くにつれて濃度は急激に低くなる。また、噴孔のすぐ下流では、壁面近傍で濃度がかかなり高くなっている。これは、噴射直後に急激に膨張した噴出流がショックジェネレータに衝突したものと考えられ、混合促進の面から見るとあまり好ましくはない。前述の壁面静圧分布において、この領域における値が下がっているのは、この噴出流体の膨張流によるものと考えられる。

次に、ショックジェネレータより生じる斜め衝撃波が入射することにより、混合流れ場に及ぼす影響について調べた。図10に示したのは、噴出流体のリフトアップについてプロットしたものである。これは、噴出流の壁面からの距離に対応するものである。下流方向距離および高さはランプ高さで無次元化した。リフトアップ量  $z_r$  は、噴出流体濃度が0.1以上の領域に対して求めた平均高さである。この図を見ると、下流への距離  $x$  が3程度の位置から、噴出流は急激に壁面から

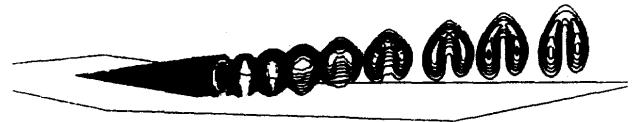


図8. 噴出流の横断面内濃度分布の変化



図9. 噴出流の流れ軸方向断面内濃度分布

離れていくようになる。この理由について、解析と実験の結果から考察を行った。噴孔下流近傍領域においては、ランプにより生じる渦や膨張波、Injectionが干渉しあう複雑な流れ場であるため、今回の解析においては斜め衝撃波の存在は明確に捉えられていない。し



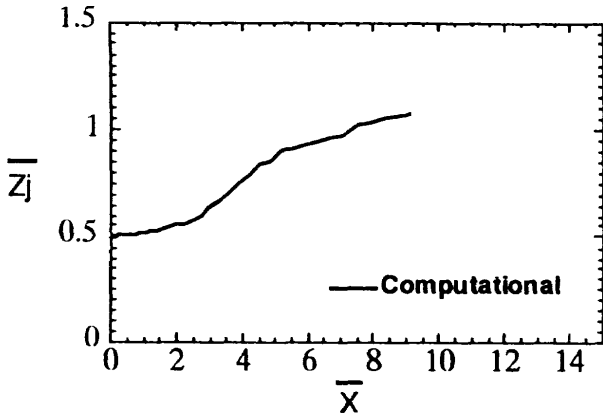


図10. 噴出流のリフトアップ

かし、図3や図6で見られる衝撃波発生板から生じている斜め衝撃波の位置と噴出流の急激なリフトアップが開始される位置との対応から、このリフトアップは斜め衝撃波の影響によるものという類推ができる。斜め衝撃波によって生じる流れ場の傾向がリフトアップに貢献するようになることも、この推察の妥当性を示していると思われる。このようにして、斜め衝撃波の存在は噴出流体の主流中へのペネトレーションを高めることで、混合促進に寄与する効果を持つものと考えられる。

これらの結果から、縦渦および斜め衝撃波による混合流れ場への影響が分かってきた。そこで、流れ場内における流体の挙動を視覚的に捉えるために、トレーサを流して流れを可視化する流跡線法を用いて観察を行った。図11に噴出流体の挙動を、図12に主流の挙動をそれぞれ示す。まず図11を見ると、噴出流は渦挙動に合わせて、回転しながら位置を入れ替えていく様子がはっきりと観察される。また、斜め衝撃波の通過する位置では、上方に持ち上げられている挙動が現れている。一方、主流については、壁面境界層付近を流れてきた主流空気が、渦に巻き込まれる形で噴出流中にエンテインメントされている様子が分かる。反対にランプの斜面を上ってきたトレーサは、混合層の表面を滑るような形になり、あまり目立った渦挙動を示さなかった。

以上の観察により、今回の研究で対象とした、超音速流れ場中に単独のランプ型インジェクタを用いて、燃料を主流と並行に噴射した時の燃料と空気の混合流れ場内における挙動がおおまかにわかった。

### 5. 結論

超音速の主流中に、ランプ型インジェクタを用いて燃料を主流と並行に噴射した時の混合流れ場の特性に

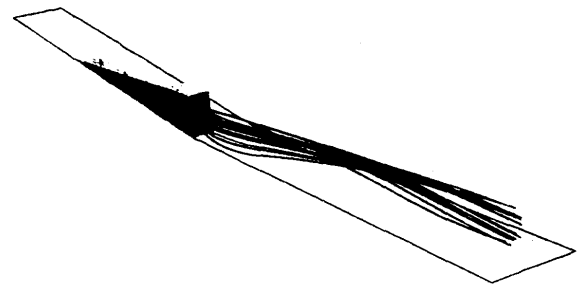


図11. 流跡線法による噴出流の挙動の観察

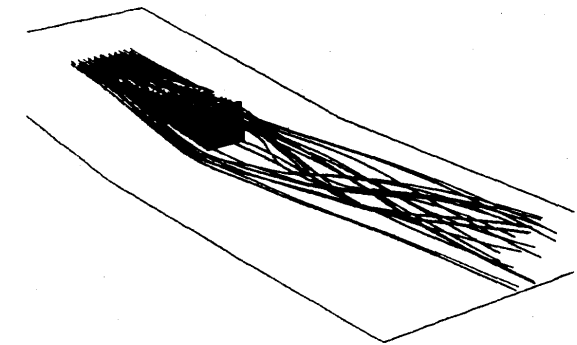


図12. 流跡線法による主流空気の挙動の観察



関して、実験とCFDにより研究を行い、以下の結論を得た。

(1) ランプ型インジェクタによって互いに逆回転する二つの縦渦が生成され、この渦が主流空気を噴出流中に巻き込みながら成長していく過程や巻き上がりの様子がはっきり観察された。

(2) 並行噴射流れ場に斜め衝撃波を発生させることによる、噴出流のリフト・アップ効果が考察された。これを利用して、燃料の主流空気中へのペネトレーションを高めることにより、混合促進に対する効果が期待される。

(3) 本研究で用いたCFDコードは、ランプ型インジェクタを持つ流れ場に対して、衝撃波に代表される流れ場形状および圧力の分布に対して、これを定量的に妥当と言える範囲で再現できる。

これらの結果より、ランプ型インジェクタを用いた燃料噴射方式および斜め衝撃波の混合層への干渉は、スクラムジェットエンジン燃焼器内流れに代表される超音速混合流れ場において、混合促進に有効な役割を果たすことが分かった。今後は、両者の混合促進効果の定量的な評価を行う予定である。

〔参考文献〕

- [1] I. A. Waitz, F. E. Marble and E. E. Zukoski, "Investigation of a Contoured Wall Injector for Hypervelocity Mixing Augmentation", AIAA J., Vol.31, No.6, June 1993.
- [2] J. P. Drummond, M. H. Carpenter, D. W. Riggins and M. S. Adams, "Mixing Enhancement in a Supersonic Combustor", AIAA Paper No.89-2794, 1989.
- [3] G. B. Northam, I. Greenberg and C. S. Byington, "Evaluation of Parallel Injector Configurations for Supersonic Combustion", AIAA Paper No.89-2525, 1989.
- [4] D. O. Davis and W. R. Hingst, "Progress Toward Synergistic Hypermixing Nozzles", AIAA Paper No.91-2264, 1991.
- [5] T. Fujimori, M. Kawai, H. Ikeda, Y. Ando, Y. Ohmori, S. Aso and M. Fukuda, "Numerical Prediction of Two and Three Dimensional Sonic Gas Transverse Injections into Supersonic Flow", AIAA Paper No.91-0415, 1991.
- [6] H. C. Yee and A. Harten, "Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates", AIAA Paper No.85-1513, 1985.
- [7] T. Cebeci and A. M. O. Smith, "Analysis of Turbulent Boundary Layers", Academic Press Inc., 1974.
- [8] T. Fujimoto, S. Sawaguchi and K. Hanawa, "CVL Application for Supersonic Wind Tunnel of Blow-Down Type", AIAA Paper No.94-2574, 1994.

## 8

## スクラムジェットエンジンにおける超音速燃焼流の計算

田口 秀之\* 川又 善博\* 中橋 和博\*\*

## Calculation of Supersonic Combustion in SCRAMJET Engines

by

Hideyuki TAGUCHI and Yoshihiro KAWAMATA

*Mitsubishi Heavy Industries, LTD.*

Kazuhiro NAKAHASHI

*Faculty of Engineering, Tohoku University*

## ABSTRACT

A numerical simulation code has been carried out to predict flow fields in supersonic combustion ramjet (SCRAMJET) engines. In order to solve supersonic combustion flow fields in the engine, a chemical model was implemented to a 2D/3D supersonic flow simulation code. The purpose of this study was to make a fast and easy code for estimation of sub-scale engine tests. In this study, the Reynolds averaged compressible Navier-Stokes equations and the chemical species continuity equations were solved. The FDS method with the MUSCL approach and the diagonalized IAF method were used to solve the N-S equations. Chemical reactions of hydrogen-air mixture were calculated by the Rogers model (5-species and 2-equations). Turbulent viscosity was calculated by the Baldwin-Lomax model. Calculations of supersonic combustion were conducted for a simplified model of the SCRAMJET engine. The results showed reasonable phenomena of the supersonic combustion.

## 1. はじめに

近年、単段宇宙往還機や極超音速航空機用の推進機関として、スクラムジェットエンジンの研究が盛んになってきている<sup>1)</sup>。スクラムジェットエンジン燃焼器の開発においては、実飛行条件を地上の試験設備で達成するのが困難であるので、数値計算を活用する必要がある。

スクラムジェットエンジン燃焼器の内部流解析を行うには、超音速流に対応し、化学反応を解けるコードが必要である。化学反応を含み実在気体

に対応した超音速燃焼流解析コードはいくつか開発が試みられてきた<sup>2)</sup>が、その実験および測定の困難さから、十分に検証されていないのが現状である。

現在、科学技術庁航空宇宙技術研究所において小型スクラムジェットエンジン(図1)の開発が行われている。そこで我々は、風洞試験で得られる結果を用いて解析コードの検証を行い、そのコードをエンジンの性能予測や設計最適化に活用することを計画している。

本研究では、超音速燃焼流解析コードを作成し、

\* 三菱重工業株式会社 名古屋誘導推進システム製作所

\*\* 東北大学工学部機械航空工学科

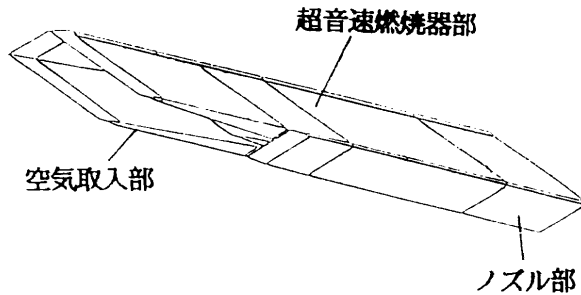


図1 小型スクラムジェットエンジン

試験結果と比較・検討するための基礎を築くことを目的とした。コードを作成するにあたっては、設計ツールとして使用するという観点から、多く用いられてきたモデルを採用した。

## 2. コードの概要

### 2.1 数値解析手法

基礎方程式としては3次元Navier-Stokes方程式を用い、これをTVD化された差分法で解いた。対流項にはRoeのFDS<sup>3)</sup>を適用し、van LeerのMUSCL法<sup>4)</sup>を用いて高次精度で評価した。MUSCLには基礎変数(各化学種の密度、速度成分、圧力)を用いた。粘性項は中心差分で評価した。時間積分には3次元でも計算が速いPulliam-Chausseeの対角化IAF法<sup>5)</sup>を用いた。このときの固有行列としては多化学種に対応した固有行列<sup>6)</sup>を使用した。

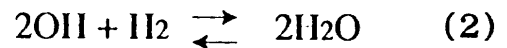
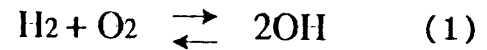
### 2.2 物性値

化学種の粘性係数、熱伝導率、および相互拡散係数の算出にはEnskog<sup>7)</sup>-Chapman<sup>8)</sup>の理論による式を使用した。定圧比熱はJANAFのThermochemical Tableを最小自乗近似した温度の多項式で表した。温度はエンタルピから反復法で求めた。

### 2.3 化学反応モデル

スクラムジェットエンジンの燃料としては水素が想定されているので、水素/空気の燃焼反応をモデル化する必要がある。ここでは比較的単純な

Rogersモデル<sup>9)</sup>を採用した。このモデルは、4化学種(H<sub>2</sub>、O<sub>2</sub>、H<sub>2</sub>O、OH)の平衡反応を次の2つの反応式で表し、窒素(N<sub>2</sub>)は他と反応しないものとしている。



モデルの制約から、反応計算は初期温度が1000K以上の時に行い、計算においては当量比を0.2~2.0の範囲に限定した。

### 2.4 乱流モデル

壁付近の境界層の乱流粘性係数を計算するモデルとしては、適用例の多いBaldwin-Lomax<sup>10)</sup>の代数乱流モデルを用いた。拡散係数については、Fickの法則(Le=1)を適用した。燃料噴射流付近の乱流を表すモデルは省略した。

## 3. 検証計算

コード検証のためにくさびを通過する空気/水素混合流の計算を行い、理論値との比較を行った。

計算結果を図2(a)静温、b)H<sub>2</sub>O質量分率)に示す。下の境界は壁面、上の境界は鏡面となっている。図には壁の始点から出る衝撃波とくさびによる衝撃波(圧縮波)がよく現れている。図3は衝撃波角、マッハ数、静圧、静温の理論値と計算結果を比較したものである。理論値を求めるにあたって比熱比は1.4とし、衝撃波角はプラントル・マイヤ流れ、マッハ数、静圧、静温は等エントロピ流れを仮定して求めた。各計算結果と理論値はほぼ等しく、実際の流れ場をよく表しているといえる。

図2a)において衝撃波後流で静温が大きく上がっており、図2b)において衝撃波後流でH<sub>2</sub>Oの質量分率が上がっている。このことから、反応が

起こり、反応熱が生じていることがわかる。  
 図2b)ではH<sub>2</sub>Oの質量分率が衝撃波後流で流れ方向に上昇している。これは流速が速いために反応の進む過程が空間的に表れているものと考えられる。

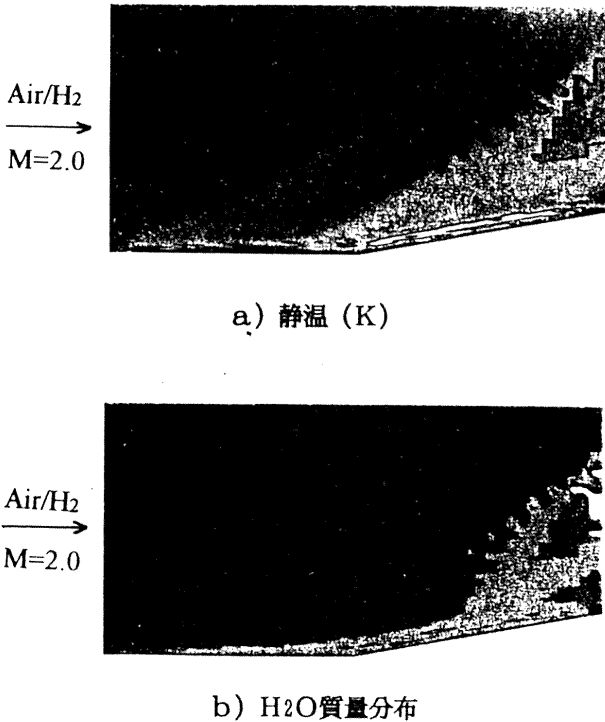
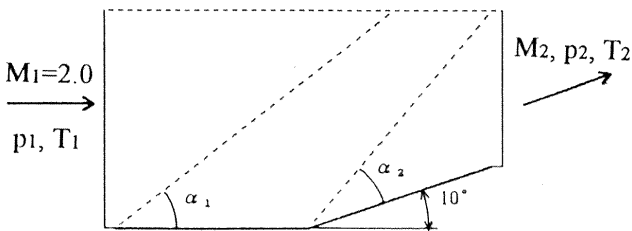


図2 くさびを通過する空気/水素予混合流



	理論値	計算結果
衝撃波角( $\alpha_1$ )	30.0°	30°
衝撃波角( $\alpha_2$ )	37.3°	35°
出口マッハ数	1.65	1.6
静圧比( $p_2/p_1$ )	1.495	1.5
静温比( $T_2/T_1$ )	1.186	1.2

図3 理論値と計算結果の比較

## 4. エンジン内部流の計算

### 4.1 計算領域

図4に現在開発中の小型スクラムジェットエンジンの内部形状を示す。

図4a)はエンジン側壁の2面図である。燃焼器部には保炎のための後向きステップが設けられ、燃焼による熱閉塞を防ぐために流路が拡大している。図中に2次元計算を行った領域が示してある。計算において燃料はステップ後面から水平噴射した。

図4b)はエンジン側壁の鳥瞰図である。図中に3次元計算を行った領域が示してある。3次元では計算時間がかかるので、計算は燃焼器の平行部分のみとし、12個ある水平噴射器の内、2個が入る領域について行った。

図5に2次元計算時の計算格子を示す。格子数は(101, 41)である。

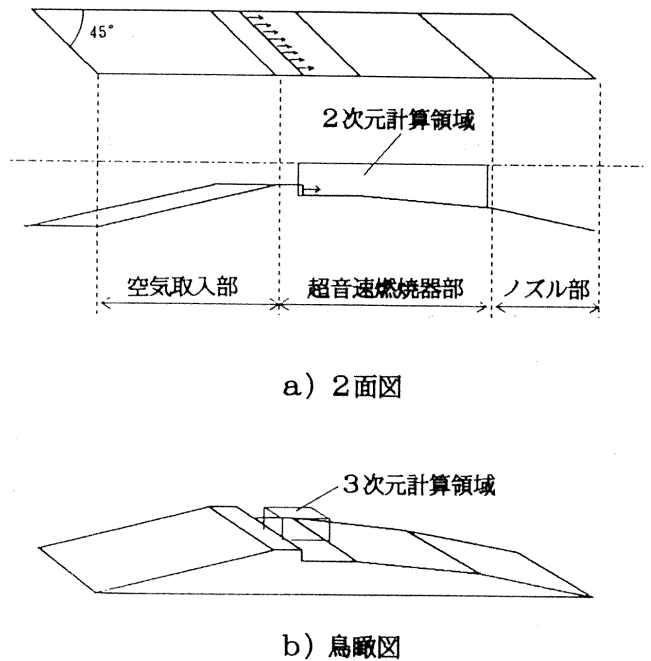


図4 エンジン内部形状

4.2 2次元計算

エンジンの燃焼器部について、2次元計算を行った。図6にこのときの境界条件を示す。下は壁面、上は鏡面となっており、入口の壁面側1/10がステップでここから水素燃料を水平噴射している。

図7に計算結果 (a) 静圧、b) 静温) を示す。この結果は、時間間隔0.5Sで繰り返し数500回のもので、計算時間としてはEWSで約90分を要した。

図7 a)において、ステップで生じた衝撃波が壁で反射している様子が確認できる。図7 b)において空気流と水素流の間的高温域が広がり、静温で約2000Kに達している。この領域のマッハ数は超音速に保たれているので、この結果は超音速燃焼を表しているものと考えられる。

図8に計算結果から抽出した壁面静圧分布を示す。ここで、壁面静圧(Pw)は主流の総圧(Pta)で無次元化されている。壁面静圧が大きく振動しな



図5 2次元計算の計算格子

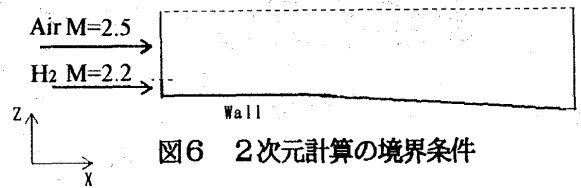


図6 2次元計算の境界条件

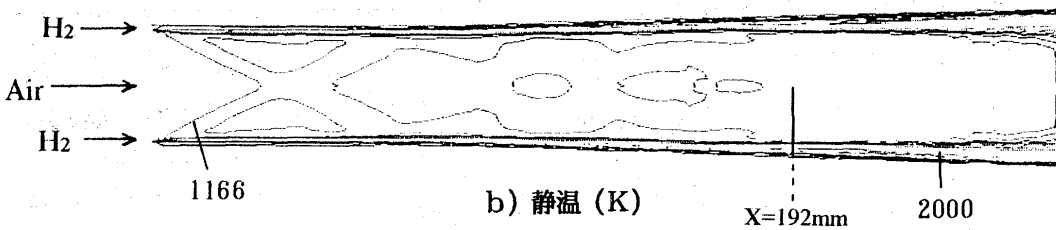
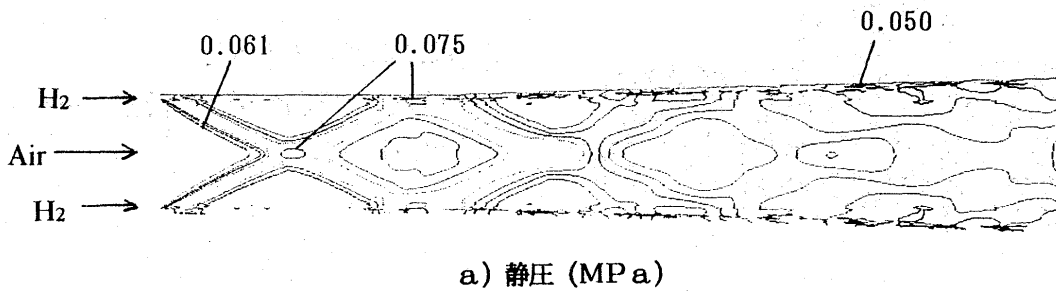


図7 2次元計算結果

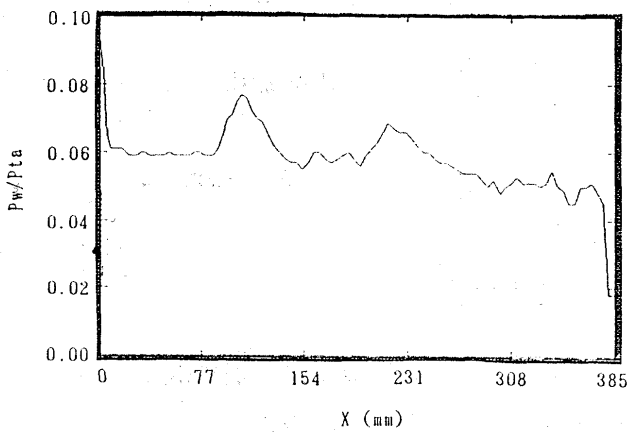


図8 壁面静圧分布

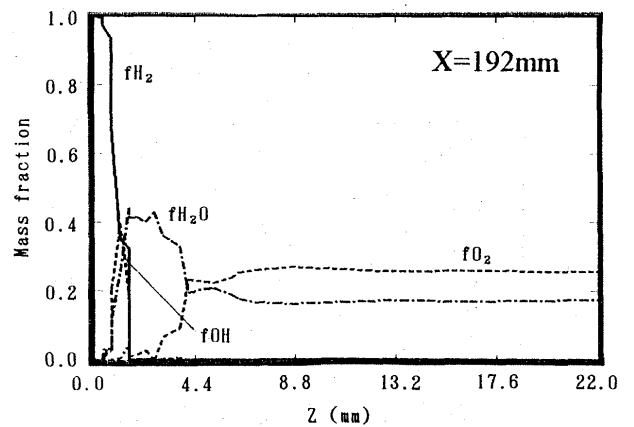


図9 化学種分布

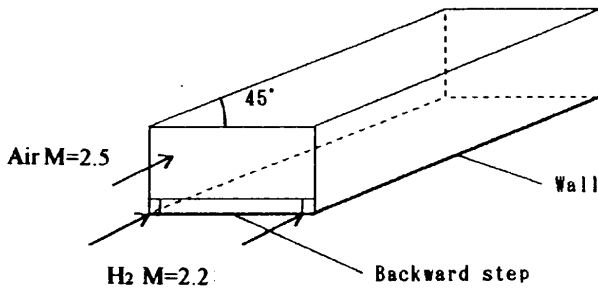


図10 3次元計算の境界条件

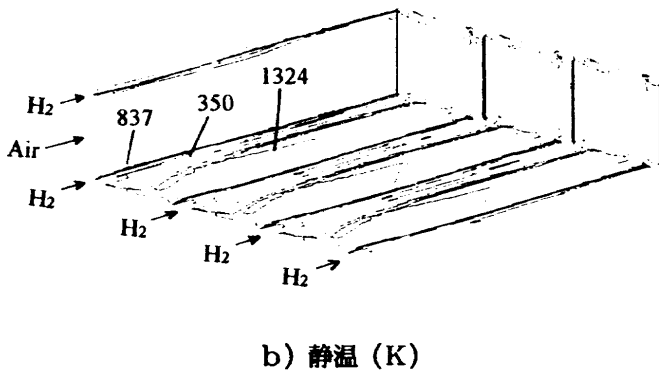
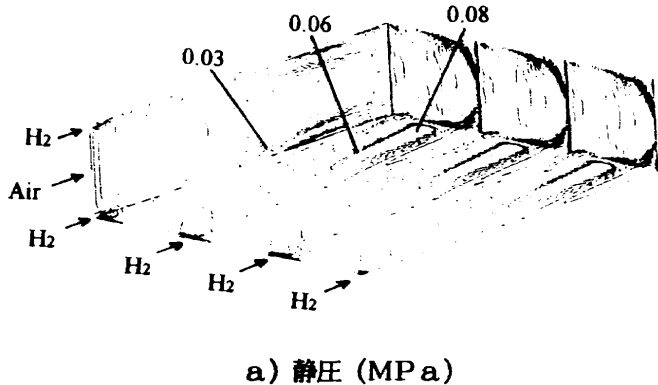


図11 3次元計算結果

がら下がっていく傾向は燃焼器コンポーネント試験での傾向<sup>11)</sup>とよく一致している。

図9は計算結果から抽出した流れに垂直な方向の化学種分布である。空気流と水素流の間の混合層で $H_2O$ と $OH$ が生成され、 $H_2$ と $O_2$ が減少している。これらより混合層で反応が起こっていることが判る。

#### 4.3 3次元計算

燃焼器の燃料噴射孔近傍について3次元計算を行った。図10にこのときの境界条件を示す。流

れの上流から見て下は壁面、上と左右は鏡面とした。上から見た計算領域の形はエンジン形状に合わせ、鋭角が $45^\circ$ の平行四辺形となっている。入口の壁面側 $1/10$ はステップとなっており、ステップ左右の境界付近から水素燃料を噴射している。

図11に混合計算の結果(a)静圧、b)静温を示す。結果を複写して3つを並べて表示してある。この結果は、時間間隔 $0.5S$ で繰り返し数300回のもので、計算時間としてはEWSで約160分を要した。

図11a)で下流の壁面に静圧の高い領域が3つあるのは、ステップを通過した空気流が曲げられてここに当たっているためと考えられる。図11b)では、高温の空気流と低温の水素流の混合の様子が温度の勾配として表れている。

今回の3次元計算は試行という意味で噴射孔間の領域のみを行ったが、今後設計ツールとして活用するためにはもっと広い領域を計算する必要がある。このとき噴射流をある程度正確にとらえようとすると、格子数を非常に多くする必要があり、EWSでは対応できなくなってしまう。今後は噴射流の詳細な解析は犠牲にして、ある程度粗い計算でエンジン全体の性能を把握できるようにする予定である。

## 5. まとめ

スクラムジェットエンジン燃焼器の内部流解析を行うために、超音速燃焼流解析コードを作成し、コードの検証とエンジン内部流の計算を行った。その結果、エンジン内部流の2次元計算において超音速燃焼が確認でき、その壁面静圧分布の傾向は燃焼器コンポーネント試験での傾向と一致した。今後は小型スクラムジェットエンジンの風洞試験との比較によりコードの検証を行い、エンジン全体の性能解析へと結びつける予定である。

## 参考文献

- 1) Billig, F.S., "Research on Supersonic Combustion," AIAA J. Propulsion, Vol.9, No.4, 1993, pp.499-514.
- 2) Uenishi, K., Rogers, R.C. and Northam, G.B., "Three Dimensional Computations of Transverse Hydrogen Jet Combustion in a Supersonic Airstream," AIAA 87-0089, 1987.
- 3) P. L. Roe, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," J. Comp. Phys., 1981, pp.357-372.
- 4) van Leer, B., "Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A second order sequel to Godunov's method," J. Comp. Phys., Vol.32, 1979, pp.101-306.
- 5) Pullium, T.H. and Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm," J. Comp. Phys., Vol.39, 1981, pp.347-363.
- 6) Wada, Y., Kubota, H., Ishiguro, T. and Ogawa, S., "A Fully Implicit High-Resolution Scheme for Chemically Reacting Compressible Flows," 2nd Hyperbolic Problems, 1988.
- 7) Enskog, D., Physik. Z., Vol.12, 1911, p.533.
- 8) Chapman, S., Trans. Roy. Soc. London, Vol.A238, 1912, p.433.
- 9) Roges, R.C. and Chinitz, W., "Using a Global Hydrogen-Air Combustion Model in Turbulent Reacting Flow Calculation," AIAA J. Vol.21, 1983, pp.586-592.
- 10) Baldwin, B.S., and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA 78-257, 1978.
- 11) 小室ほか, "矩形スクラムジェット燃焼器の実験," 第28回航空原動機に関する講演会講演集, 1988, pp.94-99.



## 高温衝撃風洞流れの数値シミュレーション

### Numerical Simulation of High Enthalpy Shock Tunnel

伊藤勝宏 (航技研 角田)  
Katsuhiko ITOH(NAL-KRC)

高橋政浩 (クィーンズランド大)  
Masahiro TAKAHASHI(UQ)

#### Abstract

One of the most important problems on a development of a reentry vehicle is the prediction of real gas effect. In order to obtain the real gas data of reentry by ground test, the hypervelocity wind tunnel having extremery high reservoir condition, in which temperature and pressure are up to 10,000K and 1,500atm, is required. A free piston shock tunnel is the most useful facility which can produce such hypervelocity flow. The National Aerospace Laboratory is planning to develop the large free piston shock tunnel which can simulate the reentry of HOPE. In the present paper, CFD applications to the design and operation of the free piston shock tunnel are studied. The two topics are presented. One is the quasi-1D simulation to predict actual performances of free piston shock tunnels. Other is the axisymmetric 2D simulation of the reflected shock-boundary layer interactions to clarify the mechanism of the driver gas contamination.

## 1 はじめに

大気圏再突入時の実在気体効果の予測は、宇宙往還機開発の重要課題の一つである。そのための風洞試験には、温度 $\sim 10,000\text{K}$ 、圧力 $500 \sim 1,500$ 気圧という極限的な風洞貯気槽を要し、それが可能なほとんど唯一の実験装置が自由ピストン型衝撃風洞である。現在航技研では、HOPEの再突入実在気体流れを再現できる大型の自由ピストン型衝撃風洞建設設計画が進められている。

自由ピストン型衝撃風洞は、ピストン駆動用空気貯気槽、圧縮管、衝撃波管および極超音速ノズルからなる(図1)。駆動気体を比較的重いピストンで断熱等エントロピー圧縮し高温高圧にした後衝撃波管を駆動するので、発生する衝撃波の強さが飛躍的に向上する。

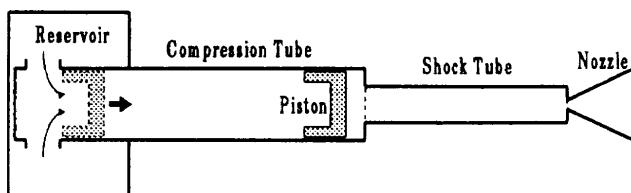


図1 自由ピストン型衝撃風洞

ただし、実際の性能は、駆動気体圧縮過程や衝撃波生成過程における種々の空気力学的損失、駆動気体による試験気体汚染等により単純衝撃波管理論を下回る。そこで、開発・運用へのCFD利用が重要になってくる<sup>1,2)</sup>。

本研究では、まず準1次元計算用に種々の空気力学的損失をモデル化し、短時間でパラメトリックスタディが可能な準1次元性能予測計算法を開発した。また、駆動気体汚染による試験気流持続時間の短縮をより正確に予測するため、その原因と見られる衝撃波管端で反射した衝撃波と境界層の干渉に重点を置いた数値シミュレーションに着手した。

## 2 準1次元性能予測計算

駆動気体圧縮過程における熱損、駆動気体の衝撃波管への流出損失および衝撃波背後に成長する境界層のため、実際に自由ピストン型衝撃風洞で発生する貯気槽圧力・温度は単純理論値を下回る。

ただし、実際の性能値と理論値との食い違いの程度は、試験条件および風洞のサイズと形状により30%から90%ほどまで変化し、その予測は容易ではない。そこで本研究では上記損失を準1次元計算に適した形でモデル化し、CFDコードに組み込み性能予測法を開発した<sup>1)</sup>。

## 2.1 損失モデル

- ピストン駆動空気の流出損失
  - 流出部にオリフィスを設置<sup>1</sup>
- 駆動気体の熱損
  - 乱流熱伝達モデル<sup>3</sup>で算出

$$q = 0.037 Re^{4/5} Pr^{1/3} \kappa^* (T_w - T_r) / L_1 \quad (1)$$

$$Re = \rho^* u_1 L_1 / \mu, \quad \kappa = C_p \mu^* / Pr$$

$L_1, u_1, T_1$  : 駆動気体の長さ、平均速度、温度

$T_r$  : 回復温度

添え字\* :

$$T^* = 0.5(T_1 + T_w) + 0.22 Pr^{1/3} (\gamma - 1) M^2 T_1$$

- 駆動気体の流出損失
  - 圧縮管-衝撃波管流出部にオリフィスを設置
- 衝撃波背後の境界層
  - 排除厚で衝撃波管径を変化

$$\delta^* = 0.45x / Re_x^{1/5} \quad (2)$$

## 2.2 圧縮管特性

まず、始動から停止までの比較的長時間に渡るピストン挙動に関し、図2に示すクィーンズランド大のT4によるピストン軌跡計測結果との比較から、ピストン駆動空気の流出損失モデルについて検討する。一点鎖線で示すように、流出損失を0とした計算結果は、実際のピストン挙動を捉えていない。オリフィス開口比を2.7(実線)まで上げると一致する。T4のようにピストンが弁として作動する方式では、確かに流出損失0とは考えにくいのだが、残念ながら妥当な損失量を直接計測することはできない。また、ピストン駆動空気の前方向への漏れ、あるいはピストンの摩擦の影響も考え得る。

一方、航技研では流出損失がほとんどない隔膜破断ピストン発射方式の小型圧縮管を用い、圧縮管端付近のピストン挙動を高速カメラで直接的に詳細に観測しており、それとの比較を図3に示す。この場合は流出損失0の計算結果と良く一致する。

次に駆動気体熱損モデルであるが、残念ながらこれも直接的計測が困難なので、熱損による最大圧縮比上昇から間接的に検討する。図4は、クィーンズランド大の小型圧縮管で計測された最大圧縮比<sup>4</sup>と本熱損モデルおよび断熱の計算結果との比較である。本熱損モデルは最大圧縮比上昇を良好に捉えているが、この場合も駆動気体の後方への漏れの影響も考えられ、このモデルの妥当性は確定的ではない。

本損失モデルの一般性を検討するため、上述のT4以下小型装置で調整した損失モデルパラメータを使って、大型の装置、カリフォルニア工科大のT5および

DLRのHEGの圧縮管圧力履歴について比較した。図5(a)(b)に示すように、全体的には本損失モデルで圧縮管特性を捉えていると言えそうだが、細部については計測結果との違いが見られ、今後漏れや摩擦等のさらなる検討を要する。

## 2.3 衝撃波管特性

クィーンズランド大のT4およびカリフォルニア工科大のT5の衝撃波管端圧計測結果との比較を図6(a),(b)に示す。T4はUnder-tailored、T5はOver-tailoredである。先述したように本損失モデルにはまだ不確定要素があるが、十分実用に耐える衝撃波管特性を再現している。

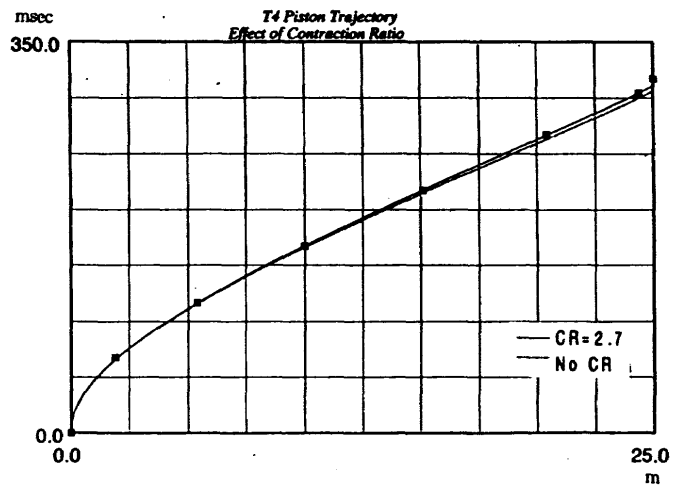


図2 T4 ピストン軌跡

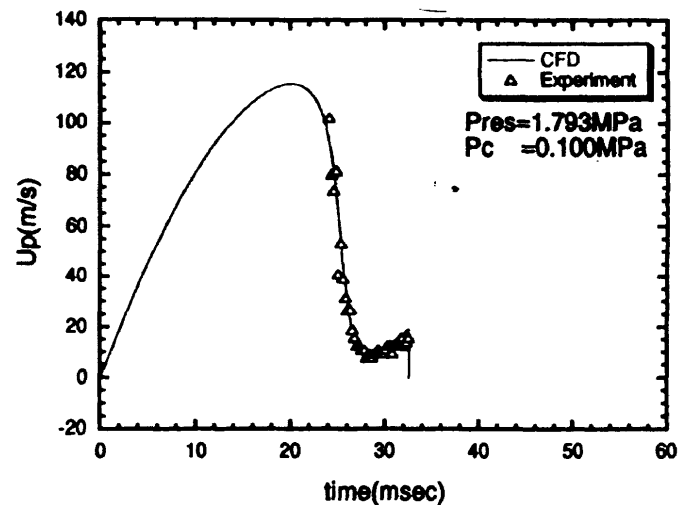


図3 NAL-CTA ピストン速度変化

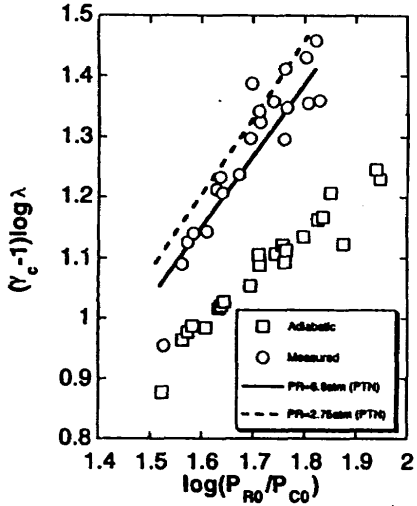


図4 最大圧縮比上昇

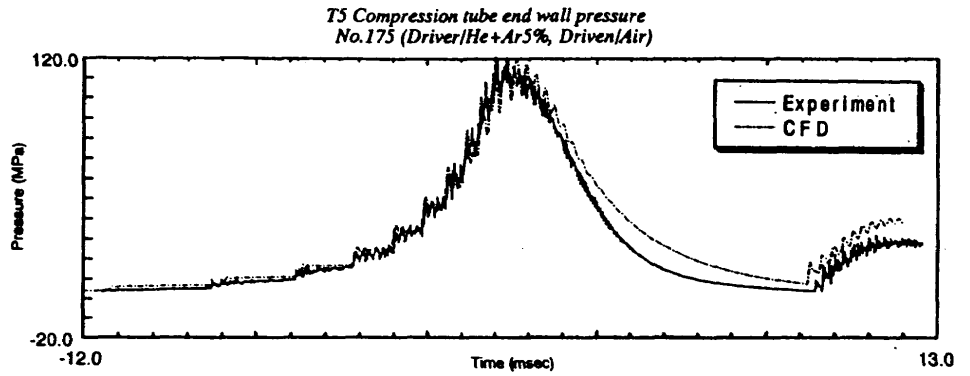


図5 (a) T5 圧縮管圧力の時間変化

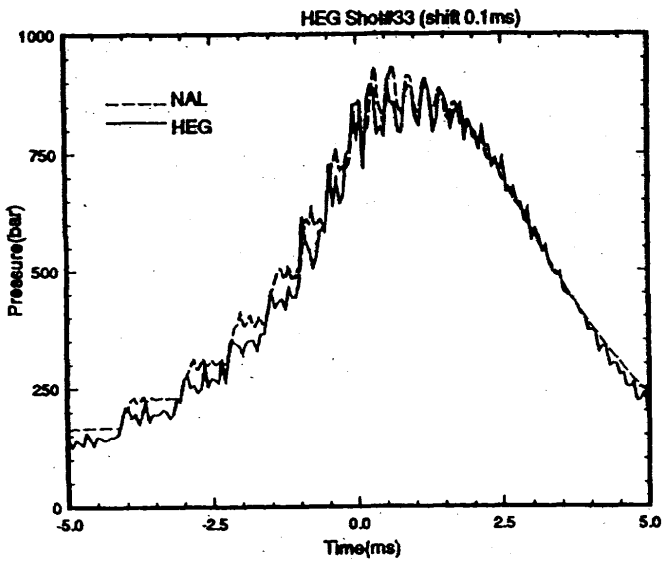


図5 (b) HEG 圧縮管圧力の時間変化

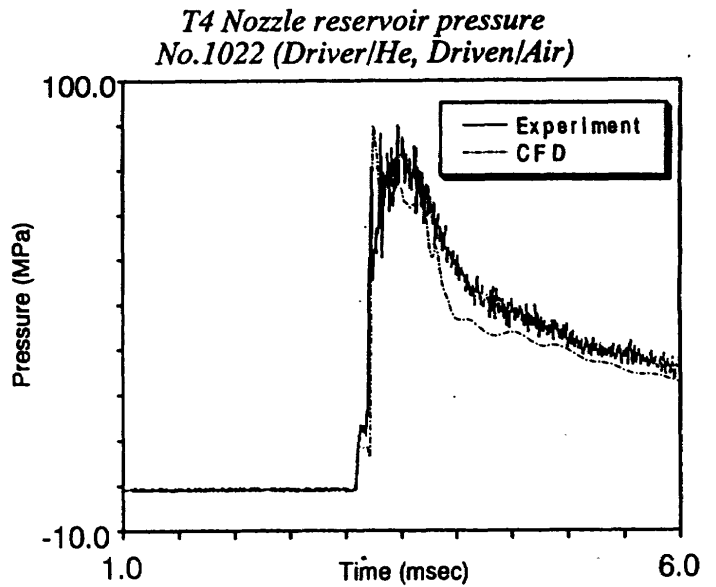


図6 (a) T4 衝撃波管端圧の時間変化

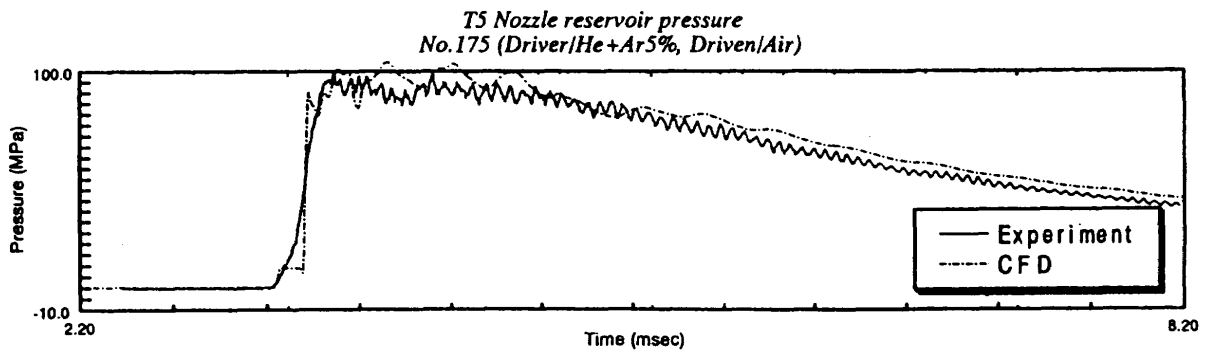


図6 (b) T5 衝撃波管端圧の時間変化

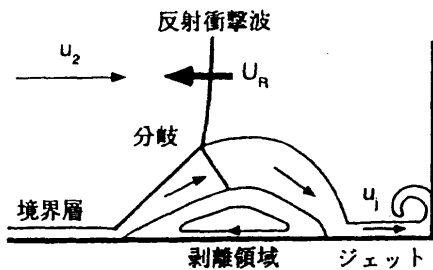
### 3 反射衝撃波／境界層干渉による駆動気体汚染

衝撃波管端で反射した衝撃波は境界層と干渉し、それが試験気体-駆動気体接触面へ達すると駆動気体の試験気体への流入を促進し、試験時間を短縮してしまう。この駆動気体汚染問題についてはこれまでに管端付近の壁圧や管壁への熱流束の計測及び光学観察による研究が多数報告され解析モデルも提案されている<sup>5-7</sup>が、その多くは入射衝撃波マッハ数の小さい低エンタルピ条件もしくは試験気体密度の低い条件であるうえ、未だ正確な試験気体流持続時間の予測ができていない。そこで本研究では、高エンタルピ条件下の衝撃波管端付近の反射衝撃波／境界層干渉過程を明らかにし、駆動気体汚染を抑制する衝撃波管の設計法や作動条件を見出すことを目的として、CFD 利用に着手した。

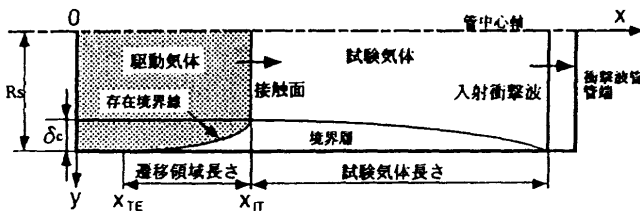
#### 3.1 数理モデル

基礎方程式は軸対称 2 次元 Navier-Stokes 方程式、駆動気体および試験気体はともに比熱比一定の完全気体、入射衝撃波背後に形成される境界層は全域乱流境界層と仮定した。

初期条件として衝撃波管内を伝播する衝撃波、接触面および境界層を次のようにモデル化して与え、衝撃波管端付近の領域についてのみ計算を行った。



予想される駆動気体流入メカニズム



初期条件モデル

- 入射衝撃波前方

衝撃波管試験気体の初期値を与える。

- 入射衝撃波-接触面間

管中央部は衝撃波管理論より得られる入射衝撃波背後の状態とする。

試験気体長さ、境界層厚さ $\delta_c$ 、及び境界層内の速度及び密度分布は Mirels の乱流境界層モデル<sup>10</sup>により与える。

- 接触面背後

管中央部は衝撃波管理論による接触面背後の状態とする。境界層は入射衝撃波-接触面間と同様に Mirels モデルにより与える。ただし、境界層厚さは接触面における値 $\delta_c$ で一定とする。

#### 3.2 結果及び考察

高さ 8.9cm の矩形断面衝撃波管（衝撃波管／駆動部の断面積収縮比 0.51）における入射衝撃波マッハ数 8 の Over-tailored 条件（接触面からの反射波前後の圧力比 1.521）の 2 次元解析結果より密度  $\log_{10}(\rho/\rho_1)$  及び圧力  $\log_{10}(p/p_1)$  の等高線図を図 7 に示す。駆動気体及び試験気体はそれぞれヘリウム及び高温窒素を模擬した比熱比 1.3、分子量 26 の完全気体とし、初期圧力比 1550、試験気体初期圧 266.6Pa である。図 7 には、まず反射衝撃波が境界層との干渉により管側壁付近で分岐し、さらに接触面との干渉後、駆動気体中を伝播する透過衝撃波の分岐領域が急激に拡大し、やがて X 型衝撃波へ移行する様子が捕らえられている。この傾向は同様の衝撃波マッハ数及び初期圧力比（ただし駆動気体は水素）の実験結果（図 8<sup>6</sup>）と一致している。

図 9、図 10 及び図 11 は直径 30mm、長さ 4m の円形断面衝撃波管（断面積収縮比 0.09）における入射衝撃波マッハ数 10 の Tailored 条件の場合の等高線図（温度、駆動気体の質量分率）、管中心線及び管壁の圧力分布を示している。駆動気体及び試験気体はそれぞれヘリウム及び、高温空気を模擬した比熱比 1.25、分子量 25.9 の完全気体とし、初期圧力比 686、試験気体初期圧 10kPa である。この条件の場合、試験気体中を伝播する反射衝撃波は先の例と同様に分岐構造を伴っているのに対し、反射波と接触面との干渉後駆動気体中を伝播する透過衝撃波の形状は垂直衝撃波に近い形状で、先の例で見られた透過波の X 型衝撃波への移行は見られない。また、この条件の場合、管径に対して剥離の影響を受ける領域が小さく、管側壁付近の斜め衝撃波部分を通り、管中央の垂直衝撃波を通過した主流より高い総圧を維持している駆動気体の量が少ないため、透過衝撃波通過後ほぼ静止する駆動気体主流に対して試験気体中へ流入する駆動気体の流量の割合が小さい。これに対し、透過波が X 型衝撃波に移行して剥離の影響が管断面全体に及んだ先の例の場合、透過波を通過した駆動気体のほとんどが高い総圧を維持しているため、試験気体中へ流入する駆動気体の流量が大きい。このことから試験気体中への駆動気体の流入現象には透過衝撃波の形状が大きく影響するものと考えられる。また、この 2 つの条件について接触面上流側の駆動気体流の状態及び管径（矩形断面の場合は高さ）から計算した Reynolds 数  $Re_{3D}$  は衝撃波マッハ数 8 及び 10 の場合でそれぞれ  $6.7 \times 10^5$  及び  $1.9 \times 10^6$  であり、両計算結果の比較から  $Re_{3D}$  が小さい方が試験気体中へ流入する駆動気体の流量の割合が大きい傾向が得られた。最後に、後者の条件では、衝撃波管管端をノズルに開放した場合の試験気体流出時間をスロート閉塞条件より見積るとスロート／衝撃波管の面積比 1/9 の場合で約 300 $\mu$ sec となるのに対して、数値解析の結果では管側壁に沿って流入した駆動気体の管端到達時刻は入射衝撃波の反射から約 80 $\mu$ sec 後であった。

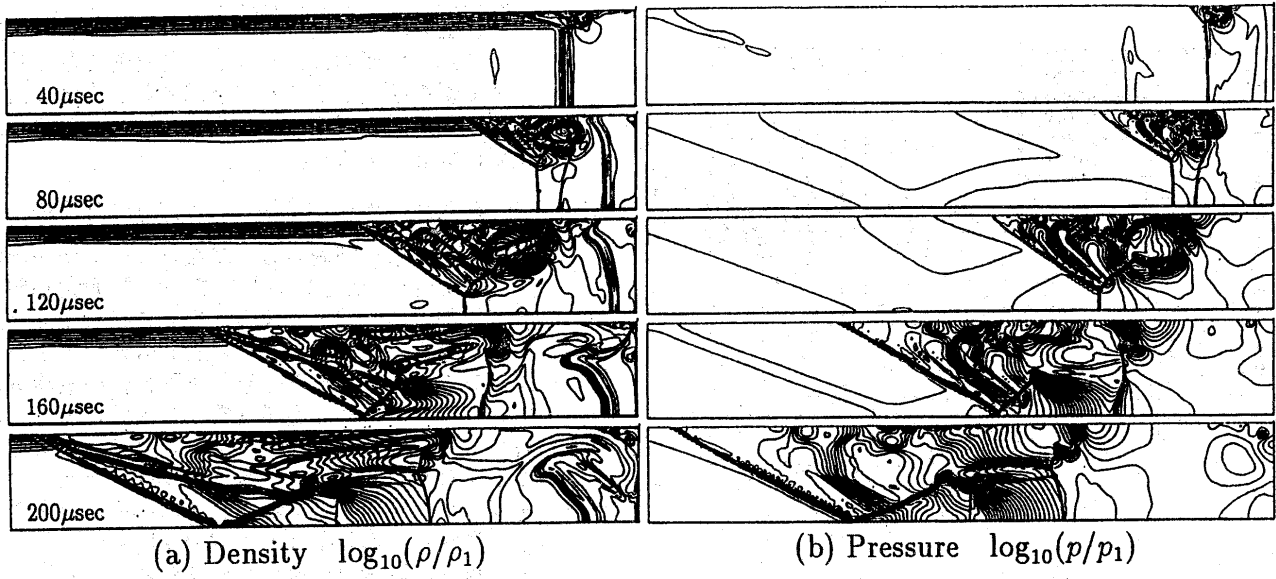


図7 反射衝撃波/境界層干渉 ( $M_s=8$ , Over-tailored)

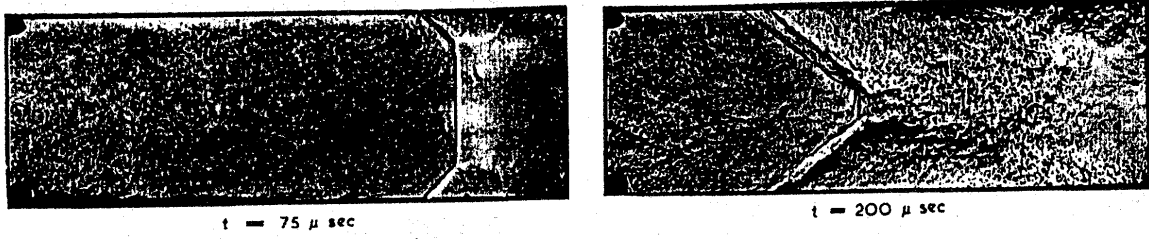


図8 反射衝撃波/境界層干渉 (シュリーレン写真)

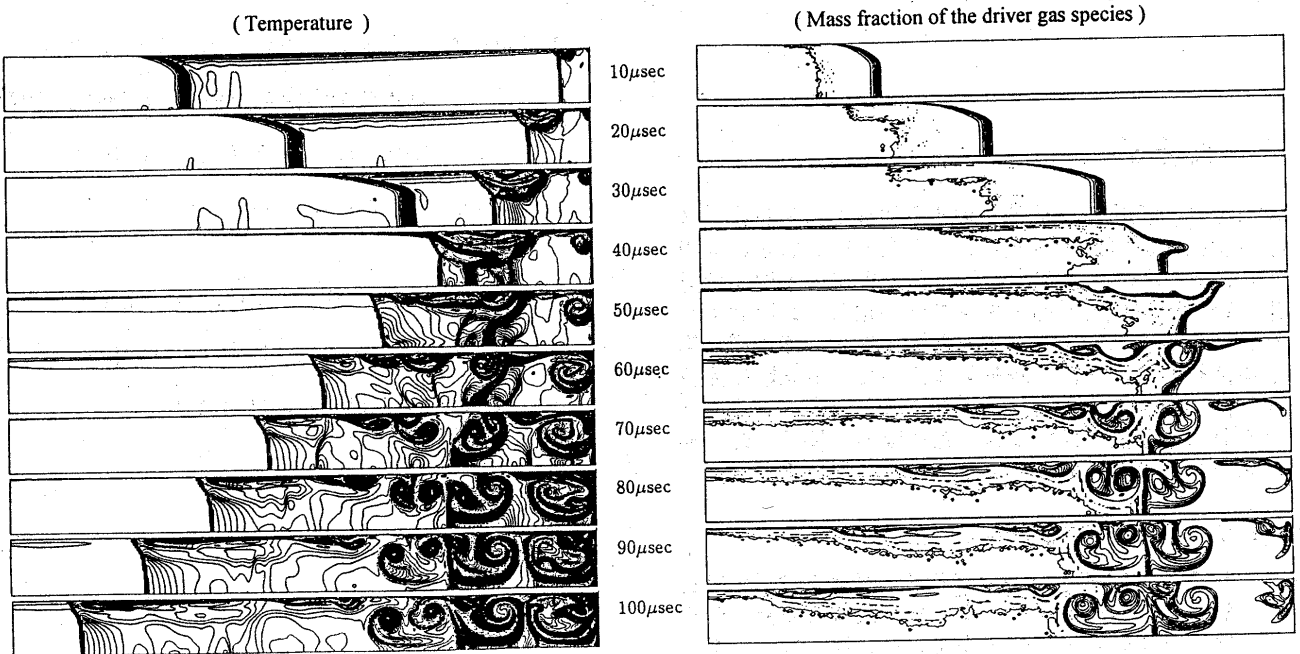


図9 反射衝撃波/境界層干渉 ( $M_s=10$ , Tailored)

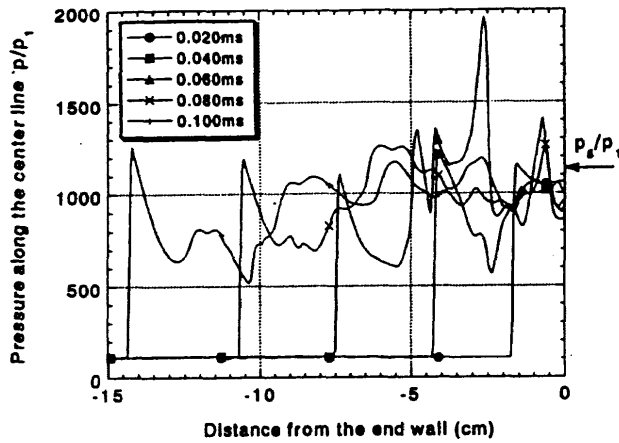


図10 中心軸圧力分布

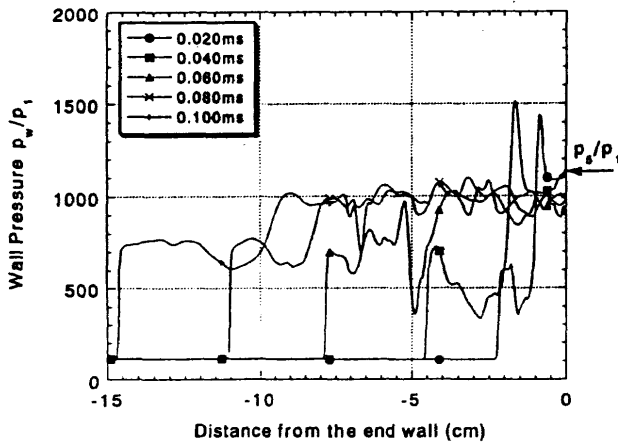


図11 壁圧分布

## 4 まとめ

HOPE 再突入実在気体流れの再現可能な大型自由ピストン型衝撃風洞建設へ向け、その空力設計および運用のためのCFD技術開発を行った。まず準1次元計算用に種々の空気力学的損失をモデル化し、短時間でパラメトリックスタディが可能な準1次元性能予測計算法を開発した。また、駆動気体汚染による試験気流持続時間の短縮をより正確に予測するため、その原因と見られる衝撃波管端で反射した衝撃波と境界層の干渉に重点を置いた数値シミュレーションに着手した。

### ● 準1次元性能予測計算

ピストン駆動空気の流出損失、駆動気体の熱損、駆動気体の流出損失および衝撃波背後の境界層を準1次元計算用にモデル化した。残念ながらその直接的検証は非常に難しく、またピストンと圧縮管壁の隙間からの漏れあるいは摩擦の影響も未知数で、今回のモデル化はまだ確定的なものではな

い。ただし、衝撃波管特性の再現は十分実用的であり、風洞の空力性能予測は可能である。未知数として残った要因は、ピストンを最適作動させるうえで影響を及ぼすことが予想され、大型自由ピストン型衝撃風洞の運用へ向け、適切な定量化が重要になるであろう。

### ● 反射衝撃波/境界層干渉による駆動気体汚染

駆動気体汚染を抑制する衝撃波管の設計法や作動条件を見出すことを目的として、まず、反射衝撃波/境界層干渉が駆動気体汚染を引き起こすメカニズムの解明に重点を置いた基礎的数値シミュレーションを試みた。その結果、駆動気体の試験気体中への流入現象には透過衝撃波の形状が大きく影響し、 $Re_{3D}$ が小さい場合、流入がより顕著になることがわかった。今後、さらに各種パラメータを変えた計算を行い、駆動気体の流入現象と衝撃波管形状及び作動条件との相関を明らかにし、確実に目的の試験気体流持続時間が得られる風洞設計・運転法の確立を目指す。

終りに臨み、計算および実験に協力していただいた航技研角田の谷、丹野研究員、実験データを提供していただいたクィンズランド大ストーカー教授、カリフォルニア工科大ホーニング教授ならびにDLRのアイテルベルク博士に心から感謝の意を表します。

### 参考文献

1. Tani, K., et al., Shock Waves, Vol.3, No.3, 1994
2. Jacobs, P. A., AIAA J., Vol.32, No.1, 1994
3. Eckert, E. R. G., J. Aero. Sci., 1955
4. Page, N. W., et al., Proc. 14th ISSW, 1983
5. 松尾ら、日本機械学会論文集 40 巻 339 号, 1974
6. Holder, D.W., et al., A.R.C.22-891, 1961
7. L.Davies : A.R.C.-CP-880, 1967.
8. Stalker, R.J., et al., AIAA J. Vol.16, 1978
9. Baldwin, B.S., et al., AIAA 78-257, 1978
10. Mirels, H., NACA TN-3712, 1956

# 圧縮性流れに対する楕円型解適合格子法

山川 勝史\*, 松野 謙一\*\*, 里深 信行\*\*

## Adaptive Grid Method Using Elliptic Equation for Compressible Flows

by

Masashi YAMAKAWA, Kenichi MATSUNO and Nobuyuki SATOFUKA

### Abstract

An adaptive grid generation method using elliptic equations is developed for compressible flows. In the present adaptive method, a control function is connected with a weight function, which controls the grid density. Thus, the weight function is important to generate the adaptive grid of high quality. A new approach for making the weight function is tried in this paper. To construct the weight function, a combination of the actual distribution of a flow property with a fictitious distribution of an artificial property is used.

The adaptive method is applied to many shocked-flow problems of one and two dimension. It is shown that the new weight function works well and the present adaptive method is promising for compressible flows, especially, shocked flows.

### 1. 序論

計算流体力学の分野において格子の形成は重要な問題の一つであり、その格子形成法の一つとして解適合格子法がある。

解適合格子法とは、物理量の変化にあわせて格子間隔を大きくしたり小さくしたりして、格子間隔に対する物理量の変化の割合を一様にしようとするものである。これにより少ない格子数で、必要なだけの分解能を持つ計算格子を形成することができる。さらに解適合格子法の利点として、この最適格子形成を自動で行い、かつ見落としていた物理変化をも捕える可能性があるということがあげられる。

解適合格子形成において様々な方法が提案されているが、本論文では格子間隔の大きさを物理変化の割合と反比例するように決定する方法をとる。この方法は、物理量の変化の割合を示す重み関数を定め、この重み関数により一意的に格子間隔が決定されるように格子点を配置するというものである。

さて、格子を自動的に形成する方法はいくつかあるが、Thompsonらにより発展させられた楕円型方程式を用いる方法<sup>1)</sup>は、最もなめらかな格子分布が得られる方法である。Thompsonらはこの楕円型方程式を

用いた格子形成法において、制御関数を導入し格子配置の制御を行っている。この制御関数に格子の位置を制御する働きがあることに着目し、それに解適合の機能を結び付けたのが文献<sup>2)</sup>の楕円型解適合格子法である。文献<sup>2)</sup>において制御関数を重み関数と関連づけ、さらに隣接する格子間隔比をパラメータとして重み関数を決定する方法が提案され、急激に変化する物理場をモデルに1次元から3次元での解適合格子形成を行っている。この方法は文献<sup>3)</sup>で2次元ダクト内での超音速流れに適用されているが、その他の適用例はほとんどない。

本論文の目的は、この楕円型解適合格子法を様々な実際の圧縮性流れへの適用を行い、発展させることである。特に、本論文では重み関数に対し擬似関数を併用する方法を提案し、その有効性を示した。

### 2. 楕円型解適合格子法

#### 2.1 楕円型解適合格子法

解適合格子として流れの物理量の変化を含む重み関数 $w$ に対し、格子間隔 $\Delta x$ との積が一定となるように次式を用いた。

$$w\Delta x = const. \quad (1)$$

計算面 $\xi$ に対応させて、

$$w\xi = const. \quad (2)$$

\* 京都工芸繊維大学大学院

\*\* 京都工芸繊維大学工学部

となり、右辺の評価を避けるため $\xi$ で微分すると

$$x_{\xi\xi} + (w_{\xi}/w)x_{\xi} = 0 \quad (3)$$

を得る。

一方、滑らかな格子を形成するため楕円型方程式として Thompson らの提案による、ポアソン方程式を用い、その1次元形を次式に示す。

$$\xi_{xx} = \Phi(\xi) \quad (4)$$

式(4)の $\Phi(\xi)$ は格子点分布を制御する関数であるが、より制御を効果的に行うため Thomas ら<sup>4)</sup>は、次式

$$\xi_{xx} = \phi(\xi)\xi_x^2 \quad (5)$$

を提案している。本論文では、式(5)で表わされる楕円型方程式を対象とする。

独立変数と従属変数の役割を交換するため、まずチェーン則より

$$\xi_x = \frac{1}{x_{\xi}} \Leftrightarrow 1 = \xi_x x_{\xi} \quad (6)$$

を得る。両辺を $\frac{\partial}{\partial x}$ すると、

$$0 = x_{\xi\xi}\xi_x^2 + x_{\xi}^2\xi_{xx} \Leftrightarrow \frac{\xi_{xx}}{\xi_x^2} = -\frac{x_{\xi\xi}}{x_{\xi}} \quad (7)$$

となり、これを式(5)に代入することにより

$$x_{\xi\xi} + \phi x_{\xi} = 0 \quad (8)$$

を得る。式(3)、式(8)の比較により制御関数 $\phi$ は、

$$\phi = \frac{w_{\xi}}{w} \quad (9)$$

として、重み関数に関連づけられる。

重み関数として、ここではある物理量 $f$ の1階導関数 $f_x$ を用いて、

$$w = \sqrt{1 + b(f_x)^2} \quad (10)$$

と表わす。係数 $b$ は通常、ユーザ指定の任意定数である。本論文では隣り合う格子間隔比の最大許容値 $K$ をユーザ指定のパラメータとし、

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \leq K \quad (11)$$

のように決めてやると、 $b$ は式(11)を満足するように自動的に決定される。すなわち任意定数 $b$ は次式となる<sup>2)</sup>。

$$b_i = \left[ 4 \frac{K-1}{K+1} \right] / \left[ \left\{ (f_x)_i \right\}^2 - 4 \frac{K-1}{K+1} (f_x)_i^2 \right] \quad (12)$$

$$b = \min(b_1, b_2, \dots, b_{i_{max}}) \quad (13)$$

なお2個の物理量( $f, g$ )を取り扱う場合重み関数 $w$ 、制御関数 $\phi$ はそれぞれ以下ようになる。

$$w = w_1 w_2 = \sqrt{1 + b_1(f_x)^2} \sqrt{1 + b_2(g_x)^2} \quad (14)$$

$$\phi = \frac{w_{\xi}}{w} = \frac{w_{1\xi}}{w_1} + \frac{w_{2\xi}}{w_2} \quad (15)$$

## 2.2 格子形成

制御関数が決定されたので、実際に格子形成を行う。まず、式(8)を中心差分を用いて離散化する。ここで、 $\Delta\xi = 1$ とおくと次式を得る。

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} + \phi_i \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) = 0 \quad (16)$$

最終的に格子は式(16)を解くことにより得ることができ<sup>3)</sup>、非線形であるのでここでは緩和法を用いて解く。なお途中段階において格子の移動を小さくするため緩和係数 $\omega$ を1以下(過小緩和法)にて行う。

式(16)に緩和法を適用して次式を得る。

$$\left(1 - \frac{1}{2}\phi_i\right)\delta x_{i-1} + (-2)\delta x_i + \left(1 + \frac{1}{2}\phi_i\right)\delta x_{i+1} = -R_i^a \quad (17)$$

$$x_i^{a+1} = x_i^a + \omega\delta x_i \quad (18)$$

$$R_i^a = x_{i+1}^a - 2x_i^a + x_{i-1}^a + \phi_i \frac{1}{2}(x_{i+1}^a - x_{i-1}^a) \quad (19)$$

## 2.3 計算手順

圧縮性オイラー方程式の場合の楕円型解適合格子法による計算手順の一例を以下に示す。

1. 初期格子を適当に形成する(例えば等間隔格子)。
2. 初期格子上でオイラー方程式を解き、圧力分布を物理量 $f$ とする。
3.  $f$ より制御関数 $\phi$ を決定する。
4. 格子形成方程式(16)を解く。
5. 新しく形成された格子分布上での $f$ を更新する。
6. 手続き3.から5.を指定した回数まで繰り返す。
7. 最終的に形成された格子上で、オイラー方程式を再度解く。

## 3. 1次元ノズル内流れへの適用

### 3.1 計算条件

前章で述べた楕円型解適合格子法を非粘性流れ場、ここでは図1に示すようなノズル内を超音速(マッハ数 = 2.0)で流入する準1次元ノズル内流れに適用した。



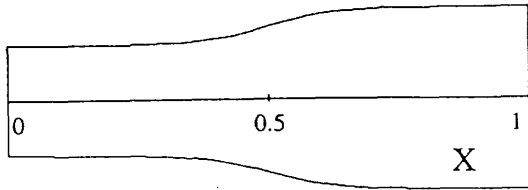


図1 ノズル形状

$$S(x) = 1.398 + 0.347 \tanh(8.0x - 4.0)$$

計算方法として、空間微分項の離散化に関しては、中心差分を用いて評価し、振動を抑えるためにJamesonにより提案された人工粘性項を導入した。時間積分は、陰的解法 (Beam-Warming 法) を用いた。

### 3.1 計算結果

重み関数の構成において、式(20)に示すような1階および2階導関数を用いた解適合格子による計算結果を図2に示す。ここで式(11)の示すパラメータ  $K$  は  $K=2$  と置いた。なお図の上段における目盛は、等間隔格子および解適合格子の格子間隔を表わし、格子数はどちらも41である。

$$w = \sqrt{1 + b_1(f_x)^2} \sqrt{1 + b_2(f_{xx})^2} \quad (20)$$

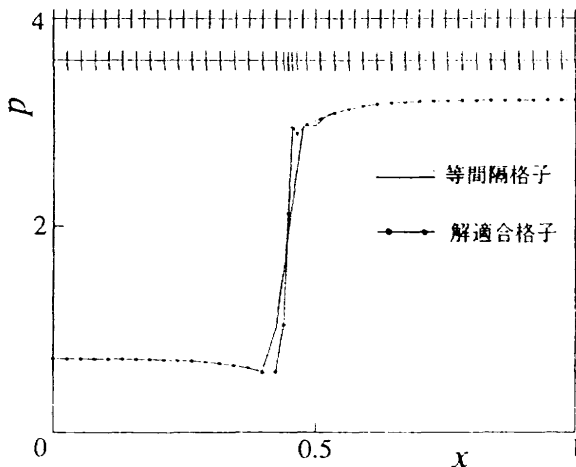


図2 1階及2階導関数を用いた解適合格子

ある程度格子は衝撃波部に集中するものの、解のなめらかな変化の所でもやはり多くの格子が残るのがわかる。これは、式(1)より判るように、たとえ物理量の変化の起こらない部分 ( $w=1.0$ ) でも、 $\Delta x$  は  $const$  に対応している量だけ格子間隔を持つことになる。よって仮に式(11)のパラメータ  $K$  を大きくしても、衝撃波上にある格子 (3~4点) のみが集中するだけで、他の格子はそのまま残ってしまうことになる。

そこで全体にある程度の変化を持つ擬似的な量を作り出し、それを従来からの物理量と組み合わせて取り扱うことを考える。この擬似関数がある程度もとの物

理量に依存している値として、図3に示すようなもとの物理量にスムージングを施したものを使用する。

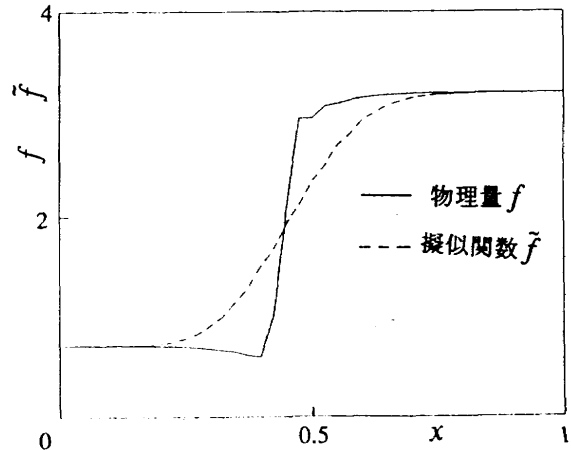


図3 物理量に対する擬似関数

このようにして作り出された擬似関数  $\tilde{f}_x$  を用いて式(21)のように重み関数を構成し、これにより形成された解適合格子及び、その格子上での計算結果を図4に示す。衝撃波の前後に十分な格子が集中しているのを確認することができる。

$$w = \sqrt{1 + b_1(f_x)^2} \sqrt{1 + b_2(\tilde{f}_x)^2} \quad (21)$$

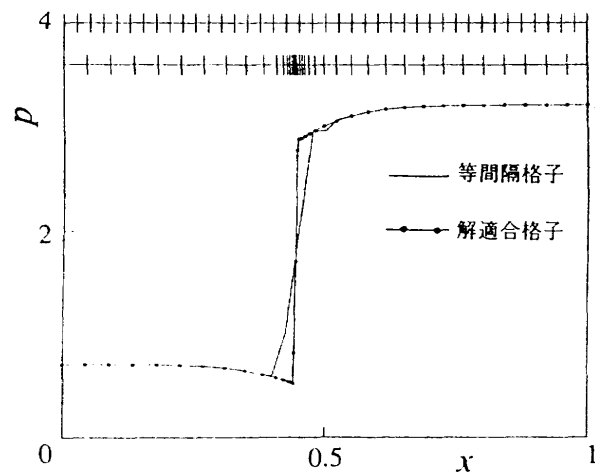


図4 擬似関数を用いた解適合格子

## 4. 2次元ダクト内流れへの適用

### 4.1 2次元楕円型解適合格子法

2次元の楕円型解適合格子法では  $\xi$  方向、 $\eta$  方向の格子の制御を同時に行うため、式(22)に示すポアソン方程式を用いた。

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= \phi(\xi, \eta)(\xi_x^2 + \xi_y^2) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= \psi(\xi, \eta)(\eta_x^2 + \eta_y^2) \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)の独立変数と従属変数の役割を交換して書き換えると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha(x_{\xi\xi} + \phi x_{\xi}) - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma(x_{\eta\eta} + \psi x_{\eta}) &= 0 \\ \alpha(y_{\xi\xi} + \phi y_{\xi}) - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma(y_{\eta\eta} + \psi y_{\eta}) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\ \beta &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \\ \gamma &= x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \end{aligned}$$

式(23)が本論文で用いる2次元楕円型方程式であり、この式により格子の形成を行うことにする。

さて2次元格子の形成については、格子線が曲線になってしまうので式(2)を次のように書き換え1次元的に取り扱う。

$$ws_{\xi} = const.$$

$$ws'_{\eta} = const.$$

$$\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2$$

$$\left(\frac{ds'}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{ds'}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{ds'}{d\eta}\right)^2 \quad (24)$$

格子間の距離と重み関数の積が一定となるように重み関数を決定する。

制御関数 $\phi, \psi$ については1次元の場合と同様に重み関数を構成する。したがって制御関数 $\phi$ については $\xi$ 方向、 $\psi$ については $\eta$ 方向にそれぞれ決定した。

#### 4.2 超音速流への適用

##### 4.2.1 計算条件

楕円型解適合格子法を、図5に示すような厚み比10%の円弧状の隆起を持つダクト内を超音速(マッハ数=2.0)で流入する2次元圧縮性流れ場に適用した。

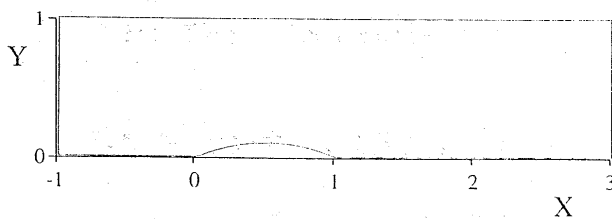


図5 ダクト形状

計算方法として、空間微分項の離散化においてはRoeのFDS(Flux Difference Splitting)法を用いたセル中心有限体積法を、時間積分には前進オイラー法を用いた。

##### 4.2.2 計算結果

初期格子として図6に示すような境界から境界までを等間隔に切ったものを使用し、この初期格子上での圧力分布の等高線を図7に示す。

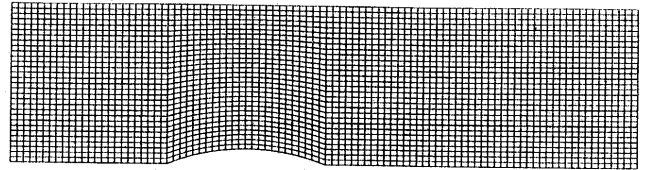


図6 初期格子(97×31)

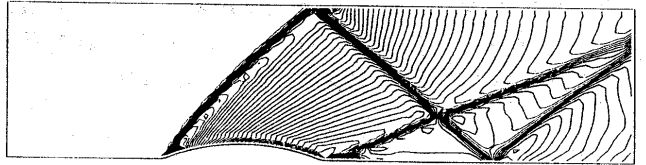


図7 初期格子による解(等圧力線図 Δp=0.05)

次に図7の圧力分布を制御関数に用いて解適合格子を形成した。重み関数は、擬似関数 $\tilde{f}$ の一階導関数 $\tilde{f}'_s$ のみを用いても十分効果が見られたので、演算量の削減をも踏まえて式(25)のように構成する。

$$w = \sqrt{1 + b(\tilde{f}'_s)^2} \quad (25)$$

図8に解適合格子を示し、その格子による解を図9に示した。図6に比べより急峻に圧力変化を捕えられているのを確認することができる。

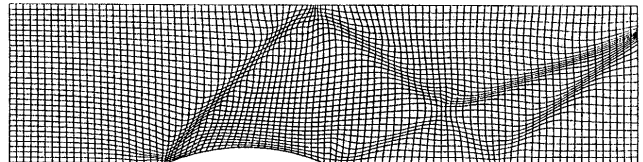


図8 解適合格子(97×31)

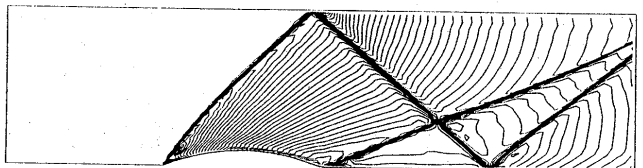


図9 解適合格子による解(等圧力線図 Δp=0.05)

この解適合格子での解の分解能を比較するため格子数を4倍に増やした等間隔格子を図10に、その格子による解を図11に示す。解適合格子による解がこれとほぼ同様の分解能を持つことが確認された。

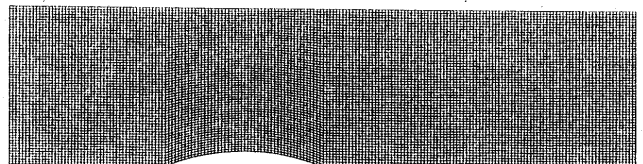


図10 比較用格子(193×61)

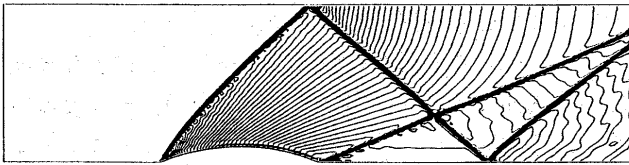


図11 比較格子による解 (等圧力線図  $\Delta p = 0.05$ )

4.3 遷音速流への適用

4.3.1 計算条件

楕円型解適合格子法を、図12に示すような厚み比10%の円弧状の隆起を持つダクト内を遷音速(流入マッハ数=0.675)で通過する2次元圧縮性流れ場へ適用した。

計算方法としては超音速流の場合と同様に、空間微分項の離散化に関してRoeのFDS(Flux Difference Splitting)法を用いたセル中心有限体積法を、時間積分には前進オイラー法を用いた。

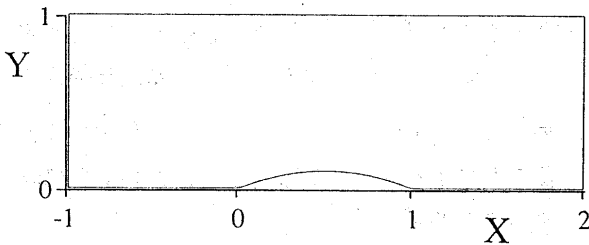


図12 ダクト形状

4.3.2 計算結果

初期格子として、図13に示すような隆起部で格子が密となるように切ったものを使用した。初期格子上で計算した圧力分布の等高線を図14に示す。

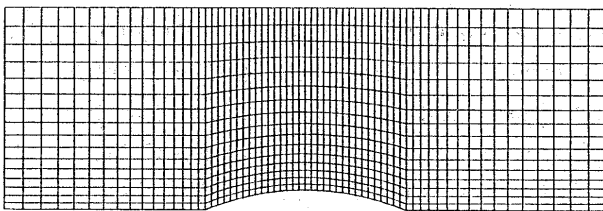


図13 初期格子 (65 × 17)

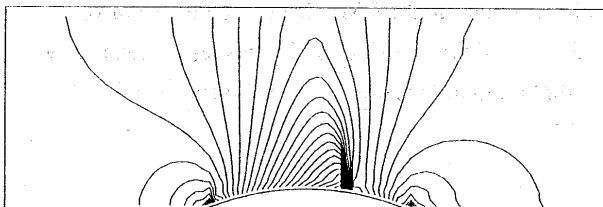


図14 初期格子による解 (等圧力線図  $\Delta p = 0.02$ )

初期格子上で圧力分布を用いて形成した解適合格子を図15に示し、その解適合格子上で圧力分布の等高線を図16に示す。ここで重み関数は式(25)に示されている超音速流へ適用したときに用いたものを使用

した。

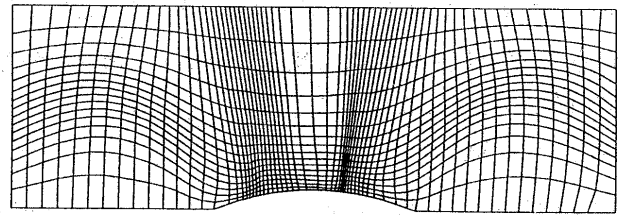


図15 解適合格子 (65 × 17)

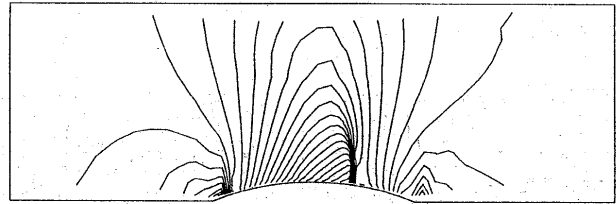


図16 解適合格子による解 (等圧力線図  $\Delta p = 0.02$ )

さらに解適合格子による計算結果の分解能を調べるため、超音速流同様に初期格子を格子数4倍にして形成した比較用格子を図17に、比較用格子による圧力分布の等高線を図18に示す。

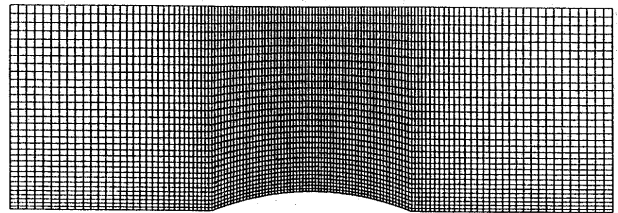


図17 比較用格子 (129 × 33)

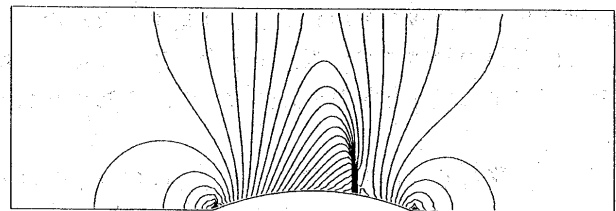


図18 比較格子による解 (等圧力線図  $\Delta p = 0.02$ )

図16について衝撃波部における分解能は向上したものの、隆起部以外において初期格子から大きくかけ離れてしまった。そこで、初期格子の情報を得るため、式(23)を制御関数 $\phi_{i,j}, \psi_{i,j}$ について逆に解くと、

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{J} \left\{ y_{\eta} \left( -x_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\alpha} x_{\xi\eta} - \frac{\gamma}{\alpha} x_{\eta\eta} \right) - x_{\eta} \left( -y_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\alpha} y_{\xi\eta} - \frac{\gamma}{\alpha} y_{\eta\eta} \right) \right\}$$

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{J} \left\{ y_{\xi} \left( \frac{\alpha}{\gamma} x_{\xi\xi} - \frac{2\beta}{\gamma} x_{\xi\eta} + x_{\eta\eta} \right) + x_{\xi} \left( -\frac{\alpha}{\gamma} y_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{\gamma} y_{\xi\eta} - y_{\eta\eta} \right) \right\}$$

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} \quad (26)$$

を得る。

初期格子における $x_{\xi}, x_{\xi\xi} \dots$ を式(26)に代入すること

により初期格子を形成する制御関数 $\phi_{i,j}, \psi_{i,j}$ の値が得られ、それを $\phi_g, \psi_g$ とする。この $\phi_g, \psi_g$ 及び解適合により得られた制御関数 $\phi_a, \psi_a$ を組み合わせ、新たに制御関数を式(27)のように決定する。

$$\begin{aligned}\phi &= 0.3\phi_g + \phi_a \\ \psi &= 0.3\psi_g + \psi_a\end{aligned}\quad (27)$$

この制御関数の操作により形成した解適合格子を図19に示し、その格子における圧力分布の等高線を図20に示す。

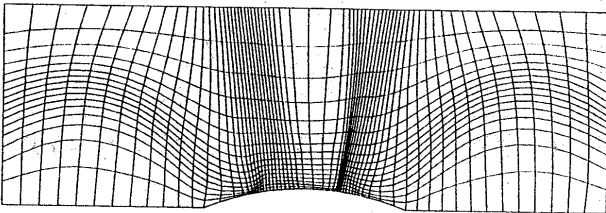


図19 制御関数の操作による解適合格子 I (65 × 17)

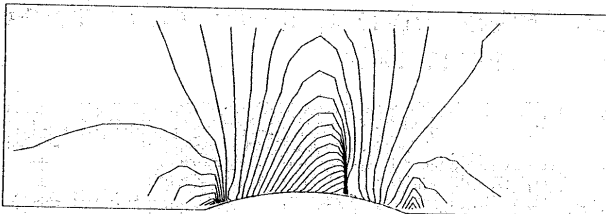


図20 制御関数の操作を行った解適合格子 I による解(等圧力線図  $\Delta p = 0.02$ )

この場合 $\xi$ 方向は改善されるものの、やはり $\eta$ 方向は初期格子の情報が失われてしまう結果となった。そこで隆起部の両側において、格子を必要とする下部境界へ戻すように $\eta$ 方向の制御関数について修正を試みる。

まず、隆起部の両側において、 $\eta$ 方向の格子線は初期格子のまま制御を行わず $\xi$ 方向の格子線のみ制御を行った。この制御関数の操作による解適合格子を図21に示す。

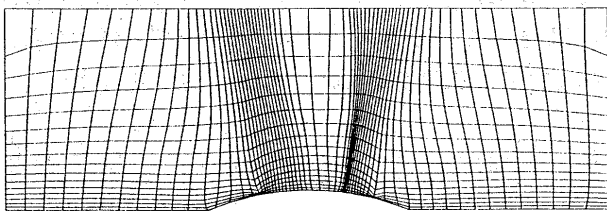


図21 制御関数の操作による解適合格子 II (65 × 17)

次に隆起部の両側において、擬似関数をさらになめらし微小な物理変化を取り去ることにより、格子を衝撃波部にのみ集中するようにした。この擬似関数の操

作により形成した解適合格子を図22に示す。

いずれにしても擬似関数のスムージングにより隆起部前後端部で淀み点圧がなまってしまい、そこでの格子の集中がなくなってしまう。少なくとも単なるスムージングによる擬似関数の構成には改良の余地がある。

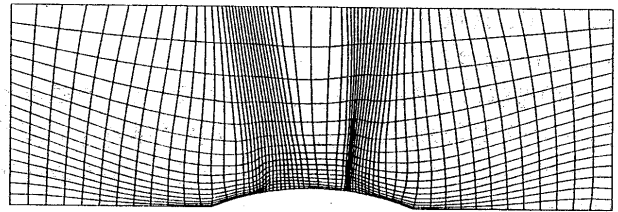


図22 擬似関数の操作による解適合格子 (65 × 17)

## 5. 結論

本論文では楕円型解適合格子法を圧縮性流れに適用し、発展させた。その結果次のような結論を得た。

1. 重み関数に流れの物理量 $f$ の擬似関数 $\tilde{f}$ を含ませることにより、より効果的な解適合格子を構成することが可能となった。
2. 制御関数に初期格子の情報を取り入れることにより、解適合格子をさらに発展させた。

現時点においては適用例が少ないこともあり、試行錯誤により格子を形成している。特に結論2においてまだまだ研究の余地があると考えられる。

## 参考文献

- 1) J.F.Thompson, Z.U.A.Warsi, and C.W.Mastin, *Numerical Grid Generation*, North-Holland, (1985)
- 2) K.Matsuno and H.A.Dwyer, *Adaptive Methods for Elliptic Grid Generation*, JCP Vol.72(1988)40-52
- 3) 松野謙一, H.A.Dwyer, 楕円型方程式を用いた解適合格子生成法とその応用, 第19期日本航空宇宙学会講演会論文集, (1988)
- 4) P.D.Thomas and J.F.Middlecoff, *Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations*, AIAA J., Vol.18(1980),652

## A VARIATION OF THE RIEMANN PROBLEM SOLUTION AND ITS APPLICATION TO IMPLICIT GODUNOV'S SCHEME

Igor MEN'SHOV and Yoshiaki NAKAMURA

Department of Aeronautical Engineering, Nagoya University, Nagoya 464-01, JAPAN

### ABSTRACT

The present paper is devoted to investigate a variation of the exact Riemann problem (RP) solution with respect to a variation of the initial data. This variation may be written in the linear form by introducing variation matrices (VM) coupled with the corresponding side of initial discontinuity. It is shown that VM for the exact RP solution can be obtained in the explicit form for any initial data. Its application to the implicit Godunov scheme leads to the linear system of equations in  $\Delta$ -form which is solved in two relaxation sweeps, backward and forward ones, by implementing LU approximate factorization. The advantage of the scheme obtained in such a way is large CFL number in calculating of super- and hypersonic flows around blunt body.

**1. Introduction** The idea of employing the exact solution of RP in numerical methods was developed by Godunov [1], which produced a wide class of numerical schemes referred to as Godunov's type. Originally it was an explicit finite volume method (FVM), where the numerical flux on cell edge is equal to the value of differential flux in the exact solution of the RP with the initial data equal to the mean values of the state parameter vectors in the cells adjacent to the edge.

The time step for any explicit scheme is restricted by the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition, which requires that the domain of dependence in numerical scheme must at least include the domain of dependence in differential equations. In the case of the explicit Godunov method the time step must be such that the trajectories of the discontinuities which appear as a result of an initial discontinuity decomposition do not intersect during the time step.

This time step restriction can be removed by the introduction of implicit scheme. Generally, the implicit scheme is nonlinear with respect to new time level. To solve this numerically, either iterative method or linearization of the original numerical scheme is used [2].

The latter approach developed in [3,4] for gas dynamic equations is based on the linearization of differential flux, the splitting Jacobian matrix into positive and negative parts, and the upwind finite difference approximation. The system of equations in  $\Delta$ -form thus obtained can be approximately factorized into the product of two subsystems with block bidiagonal matrices in one-dimensional case. In multi-dimensional case it leads to the alternating direction implicit (ADI) procedure [5]. The ADI scheme is unconditionally stable in two dimensions.

However, it is well known [6] that the corresponding scheme in  $\Delta$ -form is unconditionally unstable in three dimensions.

An alternative approximate factorization of the implicit scheme, which was proposed in [7] and developed in [8,9], is lower-upper (LU) approximate factorization. It is stable in any space dimension, and in fact, is reduced to the symmetric Gauss-Seidel relaxation method for the unfactored implicit scheme with a single subiteration.

The present method belongs to the same family. However, it comes from an attempt to directly consider the linearization of the implicit FVM, that is, the linearization of the numerical flux in FVM instead of differential flux. This approach seems to be attractive because it can be easily extended to unstructured grid.

In this paper the Godunov method is employed for flux evaluation. First, the variation matrices for the exact Riemann problem solution are constructed in the explicit form for any initial data. Then, using these matrices the linear  $\Delta$ -form of the implicit FVM and its approximate LU factorization are derived for arbitrary grid. Finally, the implicit scheme thus obtained is applied to supersonic and hypersonic flows with strong shock wave.

**2. Governing equations** Let  $\rho$ ,  $u_k$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $p$  be the density, the Cartesian velocity components, the total energy, the total enthalpy, and the pressure. Then, the three-dimensional Euler equations can be written as

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_k(\bar{q})}{\partial x_k} = 0 \quad (1)$$

where  $\bar{q}$  is the solution vector and  $\bar{F}_k$  are differential flux vectors:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{bmatrix}; \quad \bar{F}_k = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{1,k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{2,k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{3,k} p \\ \rho u_k H \end{bmatrix} \quad (2)$$

$x_k$  is Cartesian coordinates, and the equation of state is given for a perfect gas as

$$p = (\gamma - 1)\rho(E - \sum_{k=1}^3 u_k^2) \quad (3)$$

where  $\gamma$  is the ratio of specific heats.

**3. Implicit finite volume approximation** Use of FVM for space discretization can handle arbitrary geometries and computational grids, and helps to avoid problems with metric singularities that are usually associated with the finite difference method. We consider a computational grid, where the computational domain is divided into nonoverlapping cells. Then the finite volume scheme is derived by integrating eq. (1) in each cell, and transforming cell volume integral to cell boundary integral:

$$\omega_i(\bar{q}_i^{n+1} - \bar{q}_i^n) = -(1-\beta)\Delta t \sum_{\sigma} S_{\sigma} \bar{F}_{\sigma}^n - \beta \Delta t \sum_{\sigma} S_{\sigma} \bar{F}_{\sigma}^{n+1} \quad (4)$$

where  $\bar{q}_i$  is the cell average parameter vector,  $\omega_i$  is the cell volume,  $\Delta t$  is time step,  $\beta$  is parameter ( $0 < \beta < 1$ ), and  $S_{\sigma}$  is the area of cell interface. Here  $n$  denotes the time level, and  $\sigma$  the cell interface.  $\bar{F}_{\sigma}$  is so-called numerical flux which is equal to cell interface average value with regard to the projection of the differential flux onto exterior normal.

The parameter  $\beta$  determines the specific time differencing approximation used. The scheme with  $\beta = 0$  is explicit,  $\beta = 1$  is full implicit, and  $\beta = 0.5$  is of second order of approximation in time.

The numerical flux can be written in general form. If we introduce the local cell interface orthonormal basis  $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $\bar{k} = (k_1, k_2, k_3)$ ,  $\bar{l} = (l_1, l_2, l_3)$ , where  $\bar{n}$  is the exterior normal to cell interface, and local one-dimensional flux vector  $\bar{F}$ :

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ \rho u H \end{bmatrix} \quad (5)$$

where  $(u, v, w)$  are the components of the velocity vector in this basis, the numerical flux  $\bar{F}_{\sigma}$  can be written in the general form:

$$\bar{F}_{\sigma} = T_{\sigma} \bar{F}$$

where  $T_{\sigma}$  is the transforming matrix:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & l_1 & l_2 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

The flux vector  $\bar{F}$  is usually defined by the values of parameter vectors in the two cells adjacent to a cell interface:

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{Q}_i, \bar{Q}_{\sigma(i)}); \quad \bar{Q} = T_{\sigma}^{-1} \bar{q} \quad (7)$$

where  $\sigma(i)$  denotes the cell, which adjoins the  $i$ -cell through the cell interface  $\sigma$ .

In Godunov's scheme we have

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{Q}_{\sigma}); \quad \bar{Q}_{\sigma} = \bar{Q}^R(0, \bar{Q}_i, \bar{Q}_{\sigma(i)}) \quad (8)$$

Here  $\bar{Q}^R$  denotes the exact solution of the RP.

In flux vector splitting schemes, FVS, the flux vector is given in the form:

$$\bar{F} = \bar{F}^+(\bar{Q}_i) + \bar{F}^-(\bar{Q}_{\sigma(i)}) \quad (9)$$

where  $\bar{F}^+$  and  $\bar{F}^-$  are positive and negative parts of the differential flux [4,10].

**4. Linearization and LU approximate factorization** The implicit scheme in the form of eq. (4) is too expensive to calculate since it requires the solution of coupled nonlinear equations at each time step. A simple approach to the treatment of the non-linearity, taking the advantage of the fully implicit scheme, is local linearization of the non-linear terms in eq. (4), i.e. the flux vector (Newton method). The Newton method is defined in the following way.

Let the increment of a vector  $\Phi$  at the time level  $n$  be

$$\Delta \Phi = \Phi^{n+1} - \Phi^n$$

Taking into account that the flux vector  $\bar{F}$  of eq.(7) can be expanded as

$$\bar{F}_{\sigma}^{n+1} = \bar{F}_{\sigma}^n + \mu_{\sigma}^1 \Delta \bar{q}_i + \mu_{\sigma}^2 \Delta \bar{q}_{\sigma(i)} + O(\|\Delta \bar{q}_i\|^2, \|\Delta \bar{q}_{\sigma(i)}\|^2)$$

and dropping terms of the second and higher order, it yields

$$\left( \omega_i I + \beta \Delta t \sum_{\sigma} S_{\sigma} \mu_{\sigma}^{(1)} \right) \Delta \bar{q}_i + \beta \Delta t \sum_{\sigma} S_{\sigma} \mu_{\sigma}^{(2)} \Delta \bar{q}_{\sigma(i)} = -\Delta t \bar{r}_i \quad (10)$$

where  $\bar{r}_i$  is the residual

$$\bar{r}_i = \sum_{\sigma} S_{\sigma} \bar{F}_{\sigma}^n$$

If  $\beta = 0.5$ , the scheme is second-order accurate in time, while for other values of  $\beta$  it is of first order.

The variation matrices  $\mu_{\sigma}^{(1,2)}$  are defined in general form as

$$\mu_{\sigma}^{(1)} = T_{\sigma}^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Q}_i} T_{\sigma}; \quad \mu_{\sigma}^{(2)} = T_{\sigma}^{-1} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Q}_{\sigma(i)}} T_{\sigma} \quad (11)$$

for flux (7) with two arguments.

In the case of Godunov's flux, the derivatives in eq.(11) can be written by the Jacobian matrix A in the exact RP solution:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Q}_k} = A(\bar{Q}_\sigma) \frac{\partial \bar{Q}^R}{\partial \bar{Q}_k}; \quad k=i, \quad \sigma(i) \quad (12)$$

where  $\partial \bar{Q}^R / \partial \bar{Q}_k$  are variation matrices of the exact RP solution, which will be derived below.

In FVS, the variation matrices are obtained directly from eq.(9) as follows:

$$\mu_\sigma^{(1)} = T_\sigma^{-1} \frac{\partial \bar{F}^+}{\partial \bar{Q}_i} T_\sigma; \quad \mu_\sigma^{(2)} = T_\sigma^{-1} \frac{\partial \bar{F}^-}{\partial \bar{Q}_{\sigma(i)}} T_\sigma$$

The implicit scheme (10) produces a large block band matrix, which can be inverted only by performing many operations. In [7] an idea of LU approximate factorization was proposed for the implicit scheme on regular grids, that is unconditionally stable in any number of space dimension, and leads to the system of equations with sparse triangular matrix. For an arbitrary grid, following this idea we can introduce LU decomposition of eq. (10) by separating the summation in it into two parts:

$$\sum_\sigma (S_\sigma \mu_\sigma^{(1)} \Delta \bar{q}_i + S_\sigma \mu_\sigma^{(2)} \Delta \bar{q}_{\sigma(i)}) = \sum_\sigma S_\sigma \mu_\sigma^- \Delta \bar{q}_\sigma^- + \sum_\sigma S_\sigma \mu_\sigma^+ \Delta \bar{q}_\sigma^+$$

where

$$\mu_\sigma^- \Delta \bar{q}_\sigma^- = \begin{cases} \mu_\sigma^{(1)} \Delta \bar{q}_i, & \text{if } i < \sigma(i) \\ \mu_\sigma^{(2)} \Delta \bar{q}_{\sigma(i)}, & \text{if } i > \sigma(i) \end{cases}$$

$$\mu_\sigma^+ \Delta \bar{q}_\sigma^+ = \begin{cases} \mu_\sigma^{(2)} \Delta \bar{q}_{\sigma(i)}, & \text{if } i < \sigma(i) \\ \mu_\sigma^{(1)} \Delta \bar{q}_i, & \text{if } i > \sigma(i) \end{cases}$$

and simulating (10) with backward and forward relaxation sweeps. Then LU factorized scheme can be written in two steps as:

$$\omega_i \Delta \bar{q}_i^+ + \beta \Delta t \sum_\sigma S_\sigma \mu_\sigma^- \Delta \bar{q}_\sigma^- = -\Delta t \bar{r}_i \quad (13)$$

$$\omega_i \Delta \bar{q}_i + \beta \Delta t \sum_\sigma S_\sigma \mu_\sigma^+ \Delta \bar{q}_\sigma^+ = \omega_i \Delta \bar{q}_i^+$$

The system of equations (13) is solved in two steps. First, the first system is solved as the number of cell increases (direct sweep). Then, in the opposite sweep, where the number of cell decreases, the final increment is defined by solving the second system. The latter is used to obtain the parameter vector on the new time level. In each sweep one needs to invert a sparse triangular matrix. In practice it reduces to inversion of 5x5 matrix in three dimensions and 4x4 matrix in two dimensions for each computational cell, and can be performed efficiently without any large storage. Equations (13) are actually a explicit scheme, which defines sequentially the increments in cells during the forward and backward sweeps of computational grid.

**5. Variation matrices for the exact RP solution** The RP for gas dynamic equations can be considered as Cauchy problem:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{Q})}{\partial x} = 0$$

with initial data at t=0

$$\bar{Q} = \begin{cases} \bar{Q}_l & x < 0 \\ \bar{Q}_r & x > 0 \end{cases} \quad (14)$$

where t and x are time and space coordinates,  $\bar{Q}$  and  $\bar{F}$  are defined in eq.(2), and  $\bar{Q}_l$  and  $\bar{Q}_r$  are constant.

This problem has a unique solution under any initial data. The solution is a piecewise analytical function  $\bar{Q}^{(R)}$ , which depends on the initial data and parameter  $\lambda=x/t$  [11]:

$$\bar{Q}(\lambda) = \bar{Q}^{(R)}(\lambda, \bar{Q}_l, \bar{Q}_r)$$

The number of singular points of this function is strictly limited. It must be less than 5 in general case. Moreover, their physical types (or wave pattern, because the singular points represent the velocities of several discontinuities originated from the break-up of an initial discontinuity) have always a certain order. That is, the contact discontinuity (CD) arises. It separates the gas which was initially on the left ( $x<0$ ) from one on the right ( $x>0$ ). A constant flow domains (contact zones) in both sides of CD have the same pressure and velocity. The contact zone might be separated from an unperturbed zone by a shock wave, or a fan of rarefaction waves (RW). In the domain of RW the solution is described by the relations:

$$\bar{Q}^{(R)}(\lambda): \quad u \pm a - \lambda = 0; \quad cu' \mp p' = 0; \quad s' = v' = w' = 0 \quad (15)$$

where a is the sound velocity,  $c=\rho a$ , s is the entropy, and the prime denotes the derivative with regard to  $\lambda$ . Except for the RW zone, the solution does not depend on  $\lambda$ .

Considering a variation of the initial data

$$\bar{Q}_l \rightarrow \bar{Q}_l + \delta \bar{Q}_l; \quad \bar{Q}_r \rightarrow \bar{Q}_r + \delta \bar{Q}_r$$

we are concerned with the first variation of the solution

$$\delta \bar{Q} = M_l \delta \bar{Q}_l + M_r \delta \bar{Q}_r$$

where the variation matrices (VM)  $M_{l,r}$  are defined as

$$M_{l,r} = M_{l,r}(\lambda, \bar{Q}^{(R)}) = \frac{\partial \bar{Q}^{(R)}}{\partial \bar{Q}_{l,r}}$$

The problem is to find VM for any arbitrary initial data. It is evident that  $M_{l,r}$  are piecewise analytical functions that have the same singular points as the solution  $\bar{Q}^{(R)}$ , and are constant with respect to  $\lambda$  everywhere but the zone of RW.

In what follows, it is convenient to introduce the vector  $\bar{U} = (u, p, s, v, w)^T$  instead of the vector  $\bar{Q}$ . The corresponding VM is denoted by  $\mu$ .

Evidently, we have for the left unperturbed zone:

$$\mu_l = I; \quad \mu_r = 0$$

and for the right one

$$\mu_l = 0; \quad \mu_r = I$$

where I is the identity matrix.

Varying (15), we can obtain the VM in the zone of RW in the form:

$$\mu_i = \mu_{RW} = \begin{bmatrix} \alpha & \mp \frac{\alpha}{c_i} & 0 & 0 & 0 \\ \mp \beta & \frac{\beta c}{c_i} & \frac{a\beta}{2\alpha s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad i = l, r \quad (16)$$

where

$$\alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}; \quad \beta = \frac{2}{\gamma + 1}$$

and the upper and lower signs correspond to the right and left RW, respectively.

In the contact zone, VM are constant and must be defined by considering conjugate relations between the variations at the internal characteristic of the RW or at the shock wave.

Analysing these relations, we can derive that the variations in the contact zones on the left and on the right with respect to CD in all possible cases are written in the form with an indeterminacy of one arbitrary constant  $C_i$ :

$$\delta \bar{U} = N^{(i)} \delta U_i + \bar{m}^{(i)} C_i, \quad i = l, r \quad (17)$$

where  $N^{(i)}$  and  $\bar{m}^{(i)}$  are matrix and vector. It is natural to call them variation matrix and variation vector of contact zone, and they can be written out in the explicit form. In the case when the contact and unperturbed zones are separated by RW, they have the form:

$$N^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp c & c & c(a - a_i) & 0 & 0 \\ 0 & c_i & (\gamma - 1)s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{m}^i = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad i = l, r \quad (18)$$

For the case of shock wave they are

$$N^i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 + M_1^2}{m_1} + \chi_2 & -\sigma_1 m_1 T_1 - \chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 \chi_2 & m_1 \chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta}{m_1 T} & \frac{T_1}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{m}^i = \begin{bmatrix} -1 - \chi_1 \\ \chi_1 m_1 \\ \frac{\Delta}{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

where

$$m_i = \rho_i (u_i - D_{sh}); \quad \Delta = u - u_i; \quad M_i = m_i / c_i; \quad (19)$$

$$\chi_1 = \frac{2 + m_1 \sigma \Delta}{M^2 - 1}; \quad \chi_2 = \frac{1 + M_1^2 + m_1 \sigma \Delta}{m_1 (M^2 - 1)}; \quad \chi_3 = m_1 T_1 \frac{\sigma + \sigma_i}{M^2 - 1}$$

$$T = -\frac{a^2}{(\gamma - 1)s}; \quad \sigma = \frac{\gamma - 1}{\gamma P}; \quad s = \rho \cdot P^{-1/\gamma}$$

and  $D_{sh}$  is the velocity of shock wave.

To determine two constants  $C_l$  and  $C_r$  in eq.(17), there are two conjugate relations on the CD

$$[\delta u] = 0, \quad [\delta p] = 0$$

This completes the solution for the variation of the exact RP solution.

The final result can be expressed in the compact form if we introduce proper and associated values depending on the value of the parameter  $\lambda$ . For example, if the value of  $\lambda$  is such that it corresponds to the left side of CD, then the left side parameters are proper but right side ones are associated, and vice versa. Denoting the associated values by asterisk, and the initial data by circle, the variation of the exact RP solution can be written as

$$\delta \bar{U} = \mu \delta \bar{U}_0 + \mu^* \delta \bar{U}_0^*$$

where

- a)  $\mu = I, \quad \mu^* = 0$  in the unperturbed zone;
- b)  $\mu = \mu_{RW}, \quad \mu^* = 0$  in the RW zone;
- c)  $\mu = N - \bar{m} \circ \bar{k}^*; \quad \mu^* = \bar{m} \circ \bar{n}^*$  in the contact zone;

$$\bar{n} = \frac{m_2 \bar{N}_1 - m_1 \bar{N}_2}{m_2 m_1' - m_1 m_2'}; \quad \bar{k} = \frac{m_2 \bar{N}_1^* - m_1 \bar{N}_2^*}{m_2 m_1' - m_1 m_2'}$$

Here  $\mu_{RW}$ ,  $N$ , and  $\bar{m}$  are defined in eq.(17), (18), and (19), respectively for RW and shock wave; the vectors  $\bar{N}_{1,2}$  are the first and second row of the matrix  $N$ ,  $m_{1,2}$  are the first and second components of the vector  $\bar{m}$ .

**6. Numerical results** Two dimensional calculations of inviscid hypersonic flows around a cylinder have been performed to verify the implicit Godunov scheme. The freestream Mach numbers of 6 and 20 are used. Comparisons are made between explicit (scheme SE) and implicit (scheme SI) Godunov's scheme. Three types of the grid are considered: a coarse grid of 40x15 with 40 cells along the cylinder surface and 15 cells normal to the surface, a middle grid of 30x80, and a fine grid of 60x160. The CFL number is equal to 1 for SE scheme, while for SI scheme it is varied from 1 at the beginning to 100 after 30-50 iterations from impulsive start.

Convergence rate is evaluated by the value of the residual of density in  $L_\infty$  norm (Res) as a function of the number of iterations. Implicit mirror wall condition is imposed at the cylinder surface. The upper part of the flow domain is shown in the figures below.

The first case considered is a supersonic flow at



$M=6$ . The density contours (Fig.1) given by implicit and explicit schemes on the grid of  $60 \times 160$  (Fig.2) are identical. Therefore, the implicit Godunov scheme yields a steady state solution that is independent of time step  $\Delta t$ . For this case, the convergence rate presented in Fig.3 shows that the residual of the SI scheme drops more than 3 times faster than one in the SE scheme.

The same tendency is observed if we use more coarse grids as shown in Figs.4 and 5. Thus, to get the value of the residual of  $10^{-10}$  by the SE scheme using  $15 \times 40$  mesh needs approximately the same number of time step as the SI scheme on  $60 \times 160$  mesh.

A hypersonic flow at  $M=20$  has been taken up as a case which is not appropriate for Godunov's type schemes. In this case a numerical instability in capturing a strong shock wave, called "carbuncle phenomenon" [12], can appear in multi-dimensional computations.

As a result of this phenomenon, an ambiguous numerical solution may be produced by Godunov's scheme. It can be seen in Fig.6, where some numerical results at  $M=20$  by explicit Godunov's scheme are presented. These calculations have been carried out by the same numerical code with CFL number of 1, and the residual of  $10^{-10}$  have been achieved. The carbuncle phenomenon doesn't develop on a coarse grid, whereas it does on a fine grid of  $30 \times 80$ .

The convergence history for  $M=20$  is presented in Fig.7. When the carbuncle phenomenon doesn't appear (Fig.7 a), the relation between convergence rates for SE and SI schemes is the same as that of  $M=6$ . Otherwise, the carbuncle phenomenon causes an oscillating slow convergence in the SE scheme, and doesn't affect the convergence in SI scheme (Figs.7b and 7c). The numerical solution in this case is incorrect near the stagnation stream line. However, it can be removed by introducing a dissipative mechanism to stabilize the shock wave [13].

**7. Conclusions** A variation of the exact Riemann problem solution has been considered in the present paper. It has been shown that the variation matrices can be derived in the explicit form for any arbitrary initial data and used to linearize numerical fluxes in the implicit Godunov method. The linear system of equations written in the  $\Delta$ -form has been factorized in approximate LU form, which is relaxed in backward and forward sweeps for arbitrary computational grids. The results of some numerical experiments with the implicit scheme thus obtained show more capability and higher convergence rate to a steady state solution than

explicit scheme. The general approach considered herein, based on the numerical flux linearization in implicit FVM, seems to be attractive because it can be easily extended to unstructured grid and the N.-S. equations.

#### Acknowledgment

This work was supported in part by the Russian Fund of Fundamental Researches under Grant N 93-012-516.

#### References

- [1] Godunov, S.K., A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics, *Mat.Sb.*, 47, 3, pp.357-393, 1959.
- [2] Yanenko, N.N., *The Method of Fractional Steps for Solution Multi-Dimensional Problems of Mathematical Physics*, M.: Nauka, 1967 (in Russian).
- [3] Briley, W.R., and McDonald, H., On the Structure and Use of Linearized Block Implicit Schemes, *J.Comp.Phys.*, 34, 1, pp.54-73, 1980.
- [4] Steger, J.L., and Warming, R.F., Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite Difference Methods, *J.Comp.Phys.*, 40, 2, pp.263-293, 1976.
- [5] Peaceman, D.W., and Rachford, H.H., The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations, *SIAM*, No 3, pp. 28-41, 1955.
- [6] Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, v.I, A Wiley - Interscience Publication, p.439, 1991.
- [7] Jameson, A., and Turkel, E., Implicit Schemes and LU Decompositions, *Mathematics of Computation*, 37, 156, pp. 385-397, 1981.
- [8] Jameson, A., and Yoon, S., Multigrid Solution of the Euler Equations Using Implicit Schemes, *AIAA*, 24, pp.1737-1743, 1986.
- [9] Jameson, A., and Yoon, S., Lower-Upper Implicit Schemes with Multiple Grids for the Euler Equations, *AIAA*, 25, pp.929-935, 1987.
- [10] Van Leer, B., Flux Vector Splitting for the Euler Equations, *Lecture notes in Physics*, Berlin: Springer Verlag, 170, pp.507-512, 1982
- [11] Kochin, N.E., *Collected Papers*, 2, Moscow: Izd.Akad.Nauk SSSR, pp.5-42, 1949 (in Russian).
- [12] Quirk, J.J., A Contribution to the Great Riemann Solver Debate, *ICASE Report N 92-64*, 1992.
- [13] Wada, Y., Lion, M.S., A Flux Splitting Scheme with High Resolution and Robustness for Discontinuities, *AIAA paper 94-0083*, 1994.

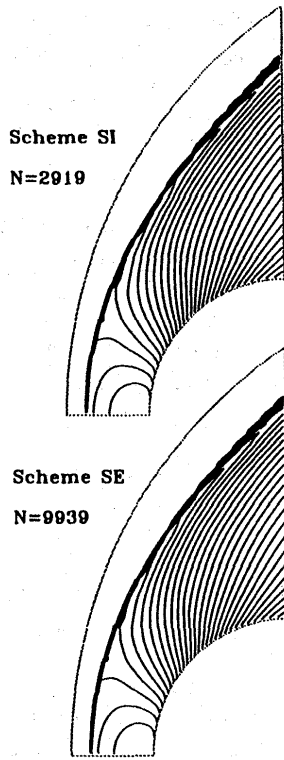


Fig.1 Density contours:  
M=6, and mesh 60x160

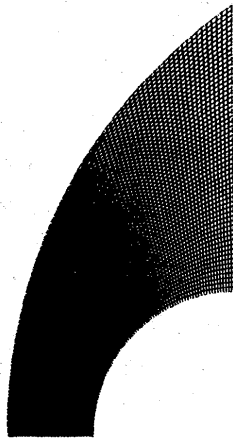


Fig.2 60x160 mesh

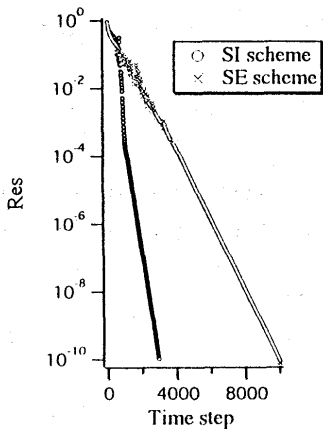


Fig.3 Convergence in residual  
(60x160 mesh)

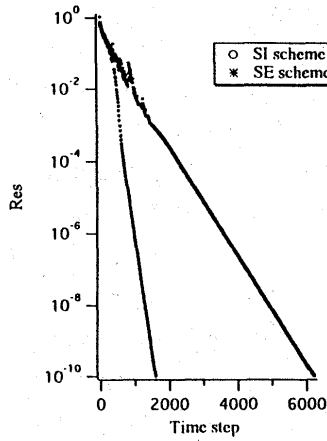


Fig.4 Convergence in residual  
(30x80 mesh)

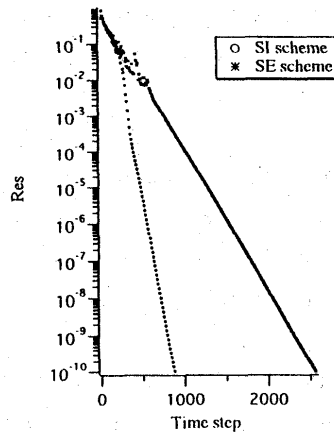


Fig.5 Convergence in residual  
(15x40 mesh)

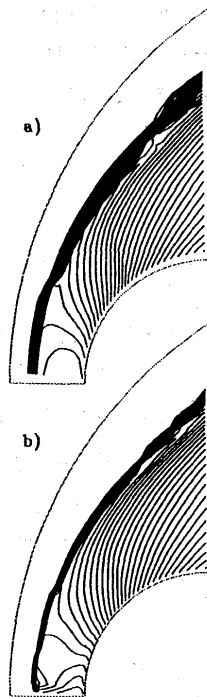
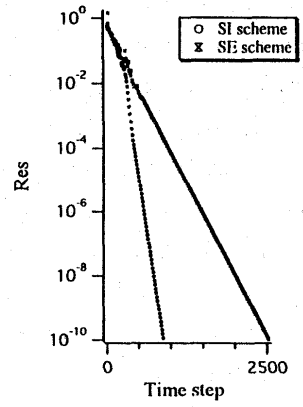
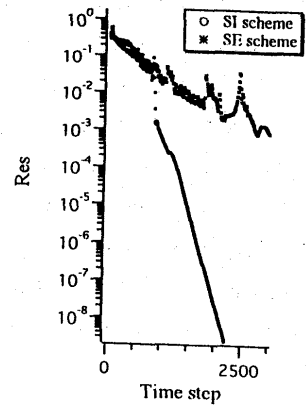


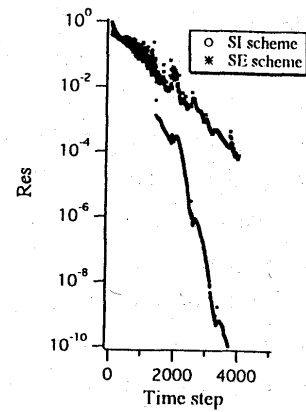
Fig.6 Density contours. M=20  
and mesh: a)15x40, b)30x80



a) 15x40 mesh



b) 30x80 mesh



c) 60x160 mesh

Fig.7 Convergence in residual: M=20

## A Multigrid Incompressible NS Solver

Takanori Hino  
Ship Research Institute

### ABSTRACT

A multigrid incompressible NS solver is developed. The solver employs artificial compressibility approach to obtain a steady state solution of the incompressible Navier-Stokes equations. The spatial discretization is based on the finite-volume method. The convection terms are evaluated by the third order upwind scheme with the flux-difference splitting. Time integration is made by the Runge-Kutta method. The algebraic turbulence model by Baldwin and Lomax is used. Nonlinear free surface conditions are implemented in the scheme that makes it possible to solve free surface flow problems. For the convergence acceleration, local time stepping, residual smoothing and a multigrid method are used. Brief description of the numerical procedure is given together with the computational results for ship flows.

## 1 INTRODUCTION

CFD is becoming a powerful tool in ship hydrodynamics as well as in various other fields of fluid engineering. One of the important characteristics of ship flows is the existence of free surface waves. It is, therefore, desirable that a flow solver for ship hydrodynamics has a capability to cope with free surface waves. Recently, a number of Navier-Stokes solvers which can simulate free surface flows have been developed[1].

In the present study, a new Navier-Stokes solver for a simulation of free surface flows around a ship hull is developed. The solver is based on a finite-volume method and employs the third-order upwind scheme for the convection terms. Artificial compressibility approach is used for velocity-pressure coupling. A multigrid method together with other convergence acceleration techniques enables to obtain a steady state solution efficiently. The solver is applied to free surface flow simulations around a Wigley hull and a Series 60 (Cb=0.6) hull and the results are compared with measurements.

## 2 COMPUTATIONAL METHOD

### 2.1 Governing Equations

The governing equations are the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. In the nondimensional form with artificial compressibility, they can be written as

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{e} - \mathbf{e}^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{f} - \mathbf{f}^v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{g} - \mathbf{g}^v)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

where

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \\ uw \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \beta v \\ vu \\ v^2 + p \\ vw \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \beta w \\ wu \\ wv \\ w^2 + p \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

and

$$\tau_{xx} = \left(\frac{1}{R} + \nu_t\right) \left(2 \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \tau_{yy} = \left(\frac{1}{R} + \nu_t\right) \left(2 \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{zz} = \left(\frac{1}{R} + \nu_t\right) \left(2 \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \tau_{xy} = \left(\frac{1}{R} + \nu_t\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz} = \left(\frac{1}{R} + \nu_t\right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \tau_{zx} = \left(\frac{1}{R} + \nu_t\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$(x, y, z)$  are the Cartesian coordinates and  $(u, v, w)$  are the velocity component.  $p$  is the modified pressure defined by

$$p = p^* + z/F^2 \quad (2)$$

where  $p^*$  is the original pressure and  $F$  is the Froude number.  $R$  is the Reynolds number and  $\nu_t$  is kinematic eddy viscosity determined from a turbulence model.  $\beta$  is the artificial compressibility parameter and is set unity. In the steady state, the system of equations recovers incompressibility.

### 2.2 Spatial Discretization

Spatial discretization is based on a finite-volume method. A computational domain is divided into small

hexagonal cells. Integration of the governing equation (1) over a cell yields

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{q} dV + \oint_{\partial V} ((e - e^v) dS_x + (f - f^v) dS_y + (g - g^v) dS_z) = 0 \quad (3)$$

where the divergence theorem is applied to the momentum flux integral.  $V$  is the volume of a cell and  $\partial V$  is its boundary.  $(S_x, S_y, S_z)$  are the area vector component of the cell boundaries.

The control volume is time-dependent when a grid conforms a free surface which moves in time. Therefore, change of volume in time and grid movement velocity should be taken into account in the above integration. However, since the present artificial compressibility formulation aims to obtain a steady state solution, all terms associated with volume change and grid movement are neglected. Upon convergence to steady state, this simplification does not affect accuracy of solutions.

In the discretized form, the above equation is written as

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{q}_{ijk} V_{ijk}) + C_{ijk} - D_{ijk} = 0 \quad (4)$$

$C_{ijk}$  and  $D_{ijk}$  are the convection and the viscous terms.

The convective fluxes are evaluated by the third order upwind scheme of the MUSCL type based on the flux difference splitting, while the central differencing is used for the viscous fluxes. For detail see Kodama[2].

Turbulence model used is an algebraic model by Baldwin and Lomax [3]. To apply this model to free surface flow problems, modification is made on a search of  $F_{max}$  in a velocity profile. Near a free surface, the search of  $F_{max}$  is limited to proximity of a solid wall or a wake centerline, which prevents the wrong choice of  $F_{max}$  due to free surface waves.

### 2.3 Free Surface Conditions

Free surface conditions, both dynamic and kinematic, are implemented in the scheme as follows. If stress of air and surface tension of water are neglected, the dynamic condition becomes no stress on a free surface. From the zero tangential stress condition, the viscous flux  $\mathbf{F}^v$  vanishes on a free surface and the velocity boundary condition on a free surface can be approximated by zero gradient extrapolation. The condition of zero normal stress on a free surface gives the Dirichlet condition for pressure on a free surface, which is approximated by

$$p^* = p_{air} + h/F^2 \quad (5)$$

where  $p_{air}(=0)$  is atmospheric pressure.

The kinematic condition is used to update free surface height. If free surface height is written as  $H = h(x, y; t) - z = 0$ , the kinematic condition becomes

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - w = 0 \quad (6)$$

In the present scheme, the kinematic free surface condition is formulated based on the mass conservation. Let

Table 1: Boundary Conditions

Boundary	$(u, v, w)$	$p$	$h$
Inflow	$(1, 0, 0)$	Z.G.	0
Outflow	Z.G.	0	0
Outer	Z.G.	0	0
Centerplane	symmetry	symmetry	symmetry
Body	$(0, 0, 0)$	Z.G.	computed
Free Surface	Z.G.	$h/F^2$	—

(Z.G. ; zero gradient)

the area vector of free surface control volume be  $\mathbf{S}^{FS}$  and the velocity vector on free surface be  $\mathbf{u}^{FS}$ . The change of volume due to the free surface movement in the time increment  $\Delta t$  is expressed as

$$\Delta t \mathbf{S}^{FS} \cdot \mathbf{u}^{FS}$$

This change of volume corresponds to the change of volume due to wave height movement  $\Delta h$  in the direction of  $\mathbf{r}$  which is arbitrary unless  $\mathbf{S}^{FS} \cdot \mathbf{r} = 0$ , i.e.,

$$\Delta h \mathbf{S}^{FS} \cdot \mathbf{r} = \Delta t \mathbf{S}^{FS} \cdot \mathbf{u}^{FS} \quad (7)$$

Thus,

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\mathbf{S}^{FS} \cdot \mathbf{u}^{FS}}{\mathbf{S}^{FS} \cdot \mathbf{r}} \quad (8)$$

The vector  $\mathbf{r}$  in Eq.(8) is taken as the direction of the grid line of the background grid which is used as the reference grid for the grid generation at each time step. The background grid covers the domain below and above the still water level. When wave height distribution is obtained as a part of a solution, the actual computational grid is generated from the background grid by the spline interpolation along each grid line in the girth direction.

### 2.4 Boundary Conditions

The discrete boundary conditions are summarized in Table 1.

It should be noted that the outflow and outer (side) boundary conditions for wave height is to give the value of zero. To avoid the reflection of free surface waves in the boundaries, various methods have been investigated[4]. Among them, Hinatsu[5] showed wave damping is effective in his simulation of progressive waves, in which a damping term is added to the vertical momentum equations in such a way that vertical velocity is suppressed near outer boundaries. The present scheme adopts the similar but simpler approach. A damping term is added to the free surface kinematic condition to reduce waves approaching outer boundaries. The performance of this method has been proven in 2-D case[6].

### 2.5 Time Integration

Since the present scheme uses artificial compressibility, time accuracy of a solution is lost and time integration

is just a way to drive a solution to a steady state. The explicit five-stage Runge-Kutta scheme with three evaluation of the viscous terms developed by Jameson[7] is used for its excellent stability property.

## 2.6 Convergence Acceleration

Convergence to a steady state can be accelerated by various ways when time accuracy of a scheme is not required as is the case of the present solver. Among them, a local time stepping, an implicit residual smoothing and a multigrid method are employed in the present scheme following Jameson[8].

Since the time integration is made by the explicit scheme, the time step  $\Delta t$  is restricted from the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition. A local time stepping is the method in which the solution at each point proceeds in time with the time step defined locally from the local stability limit.

A residual smoothing is used to increase the bound of the stability limit of the time stepping scheme[8], in which the residual  $\mathbf{R}_{ijk}$  is replaced by the solution of the following equation

$$(1 - \epsilon_\xi \delta_\xi^2)(1 - \epsilon_\eta \delta_\eta^2)(1 - \epsilon_\zeta \delta_\zeta^2) \tilde{\mathbf{R}}_{ijk} = \mathbf{R}_{ijk} \quad (9)$$

where  $\delta_k^2$  is a central difference operator of second derivative in  $k$ -direction and  $\epsilon_k$  is smoothing coefficient determined locally by using the maximum wave speeds [9].

A multigrid method is known as an extremely efficient way to get fast convergence. The concept of the multigrid time stepping applied to the solution of hyperbolic equations by Jameson [8] is to compute corrections to the solution on a fine grid by the time-stepping on a coarser grid. The successively coarser grids can be generated by deleting the alternate points along each grid line of the finer grid.

The procedure of the multigrid method is as follows. Equations to be solved is written as

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\mathbf{R}(\mathbf{q}) \quad (10)$$

and the subscript ( $k$ ) denotes the grid index.

First, the solution  $\mathbf{q}_k$  is obtained in the fine grid ( $k$ ) by solving

$$\frac{d\mathbf{q}_k}{dt} = -\mathbf{R}_k(\mathbf{q}_k) \quad (11)$$

with the Runge-Kutta scheme described above. The solution is transferred from the fine grid ( $k$ ) to the next coarser grid ( $k+1$ ) by

$$\mathbf{q}_{k+1}^{(0)} = T_k^{k+1} \mathbf{q}_k \quad (12)$$

where  $T_k^{k+1}$  is a transfer operator for a solution defined as

$$T_k^{k+1} \mathbf{q}_k = (\sum \mathbf{q}_k V_k) / V_{k+1} \quad (13)$$

where the sum is over eight cells to be merged to construct a cell in the coarser grid and  $V$  is a cell volume. The solution in the coarse grid is updated by solving the equation

$$\frac{d\mathbf{q}_{k+1}}{dt} = -\mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{q}_{k+1}) - \mathbf{P}_{k+1} \quad (14)$$

with the same Runge-Kutta scheme and  $\mathbf{q}_{k+1}^+$  is obtained.  $\mathbf{P}$  in the above equation is the forcing terms in the coarse grid ( $k+1$ ) defined as

$$\mathbf{P}_{k+1} = Q_k^{k+1} \mathbf{R}_k(\mathbf{q}_k) - \mathbf{R}_{k+1}(\mathbf{q}_{k+1}^{(0)}) \quad (15)$$

where  $Q_k^{k+1}$  is another transfer operator for a residual and is the sum of the residuals of eight cells to be merged to construct a cell in the coarser grid

$$Q_k^{k+1} \mathbf{R}_k(\mathbf{q}_k) = \sum (\mathbf{R}_k(\mathbf{q}_k)) \quad (16)$$

$\mathbf{q}_{k+1}^+ - \mathbf{q}_{k+1}^{(0)}$  gives the correction of the solution at the grid ( $k+1$ ) which reduces the residual in the finer grid due to the forcing terms. Finally, the correction is transferred back from the coarse grid ( $k+1$ ) to the fine grid ( $k$ ) by

$$\mathbf{q}_k^+ = \mathbf{q}_k + I_{k+1}^k (\mathbf{q}_{k+1}^+ - \mathbf{q}_{k+1}^{(0)}) \quad (17)$$

where  $I_{k+1}^k$  is an interpolation operator for a correction. The trilinear interpolation in computational space is used for  $I_{k+1}^k$  in the present scheme. A multigrid cycle employed here is V-cycle in which the equations are first solved at the finest grid and the solution moves down to the coarsest grid with an update of a solution at each grid. The interpolation is used in the transfer of correction from the coarsest grid to the finest one.

## 3 RESULTS

### 3.1 Wigley Hull

The scheme is first applied to the simulation of a free surface flow around a Wigley hull. In the computation, the Froude number is set 0.289 and the Reynolds number is set  $3.277 \times 10^6$ , which corresponds to the experimental condition of a model of  $L_{pp} = 2.5\text{m}$  at the University of Tokyo[10]. The number of grid points is  $105 \times 25 \times 57$  in the streamwise, girthwise and normal direction, respectively. Four level multigrid is used in the computation.

A flow is assumed to be turbulent from the 5% downstream from F.P.

Fig.1 depicts the wave profiles along a ship hull of both the computation and the data measured at the University of Tokyo[10]. The agreement is favorable except in the region near F.P. This may be due to the fact that grid spacing in the streamwise direction is not small enough there.

Fig.2 shows the comparison of the computed wave contours with the measured data[10]. Note that the contour interval of the computed contour is 0.002 and that the interval of the measured data is 0.001 - 0.002. The wave pattern is simulated successfully and the phase of waves agrees quite well. However, wave peaks (crests and troughs) of the computed results are not sharp as the measured data. Also, wave systems in the computation lie slightly closer to a ship hull than the measurement. These discrepancies seem to come from the large grid spacing in the region away from a ship hull or a centerline.

As Mori and Hinatsu[11] pointed out, the grid spacing in the lateral direction is as important as in the longitudinal direction to simulate diverging waves accurately. It can be stated that the grid used here is not sufficiently fine for a free surface flow simulation, though the wave profile along a ship hull is simulated well.

### 3.2 Series 60 ( $C_b=0.6$ ) Hull

A Series 60 ( $C_b=0.6$ ) hull is a typical test case for a free surface flow simulation around a ship. Following the computational condition used in the CFD Workshop 1994[1] which corresponds to the measurement done by Toda et al.[12], the Froude number is set 0.316 and the Reynolds number is set  $4 \times 10^6$ . All the experimental data used for comparison here are by Toda et al.[12]. The first computation is carried out using the grid similar to the Wigley case in which the  $105 \times 25 \times 57$  grid is used. In view of the poor prediction of free surface waves away from a body for the Wigley case, the  $105 \times 33 \times 105$  grid case is also computed. Two grids have the identical spacing in the streamwise direction, but the grid density in the lateral and girthwise direction is increased in the finer grid. A flow is assumed to be turbulent from the 5% downstream from F.P. as in case of a Wigley hull.

Fig. 3 is the comparison of the wave profiles. Both computed results show no significant difference and also both agree well with the experimental data. It may be stated that the wave profile computed here is grid-independent with respect to the grid density in the lateral and the girthwise directions.

Fig.4 depicts the comparison of wave contours and free surface grids. The coarse grid case shows the same tendency as the Wigley hull, that is, the phase of waves is simulated well but the wave peaks are attenuated. The result is improved in the fine grid case, though there still remain discrepancies. The generation of waves from fore and aft shoulders, which cannot be seen in the coarse grid case, are captured to some extent in the fine grid case.

Fig.5 shows wake contours and cross flow vectors at  $x/L = 1.2$ . The computations do not reproduce the bulged wake contour of the measurement. This may be related to the fact that the longitudinal vortex appeared in the measurement is not seen in the computation. The poor prediction of wake distributions and longitudinal vortices is commonly observed in the results by other numerical schemes[1], particularly in case of full ships. A turbulence modeling is thought to be an origin of these discrepancies.

The computed pressure distribution on a hull surface is shown in Fig.6. The grid spacing in streamwise direction is not sufficiently small near F.P. where large pressure gradient appears.

Finally, Fig.7 shows the perspective view of waves computed with the fine grid. Wave damping can be seen in the region close to outflow and side boundaries.

## 4 CONCLUSIONS

The multigrid Navier-Stokes solver for free surface flows around a ship hull is presented. The computed results for a Wigley hull and a Series 60 hull agree reasonably well with the measurement with respect to a wave profile along a hull and resistance values. Wave fields away from a hull are not simulated well though the grid refinement improves the prediction. Grid dependency of a solution should be further investigated. The wake distributions are not predicted well and the grid refinement does not improve the solution. More efforts should be made to improve accuracy of the wake prediction.

### ACKNOWLEDGMENTS

The author learned the basic part of the present study from Profs. A. Jameson and L. Martinelli at Princeton University, while he stayed at Princeton, which is gratefully acknowledged. The author also would like to thank the members of CFD group at SRI for their valuable discussions.

### References

- [1] —, *Proceedings of CFD Workshop Tokyo 1994*, Vols.1 and 2,(1994).
- [2] Kodama, Y., *Computation of Ship's Resistance Using an NS Solver with Global Conservation — Flat Plate and Series 60( $C_b=0.6$ ) Hull—*, J. of the Soc. Naval Arch. Jpn, Vol.172, (1992).
- [3] Baldwin, B.S. and Lomax, H., *Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows*,AIAA Paper 78-257, (1978).
- [4] Romante, J.E., *Absorbing Boundary Conditions for Free Surface Waves*, J. Comput. Phys., Vol.99, (1992).
- [5] Hinatsu, M., *Numerical Simulation of Unsteady Viscous Nonlinear Waves Using Moving Grid System Fitted on a Free Surface*, J. Kansai Soc. Naval Arch. Jpn., Vol.217, (1992).
- [6] Hino, T. Martinelli, L. and Jameson, A., *A Finite-Volume Method with Unstructured Grid for Free Surface Flow Simulations*, Proc. 6th Int. Conf. on Num. Ship Hydro., (1993).
- [7] Farmer, J., Martinelli, L. and Jameson, A., *A Fast Multigrid Method for Solving the Nonlinear Ship Wave Problem with a Free Surface*, Proc. 6th Int. Conf. on Num. Ship Hydro., (1993).
- [8] Jameson, A., *Computational Transonics*, Comm. Pure Appl. Math., Vol.XLI, (1988).

- [9] Liu, F. and Jameson, A., *Multigrid Navier-Stokes Calculations for Three-Dimensional Cascades*, AIAA J. Vol.31, No.10, (1993).
- [10] —, *Cooperative Experiments on Wigley Parabolic Models in Japan*, 17th ITTC Resistance Committee Report, (1983).
- [11] Mori, K. and Hinatsu, M., *Review of Program 1 Viscous Flow around Series 60 with Free-Surface*, Proc. CFD Workshop Tokyo 1994, Vol.2, (1994).
- [12] Toda, Y., Stern, F. and Longo, J., *Mean-Flow Measurements in the Boundary Layer and Wake and Wave Field of a Series 60  $C_B = 0.6$  Ship Model — Part 1: Froude Numbers 0.16 and 0.316.*, J. Ship Research, Vol.36, No. 4, (1992).

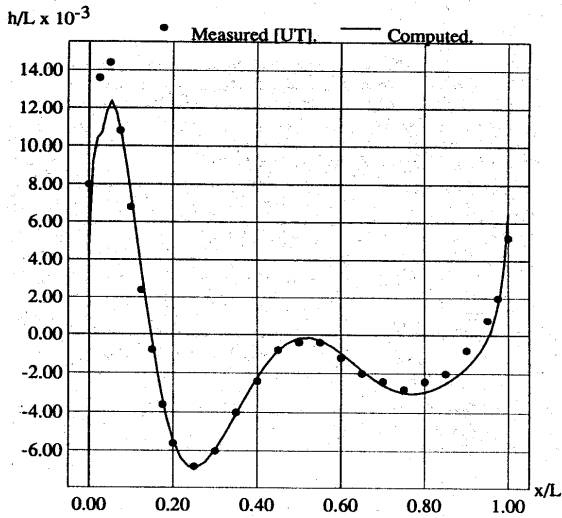


Figure 1: Comparison of Wave Profiles, Wigley Hull,  $F = 0.289$ ,  $R = 3.277 \times 10^6$ .

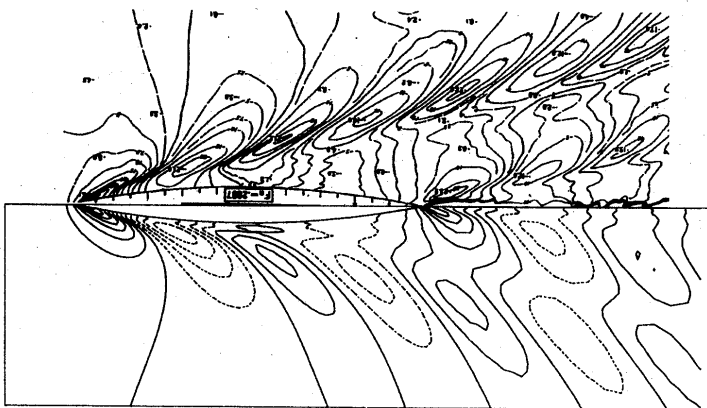


Figure 2: Comparison of Measured (top) and Computed (bottom) Wave Contours, Wigley Hull,  $F = 0.289$ ,  $R = 3.277 \times 10^6$ .

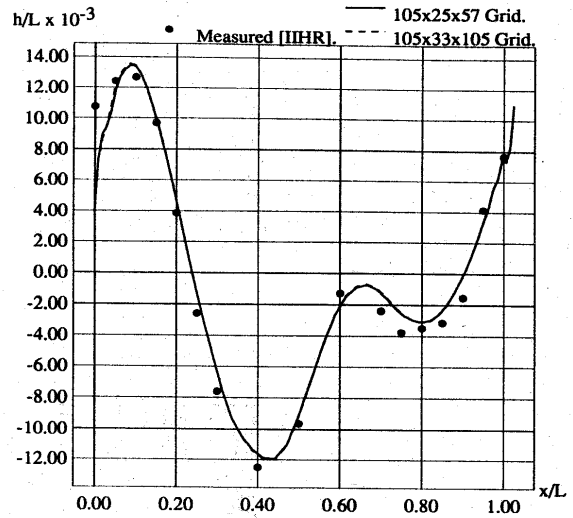


Figure 3: Comparison of Wave Profiles, Series 60 ( $C_b=0.6$ ),  $F = 0.316$ ,  $R = 4 \times 10^6$ .

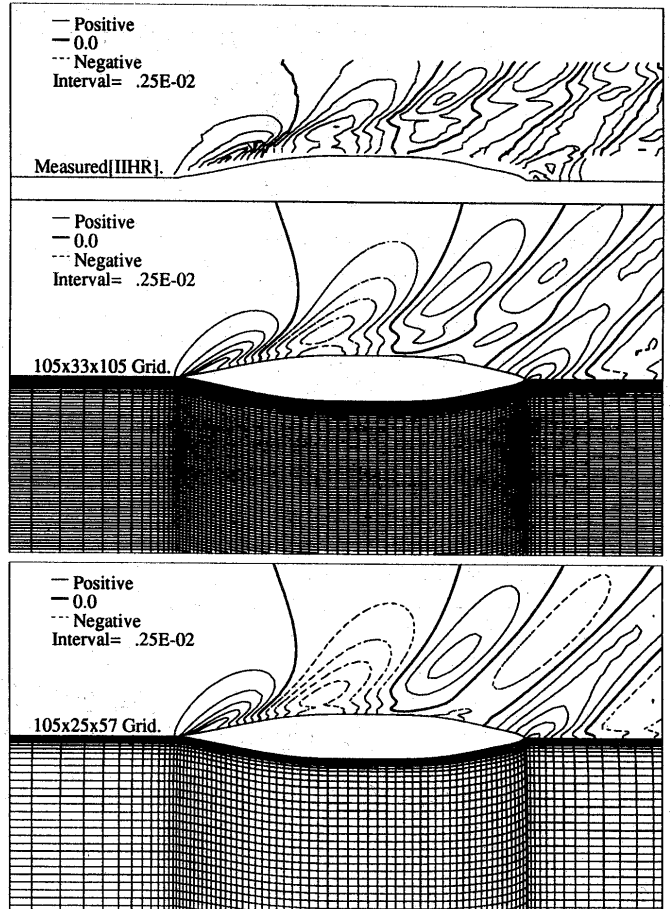
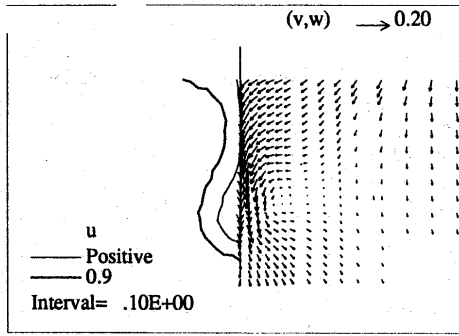
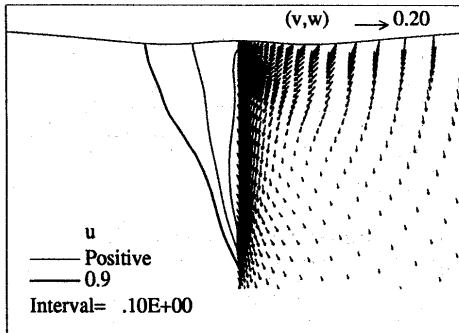


Figure 4: Comparison of Wave Contours and Free Surface Grids, Series 60 ( $C_b=0.6$ ),  $F = 0.316$ ,  $R = 4 \times 10^6$ .

Measured[IHR].



105 × 33 × 105 Grid.



105 × 25 × 57 Grid.

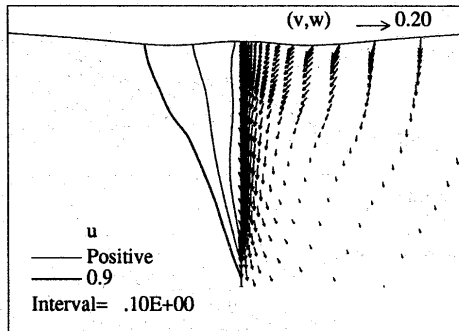


Figure 5: Comparisons of Wake Contours and Cross Flow Vectors at  $x/L = 1.2$ , Series 60 ( $C_b=0.6$ ),  $F = 0.316$ ,  $R = 4 \times 10^6$ .

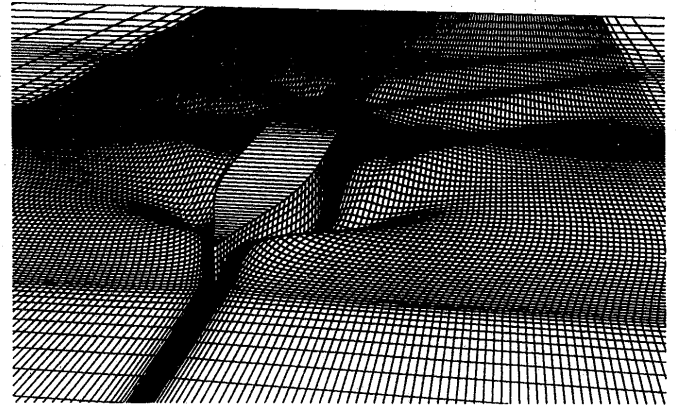


Figure 7: Perspective View of Computed Free Surface, Series 60 ( $C_b=0.6$ ),  $F = 0.316$ ,  $R = 4 \times 10^6$ .

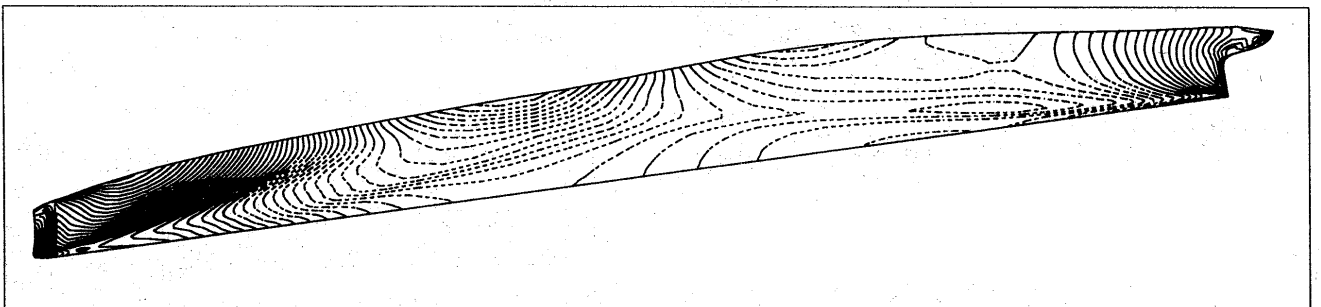


Figure 6: Computed pressure distribution, Series 60 ( $C_b=0.6$ ),  $F = 0.316$ ,  $R = 4 \times 10^6$ .



# A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities

Yasuhiro WADA

Computational Sciences Division, National Aerospace Laboratory in Tokyo, Japan  
and

Meng-Sing LIOU

NASA Lewis Research Center in Cleveland, Ohio, U.S.A.

## ABSTRACT

A flux splitting scheme is presented for the general non-equilibrium flow equations with an aim at removing numerical dissipation of Van-Leer-type flux-vector splittings on a contact discontinuity. The scheme is also recognized as an improved Advection Upwind Splitting Method(AUSM) where a slight numerical overshoot immediately behind the shock is eliminated. The proposed scheme has favorable properties: high-resolution for contact discontinuities; conservation of enthalpy for steady flows; numerical efficiency; applicability to chemically reacting flows. In fact, for a single contact discontinuity, even if it is moving, this scheme gives the numerical flux of the exact solution of the Riemann problem. Numerical experiments indicate no oscillation and robustness of the scheme for strong shock/expansion waves. Higher-order extension is also discussed.

## 1. INTRODUCTION

Recently various high-resolution schemes have been devised for the Euler/Navier-Stokes equations. Most of these schemes make use of a first-order upwind differencing as a basis, achieving higher-order accuracy under some restriction such as Total Variation Diminishing(TVD). Since these high-resolution schemes inherit their characteristics from their basic schemes, it is very important to design a basic scheme with desirable properties. Up to now, the basic upwind schemes have been proposed, and most of them are categorized as either Flux Difference Splitting(FDS) or Flux Vector Splitting(FVS): the former uses an approximate solution of the local Riemann problem, while the latter splits the flux vector into up-stream and down-stream traveling components. To our understanding, the most popular and successful FDS is Roe's scheme, while such a FVS is Van Leer's. However, neither of them are not a perfect flux splitting scheme: the former produces an expansion shock and fails near low density, while the latter bears large dissipation on contact discontinuities and shear layers. Generally speaking, the FDS schemes are too less dissipative and the FVS ones are too dissipative. There is an effort to design a robust FDS scheme, or a less dissipative FVS. However, the former scheme such as HLLEM[1] may be a little complicated scheme for practical application, and the latter effort was found to be a dead end[2].

There has been also a new approach to design a robust and less dissipative flux splitting scheme, in which the surplus dissipation of the FVS is reduced by introducing the flavor of FDS into FVS schemes. We call this approach FV/DS. Hänel[3] has found that the numerical dissipation in the boundary layer is greatly reduced by using one-sided upwinding of the tangential velocity in Van Leer's FVS formulation. This was later extended by Van Leer, who employed one-sided upwinding also for the enthalpy of the energy flux[4]. But both of these schemes still hold the numerical dissipation for 1-D contact discontinuities and yield glitches in the pressure

near the edge of the boundary layer. Liou and Steffen proposed a more promising scheme named Advection Upstream Splitting Method(AUSM)[5, 6], in which the cell-face advection Mach number is appropriately defined to determine the upwind extrapolation for the convective quantities. The AUSM can capture a stationary contact discontinuity with no numerical dissipation and is robust enough to calculate strong shock waves. However, it bears a slight numerical overshoot immediately behind the shock.

In this paper, we present another way to remove the numerical dissipation of the Van-Leer-type flux-vector splittings on a contact discontinuity. Our basic idea is very simple: Van Leer's velocity splitting formula is modified so as to cancel the mass flux at the contact discontinuity. This scheme is also recognized as an improved AUSM scheme. A cure for the carbuncle phenomenon and higher-order extension are discussed as well.

## 2. GOVERNING EQUATIONS

### 2.1 Generalized Nonequilibrium Flow Equations

Generally, a nonequilibrium flow such as described by chemical reactions or turbulent models has the governing equations in a form:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} = \mathbf{S}, \quad (1)$$

where

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ E \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \vdots \\ \rho f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{1,k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{2,k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{3,k} p \\ (E + p) u_k \\ \rho f_1 u_k \\ \rho f_2 u_k \\ \vdots \\ \rho f_n u_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix},$$

$$E = e + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

and

$$p = p(\rho, e, \rho f_1, \rho f_2, \dots, \rho f_n). \quad (2)$$

These equations include the conservation of total mass, momentum, total energy, and also the physical quantities  $\rho f_i$ , which represent nonequilibrium effects, *i.e.*, either the concentration of chemical species or vibrational energy. The quantities  $p$ ,  $\rho$ ,  $u_k$ ,  $E$ , and  $e$  respectively denote the pressure, density, Cartesian velocity components, total and internal energies, whereas the vector  $\mathbf{S}$  is a set of elements of nonequilibrium source terms. It is assumed that an appropriate "frozen" speed of sound  $c$  is calculated depending on a gas model, by which Eq.(2) is defined. In this study, a numerical scheme is formulated for the governing equations given by Eqs.(1) and Eq.(2).

### 2.3 Numerical Flux in Generalized Coordinates

In practical computation, a numerical flux in generalized coordinates is needed, which we calculate after [7]. Let the vector  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  be a normalized cell-interface normal in  $\xi$ -direction with the vectors  $\mathbf{l}(l_1, l_2, l_3)$  and  $\mathbf{m}(m_1, m_2, m_3)$  being its reciprocal ones:  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{l} = 0$ ;  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$ ;  $\mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = 0$ ;  $|\mathbf{n}| = |\mathbf{l}| = |\mathbf{m}| = 1$ . The normal and tangential velocity components to the cell-interface normal are calculated for each left and right state:

$$u = n_i u_i, \quad v = l_i u_i, \quad w = m_i u_i. \quad (3)$$

The numerical flux in the x-direction of this local Cartesian coordinates has the form:

$$\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho v u, \rho w u, \rho H u, \rho f_1 u, \dots, \rho f_n u)^t \quad (4)$$

where  $H$  is the total enthalpy:  $H \equiv (E + p)/\rho$ . Following a specified flux splitting scheme, the numerical flux  $\mathbf{F}_{1/2} = (F_1, F_2, \dots, F_{5+n})^t$  is calculated in these local Cartesian coordinates. Finally the numerical flux in the  $\xi$ -direction of the generalized coordinates,  $\mathbf{F}_\xi$ , is given as

$$\mathbf{F}_\xi = S \begin{bmatrix} F_1 \\ n_1 F_2 + l_1 F_3 + m_1 F_4 \\ n_2 F_2 + l_2 F_3 + m_2 F_4 \\ n_3 F_2 + l_3 F_3 + m_3 F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ \vdots \\ F_{5+n} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

where  $S$  is the area of the cell interface. In this procedure the numerical flux in the generalized coordinates is uniquely specified by the definition of the numerical flux in the local Cartesian coordinates, which is discussed in the next section.

## 3. NUMERICAL SCHEME

### 3.1 Classification of the FV/DS schemes

Up to now, the most successful FV/DS schemes have been the Van Leer scheme[4] and the AUSM[5, 6]. These schemes are equipped with favorable properties: conservation of enthalpy for steady flows; small dissipation in the shear layer. As the first step in constructing

our scheme, we generalize these schemes, calling them AUSMV-type and AUSMD-type schemes, where "V" and "D" denote flux-Vector-splitting-biased schemes and flux-Difference-splitting-biased ones, respectively.

First, we define the AUSMD-type schemes by its numerical flux:

$$\mathbf{F}_{1/2} = \frac{1}{2} [ (\rho u)_{1/2} (\Psi_L + \Psi_R) - |(\rho u)_{1/2}| (\Psi_R - \Psi_L) ] + p_{1/2}, \quad (6)$$

where

$$\Psi = (1, u, v, w, H, f_1, \dots, f_n)^t.$$

Hence, a specific numerical scheme is uniquely defined by an appropriate interface mass flux  $(\rho u)_{1/2}$  and interface pressure  $p_{1/2}$ . So far, the interface pressure of Van Leer's FVS is usually used as  $p_{1/2}$ . On the other hand, the form of the mass flux varies with each numerical scheme, because the mass flux is directly connected to the resolution of contact discontinuities, which is a main interest in the FV/DS schemes. For example, the following mass fluxes may be possible for the AUSMD-type scheme, and are actually used in Van Leer's FV/DS and the AUSMs, respectively.

- Van Leer's FV/DS:

$$(\rho u)_{1/2} = u_L^+ \rho_L + u_R^- \rho_R. \quad (7)$$

- AUSM(velocity-splitting):

$$(\rho u)_{1/2} = \frac{1}{2} [ u_{1/2} (\rho_L + \rho_R) - |u_{1/2}| (\rho_R - \rho_L) ], \quad (8)$$

where  $u_{1/2} = u_L^+ + u_R^-$ .

- AUSM(Mach number-splitting):

$$(\rho u)_{1/2} = \frac{1}{2} [ M_{1/2} (\rho_L c_L + \rho_R c_R) - |M_{1/2}| (\rho_R c_R - \rho_L c_L) ], \quad (9)$$

where  $M_{1/2} = u_L^+ / c_L + u_R^- / c_R$ .

Here  $u^\pm$  are identical to the velocity splitting of Van Leer's FVS. The AUSM belongs to the AUSMD-type schemes. In fact, the interface mass flux defined by Eq.(8) or Eq.(9) in conjunction with the interface pressure of Van Leer's FVS makes the AUSMD-type scheme reduce to the velocity-splitting-based AUSM and the Mach-number-splitting-based AUSM, respectively. It is noted that the mass flux of the Mach-number-splitting-based AUSM vanishes at a stationary discontinuity, making the AUSM a less dissipative scheme among the FV/DS schemes. In the next section, we will present a new formula for the interface mass flux  $(\rho u)_{1/2}$  which results in noticeable improvements over the AUSM.

The numerical flux of the Van Leer FV/DS scheme[4] slightly differs from the form of Eq.(6) even if the mass flux of Eq.(7) is used, because that scheme does not use the upwind extrapolation about the term  $(\rho u^2)_{1/2}$  in the x-momentum flux. Hence, we need to define another class of FV/DS schemes — AUSMV-type schemes:

$$(\rho u^2)_{\text{AUSMV}} = u_L^+ (\rho u)_L + u_R^- (\rho u)_R. \quad (10)$$

But the AUSMD-type schemes defines

$$(\rho u^2)_{\text{AUSMD}} = \frac{1}{2} [ (\rho u)_{1/2} (u_L + u_R) - |(\rho u)_{1/2}| (u_R - u_L) ]. \quad (11)$$

The mass flux of Eq.(7) and the velocity/pressure splittings of Van Leer's FVS make the AUSMV-type scheme reduce to the Van Leer FV/DS scheme. We emphasize that a specific AUSMV-type scheme needs the definition of the velocity splitting,  $u^\pm$ , for the x-momentum flux as well as that of the interface mass flux and the pressure.

### 3.2 AUSMD and AUSMV Scheme

The main drawback of Van Leer's FV/DS scheme is the numerical viscosity on the contact surface, while that of the AUSM is the numerical overshoot at shock waves. We have found that the overshoot of the AUSM is mainly due to the mass flux differencing. This is probably because the AUSM mass flux of Eq.(8) nor Eq.(9) does not directly take into account of the density behind the shock wave. Hence, in this study we employ a mass flux formula of Eq.(7). In this case, however, the surplus numerical dissipation at the contact discontinuities is a problem.

In this study, we design a velocity splitting so that the numerical dissipation can cancel at the contact discontinuity. The mass flux is

$$(\rho u)_{1/2} = u_L^+ \rho_L + u_R^- \rho_R, \quad (12)$$

where the velocity splittings  $u_L^+, u_R^-$  are no longer the familiar Van Leer splittings, but rather including terms designed to capture stationary/moving contact discontinuities, and are given as

$$u_L^+ =$$

$$\begin{cases} \alpha_L \left\{ \frac{(u_L + c_m)^2}{4c_m} - \frac{u_L + |u_L|}{2} \right\} + \frac{u_L + |u_L|}{2}, & \text{if } \frac{|u_L|}{c_m} \leq 1; \\ \frac{u_L + |u_L|}{2}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$u_R^- =$$

$$\begin{cases} \alpha_R \left\{ -\frac{(u_R - c_m)^2}{4c_m} - \frac{u_R - |u_R|}{2} \right\} + \frac{u_R - |u_R|}{2}, & \text{if } \frac{|u_R|}{c_m} \leq 1; \\ \frac{u_R - |u_R|}{2}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where

$$\alpha_L = \frac{2(p/\rho)_L}{(p/\rho)_L + (p/\rho)_R}, \quad \alpha_R = \frac{2(p/\rho)_R}{(p/\rho)_L + (p/\rho)_R},$$

and  $c_m = \max(c_L, c_R)$ . The velocity splitting, which is a function of  $\alpha$ :  $0 \leq \alpha \leq 2$ , is shown in Fig. 1.

Secondly, the pressure flux is

$$p_{1/2} = p_L^+ + p_R^-, \quad (13)$$

where

$$p_{L/R}^\pm = \begin{cases} p_{L/R} \frac{(u_{L/R} \pm 1)^2 (2 \mp \frac{u_{L/R}}{c_m})}{4}, & \text{if } \frac{|u_{L/R}|}{c_m} \leq 1; \\ p_{L/R} \frac{u_{L/R} \pm |u_{L/R}|}{2 u_{L/R}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Substitution of Eq.(12) and Eq.(13) into Eq.(6) results in the numerical flux of the AUSMD, in addition, if the term  $\rho u^2$  in the x-momentum flux is replaced by Eq.(10), we have the scheme AUSMV. We call these specific AUSMD/V-type schemes as the AUSMD and AUSMV, respectively.

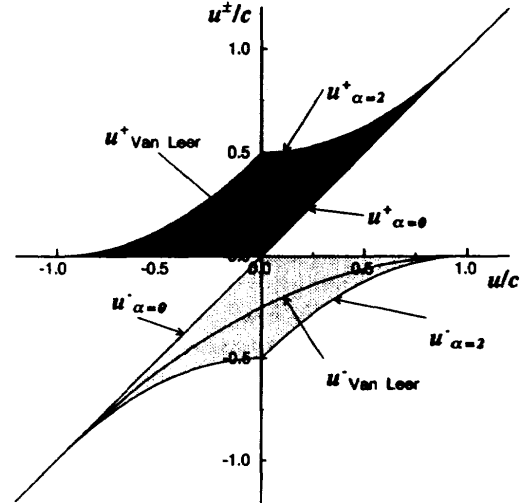


Fig. 1 Velocity splitting.

### 3.3 AUSMDV: Mixture of AUSMD and AUSMV

There remains a question about the choice between the AUSMD and AUSMV, *i.e.*, between Eq.(11) and Eq.(10). According to our numerical experiments[8], the AUSMV has a higher shock-capturing capability than the AUSMD, while the AUSMD has a weaker CFL number restriction than the AUSMV. Then we prefer a mixed momentum flux of  $(\rho u)_{1/2}$  between the AUSMV and AUSMD:

$$(\rho u^2)_{1/2} = \left(\frac{1}{2} + s\right)(\rho u^2)_{\text{AUSMV}} + \left(\frac{1}{2} - s\right)(\rho u^2)_{\text{AUSMD}}, \quad (14)$$

where  $s$  is a switching function of the pressure gradient:

$$s = \frac{1}{2} \min\left(1, K \frac{|p_R - p_L|}{\min(p_L, p_R)}\right) \quad (15)$$

This averaging is biased toward to the AUSMV in order to maintain the shock-capturing capability. We call this mixed scheme the AUSMDV. In this study a constant parameter  $K = 10$  is taken. It is noted here that the genuine AUSMV flux is also possible when the CFL restriction is not considered serious.

### 3.4 A Cure for the Carbuncle Phenomenon

The carbuncle phenomenon is an instability in capturing a strong shock wave in multi-dimensional problems. Quirk's proposed a test problem[9], in which a shock wave propagates into a static gas through a duct whose centerline grid is slightly perturbed. The AUSMDV is not free from this problem as shown in Fig. 2. We suspect that the carbuncle phenomenon comes from the recognition of a multi-dimensional shock wave by a one-dimensional numerical scheme. When the shock wave is captured by a shock capturing scheme, an intermediate point(s), which is unphysical, is needed to express a shock position numerically. In 1-D case, if the scheme is well designed, this is not a problem. But when that scheme is applied to multi-dimensional calculation, the intermediate point exchanges information with the neighbors which are also intermediate shock points. It is probable that the exchange of information between these unphysical data causes a numerical instability. In that case, a mechanism to stabilize the shock or some form

of artificial viscosity is required. We call this artificial procedure "Shock-Fix."

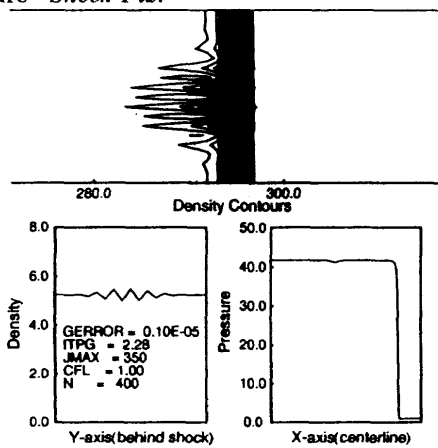


Fig. 2 Shock wave propagating through a duct by AUSMDV.

Here, the following shock-fix is proposed(see Fig.3).

1. Find out compressible sonic points across the cell interface before calculating numerical flux. This sonic point takes place when

$$\begin{cases} u_L - c_L > 0 \text{ and } u_R - c_R < 0, \\ \text{or } u_L + c_L > 0 \text{ and } u_R + c_R < 0. \end{cases} \quad (16)$$

If this is detected between grid point  $j$  and  $j + 1$ , set flag  $S_{\xi,j} = 1$  and  $S_{\xi,j+1} = 1$  in  $\xi$ -direction. The same procedure is done in  $\eta/\zeta$ -direction, which is easy to vectorize.

2. In calculating a numerical flux in  $\xi$ -direction between grid points  $j$  and  $j + 1$ ,  $S_\eta$  and  $S_\zeta$  but  $S_\xi$  are used to sense the shock position, to which some dissipative scheme is applied. That is

$$\begin{cases} \text{Dissipative Scheme: if} \\ (S_{\eta,j} + S_{\eta,j+1} + S_{\zeta,j} + S_{\zeta,j+1}) \geq 1; \\ \text{Non-Dissipative Scheme: otherwise.} \end{cases}$$

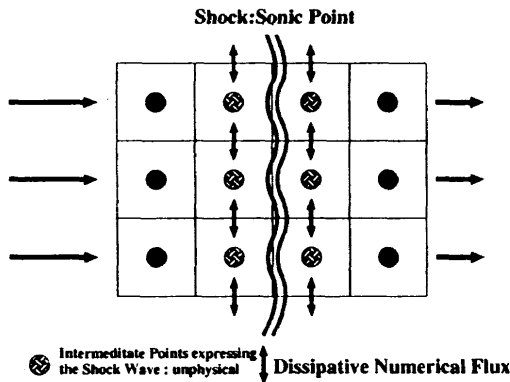


Fig. 3 Shock-fix.

The numerical fluxes in other directions are calculated in a similar way. This method unlike [9] does not use the pressure gradient in sensing shock waves. The pressure gradient does not always provide a sufficient information for the recognition of shock wave, since in that case some empirical parameter to distinguish shock and compressive wave would be needed. It is noted that the alone shock fix procedure is easily applicable to unstructured grid approach. This shock-fix needs a dissipative scheme to stabilize the shock wave. For the AUSMDV,

we employ Hänel's FVS scheme, because it is dissipative enough and conserves the total enthalpy for steady flows. The numerical flux of Hänel's FVS is

$$F_{1/2} = \rho L u_L^+ \Psi_L + \rho R u_R^- \Psi_R + p_{1/2}, \quad (17)$$

where the velocity splitting and the interface pressure are identical to those of Van Leer's FVS. Quirk[9] proposed a test problem for the carbuncle phenomenon, where a shock wave propagates into a static gas through a duct whose centerline grid is slightly perturbed. Figure 4 show the solution of Quirk's test problem by the AUSMDV without the shock-fix, indicating the effectiveness of the shock-fix. A similar shock-fix is possible for Roe's approximate Riemann solver, for which the HLLC scheme is considered to be a dissipative partner scheme[8].

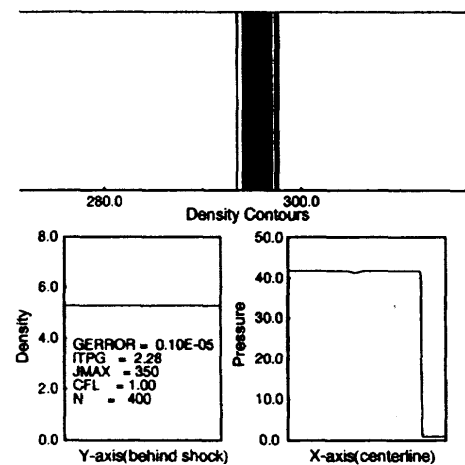


Fig. 4 Shock wave propagating through a duct by AUSMDV with shock-fix.

## 4. RESULTS AND DISCUSSIONS

### 4.1 Test Problems using First-Order Scheme

Here some of numerical experiments are introduced. The first problems are shock-tube ones as shown in Fig. 5a-c, where the initial value is

- $(\rho, p, u)_L = (1, 1, 0)$ ;  $(\rho, p, u)_R = (1/8, 1/10, 0)$ ,
- $(\rho, p, M)_L = (.1, .1, 15)$ ;  $(\rho, p, M)_R = (.1, .1, -15)$ ,
- $(\rho, p, u)_L = (1, 2, -2.5c_L)$ ;  $(\rho, p, u)_R = (1, .5, 2.5c_L)$ ,

respectively. The first case is Sod's standard problem and the other problems are about very strong shock and expansion waves. All these figures indicate the robustness and high-resolution of the AUSMDV. The second problem is 1-D self-similar conical flow over a 10-degree half cone at hypersonic speed. This problem is used to check the accuracy of numerical schemes on the shock and boundary layer[10]. The flow conditions are  $M_\infty = 7.95$ ;  $Re_\infty = 4.2 \times 10^5$ . Figure 6 shows the profiles of pressure, temperature and tangential velocity solved by the AUSMDV. The AUSMDV conserves the total enthalpy for a steady state solution, giving the exact wall temperature solution indicated by an arrow. In addition, the thickness of the boundary layer was very similar to that solved by the Roe scheme, indicating high-resolution of the AUSMDV for a non-linear wave discontinuity as well. Other various numerical experiments including thermo-chemical non-equilibrium flows are found in [8].

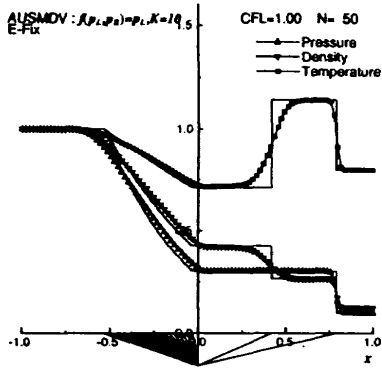


Fig. 5a Sod's shock-tube problem.

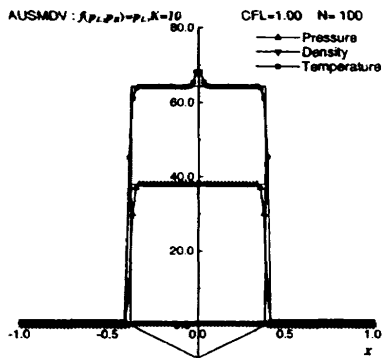


Fig. 5b Shock-tube problem - colliding flow.

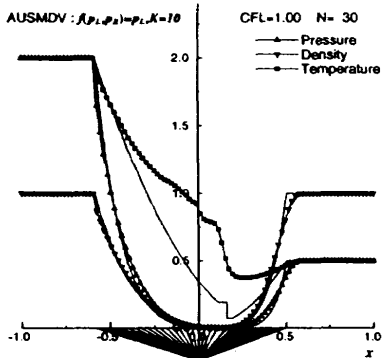


Fig. 5c Shock-tube problem - strong expansion.

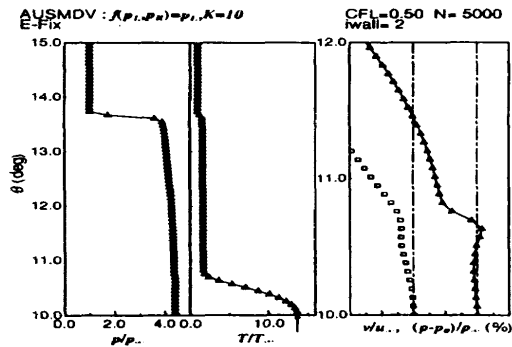


Fig. 6 Conical flow problem.

#### 4.2 MUSCL Higher-Order Extension

It is natural to use the MUSCL approach in extending the AUSMDV to higher-order accuracy. However, there are arbitrariness for the choice of variables which are interpolated or extrapolated. We may choose conservative variables  $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, E)$ , or primitive variables  $\hat{\mathbf{q}} = (\rho, u, p)$ . Even when the characteristic decomposition is used, there are still many choices about which kind of governing equations is used in deriving the char-

acteristic variables. For example, the governing equations for the conservative variables  $\mathbf{q}$  give  $\mathbf{L}\Delta\mathbf{q}$  as gradient of characteristics, while those for the primitive ones do  $\hat{\mathbf{L}}\Delta\hat{\mathbf{q}}$ , where  $\mathbf{L}$  and  $\hat{\mathbf{L}}$  are left-eigenvector matrix for the conservative variables and primitive ones, respectively. Here, in order to show the effects of choice of the variables extrapolated, some numerical results are presented. Figures 7a and 7b show the solution for Sod's shock-tube problem using the primitive variables  $\hat{\mathbf{q}} = (\rho, u, p)$  and the characteristic variables based on  $\hat{\mathbf{q}}$ . Here the minimod was used as a limiter function. The MUSCL approach using the characteristic variables gives obviously better solution than the non-characteristic ones. This tendency was common for other sets of variables,  $(\rho, \rho u, E)$ ,  $(\rho, u, T)$ ,  $(T, u, p)$  and  $(H, u, p)$ , with the difference among the results using characteristics variables being very minor, although they are not shown in this paper.

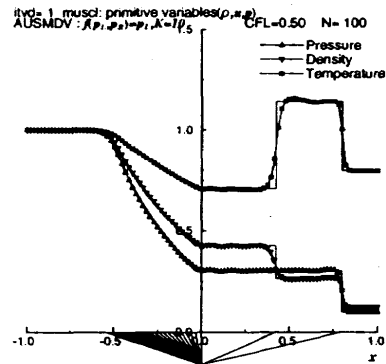


Fig. 7a Sod's shock-tube problem - MUSCL  $\Delta(\rho, u, p)$

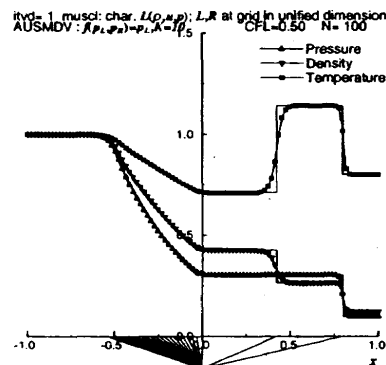


Fig. 7b Sod's shock-tube problem - MUSCL  $L\Delta(\rho, u, p)$

Secondly the conical flow problem is solved by the AUSMDV with the MUSCL higher-order extension. Figures 8a-e present the results. For this steady state problem, the characteristic decomposition shows almost no improvements over the use of raw variables. Within the boundary layer the pressure is constant, but temperature and density have a steep gradient. Then, the reconstruction using the temperature and density can not recover the physically correct pressure profile as shown in Figs. 8c and 8d. On the other hand, when the pressure is included as a element of extrapolated variables, a fairly good result is obtained as shown in Fig. 8a, 8b and 8e. The solution in Fig. 8e uses the characteristic variables in which the total enthalpy  $H$  is included as a extrapolated variable, keeping the conservation of  $H$  for

a steady state solution even at higher-order accuracy. Also the use of variables  $(T, u, p)$  gives a good solution similar to that by using  $(H, u, p)$ , being advantageous for chemically reacting flow problems because of no need of calculating temperature by the Newton iteration. It is noted here that there were almost no difference between the Roe scheme and the AUSMDV as a basic flux splitting scheme in the above calculations. More detailed study about the choice of variables used in the MUSCL approach will be reported in near future[11].

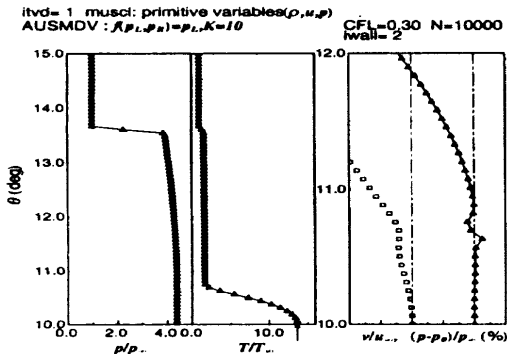


Fig. 8a Conical flow problem — MUSCL  $\Delta(\rho, u, p)$

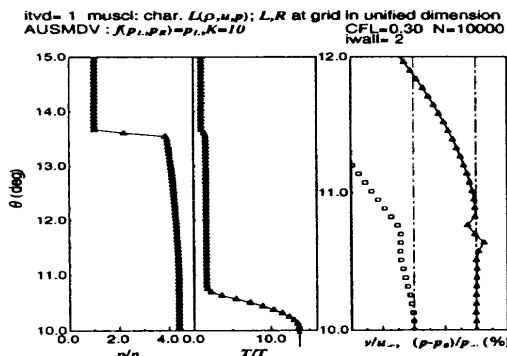


Fig. 8b Conical flow problem — MUSCL  $L\Delta(\rho, u, p)$

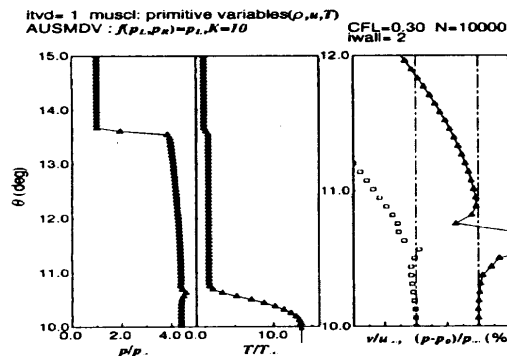


Fig. 8c Conical flow problem — MUSCL  $\Delta(\rho, u, T)$

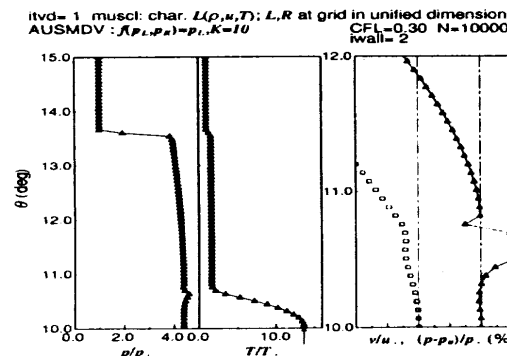


Fig. 8d Conical flow problem -- MUSCL  $L\Delta(\rho, u, T)$

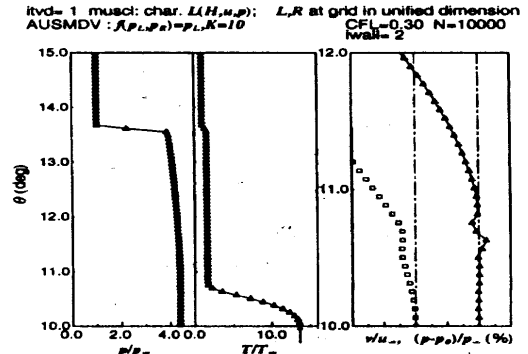


Fig. 8e Conical flow problem — MUSCL  $L\Delta(H, u, p)$

5. CONCLUSION

We have presented a flux splitting scheme equipped with favorable properties: high-resolution for contact discontinuities; conservation of enthalpy for steady flows; numerical efficiency; applicability to chemically reacting flows. Numerical experiments indicate the soundness of the proposed scheme. Higher-order extension is also discussed.

ACKNOWLEDGMENT

This work was partly done while the first author stayed at NASA Lewis Research Center.

REFERENCES

- [1] Wada, Y., "On the Godunov-Type Schemes — An Improvement of HLLEM Scheme and its Extension to Chemically Reacting Flows," NAL TR-1189, 1993.
- [2] Coirier, W., J. and Van Leer, B., "Numerical Flux Formulas for the Euler and Navier-Stokes Equations: II. Progress in Flux-Vector Splitting," AIAA Paper 91-1566CP, 1991.
- [3] Hänel, D. and Schwane, R., "An Implicit Flux-Vector Splitting Scheme for the Computation of Viscous Hypersonic Flow," AIAA Paper 89-0274, January 1989.
- [4] Van Leer, B., "Flux-Vector Splitting for the 1990s," NASA CP-3078, 1991, pp.203-214.
- [5] Liou, M.-S. and Steffen, C.J., "A New Flux Splitting Scheme," NASA TM104404, 1991; also in *J. Comput. Phys.* vol.107, 1993, pp. 23-39.
- [6] Liou, M.-S., "On a New Class of Flux Splittings," *Lecture Notes in Physics*, vol.414, 1993, pp.115-119.
- [7] Anderson, W.K., Thomas, J.L. and Van Leer, B., "Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations," *AIAA Journal*, vol.24, 1986, pp.1453-1460; also AIAA Paper 85-0122, January 1985.
- [8] Wada, Y. and M.-S. Liou, "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities," AIAA Paper 94-0083, January 1994.
- [9] Quirk, J.J., "A contribution to the Great Riemann Solver Debate," ICASE Report 92-64, 1992.
- [10] Van Leer, B., Thomas, J.L., Roe, P.L., Newsome, R.W., "A Comparison of Numerical Flux Formulas for the Euler and Navier-Stokes Equations," AIAA Paper 87-1104CP, 1987.
- [11] Wada, Y. and Liou, M.-S., in preparation.

# Construction and analysis of difference approximation for scalar conservation laws and its consistency with entropy condition using Boltzmann-like approach

(ボルツマン的アプローチによるスカラー保存則の差分近似のエントロピー条件適合性)

Hideaki AISO (相曾 秀昭), Toshiyuki IWAMIYA (岩宮 敏幸)  
Computational Sciences Div. NAL JAPAN (航空宇宙技術研究所数理解析部)

## ABSTRACT

We are concerned with difference approximation for scalar conservation laws and the convergence. The problem is important not only from the theoretical viewpoint but also from the viewpoint of practical CFD (Computational Fluid Dynamics), because the results give some guidelines how to construct difference schemes for systems of conservation laws including the Euler equations even though their theoretical extension can not always be proved.

Based on Godunov's difference approximation, we construct a difference approximation which has the accuracy of second order except around discontinuity. Here we rearrange the initial value used in each time advancement procedure of Godunov's difference approximation. Then we prove that the difference approximation converges to the entropy solution. In the proof the Boltzmann-like approach is used as well as modified flux functions.

## 概要

スカラー保存則の差分近似とその収束を議論する。基本的な問題ではあるが、Euler 方程式など保存則の系の差分近似の構成法を考える上で重要な問題でもある。

本報告では Godunov の差分近似を基に 2 次精度の差分近似を構成した。Godunov 法では各有限体積に定数分布を仮定した階段関数を初期値とする初期値問題を基に差分近似が構成されるが、階段関数の代わりに各有限体積の分布を再構成して得た初期値関数を用いて 2 次精度を得ている。その後、この差分近似がエントロピー解に収束する事を示す。証明では、ボルツマン的な考え方と修正流束関数が用いられる。

## Introduction

Difference approximation for scalar conservation laws is still an important issue and is a basis for constructing practical difference schemes used in CFD (Computational Fluid Dynamics).

When we analyze difference approximation for scalar conservation laws mathematically, one of the main interests is the convergence to entropy solution (weak solution that satisfies the entropy condition). One of the authors treated this problem in ref. 1 and has got an almost complete solution in the case of first order-accurate difference approximation in viscous form.

Another interest is the order of accuracy. This is very important from the viewpoint of practical CFD.

Our approach is based on Godunov's difference approximation.<sup>1)</sup> In Godunov's method, an initial value problem (IVP) is exactly solved for each time advance-

ment procedure. The initial function of IVP is a step function taking a constant value within each cell (finite volume). We modify the method by rearranging the initial function of IVP used in each time advancement procedure, and we construct a new difference approximation. The new difference approximation both has the accuracy of second order except around discontinuity and converges to the entropy solution.

It is not so difficult to prove the order of accuracy.

To prove the convergence to entropy solution, we divide it into two problems. The first is the convergence to a weak solution and the second is the proof that the limit solution (weak solution to which the difference approximation converges) satisfies the entropy condition.

The first is the problem of stability. We use the TVD (Total Variation Diminishing) property.<sup>5,6,8)</sup>

The second problem is another story. In fact, it is well known that some difference approximation converges

to a weak solution which does not satisfy the entropy condition, even though it is TVD. To prove that the limit solution satisfies the entropy condition, we prove the consistency with entropy condition. We prove that the difference approximation satisfies some inequality (called the numerical entropy inequality) which implies that the limit solution satisfies the entropy inequality, and then we conclude the entropy condition.

This report is organized as follows.

1. Brief review of scalar conservation laws.
2. Difference approximation in conservative form and Godunov's method.
3. Rearrangement method to get the accuracy of higher order.
4. Sketch of proof.

## 1. Brief review of scalar conservation laws.

We briefly review the initial value problem for a scalar conservation law:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, x, t \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (1)$$

where we suppose that the flux function  $f$  is of  $C^2$ -class.

The problem (1) can not always have a smooth solution even if the initial function  $u_0(x)$  is smooth. Therefore we consider weak solutions as usual. A bounded measurable function  $u(x, t)$  is called a *weak solution* to the problem (1) if the equality

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{u(x, t)\phi_t(x, t) + f(u(x, t))\phi_x(x, t)\} dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\phi(x, 0)dx = 0 \quad (2)$$

holds for any test function  $\phi$  which vanishes for  $|x|$  and  $t$  sufficiently large.

But, once we allow weak solutions, the uniqueness of solution is lost. In fact, the problem (1) may have infinitely many different weak solutions. Among the weak solutions only one is physically relevant. To single out the physically relevant solution, we impose the entropy condition on weak solutions.

**DEFINITION 1.1.** A pair of function  $(U, F)$  is called an *entropy pair* if  $U$  is convex and  $F' = U'f'$ .  $U$  and  $F$  are called the *entropy function* and the *entropy flux*, respectively. A weak solution  $u = u(x, t)$  to the problem

(1) is said to satisfy the entropy condition if the entropy inequality

$$U(u)_t + F(u)_x \leq 0 \quad (3)$$

holds in the sense of distribution <sup>1</sup> for an arbitrary entropy pair  $(U, F)$ .

A weak solution that satisfies the entropy condition is called an *entropy solution*. For the existence and uniqueness of entropy solution, see, for example, ref. 9.

When the flux function  $f$  is strictly convex, we have the following theorem to simplify the entropy condition.

**THEOREM 1.1.** Suppose that the flux function  $f$  is strictly convex and that the initial function  $u_0(x)$  is of bounded variation. Let  $u = u(x, t)$  be a weak solution of bounded variation.

If there exists an entropy pair with the entropy function  $U$  strictly convex for which the entropy inequality (3) holds, then  $u$  is the entropy solution.

## 2. Difference approximation in conservative form and Godunov's method.

In the rest of this paper, we suppose that the flux function  $f$  should be strictly convex and that the initial function  $u_0(x)$  should be of bounded variation. We consider only weak solutions of bounded variation. Without loss of generality, we assume that

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

We approximate the problem (1) by difference approximation in conservative form:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda \{ \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{f}_{i-\frac{1}{2}}^n \}, \quad i, n \in \mathbf{Z}, n \geq 0, \quad (5)$$

where  $\Delta x$  and  $\Delta t$  are difference increments in  $x$ - and  $t$ -direction, respectively, and each  $u_i^n$  is an approximate value of  $u$  at  $(i\Delta x, n\Delta t)$ . The ratio  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  is fixed so that the CFL condition

$$\lambda \sup_{\inf_{n,i} u_i^n \leq s \leq \sup_{n,i} u_i^n} |f'(s)| \leq 1 \quad (6)$$

<sup>1</sup>Precisely speaking, the inequality

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \{U(u(x, t))\phi_t(x, t) + F(u(x, t))\phi_x(x, t)\} dxdt \geq 0 \quad (4)$$

holds for any test function  $\phi$  that is not negative and that takes 0 on the  $x$ -axis and for  $|x|$  and  $t$  sufficiently large.



should be satisfied. To be consistent with the original equation (1), each numerical flux  $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$  should satisfy the inequality

$$\left| \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \{ f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n) \} \right| \leq a |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (7)$$

for some universal constant  $a$ , independent of  $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$ . Initial values  $\{u_i^0\}_{i \in \mathcal{Z}}$  are determined in some appropriate manner, for example,

$$u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} u_0(x) dx.$$

To formulate the convergence of difference approximation, we define the approximate solution  $u_\Delta(x, t)$ :

$$u_\Delta(x, t) = u_i^n \quad \text{if} \quad \begin{cases} i\Delta x \leq x < (i+1)\Delta x, \\ n\Delta t \leq t < (n+1)\Delta t. \end{cases}$$

Then by the word "convergence of difference approximation" we mean the convergence<sup>2</sup> of approximate solution  $u_\Delta(x, t)$  as  $\Delta = (\Delta x, \Delta t)$  tends to  $(0, 0)$ .

We review the TVD property.

**DEFINITION 2.1.** A difference approximation is said to be TVD (Total Variation Diminishing) if the inequality

$$\sum_{i \in \mathcal{Z}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \leq \sum_{i \in \mathcal{Z}} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (8)$$

holds for any  $n$ .

**THEOREM 2.1.** If a difference approximation is TVD, there exists a subsequence  $\{u_{\Delta_j}\}_{j \in \mathcal{Z}}$  of approximate solution converging to some weak solution as  $j \rightarrow \infty$  ( $\Delta_j \rightarrow (0, 0)$ ).

See also refs. 5, 6 and 8.

But THEOREM 2.1 does not guarantee the uniqueness or the entropy condition for the limit solution. So we define the consistency with entropy condition.

**DEFINITION 2.2.** A difference approximation is said to have the consistency with entropy condition or to be consistent with the entropy condition, if it satisfies the numerical entropy inequality:

$$U(u_{i+1}^n) - U(u_i^n) + \lambda \{ \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \} \leq 0, \quad (9)$$

where  $(U, F)$  is an entropy pair with the entropy function  $U$  strictly convex and each numerical entropy flux  $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n$  should satisfy the inequality

$$\left| \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \{ F(u_i^n) + F(u_{i+1}^n) \} \right| \leq A |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (10)$$

for some universal constant  $A = A(U)$  independent of  $\Delta$ .

<sup>2</sup>The convergence is discussed in the topology  $L^1_{loc}$ .

**THEOREM 2.2.** If a TVD difference approximation has the consistency with entropy condition, it converges to the entropy solution as  $\Delta \rightarrow (0, 0)$ .

We review Godunov's difference approximation.<sup>4)</sup> The difference approximation consists of the following two steps to determine  $u_i^{n+1}$ 's from  $u_i^n$ 's.

**STEP 1.**

We consider the initial problem for  $w^* = w^*(x, t)$ .

$$\begin{cases} (w^n)_t + f(w^n)_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, 0 < t, \\ w^n(x, 0) = w_0^n(x) \equiv u_i^n & \\ \text{if } (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x \end{cases} \quad (11)$$

**STEP 2**

We determine each  $u_i^{n+1}$  by averaging the entropy solution to problem (11) over the interval  $\{(x, \Delta t); (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x\}$ , i.e.

$$u_i^{n+1} = \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} w^n(x, \Delta t) dx. \quad (12)$$

We easily see that

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\Delta t} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} \{(w^n)_t + f(w^n)_x\} dx \\ &= \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} w^n(x, \Delta t) dx - \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} w^n(x, 0) dx \\ &\quad + \int_0^{\Delta t} f(w^n((i + \frac{1}{2})\Delta x, t)) dt \\ &\quad - \int_0^{\Delta t} f(w^n((i - \frac{1}{2})\Delta x, t)) dt, \end{aligned} \quad (13)$$

and then that (12) is written in the form:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} f(w^n((i + \frac{1}{2})\Delta x, t)) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} f(w^n((i - \frac{1}{2})\Delta x, t)) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

It shows the difference approximation is of conservative form (5), where each numerical flux  $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$  is defined by

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = (\bar{f}^G)_{i+\frac{1}{2}}^n \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(w^n((i + \frac{1}{2})\Delta x, t)) dt.$$

The initial function  $w_0^n(x)$  of the problem (11) may have discontinuity at each boundary  $x = (i + \frac{1}{2})\Delta x$  between two neighboring cells. A wave (a shock or a centered rarefaction) occurs at each discontinuity of  $w_0^n(x)$ . The waves may interact when  $t \geq \frac{1}{2}\Delta t$ , even if the CFL condition (6) is satisfied. But the  $L^\infty$ -norm of entropy solution to a scalar conservation law is bounded by the one of initial function, so the effect of wave coming

from  $((i + \frac{1}{2})\Delta x, 0)$  never reaches  $x = (i - \frac{1}{2})\Delta x$  nor  $x = (i + \frac{3}{2})\Delta x$  if  $t$  is less than  $\Delta t$ . Then each integral

$$\int_0^{\Delta t} f(w^n((i + \frac{1}{2})\Delta x, t))dx$$

depends only on the two neighboring state  $u_i^n$  and  $u_{i+1}^n$ .

The entropy solution  $w = w(x, t)$  to Riemann problem

$$\begin{cases} w_t + f(w)_x = 0, & x, t \in \mathbf{R}, t > 0, \\ w(x, 0) = \begin{cases} u_L & \text{if } x < 0 \\ u_R & \text{if } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

is self-similar, i.e. the solution  $w$  is a function of  $x/t$ :

$$w = w(x/t; u_L, u_R). \quad (16)$$

It is also well known that

$$w(0; u_L, u_R) = \text{sgn}(u_R - u_L) \times \min_{(s-u_L)(s-u_R) \leq 0} \{ \text{sgn}(u_R - u_L) f(s) \}. \quad (17)$$

Then we obtain

$$(\bar{f}^G)_{i+\frac{1}{2}}^n = \text{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) \times \min_{(s-u_i^n)(s-u_{i+1}^n) \leq 0} \{ \text{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) f(s) \}. \quad (18)$$

Godunov's difference approximation has the accuracy of first order. The following results are well known. They are still valid even when the flux function  $f$  is not strictly convex. See also ref. 1.

LEMMA 2.1. Godunov's difference approximation is TVD.

LEMMA 2.2. Godunov's difference approximation has the consistency with entropy condition.

THEOREM 2.3. Godunov's difference approximation converges to the entropy solution.

### 3. Rearrangement method to get the accuracy of higher order.

In this section, we modify Godunov's difference approximation to obtain the accuracy of higher order in the smooth region.

Here we rearrange the initial function  $w_0^n(x)$  of the initial value problem (11) to get a new initial function  $\tilde{w}_0^n(x)$  so that the difference approximation should have the accuracy of second order.

Considering the property of entropy solution to scalar conservation laws, we impose the following conditions on the rearrangement.

**R1. (Average preserving within each cell)**

The equality

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} \tilde{w}_0^n(x) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} w_0^n(x) dx = u_i^n$$

should hold within each cell.

**R2. (Monotonicity preserving)**

1) Within each cell  $((i - \frac{1}{2})\Delta x, (i + \frac{1}{2})\Delta x)$ ,  $\tilde{w}_0^n(x)$  is non-decreasing or non-increasing.

2) If  $u_i^n \leq u_{i+1}^n$  or  $u_i^n \geq u_{i+1}^n$ , then

$$\lim_{x \uparrow (i+\frac{1}{2})\Delta x} \tilde{w}_0^n(x) \leq \lim_{x \downarrow (i+\frac{1}{2})\Delta x} \tilde{w}_0^n(x)$$

or

$$\lim_{x \uparrow (i+\frac{1}{2})\Delta x} \tilde{w}_0^n(x) \geq \lim_{x \downarrow (i+\frac{1}{2})\Delta x} \tilde{w}_0^n(x),$$

respectively.

**R3. (Local extrema preserving)**

If  $u_i^n$  is a local extremum (i.e.  $u_i^n \geq u_{i\pm 1}^n$  or  $u_i^n \leq u_{i\pm 1}^n$ ), then

$$\tilde{w}_0^n(x) = u_i^n, \quad (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x.$$

Here we define  $\tilde{w}_0^n(x)$  as the following.

DEFINITION 3.1. The function  $\tilde{w}_0^n(x)$  is defined to be a linear function within each cell:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_0^n(x) &= u_i^n + k_i^n(x - i\Delta x) \\ &\text{if } (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x, \end{aligned} \quad (19)$$

where the coefficient  $k_i^n$  is determined by

$$\begin{aligned} k_i^n &= \frac{1}{2} \{ \text{sgn}(u_i^n - u_{i-1}^n) + \text{sgn}(u_{i+1}^n - u_i^n) \} \\ &\times \min \left\{ \left| \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right|, \left| \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

The function  $\tilde{w}_0^n(x)$  satisfies R1, R2 and R3.

Then we give the time advancement procedure for the new difference approximation.

#### STEP 1

From  $\{u_i^n\}_{i \in \mathbf{Z}}$ , we define the function  $\tilde{w}_0^n(x)$  by

DEFINITION 3.1, then we consider the initial value problem for  $w^n = w^n(x, t)$ :

$$\begin{cases} (w^n)_t + f(w^n)_x = 0, & x, t \in \mathbf{R}, t > 0, \\ w^n(x, 0) = \tilde{w}_0^n(x) \\ \text{if } (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x. \end{cases} \quad (21)$$

#### STEP 2

We determine each  $u_i^{n+1}$  by averaging the solution to the problem (21) over the interval  $\{(x, \Delta t); (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x\}$  i.e.

$$u_i^{n+1} = \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} w^n(x, \Delta t) dx. \quad (22)$$

The new difference approximation (19)-(22) is written also in conservative form (5). In fact, the equalities (13) and (14) are valid as well, although the theory of Riemann problem is no longer applied. By similar discussion, we observe that each numerical flux  $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$  of the difference approximation (19)-(22) is determined by  $u_i^n$ ,  $u_{i+1}^n$ ,  $k_i^n$  and  $k_{i+1}^n$ .

We have the following lemmas. The sketch of proof is given in the next section.

**LEMMA 3.1.** *The difference approximation (19)-(22) has the accuracy of second order except around discontinuity.*

**LEMMA 3.2.** *The difference approximation (19)-(22) is TVD.*

**LEMMA 3.3.** *The difference approximation (19)-(22) has the consistency with entropy condition.*

We obtain the main theorem as a direct conclusion of the three lemmas above.

**THEOREM 3.1.** *The difference approximation (19)-(22) both has the accuracy of second order except around discontinuity and converges to the entropy solution.*

#### 4. Sketch of proof.

We give a sketch of the proof of LEMMA 3.1, LEMMA 3.2 and LEMMA 3.3. The complete proof will be given in a TR (Technical Report) of NAL JAPAN which is being prepared by the authors. See also refs. 1 and 2.

We begin with LEMMA 3.2. It is not so difficult to calculate the total variation. First, we observe

$$\begin{aligned} & u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} \{w^n(x + \Delta x, \Delta t) - w^n(x, \Delta t)\} dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial w^n}{\partial x}(s, \Delta t) ds dx, \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{I}} |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{\Delta x} \left| \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial w^n}{\partial x}(s, \Delta t) ds dx \right| \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \left| \frac{\partial w^n}{\partial x}(s, \Delta t) \right| ds dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{x+\Delta x} \left| \frac{\partial w^n}{\partial x}(s, \Delta t) \right| ds dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial w^n}{\partial x}(x, \Delta t) \right| dx. \end{aligned}$$

Here we remember that the total variation with respect to the variable  $x$  of entropy solution to a scalar conservation law is bounded by the one of initial function:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial w^n}{\partial x}(x, \Delta t) \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \tilde{w}_0^n}{\partial x}(x) \right| dx,$$

and that the conditions R1, R2 and R3 imply

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \tilde{w}_0^n}{\partial x}(x) \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial w_0^n}{\partial x}(x) \right| dx = \sum_{i \in \mathcal{I}} |u_{i+1}^n - u_i^n|.$$

Then we conclude that the difference approximation (19)-(22) is TVD.

Next, we consider the order of accuracy. The Boltzmann-like understanding gives us how to determine the numerical flux  $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ . Of course, the discussion should be divided into several different cases, depending on the relation among  $u_i^n$ ,  $u_{i+1}^n$ ,  $k_i^n$  and  $k_{i+1}^n$ .

Now we discuss the case that  $0 \leq u_i^n \leq u_{i+1}^n$ . Then, it is clear that  $k_i^n, k_{i+1}^n \geq 0$ . We observe that

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n = f(\bar{u}) + \frac{1}{2\Delta t} k_i^n \left\{ \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta x - \bar{x} \right\}^2, \quad (23)$$

where  $(\bar{x}, \bar{u})$  is the solution to the equation for  $(x, u)$ :

$$\begin{cases} u = k_i^n(x - i\Delta x) + u_i^n \\ x - (i + \frac{1}{2})\Delta x = -\lambda \Delta x f'(u). \end{cases}$$

We calculate each term in the right-hand side of (23):

$$\begin{aligned} f(\bar{u}) &= f(u_i^n) + f'(u_i^n)(\bar{u} - u_i^n) + O((\Delta x)^2) \\ &= f(u_i^n) + f'(u_i^n)k_i^n(\bar{x} - i\Delta x) + O((\Delta x)^2) \\ &= f(u_i^n) \\ &\quad + f'(u_i^n)k_i^n \left\{ \frac{1}{2}\Delta x - \lambda \Delta x f'(\bar{u}) \right\} + O((\Delta x)^2) \\ &= f(u_i^n) + \frac{1}{2}f'(u_i^n)k_i^n \Delta x \\ &\quad - \lambda \{f'(u_i^n)\}^2 k_i^n \Delta x + O((\Delta x)^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} k_i^n \left\{ \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta x - \bar{x} \right\}^2 &= \frac{1}{2} \lambda \{f'(\bar{u})\}^2 k_i^n \Delta x \\ &= \frac{1}{2} \lambda \{f'(u_i^n)\}^2 k_i^n \Delta x + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

(23) and the calculation above yields

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n &= f(u_i^n) + \frac{1}{2}f'(u_i^n)k_i^n \Delta x \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda \{f'(u_i^n)\}^2 k_i^n \Delta x + O((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

In the smooth region, we may suppose that

$$k_i^n \Delta x = u_{i+1}^n - u_i^n + O((\Delta x)^2).$$

Then we obtain

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} \{f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)\} - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)}{u_{i+1}^n - u_i^n} \right)^2 (u_{i+1}^n - u_i^n) \\ &\quad + O((\Delta x)^2), \end{aligned}$$

which shows that the numerical flux  $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$  is equal to that of Lax-Wendroff's difference approximation<sup>7)</sup> up to the second order.

The case above is rather a simple one, but we can follow similar discussion also in other cases. It is well known that Lax-Wendroff's difference approximation has the accuracy of second order. Therefore we conclude that the difference approximation (19)-(22) has the accuracy of second order as well.

To examine the consistency with entropy condition we employ the family of entropy pairs  $(U(\cdot; k), F(\cdot; k))$  parametrized by  $k \in \mathbf{R}$ ;

$$\begin{cases} U(s; k) = \chi(s; k)(s - k) \\ F(s; k) = \chi(s; k)\{f(s) - f(k)\}, \end{cases} \quad (24)$$

where

$$\chi^+(s) = \frac{1}{2}\{\text{sgn}(s) + 1\}, \quad \chi^-(s) = \frac{1}{2}\{\text{sgn}(s) - 1\}$$

and

$$\chi(s; k) = \begin{cases} \chi^+(s - k) & \text{if } k \geq 0 \\ \chi^-(s - k) & \text{if } k < 0. \end{cases}$$

The family defined above is a little different from the one used in the previous works<sup>1,2)</sup> and the left-hand side of numerical entropy inequality (9) is estimated in a little more complicated manner than in refs. 1 and 2. But, the basic idea for proof is almost the same. The idea is as follows.

Employing modified flux functions<sup>1,2)</sup> we construct each numerical entropy flux  $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n(k)$  so that we have the estimate

$$\begin{aligned} U(u_i^{n+1}; k) - U(u_i^n; k) + \lambda \left\{ \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n(k) - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n(k) \right\} \\ \leq E(k; u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n) \end{aligned}$$

by some function  $E = E(k; v_-, v_0, v_+)$  of  $k \in [m, M]$  with parameters  $v_-, v_0, v_+ \in [m, M]$ , where  $M$  and  $m$  are some upper and lower bound, respectively, of the set  $\{s \in \mathbf{R}; \lambda|f'(s)| \leq 1\}$ . Unfortunately,  $E(k; v_-, v_0, v_+)$  can not be always non-positive. (If it was always non-positive, the proof would be immediately finished.) But it is possible to determine some unique positive constant  $c = c(f, \lambda)$  so that the inequality

$$\int_m^M e^{ck} E(k; v_-, v_0, v_+) dk \leq 0 \quad (25)$$

holds independently of  $v_-, v_0, v_+$ . This fact implies that the numerical entropy inequality (9) always holds for an entropy pair  $(U, F)$  with the entropy function  $U$  satisfying  $U''(s) = e^{cs}$ . Then the difference approximation (19)-(22) has the consistency with entropy condition.

## Concluding remarks.

It seems that the rearrangement method based on Godunov's difference approximation is useful to improve the order of accuracy keeping the consistency with entropy condition satisfied.

Some of future works are;

1. Find better rearrangement to construct better class of difference approximation. (i.e. the accuracy of higher order, clearer shock capturing or better profile of strong rarefaction waves, etc.)
2. Simplify the numerical flux without loss of quality. (It is better to avoid solving IVP's exactly.)
3. Extend the result to the system case.

## References

- 1) H. Aiso. Admissibility of difference approximation for scalar conservation laws. *Hiroshima Math. J.*, 23(1):15-61, 1993.
- 2) H. Aiso. Second order TVD difference approximations of scalar conservation laws and the consistency with the entropy condition. *Report of Uppsala University, Dep. of Scientific Computing*. No.152/1993.
- 3) H. Aiso and T. Iwamiya. *Technical Report of National Aerospace Laboratory*, to appear.
- 4) S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics (in Russian). *Mat. Sb. (N.S.)*, 47:251-306, 1959.
- 5) A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357-393, 1983.
- 6) A. Harten. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(1):1-23, 1984.
- 7) P. D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:217-237, 1960.
- 8) A. Y. LeRoux. A numerical conception of entropy for quasi-linear equations. *Math. Comp.*, 31:848-872, 1977.
- 9) J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer-Verlag, New York, 1982.

## Hypersonic CFD Analysis for the Aerothermodynamic Design of HOPE

by

Yukimitsu Yamamoto <sup>1</sup>, Yasuhiro Wada <sup>2</sup>

National Aerospace Laboratory

and

Minako Yoshioka <sup>3</sup>

Fujitsu Ltd

### ABSTRACT

Numerical study of hypersonic flow around HOPE (H - II Orbiting Plane) is performed, using upwind TVD Navier-Stokes CFD code. Parametric computations are made to investigate the aero and aerothermodynamic characteristics of HOPE. In our calculations, NWT(Numerical Wind Tunnel) at NAL (National Aerospace laboratory) is used. NWT is the parallel vector super computer system, which enlarges the applicability and data productivity of CFD in practical aerodynamic design. Numerical results are compared with the experimental data obtained at Calspan's shock tunnel. These works have been done as the joint research of NAL and NASDA

#### 1. Introduction

With the increase of our computational ability, computational fluid dynamics (CFD) becomes an important tool for the design of hypersonic vehicles. Through many comparisons with the experimental data, it has become clear that CFD now has the accuracy and reliability in analyzing hypersonic flow phenomena and can give detailed information of complex flows, such as three dimensional separations due to compression surfaces and shock-shock interactions etc. Moreover, aerodynamic heating which greatly influences the aerodynamic design and TPS requirements of hypersonic vehicles, can also be predicted with great accuracy. The need to support aerodynamic design has driven the use of CFD. However, for these design purposes, there is a problem in data productivity. From the design point of view, a great number of parametric studies are needed to determine the optimum configuration of hypersonic vehicles and current super computers are not powerful enough to perform those parametric calculations. To resolve these problems, NWT ( Numerical Wind Tunnel ) at NAL plays now an important role. NWT, introduced at NAL in 1993, is a parallel vector supercomputer having 140 Processing Elements ( PEs ). Each PE has 1.7 GFLOPS peak performance and 256 MB main memory. This new computational environment changes significantly the applicability and utility of CFD for aerodynamic design.

We introduce here numerical calculations of the flow around HOPE (H - II Orbiting plane) <sup>1)</sup> using this new parallel machine.

Computation were made by the flux-split TVD Navier-Stokes code <sup>2)</sup> at the flow conditions of Calspan's shock tunnel ( $M_\infty=12.0\sim 19.0$ ,  $\alpha=30, 35, 40\text{deg}$ ,  $Re_\infty=3.15\times 10^4 \sim 1.88\times 10^6$ ) and two typical re-entry flight conditions. In flight conditions, parametric configuration study are made and the effects of angles of attack( $\alpha$ ), side slip angle( $\beta$ ) are investigated. Also, real gas effects are analyzed by using chemically non-equilibrium flux difference-splittig code <sup>3)</sup> and the decrease of aerothermodynamic heating on the HOPE TPS surface is estimated. In the present study, total of 80 flow cases were computed.

#### 2. HOPE Geometry and Grid

HOPE geometry and typical computational mesh used for the comparison of Calspan's shock tunnel experiments are shown in Fig 1. Present HOPE has tip fin controllers attached to the wing. It's total length is 16.5m from the nose to the fuselage base. Three dimensional basic grids around this configuration are generated by using hyperbolic partial differential equations. Then, computational mesh is constructed, depending on the angles of attack and Mach numbers, because the outer inflow boundary adjusted to the bow shock wave in order to use the grid points efficiently. The clustering of grid point near the body surface is also made to resolve viscous effects. Cell Reynolds number is maintained about 2.0. In the final computational mesh of the basic symmetrical flow case, 91 points are distributed streamwise along the body,

1. Head of Hypervelocity Aerodynamic Lab.  
Aerodynamics Division, NAL

2. Senior Researcher  
Computational Sciences Division, NAL

3. System Engineer, Fujitsu Ltd.

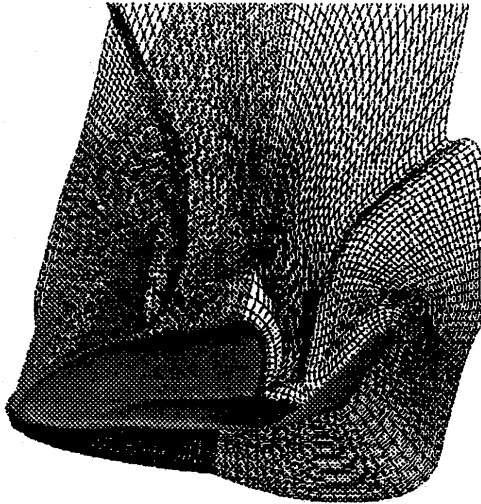


Fig.1 HOPE Computational Grids

93 points circumferential and 60 points between the body and outside of the bow shock wave. For the side slip flow case, number of mesh points is doubled.

Figures 2 and 3 show HOPE configurations calculated parametrically for the aerothermodynamic configurations design. Model 1000 series are double delta wing type geometry and model 2000 series represent power delta one. For each series of configurations, slight modifications were made and its effects on aerothermodynamic heating are investigated in detail.

### 3. Numerical Method

Basic equations used in the present analysis, are Navier-Stokes equations with thin-layer assumption. The differencing used for perfect gas flow calculation is upwind TVD flux-split method.<sup>2)</sup> and real gas computations were made by flux-difference spiltting method using 7 species chemically non-equilibrium model<sup>3)</sup> Detailed description of the numerical algorithm is presented in Ref. 2 and Ref. 3, respectively.

### 4. Parallel Algorithm

NWT (Numerical Wind Tunnel) system at NAL is used in our parametric calculations for the aerodynamic design of HOPE. NWT is the parallel vector super computer having 140 Processing Elements (PEs). In the present parallel computations, a simple parallel algorithm has been developed; i.e., computational region are equally divided into 6 - 12 zones circumferentially and parallel computations using 6 - 12 PEs are performed for each computational flow regions. In

the present numerical analysis. 10 parametric parallel processes can be performed simultaneously. This means that 10 cases of the different flow conditions are computed in each computational cycle and a total of 60 - 80 PEs of NWT system are used at the same time.

Computational speed using 6 PEs are 5 times faster that of 1 PE calculation. A 50 - to 100 -fold improvement in computational speed has been attained in the present numerical analysis. Multiple parallel processing now enable us to perform several hundred numerical computations and produce sufficient numerical data for hypersonic aerodynamic design.

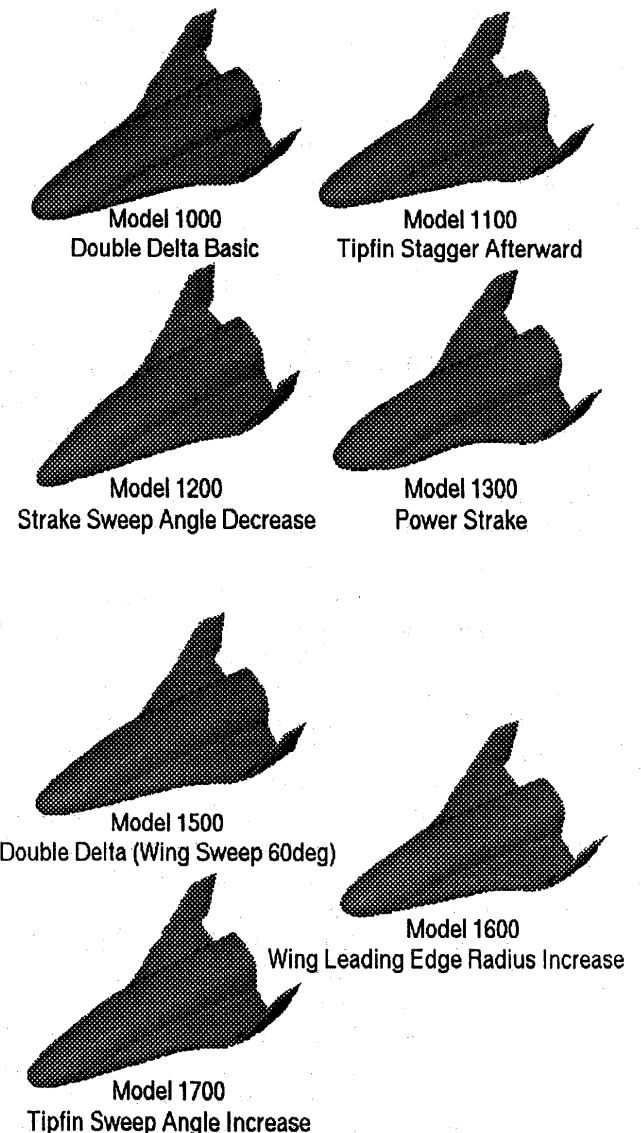


Fig.2 HOPE Geometry ( Model 1000 Series )

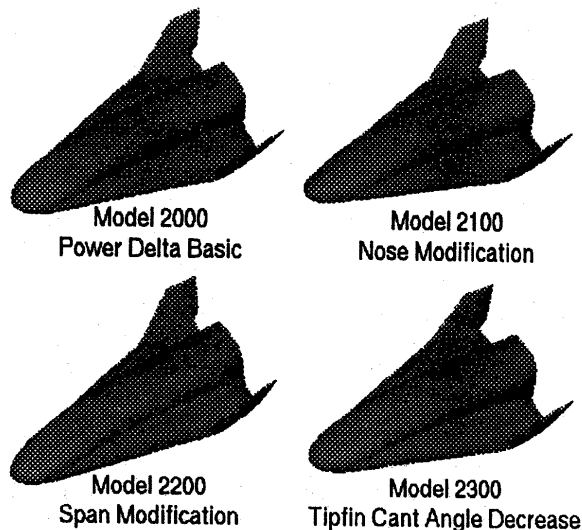


Fig.3 HOPE Geometry ( Model 2000 Series )

### 5. Numerical Results

Computations were made at the flow conditions of the Calspan's shock tunnel. Flow conditions are listed in Table 1. Figure 4 shows the comparisons of heat transfer distributions between numerical results and Calspan's shock tunnel data. Numerical results represent maximum heat transfer plots of each cross sectional plane and experimental results present the heat transfer along the wing leading edge windward point, where local maximum heat transfer may be caused at  $\alpha = 40$  deg. Excellent quantitative agreements are obtained except for the wing root area. Validations of present flux-split CFD code were made through the comparisons of Calspan's shock tunnel data and it may be indicated that our CFD code can be used for the aerothermodynamic design of HOPE basic configurations. Then, our validated CFD code are further applied for more improved aerothermodynamic configuration design. Parametric calculations for model 1000 and model 2000 series geometries are made at two flight conditions of Table 2. Angles of attack were taken  $\alpha = 30, 35$  and  $40$  deg for the basic model 1000 and model 2000 geometry. For the other models with slight modifications, angles of attack are fixed to  $35$  deg. For all the numerical test cases, the effect of side slip angle ( $\beta = 5$  deg) are also investigated. Fig.5 shows oilflow patterns of the windward and leeward surfaces of model 2000 at  $\alpha = 35$  deg,  $\beta = 5$  deg. In a series of parametric computations, it must be denoted that slight change of wing sweep angle and tip fin controllers has a great influence on heat transfer distributions of double delta type models ( model 1000 series ), whereas no noticeable effects are observed for the power delta type models ( model 2000 series ). Detailed results will be presented later.

Real gas effects at high Mach numbers are investigated by non-equilibrium flow calculations. In Fig 6, the comparison of maximum heat transfer distributions between the perfect and real gas computations are shown at the two flight conditions for Model 1000 geometry. Constant wall temperature of  $1200\text{K}$  and non-catalytic wall condition are assumed. In the high Mach numbers ( $M_\infty = 26$ ) and altitude ( $80\text{Km}$ ) case, local peak heating on the nose, wing and tip fin leading edges is simultaneously decreased for the real gas flow results. However, low Mach number ( $M_\infty = 17$ ) and altitude ( $65\text{Km}$ ) case, local peak heating on the wing leading edge has almost the same between two codes. This may be caused due to the difference of freestream density and velocity of each altitude. Finally atomic oxygen mass fraction contours are presented in Fig.7 for the power delta type model at an altitude of  $65\text{ Km}$ .

### 6. Conclusions

In summary, we conclude;

- 1) For aerothermodynamic heating, present flux-split Navier-Stokes CFD code gives excellent quantitative agreements with Calspan's shock tunnel data and it is indicated that CFD can be used as the reliable tool for the aerothermodynamic design of HOPE
- 2) Parallel computations using NWT system at NAL can now produce as many numerical results as the current HWT can do, and CFD becomes a highly efficient tool for the design of HOPE geometries.
- 3) Through a series of parametric calculations by NWT, it is shown that slight change of configuration has a considerable effect on aerothermodynamic peak heating for double delta type HOPE configurations
- 4) In order to simulate the actual re-entry flight conditions of HOPE, chemically non-equilibrium flux difference splitting code has been applied, using 7 species, one temperature model. Real gas effects appear in decreasing aerothermodynamic peak heating on the nose, wing and tip fin leading edges. However, these effects depend on the flight velocity, altitude, and wall catalicity. Therefore, more careful and precise analysis are needed through the considerable number of validation process of the real gas CFD code.

### References

- 1) HOPE Joint Team of NAL and NASDA, "Basic Plan of Space Transportation Experimental Vehicle" February 19,1994 ( in Japanese )

- 2) Yamamoto.Y, "Numerical Simulation of Hypersonic Viscous Flow for the design of H-II Orbiting Plane ( HOPE ) :Part II" AIAA Paper 91-1390, June 1991
- 3) Wada.Y, Ogawa.S, Kubota.H, and Akimoto.T, "Numerical simulation of Re-Entry Flow around the Space Shuttle With Finite-Rate Chemistry." Proceedings of the Seventeenth International Symposium on Space Technology and Science, May 1990,PP 719-728

	Model	Case	M -	$\alpha$ (deg)	U - (m/sec)	T - (K)	P - (Pa)	Re - (/Total Length)
WING I	Wing LE sweep $\Lambda = 48$ deg Basic Model	1	15.34	30	2083.3	45.86	60.2	$1.18 \times 10^6$
		2	15.34	35	2083.3	45.86	60.2	$1.18 \times 10^6$
		3	15.34	40	2083.3	45.86	60.2	$1.18 \times 10^6$
		4	13.51	35	4303.8	252.3	20.9	$3.15 \times 10^6$
		5	18.92	35	2367.7	38.96	29.8	$9.22 \times 10^6$
WING II	Wing LE sweep $\Lambda = 48$ deg Cylindrical Wing LE	6	15.34	35	2083.3	45.86	60.2	$1.18 \times 10^6$
WING III	Wing LE sweep $\Lambda = 60$ deg Cylindrical Wing LE Tip Fin Forward	7	12.12	30	2226.3	83.9	298.4	$1.88 \times 10^6$
		8	12.06	35	2221.7	84.3	302.4	$1.88 \times 10^6$
		9	12.04	40	2236.6	85.78	303.4	$1.835 \times 10^6$
		10	18.36	35	2362.5	41.17	36.8	$1.02 \times 10^6$

Table 1 HOPE06 Computation Case (Comparision with Calspan's Shock Tunnel Data)

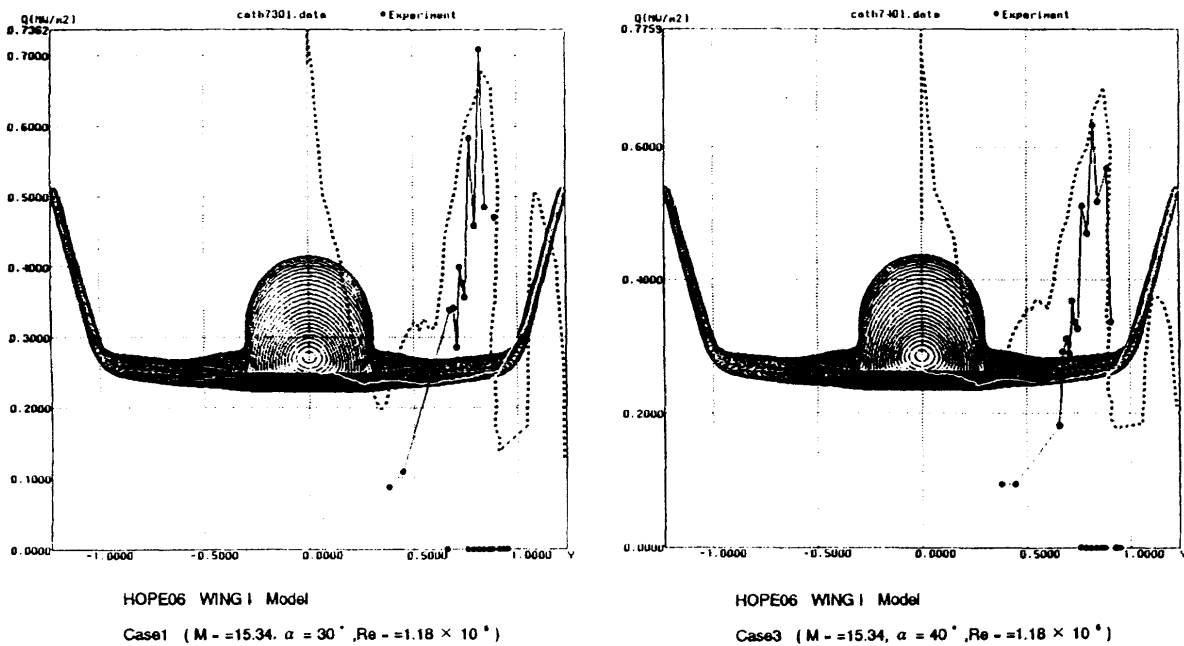


Fig.4 Comparison of Heat Transfer Distributions near the Wing Leading Edge

- Calspan's Shock Tunnel Data (along the Wing Stagnation Line  $\theta = 40$ deg)
- ... Numerical Result (Maximum Heat Flux at Each Cross Section)



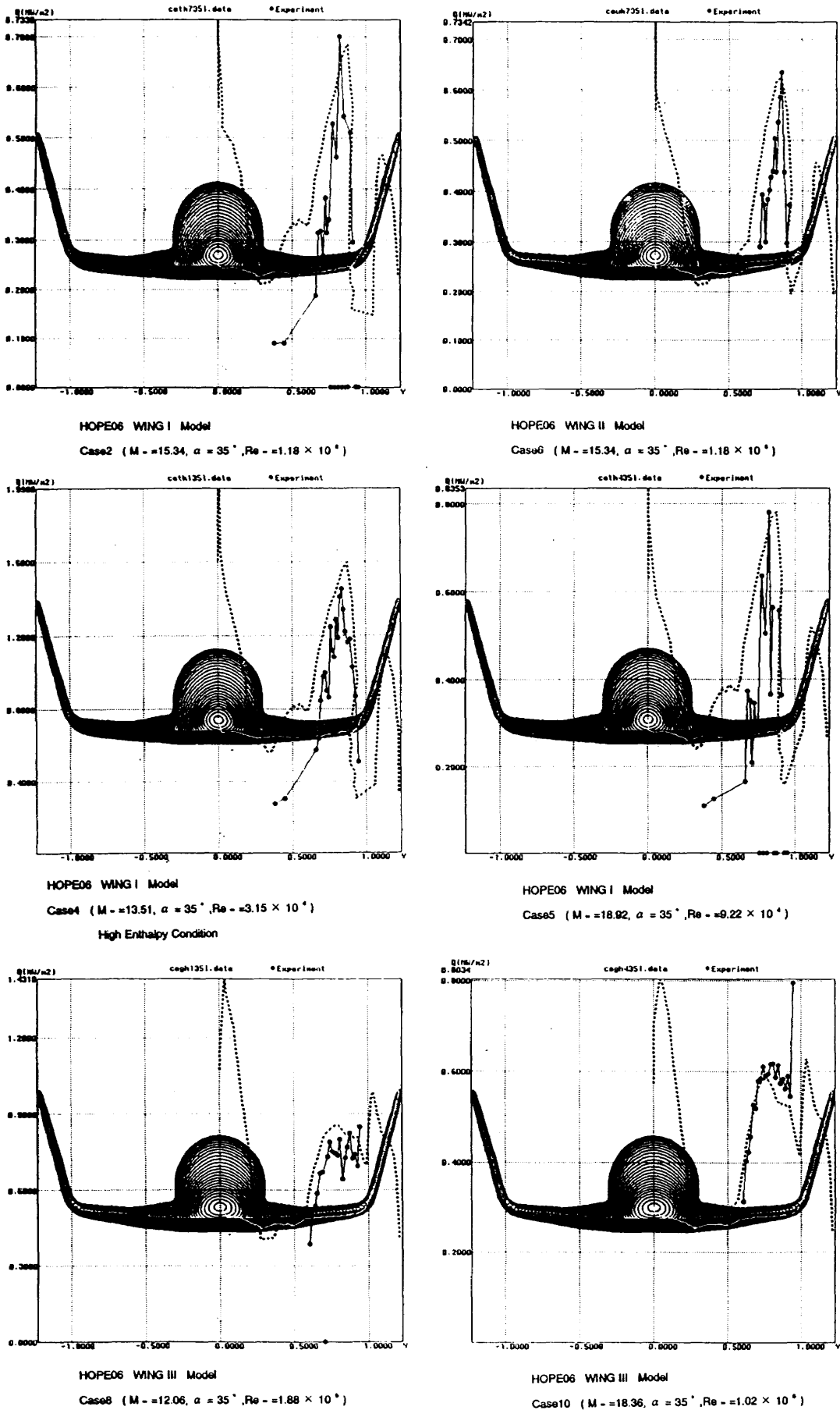
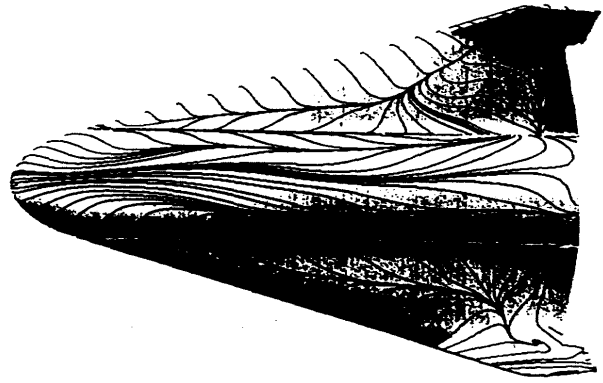


Fig.4 Comparison of Heat Transfer Distributions near the Wing Leading Edge

- Calspan's Shock Tunnel Data (along the Wing Stagnation Line  $\theta = 40\text{deg}$ )
- ... Numerical Result (Maximum Heat Flux at Each Cross Section)

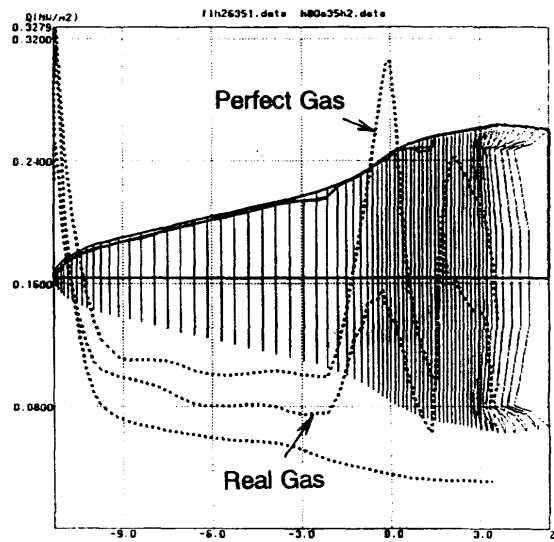
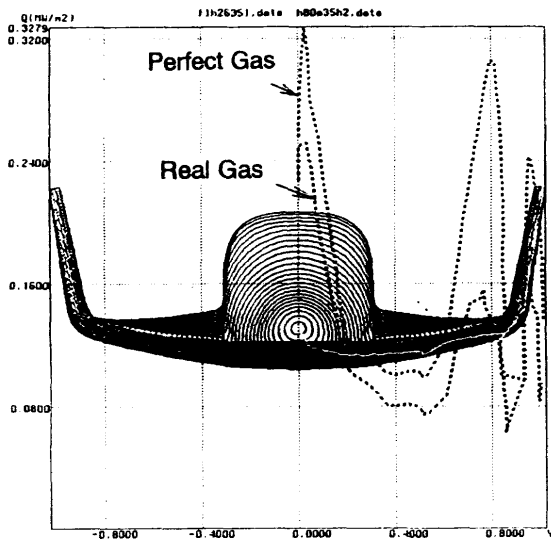
Flow condition A	Altitude 80km $M_{\infty} = 26$ $U_{\infty} = 7346 \text{ m/s}$ $T_{\infty} = 198.6 \text{ K}$ $P_{\infty} = 1.053 \text{ Pa}$ $T_{\text{wall}} = 1200 \text{ K}$ $Re_{\infty} = 1.409 \times 10^6$
Flow condition B	Altitude 65km $M_{\infty} = 17$ $U_{\infty} = 5205.3 \text{ m/s}$ $T_{\infty} = 233.3 \text{ K}$ $P_{\infty} = 10.93 \text{ Pa}$ $T_{\text{wall}} = 1200 \text{ K}$ $Re_{\infty} = 8.059 \times 10^5$



Altitude 80km,  $M_{\infty} = 26$ ,  $V_{\infty} = 7346.0 \text{ m/s}$   
 $T_{\infty} = 198 \text{ K}$ ,  $P_{\infty} = 1.053 \text{ Pa}$ ,  $T_w = 1200 \text{ K}$

Fig.5 Oil Flow Patterns of HOPE Power Delta Model (Model 2000)

Table 2



(Model 1000) at  $M_{\infty} = 26$ ,  $\alpha = 35 \text{ deg}$

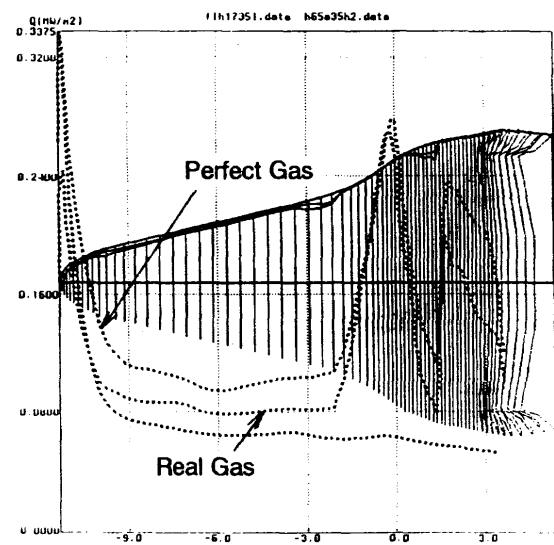
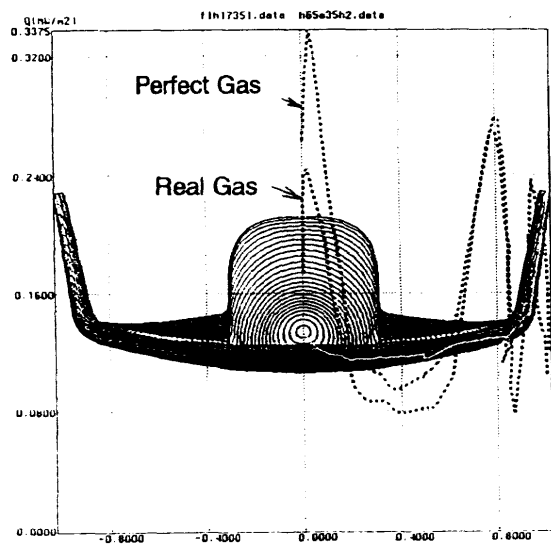


Fig.6 Real and Perfect Gas Comparison of Maximum Heat Transfer Distributions at Each Cross Section of HOPE (Model 1000) at  $M_{\infty} = 17$ ,  $\alpha = 35 \text{ deg}$

## NUMERICAL SOLUTIONS OF INVISCID & VISCOUS FLOWS ABOUT AIRFOILS BY TVD METHOD

Hamid Reza KHEIRANDISH<sup>1</sup>, Goro BEPPU<sup>2</sup>  
and Jiro NAKAMICHI<sup>3</sup>

### ABSTRACT

The need to properly compute steady and unsteady viscous flows surrounding airfoils at transonic speeds remains an outstanding problem in fluid dynamics. In transonic flow where viscous effects such as shock-boundary interactions and separation are dominant, methods based on the *Navier-Stokes* equations are needed. Calculations of unsteady transonic flow about oscillating airfoils where flutter, dynamic stall, buffet and moving shock waves on these surfaces change the entire flow fields and aerodynamic characteristics, are still stiff problems that stimulate more work and studies to be done. To simulate these problems correctly a robust computer program is needed. This report shows the works have been done up to now i.e., developing a computer program and verifying it by applying to steady viscous and inviscid flow calculations and inviscid flow about an oscillating airfoil.

### INTRODUCTION

With the recent development in super computers either in speed and memory storage a remarkable progress has been made in the field of computational fluid dynamics. Recent improvement in the theoretical and computational fluid dynamics has been largely based on finite difference methods. Several Reynolds-average Navier-Stokes codes for numerical prediction of airfoil flows have been developed and applied to many areas of fluid dynamics, successfully. These schemes are also extended to unsteady Navier-Stokes codes by many researchers. Among them, schemes based on Total Variation Diminishing (TVD) properties are more actively followed and extended to several different problems of fluid dynamics nowadays. The TVD property guarantees that these schemes avoid spurious oscillations but sharp approximation to shocks and discontinuities. Generally, TVD schemes have made a possible very robust algorithm for *Euler* equations and other hyperbolic systems.

The implicit TVD schemes originally developed by Yee & Harten [2] and extended for general curvilinear coordinates by Yee et al, for hyperbolic conservation laws have been used as numerical method.

In the present paper this scheme was applied to steady inviscid and viscous flows about NACA0012 airfoil under

several cases. Unsteady inviscid calculations using moving grid system around the same airfoil undergoing pitching oscillation about 1/4 chord were also conducted.

For viscous steady-state application, a simple algorithm utilizing the TVD scheme for the Navier-Stokes equations is to difference the hyperbolic terms the same way as for Euler equations, and then central differencing the viscous term. The algebraic *Baldwin-Lomax* [1] turbulence model is coupled to the governing equations. The scheme was also applied to viscous flows for several cases and obtained results and comparison of them with the other results are given in the end.

### 1. Conservative Form of Governing Equations in Curvilinear Coordinates

Governing equations of viscous fluid flows are Navier-Stokes equations. The strong conservative form of these equations in two dimensions can be written in vector form as follows

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = R_a^{-1} \left( \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{S}_2}{\partial \eta} \right), \quad (1.1)$$

where

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ U(e + p) - \xi_x p \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup> Graduate Student of Tokai Univ. Aerospace Dept.

<sup>2</sup> Tokai Univ. Aerospace Dept

<sup>3</sup> NAL-Structural Mechanics Div.

$$\hat{G} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ V(e+p) - \eta_i p \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_1 = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} \\ \xi_x R_1 + \xi_y R_2 \end{pmatrix}, \hat{S}_2 = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} \\ \eta_x R_1 + \eta_y R_2 \end{pmatrix},$$

$$U = \xi_x u + \xi_y v + \xi_i,$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v + \eta_i. \quad (1.2)$$

where  $J$  is the JACOBIAN of transformation and

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_{yy} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (1.3)$$

$$R_1 = u \tau_{xx} + v \tau_{yx} + \frac{\mu}{p_r(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial x},$$

$$R_2 = u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + \frac{\mu}{p_r(\gamma-1)} \frac{\partial a^2}{\partial y},$$

$$\lambda = -\frac{2}{3} \mu.$$

Pressure is related to the conservative flow variables,  $Q$ , by the equation of state

$$p = (\gamma - 1) \left[ \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right]. \quad (1.4)$$

## 2. NUMERICAL METHOD

### 2.1. Description of Algorithm

Here the algorithm for inviscid equation (Euler Eqs) is expressed and application to viscous flow is given in the following. In generalized coordinates conservation form of the governing equations for inviscid flow has the form

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = 0. \quad (2.1)$$

Let  $\hat{A}$  and  $\hat{B}$  be Jacobians of  $\hat{F}$  and  $\hat{G}$  as  $\hat{A} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}}$ ,  $\hat{B} = \frac{\partial \hat{G}}{\partial \hat{Q}}$  and let the eigenvalues of  $\hat{A}$  be  $(\Lambda^1_\xi, \Lambda^2_\xi, \dots, \Lambda^4_\xi)$  and the eigenvalues of  $\hat{B}$  be  $(\Lambda^1_\eta, \Lambda^2_\eta, \dots, \Lambda^4_\eta)$

Denote  $\hat{R}_\xi$  and  $\hat{R}_\eta$  as the matrices whose columns are eigenvectors of  $\hat{A}$  and  $\hat{B}$ , and denote  $\hat{R}_\xi^{-1}$  and  $\hat{R}_\eta^{-1}$  as the inverse of  $\hat{R}_\xi$  and  $\hat{R}_\eta$ .

Let the grid spacing be denoted by  $\Delta \xi$  and  $\Delta \eta$  such that  $\xi = j \Delta \xi$  and  $\eta = k \Delta \eta$ . Define  $\hat{Q}_{j+1/2,k}$  as some symmetric average of  $\hat{Q}_{j,k}$  and  $\hat{Q}_{j+1,k}$  (for example Roe's average for gas dynamic[8]). Let  $\alpha^l_{j+1/2,k}$ ,  $\hat{R}_{j+1/2,k}$ ,  $\hat{R}_{j+1/2,k}^{-1}$  denote the quantities  $\alpha^l_\xi$ ,  $\hat{R}_\xi$ ,  $\hat{R}_\xi^{-1}$  related to  $\hat{A}$  evaluated at  $\hat{Q}_{j+1/2,k}$ . Similarly the indices  $(k+1/2)$  show values evaluated at  $k$  and  $k+1$ .

Define  $\alpha_{j+1/2,k}$  as the difference of the characteristic variables in the local  $\xi$  direction and  $\alpha_{j,k+1/2}$  in  $\eta$  direction as  $\alpha_{j+1/2,k} = \hat{R}_{j+1/2,k}^{-1} \frac{\hat{Q}_{j+1,k} - \hat{Q}_{j,k}}{0.5 * (J_{j+1,k} + J_{j,k})}$ .

With the above notation, a one parameter family of TVD scheme can be written as

$$\hat{Q}_{j,k}^{n+1} + \lambda^\xi \theta \left[ \bar{F}_{j+1/2,k}^{n+1} - \bar{F}_{j-1/2,k}^{n+1} \right] + \lambda^\eta \theta \left[ \bar{G}_{j,k+1/2}^{n+1} - \bar{G}_{j,k-1/2}^{n+1} \right]$$

$$= \hat{Q}_{j,k}^n - \lambda^\xi (1-\theta) \left[ \bar{F}_{j+1/2,k}^n - \bar{F}_{j-1/2,k}^n \right]$$

$$- \lambda^\eta (1-\theta) \left[ \bar{G}_{j+1/2,k}^n - \bar{G}_{j-1/2,k}^n \right] \quad (2.2)$$

Where  $\theta$  is a parameter,  $\lambda^\xi = \Delta t / \Delta \xi$ , and  $\lambda^\eta = \Delta t / \Delta \eta$ . A space second-order form of the numerical flux function  $\bar{F}_{j+1/2}$  can be expressed as

$$\bar{F}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[ \hat{F}_{j,k} + \hat{F}_{j+1,k} + \hat{R}_{j+1/2,k} \Phi_{j+1/2,k} \right], \quad (2.3)$$

where the element of the  $\Phi_{j+1/2,k}$  denoted by  $\phi^l_{j+1/2,k}$ , ( $l=1, \dots, m$ ) are

$$\phi^l_{j+1/2,k} = \frac{1}{2} \sigma(\Lambda^l_{j+1/2,k}) (\xi^l_{j,k} + \xi^l_{j+1,k}) - \psi(\Lambda^l_{j+1/2,k} + \nu^l_{j+1/2,k}) \alpha^l_{j+1/2,k}, \quad (2.4)$$

with

$$g^l_{j,k} = S \cdot \max \left[ 0, \min \left( \left| \alpha^l_{j+1/2,k} \right|, S \cdot \alpha^l_{j-1/2,k} \right) \right]$$

$$S = \text{sign}(\alpha^l_{j+1/2,k}). \quad (2.5)$$

The function  $\psi(z)$  is sometimes referred to as the coefficient of numerical viscosity, and can be defined as

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \varepsilon \\ (z^2 + \varepsilon^2)/2\varepsilon & |z| < \varepsilon \end{cases} \quad (2.6)$$

where  $\varepsilon$  is a small positive number and

$$\gamma'_{j+1/2,k} = \frac{1}{2} \alpha'_{j+1/2,k} \left\{ \frac{g'_{j+1,k} - g'_{j,k}}{0} \right\} / \alpha'_{j+1/2,k} \quad \begin{matrix} \alpha'_{j+1/2,k} = 0 \\ \alpha'_{j+1/2,k} = 0 \end{matrix} \quad (2.7)$$

where  $\alpha'_{j+1/2,k}$  are elements of Eq.(2.4). The scheme is first-order accurate in time for steady state calculation with the selection of  $\alpha(z)$  as  $\alpha(z) = \frac{1}{2} \psi(z)$  and second-order accurate in time suitable for time accurate calculation with  $\alpha(z) = \frac{1}{2} \psi(z) + \lambda \left( \theta - \frac{1}{2} \right) z^2$ . Similarly we can define the numerical flux  $\tilde{G}_{j,k+1/2}$ .

The scheme (2.2) is a mixed implicit-explicit scheme. When  $\theta = 0$ , Eq.(2.5) is an explicit method; when  $\theta = 1$  is an implicit scheme and if  $\theta = 1/2$ , the time differencing is the trapezoidal formula, and scheme is second-order in time.

## 2.2. ADI Form of Linearized Scheme

An ADI form of this equation will be adopted and can be expressed in conservation form as

$$\begin{aligned} & \left[ I + \lambda^{\xi} \alpha I_{j+1/2,k}^{\xi} - \lambda^{\xi} \alpha I_{j-1/2,k}^{\xi} \right] D^{\xi} = \\ & - \lambda^{\xi} \left[ \tilde{F}_{j+1/2,k}^{\xi} - \tilde{F}_{j-1/2,k}^{\xi} \right] - \lambda^{\eta} \left[ \tilde{G}_{j,k+1/2}^{\eta} - \tilde{G}_{j,k-1/2}^{\eta} \right] \quad (2.8) \\ & \left[ I + \lambda^{\eta} \alpha I_{j,k+1/2}^{\eta} - \lambda^{\eta} \alpha I_{j,k-1/2}^{\eta} \right] D^{\eta} = D^{\xi}, \quad \dot{Q}^{n+1} = \dot{Q}^n + D. \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} H_{j+1/2,k}^{\xi} &= 1/2 \left[ \hat{A}_{j+1,k}^{\xi} + \Omega_{j+1/2,k}^{\xi} \right]^{\eta}, \\ H_{j,k+1/2}^{\eta} &= 1/2 \left[ \hat{B}_{j,k+1}^{\eta} + \Omega_{j,k+1/2}^{\eta} \right]^{\xi}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

and

$$\begin{aligned} \Omega_{j+1/2}^{\xi} &= \left( R_x \text{diag} \left[ \beta^l - \psi(\lambda^l + \gamma^l) \right] R_x^{-1} \right)_{j+1/2} \Delta_{j+1/2}, \\ \Omega_{k+1/2}^{\eta} &= \left( R_y \text{diag} \left[ \beta^l - \psi(\lambda^l + \gamma^l) \right] R_y^{-1} \right)_{k+1/2} \Delta_{k+1/2}, \quad l=1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.11.a)$$

where

$$\beta'_{j+1/2} = \frac{(g'_j + g'_{j+1})}{\alpha'_{j+1/2}}, \quad \beta'_{k+1/2} = \frac{(g'_k + g'_{k+1})}{\alpha'_{k+1/2}} \quad (2.11.b)$$

## 2.3. Application of TVD Scheme to Viscous Flow

TVD schemes (2.8) can be applied to Navier-Stokes equations by simply adding a second-order central finite difference discretization of viscous terms to the right hand

side of this equation for full Navier-Stokes Eqs. For Thin-Layer approximation first we linearize viscous term in  $\eta$  direction as

$$R_a^{-1} \partial_{\eta} \hat{S}^{n+1} = R_a^{-1} \partial_{\eta} \left( \hat{S}^n + J^{-1} \hat{M}^n \hat{Q}^{n+1} \right). \quad (2.12)$$

where  $J^{-1} \hat{M}^n = \frac{\partial \hat{S}^n}{\partial \hat{Q}^n}$ ,

then we add central finite difference of (2.12) to (2.8)

## 3. BOUNDARY CONDITIONS

### Boundary Conditions for Euler and Navier-Stokes Solutions

A particular set of boundary conditions employed in airfoil computations are described below. The geometry is mapped onto the computational rectangle such that all the boundary surfaces are edge of the rectangle. This application is for a "C" mesh topology.

Initial condition is set equal to nondimensional free stream values of  $\hat{Q}$  plus boundary conditions. Stretched grids are usually used to place far field boundaries far away from the body surface. When bow shocks and attached shocks are generated at a body surface care is taken to ensure that the shocks are sufficiently weak when they reach far field boundaries so that they are not reflected or at least they reflect outside the flow domain. At outer boundaries stream values are set equal to free stream values or can be calculated from Riemann invariants.

At a rigid body surface, tangency must be satisfied for inviscid flow and the no slip condition for viscous flow. In two dimensions, body surfaces are usually mapped to  $\eta = \text{constant}$  coordinates. The normal component of velocity in terms of the curvilinear metrics is given by

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\eta_x u + \eta_y v}{\sqrt{(\eta_x^2 + \eta_y^2)}} \quad \text{and the tangential component by} \\ V_t &= \frac{\eta_y u - \eta_x v}{\sqrt{(\eta_x^2 + \eta_y^2)}}. \end{aligned} \quad \text{Therefore, tangency is satisfied by}$$

$V_n = 0$  (no flow through the body). The tangential velocity  $V_t$  is obtained at the body surface through linear extrapolation for inviscid cases and is set equal to zero for viscous cases. The Cartesian velocities are then formed from the inverse relation between them which leads to

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\eta_x^2 + \eta_y^2)}} \begin{bmatrix} \eta_y & \eta_x \\ -\eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_t \\ V_n \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

The extrapolation of  $V_i$  procedures less error if the mesh lines are clustered to the body surface. The normal and tangential velocities in Eq(3.1) are scaled such that the metric variations are removed which decrease the errors in the extrapolations for nonorthogonal meshes.

The pressure on the body surface is obtained from the normal momentum equation. In viscous flow either steady and unsteady, the contravariant velocities  $U$ ,  $V$  on the body surface are zero and the equation can be written as

$$\rho[-\ddot{x}\eta_x - \ddot{y}\eta_y] + K_a^{-1} \left( 2\eta_x\eta_y\tau_{xy} + \eta_x^2\tau_{xx} + \eta_y^2\tau_{yy} \right) = p_\xi(\eta_x\xi_x + \eta_y\xi_y) + p_\eta(\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (3.2)$$

where  $\ddot{x}, \ddot{y}$  are second derivatives with respected to time.

In inviscid flow the viscous terms and only  $V$  are equal to zero. In this case the normal momentum equation for inviscid flow can be simplified to

$$\rho[-\ddot{x}\eta_x - \ddot{y}\eta_y] - \rho U(\eta_x u_\xi + \eta_y v_\xi) = p_\xi(\eta_x\xi_x + \eta_y\xi_y) + p_\eta(\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (3.3)$$

For subsonic outflow boundary, three eigenvalues of  $A$  are positive and one is negative thus one of the stream variables can be determined from down stream and three other one from extrapolation. We set the pressure equal to free stream value

#### 4. UNSTEADY SOLUTION OF EULER EQUATIONS

In this method[3], first a steady state grid is generated around the airfoil at mean angle of attack and since the motion of airfoil undergoing a force oscillation is described in advance as a function of time, the instantaneous grid is generated at each time step. The displacement of grid points on the surface is determined from the equation of motion of airfoil and then whole grid system is updated in the following manner

$$\begin{aligned} x_{j,k}^{n+1} &= x_{j,k}^n + \Delta x_{j,k}^n S(s), \\ y_{j,k}^{n+1} &= y_{j,k}^n + \Delta y_{j,k}^n S(s), \end{aligned} \quad (4.1)$$

where  $x_{j,k}^n, y_{j,k}^n$  are the coordinates of grid points at  $t = n\Delta t$  and  $x_{j,k}^{n+1}, y_{j,k}^{n+1}$  are those at time  $t = (n+1)\Delta t$ . The displacements of grid points on surface  $\Delta x_{j,k}^n, \Delta y_{j,k}^n$  are calculated by

$$\begin{aligned} \Delta x_{j,k}^n &= x_{j,k}^{n+1} - x_{j,k}^n, \\ \Delta y_{j,k}^n &= y_{j,k}^{n+1} - y_{j,k}^n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

In Eq.(4.1)  $S$  is a function of  $s$  which is the distance of a grid point from body surface along a grid line. Function  $S(s)$  is chosen as

$$\begin{aligned} S(s) &= 1 & \text{for } s < s_{ref} \\ S(s) &= \sqrt{1 - \Xi^2} & \text{for } s > s_{ref} \end{aligned} \quad (4.3)$$

where

$$\Xi = (s - s_{ref}) / (s_{max} - s_{ref}), \quad (4.4)$$

where  $s_{ref}$  is some adequate value between zero and one. Here  $2/3s_{max}$  is selected.

In this method outer boundaries are hold constant when the inner boundary changes with airfoil motion. Grid points near to the surface move in the same motion as that of airfoil surface and the displacements of grid points far from surface decreases as we move away from the surface and vanished at outer boundary. It is needed in this method to calculate Jacobian and metrics at each time step. The boundary conditions for inviscid calculation on the body surface are implemented as follow

$$\begin{aligned} V_n &= 0, \\ \begin{pmatrix} u + x_t \\ v + y_t \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{(\eta_x^2 + \eta_y^2)}} \begin{bmatrix} \eta_y & \eta_x \\ -\eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_t \\ V_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

where  $x_t, y_t$  surface velocities are calculated numerically at time step "n" and "n+1". As steady state calculation pressure is computed from normal momentum Eq.(3.3).

A first-order backward difference approximation of accelerations can be written as

$$\begin{aligned} \ddot{x}^{n+1} &= \frac{x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}}{\Delta t^2}, \\ \ddot{y}^{n+1} &= \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

To satisfy Kutta condition physical velocities at trailing edge are set equal to airfoil surface velocities

#### 5. NUMERICAL RESULTS

A C-mesh topology with 251x41 grids for inviscid steady flows, 299x71 for unsteady inviscid flow and with 259x61 grid points about NACA0012 airfoil have been used in all of calculations.

Since the actual grids have widely varying cell size a space varying  $\Delta t$  is used as a vehicle to improve convergence rate. For inviscid steady flows it is considered as  $\Delta t = \Delta t_{ref} / (1 + \sqrt{J})$ , and for steady viscous flows a  $\Delta t = \Delta t_{ref} / (|U| + |V| + \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2})$ .

The  $\epsilon$  is set equal to .125 for all cases. The cases considered here for inviscid flow are a)  $M=.8, \alpha=1.25$  b)  $M=.85, \alpha=1.00$  and obtained results are compared with results obtained by Yee & Harten. The numerical results are given in Fig.1,2 which show good agreement with those of Harten. The required CPU time is 0.6 sec/iter on single processor of NWT.

The second case considered here was unsteady inviscid flow calculation about airfoil undergoing pitching oscillation about 1/4 chord with the reduced frequency of 0.1628, Mach number of .755, amplitude 2.51 deg and zero incidence. The mesh is regenerated at each time step by the method mentioned earlier. Fig.3 shows how the mesh is renewed by this method at two different time step. Time history of aerodynamic coefficients for six cycles, pressure and Mach contours for some instances are given in Fig.4 and Fig.5. This calculation requires 1510 iterations for one cycle and 15 minutes CPU time.

Finally steady viscous flows about the same airfoil were considered. Some of the obtained results are given here. Fig.6 show pressure and friction coefficient at four different cases and Fig.7 pressure coefficient and mach contour of two cases. Comparison of current results with the other numerical results and also experimental results are given in table.1. The obtained results are close to the others. For viscous flows second order accurate in space and time show better stability. The minimum distance of the first grid away from surface was considered about order of  $.4R_c$  to resolve boundary layer. Required CPU time in this case is 1.6 sec/iter.

**CONCLUSION**

A computer program based on TVD scheme was developed and applied to inviscid and viscous flows. Current results show good agreement with the other results. With more improvement in convergence rate this code is applicable to unsteady viscous flow calculations such as flutter or dynamic stall prediction which were our objectives for doing this work.

Finally I appreciate Mr. Kawai ( of NAL) for his permitting to use his block thridiagonal solver.

**REFERENCES**

[1]Baldwin,B.S. and Lomax,II.,"Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA paper,78-257 (1978)  
 [2]Yee,II. and Harten,A.,"Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Law in Curvilinear Coordinates," AIAA paper, No.85-1513 also AIAA Journal Vol.25, No.2,(1987), pp.266-274  
 [3]Nakamichi, J.,"Calculation of Unsteady Navier-Stokes Equations Around an Oscillating 3-D Wing Using Moving Grid System," AIAA paper,87-1158-CP"

**FIGURES**

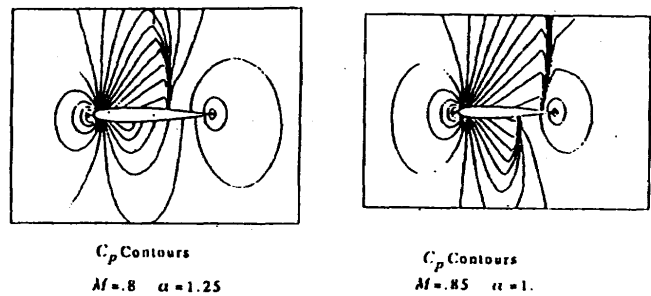


Fig. 1. Inviscid flow solutions about NACA0012

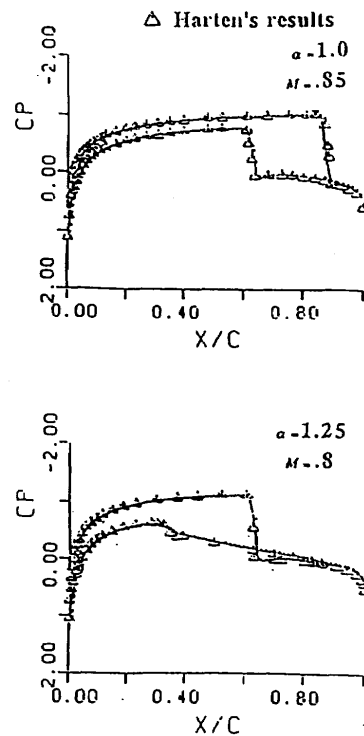


Fig. 2. Comparison of current results with those of Harten

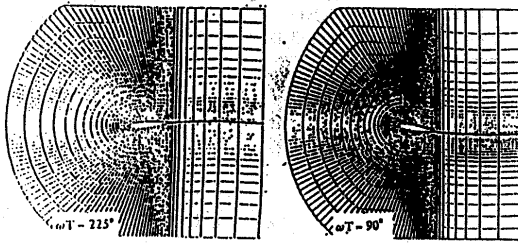


Fig. 3. Grid Distributions Around NACA0012 in Unsteady Calculations at Two Instances Using Moving Grid System

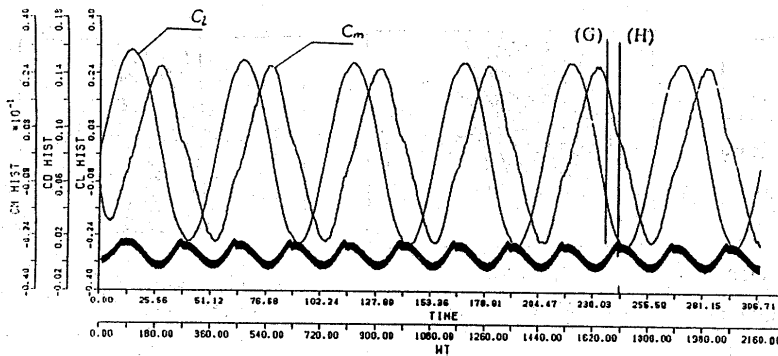


Fig. 4. Unsteady Inviscid Solution About NACA0012 Airfoil in Pitching Oscillation ( $\alpha = 16.28^\circ, X_c = 25$ ),  $\alpha = 0.0 + 2.51 \sin(\omega t)$ ,  $M = 0.3384$ ,  $M = 0.755$ ,  $C_p, C_m, C_l$  History

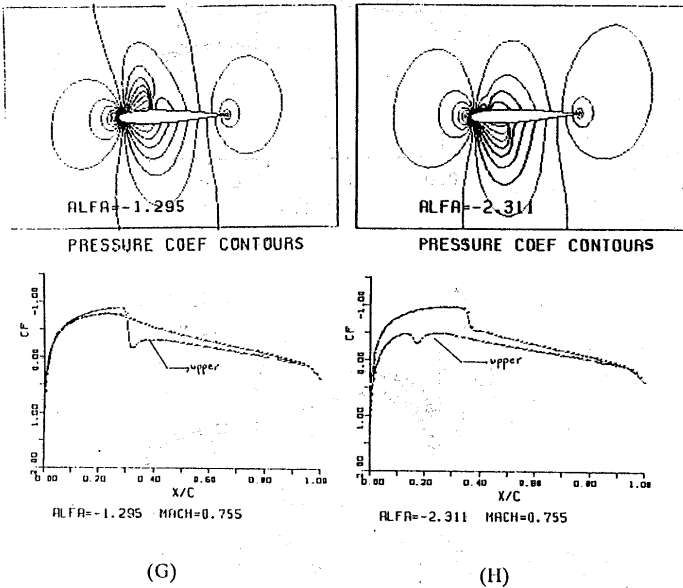
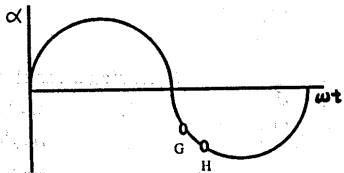


Fig. 5. Unsteady Inviscid Flow Results at Two Time Levels at Sixth Cycle

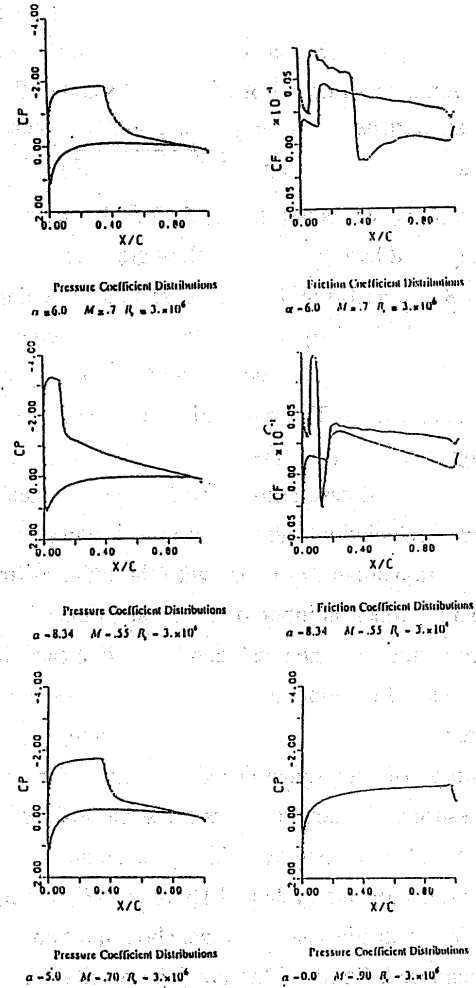


Fig. 6 Numerical Results of Navier-Stokes Eqs.

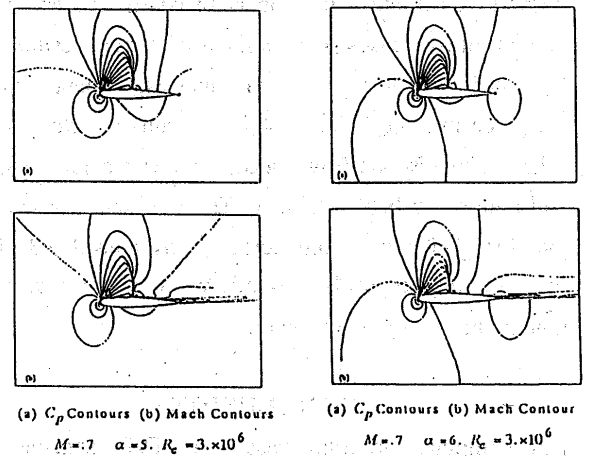


Fig. 7 Numerical Solutions of N-S Eqs. pressure coeff and Mach number Contours

Table 1. Comparison of current viscous results with numerical results of cockley AIAA 87-0412 and experimental results of Harris NASA TM-31927

		comparison of current results									
		current results				Cockley				Harris	
M	$\alpha$	$C_l$	$C_d$	$C_t$	$C_r$	$a_{11}$	$C_t$	$C_r$	$a_{11}$	$C_t$	$C_r$
0.2	0.00			0.0118							
0.55	3.34	0.9815	0.0452	0.994	0.0358	9.86	.983	.0253			
0.70	0.00			0.0088							
0.70	5.00	0.7267	0.0334	0.766	0.0428						
0.70	6.00	0.8338	0.0643	0.850	0.0421						
0.755	0.00			0.0198							
0.799	2.26	0.4185	0.0428	0.476	0.0446	2.86	.59	.0331			
0.8	0.00			0.028							
0.9	0.00			0.1139							



## Solitary Wave Solution for Mixing-Layer Turbulence

Shunichi Tsuge <sup>#</sup> and Satoru Ogawa <sup>b</sup>

<sup>#</sup> Institute of Engineering Mechanics, University of Tsukuba, Tsukubashi, Ibaragi

<sup>b</sup> Computational Sciences Division, National Aerospace Laboratory, Chofu, Tokyo

### Abstract

A neoclassical statistical theory made applicable to wider classes of turbulence is proposed by separating independent variables into each space point of correlations. The separated dependent variables are shown to obey the Navier-Stokes equation in 6-D space  $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  where  $\mathbf{s}$  is the coordinate designated the eddy size. A solitary wave solution is obtained for a mixing layer. Integral of a bilinear product of this solution over the whole  $\mathbf{s}$ -space gives Reynolds' stress that is free from empirical parameters.

### Introduction

In this paper we will discuss how the small eddy difficulty common to current turbulence simulations can be eliminated by introducing additional independent variables in the Navier-Stokes equation designating the eddy size. Also will be discussed the solution in this super-space having the form of a solitary wave for a mixing layer.

The small eddy difficulty, namely, the difficulty in resolving small turbulent eddies in computational fluid dynamics has its origin in the fractal structure of turbulence[1]. This nature precludes differentials to be replaced with finite differences unless the unit step size taken is smaller than the Kolmogorov scale. In fact it is only below this length that smoothness in dependent variables is recovered. This causes crucial limitations to the current numerical simulations, such as the Reynolds number limitation in the direct numerical simulation, or needs for small-eddy modeling not deducible from first principles in the large eddy simulation.

To get rid of this difficulty it is advisable to work not with the instantaneous fractal fluid velocity  $u_j$ , but with its smoothed equivalent, namely, the set of average value  $\{ \langle u_j \rangle, \langle u_j' \hat{u}_i' \rangle, \langle u_j' \hat{u}_i' \hat{u}_m' \rangle, \dots \}$  where  $u_j'$  is the instantaneous fluctuation. A key difference of the proposed neoclassical method from the classical statistical theory of isotropic turbulence[2] is the method of separation of variable[3] introduced to make flows of more practical interest

tractable. This method was applied to the problems of turbulence Benard convection[4] and propagating turbulent premixed flames[5], both showing satisfactory agreement with experiments.

This earlier approach, where the separation of variables is effected in the frequency space has turned out to be applicable only to flows in which turbulent vortices stay stationary relative to the mean flow. A new separation scheme is necessary to make it work for flows such as turbulent boundary layers where turbulent blobs travel through the mean flow field. We will show that separation of variables in the wave number(velocity) space, instead of the frequency (scalar) space, meets this purpose:

$$\langle u_j'(\mathbf{x}, t) u_i'(\hat{\mathbf{x}}, t) \rangle = R.P. \int_{-\infty}^{\infty} q_j^*(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t) q_i(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}$$

where  $\mathbf{k}$  is the nondimensional wave number, asterisk(\*) indicates conjugate complex and R.P. stands for the real part.

### Basic equations

The procedure of deriving the equation for the separated variable  $q_j$  is the same as that appeared in ref.3 except with the frequency  $\omega$  to be superseded by the wave number  $\mathbf{k}$ . There are two sets of equations coupled through the

Reynolds stress; the one for mean velocity and pressure( $u, p$ ) and the other for the separated fluctuation variables for velocity and pressure ( $q_j, q_j$ ),  $j=1,3$ . For incompressible turbulence, they take the following forms:

$$\begin{aligned} \partial u_j / \partial x_j &= 0, \\ NS(\mathbf{u}, p)_j &= -\partial \tau_{ij} / \partial x_i \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} NS(\mathbf{u}, p)_j &\equiv (\partial / \partial t + u_i \partial / \partial x_i - \nu \partial^2 / \partial^2 x_i) u_j \\ &+ (1/\rho) \partial p / \partial x_j \\ \tau_{ij} &\equiv \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\hat{\mathbf{x}}, t) \rangle_{\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}} \end{aligned}$$

with  $\rho$  and  $\nu$  denoting the density and the kinematic viscosity, respectively, and

$$\begin{aligned} \partial q_j / \partial x_j &= 0, \\ (-i\omega + \partial / \partial t + u_i \partial / \partial x_i - \nu \partial^2 / \partial^2 x_i) q_j + q_i \partial q_j / \partial x_i + \\ (\partial / \partial x_i) \int_{-\infty}^{\infty} q_i(\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}) q_j(\tilde{\mathbf{k}}) d\tilde{\mathbf{k}} + (1/\rho) \partial q_j / \partial x_j &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

We note that there appears in Eqs.(2) a parameter  $\omega$  having the dimension of frequency that has been introduced to separate the variables ( $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}$ ) into each of  $\mathbf{x}$  and  $\hat{\mathbf{x}}$ . This quantity may be related to the dimensional wave number  $\mathbf{K} = \mathbf{k} / \delta$  ( $\delta$ ; a characteristic length), as

$$\partial \omega / \partial \mathbf{K} = \mathbf{C},$$

Where  $\mathbf{C}$  is the mean group velocity of turbulent blobs. Flow visualization shows nondispersive feature ( $\mathbf{C}$ ; independent of  $\mathbf{K}$ ) of the propagation of turbulent vortices[6][7]. Several of these examples are

$\mathbf{C} = \mathbf{U}$  (Taylor's hypothesis for windtunnel turbulence,  $\mathbf{U}$ ; uniform flow velocity)

$\mathbf{C} \sim \mathbf{U}$  (flat plate turbulent boundary layer at low Reynolds number[6])

$\mathbf{C} = (\mathbf{U}_{\infty} + \mathbf{U}_{-\infty})/2$  (turbulent mixing layers[8][9] between flows with velocities  $U_{\pm\infty}$ )

$\mathbf{C} = \mathbf{U}_{mean}$  (turbulent puff in a pipe[10]).

Eqs.(2) can be put into a more tractable form in the following way: Separating out the spatially periodic part of  $q_\alpha$ , namely,

$$q_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{K}, t) = e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} Q_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{K}, t), \quad (\alpha = j, 4) \quad (3)$$

and substituting into Eqs.(2), we see that the exponential terms drop out of the equations due to the convolutional form of the nonlinear integral. In view of the relationship

$$\begin{aligned} \partial q_\alpha / \partial x_i &= e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} (\partial / \partial x_i + iK_i) Q_\alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

Eqs(2) are seen to transform to an equivalent set with the following substitutions;

$$q_\alpha \rightarrow Q_\alpha, \quad \partial / \partial x_i \rightarrow \partial / \partial x_i + iK_i$$

The integral expression in the latter set of equations can be eliminated by introducing Fourier-Transforms

$$Q_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{K}, t) = 1/(2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{S}} F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{S}, t) d\mathbf{S}$$

where  $\mathbf{S}$  is the Fourier-conjugate variable of the wave number, having the dimension of length and designating the eddy size of turbulent vortices. Substitution of (4) into the governing equations for  $Q_\alpha$  leads to another set of equivalent equations governing  $F_\alpha$  through the following rules,

$$\begin{aligned} Q_\alpha &\rightarrow F_\alpha \quad (\alpha; j, 4) \\ iK_i &\rightarrow \partial / \partial x_i \\ \int Q_j(\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}) Q_i(\tilde{\mathbf{k}}) d\tilde{\mathbf{k}} &\rightarrow F_j F_i \end{aligned}$$

Written explicitly, Eqs(2) have the final form:

$$\begin{aligned} \partial F_j / \partial x_j &= 0, \\ (\partial / \partial t - C_i \partial / \partial S_i + u_i \partial_i - \nu \partial^2 / \partial^2 x_i) F_j + \\ F_i \partial u_j / \partial x_i + \partial_i (F_j F_i) + (1/\rho) \partial F_j / \partial x_j &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\partial_i = \partial / \partial x_i + \partial / \partial S_i$ .

Eq.(6) is a nonlinear version of the Orr-Sommerfeld equation in which the number of space coordinates is doubled. In having multiple coordinates for flow geometry plus eddy-s

scale, and viewed from a frame of reference moving a velocity  $\mathbf{C}$ .

Boundary conditions for these equations dictate the crucial character of the solution.

They are,

$$F_\alpha = 0 \quad (\alpha = j, 4) \text{ as } |\mathbf{S}| \rightarrow \infty,$$

$$F_j = 0, \quad \partial F / \partial \mathbf{x} = 0. \quad (\text{at solid boundaries, or in approaching a uniform flow or fluid at rest}) \quad (7)$$

Thus a solitary-wave solution may be expected in  $(x, s)$  space since both governing equations and boundary conditions are homogeneous.

The fluctuation-correlation formula, when viewed in  $\mathbf{S}$ -space, takes much simpler form. Written in terms of the nondimensional quantities

$$\mathbf{s} = \mathbf{S} / \delta, \quad \xi = \mathbf{x} / \delta,$$

the fluctuation correlation is rewritten as

$$\begin{aligned} \langle u'_j(\mathbf{x}, t) u'_i(\hat{\mathbf{x}}, t) \rangle &= R.P. \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot (\xi - \hat{\xi})} Q_i(\mathbf{k} - \hat{\mathbf{k}}) Q_j(\hat{\mathbf{k}}) d\hat{\mathbf{k}} \\ &= 1/(2\pi)^6 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot (\xi - \hat{\xi} + \mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}})} F_j(\xi, \mathbf{s}) F_i(\hat{\xi}, \hat{\mathbf{s}}) d\mathbf{k} ds d\hat{\mathbf{s}} \\ &= 1/(2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} F_i(\xi, \mathbf{s}) F_j(\hat{\xi}, \mathbf{s} + \hat{\xi} - \xi) ds \end{aligned}$$

It is thus concluded that the turbulent fluctuation correlation can be calculated through a 3-D integral over the whole eddycoordinate space once the solitary-wave solution has been obtained. The Reynolds stress is given then by putting  $\hat{\xi} = \xi$  in this formula.

### Computational Procedures

The analysis above has shown that the small eddies are mapped onto a small region around the ordinary point  $\mathbf{s} = 0$ . The aforementioned difficulties are thus eliminated at the expense of the additional independent variables appearing in the governing equations. It is not an easy task to solve a time-dependent 6-D equation for a general 3-D flow geometry. However, there are classes of turbulent flows with simpler geometry that are certainly tractable.

We will show that a turbulent mixing layer generated between two parallel streams with different velocities  $U_{\pm\infty}$ , starting to merge at  $\xi = 0$ , is such an example. Experiments [7][8][9] have shown that 2-D mixing layers are self-similar with the thickness  $\delta$  of the mixing layer growing linearly with streamwise distance;

$$\delta = \alpha x_1.$$

This experimental evidence indicates that Eqs.(2) and (3) are governed by reduced number of self-similar variable

$$\eta = x_2 / \delta, \quad s = S / \delta.$$

This observation together with the group-theoretical consideration of self-similarity [11] require that the terms with viscosity be negligibly small, reflecting the fact that the viscous stress is overwhelmed by the Reynolds' stress everywhere in the flow. Under this condition Eqs.(5) and (6) reduce to the following set of inviscid equations:

$$\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial f_3 / \partial s_3 = 0$$

$$NL(f_1) + \partial_1 f_4 - \alpha \eta \partial u / \partial \eta + f_2 \partial u / \partial \eta = 0$$

$$NL(f_2) + \partial_2 f_4 - \alpha \eta \partial v / \partial \eta + f_1 \partial v / \partial \eta = 0$$

$$NL(f_3) + \partial f_3 / \partial s_3 = 0$$

with

$$\partial_1 \equiv (1 - \alpha s_1) \partial / \partial s_1 - \alpha (\eta \partial / \partial \eta + s_2 \partial / \partial s_2 + s_3 \partial / \partial s_3)$$

$$\partial_2 \equiv \partial / \partial \eta + \partial / \partial s_2$$

$$NL \equiv \partial / \partial t - c \partial / \partial s_1 + (u + f_1) \partial_1 + (v + f_2) \partial_2 + f_3 \partial_3$$

where  $(u(\eta), v(\eta), 0)$  is the mean velocity vector made nondimensional using the velocity difference  $U = U_\infty - U_\infty$ , and  $f_\alpha$  and  $c$  are nondimensional fluctuations are group velocity defined similarly;

$$f_j + F_j / U, \quad f_4 + F_4 / \rho U^2, \quad c = C / U.$$

In principle, the propagation velocity  $c$  of turbulent waves is to be determined as the eigenvalue that alone keeps

the solitary wave build up stationary in the long run. Here, however, we employ the value  $C = (\mathbf{U}_\infty + \mathbf{U}_{\infty'})/2$  taken from experiments to save computational time. Also, since this paper is focused on quick check of the adequacy of the proposed approach, we do not solve, but instead adopt measured values [9] for  $u$ , while  $v$  is computed, using the continuity equation;

$$v = \int_0^{\eta} \eta (du/d\eta) d\eta.$$

The initial-value problem is solved employing a marker-and-cell method in the 4-D space starting with rather arbitrary initial values, using VP2600 of the NAL. A unique robust solitary wave solution which is entirely independent of the initial value is shown to build up eventually. It is also confirmed that the time-dependent method leads asymptotically to a steady-state solution.

Figs.(a,b) show the contour lines of the solitary wave ( $f_1, f_2$ ) projected onto planes of  $(s_1, \eta)$  and  $(s_1, s_2)$ , respectively. The solitary waves are either symmetric ( $f_1, f_2, f_3$ ) or antisymmetric ( $f_4$ ) with respect to  $s_2$ . No symmetry properties are allowed for other variables as the governing equations dictate. In fact, considerable asymmetry is observed in the alignment of peaks and valleys in the  $(\eta, s_1)$  plane, as contrast to the seemingly symmetric appearance of the measured counterparts[9].

The triple integrals(8) as formed using those solitary wave solutions are calculated to give the following informations: Spanwise variation of the correlation of the streamwise component of velocities  $R_{11}((\hat{x}_3 - x_3)/\delta)$  normalized by the local turbulence intensity  $(R_{11})_0 + (R_{11})_{\hat{x}=x}$  is plotted in Fig.2. Average vortex spacing defined as the distance between zero-crossings is 0.16 which, however, can be smaller by employing other definitions for the scale (c.f., 0.03 of ref.3). Fig.3(a) and (b) respectively show distribution of the turbulence intensity of spanwise velocity component and the Reynolds stress across the shear layer as calculated from (8) by putting  $\hat{\xi} = \xi$ . Also shown is the vertical transport of the Reynolds stress (c), which is the triple-correlation represented by integral (8) with the integrand replaced by  $f_1 f_2^2$ . Agreement with the experimental data by Bell and Mehta[9], as shown in the figure, is more than reasonable for each case considering that the theory includes no parameters

to fit with the data.

## REFERENCES

- [1] K.R.Sreenivasan and C.Meneveau, *J.FluidMech.* 173,357(1986)
- [2] T.von Karman and L. Howarth, *Proc.Roy.Soc.Lond. Ser.A*164,192(1938)
- [3] S.Tsuge, *Phys.Fluids*.27,1370(1984)
- [4] K.Ishibasi, Ph.D Thesis, Institute Eng.Mech. Univ.Tsukuba(1991)
- [5] S. Tsuge, and S. Ogawa, in *Turbulence and Molecular Processes in Combustion (Proc. Sixth Toyota Conference, Elsevier, (1993) pp.35-50*
- [6] S.Taneda, *Phys.Fluids*,26,2801(1983)
- [7] A.Roshko, *AIAA J.*,14,1349(1976)
- [8] I.Wygnanski and H.E.Fieldler, *J.Fluid Mech.* 41,327(1970)
- [9] J.H.Bell and R.D.Mehta, *AIAA J.*,28,2034(1990)
- [10] I.Wygnanski, M.Sokolov and D.Friedman, *J.Fluid Mech.*69,283(1975)
- [11] G.Birkhoff, *Hydrodynamics-A study in logic, fact and similitude (Pub. Taft Fund, Univ.Cincinnati,1949) p.116*

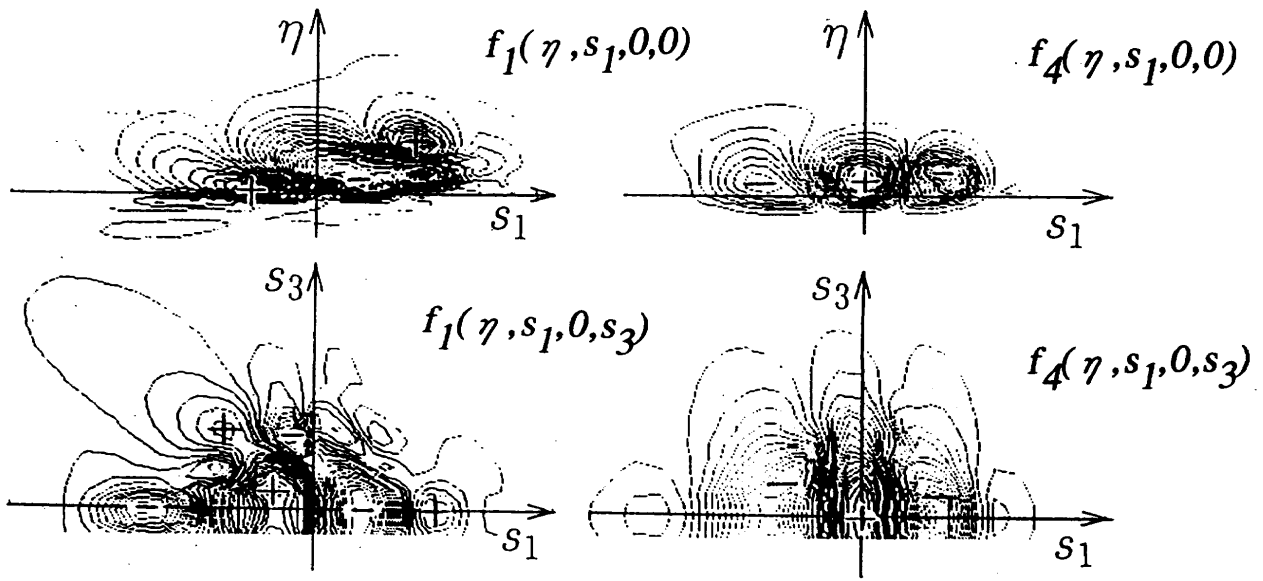


Fig.1 Contour lines of the 4-D solitary-wave solutions of  $f_1$  and  $f_4$  (longitudinal velocity & pressure fluctuations) projected onto 2-D planes  $(s_1, \eta)$  and  $(s_1, s_3)$ .

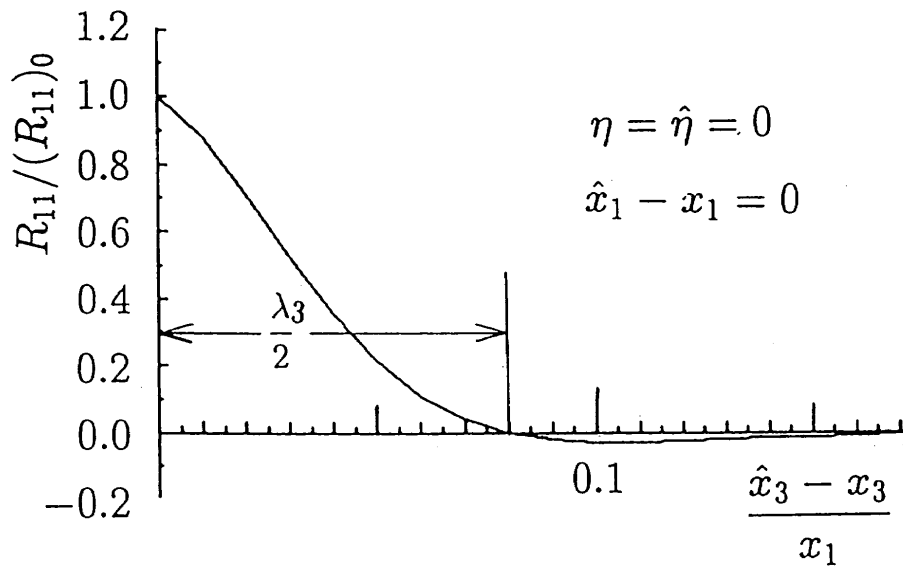


Fig.2 Spanwise variation of the correlation of longitudinal velocity fluctuations on the dividing streamsurface  $\eta = 0$ ,  $\xi = \hat{\xi}$ .

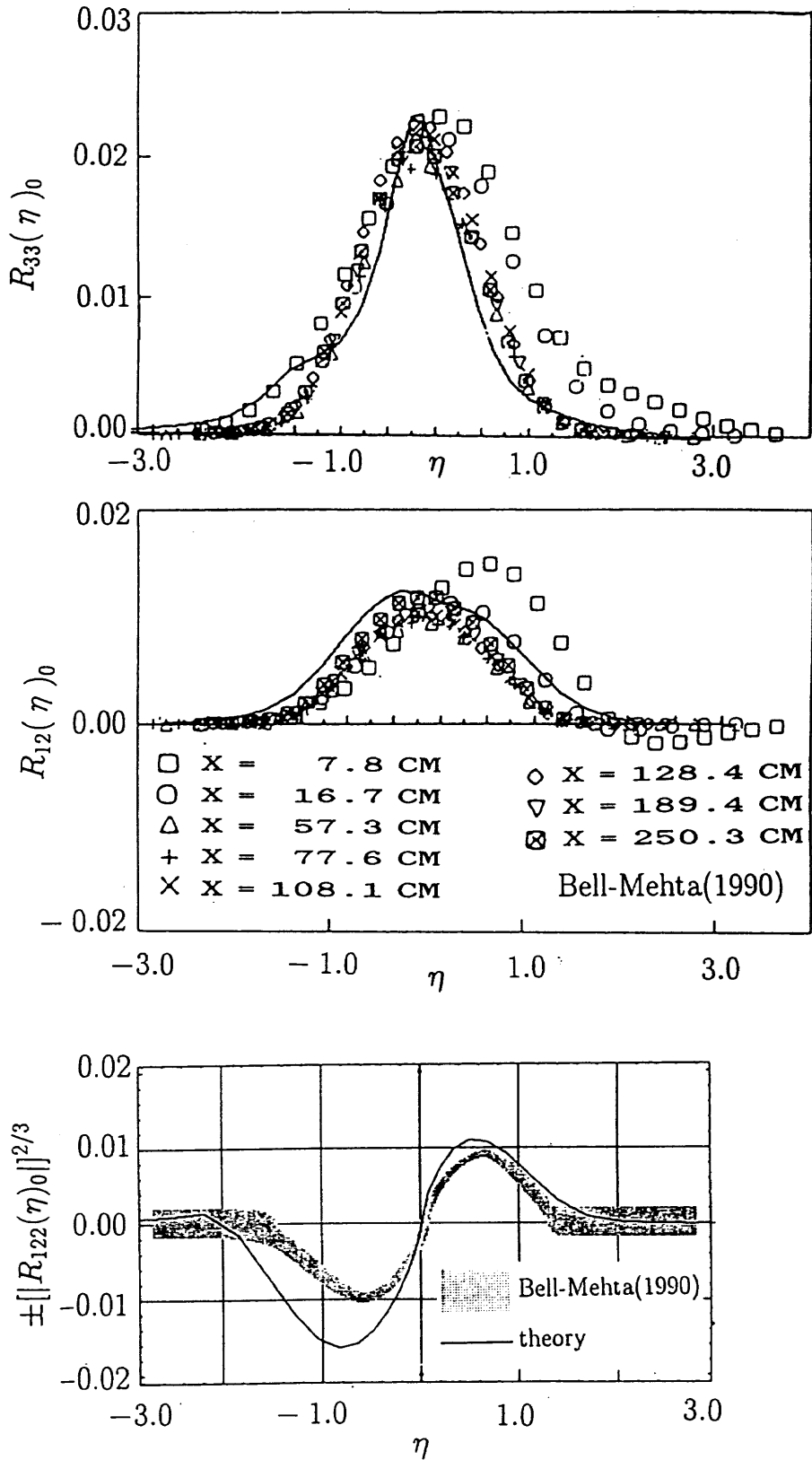


Fig.3 Distributions across the shear layer of the intensity of spanwise component of velocity (a), Reynolds stress (b) and its vertical transport (c). Experimental data are due to Bell and Mehta[9]. Subscript 0 denotes  $\hat{\xi} = \xi$  in Eq.(11).

# Direct Numerical Simulation of Compressible Isotropic Turbulence

Yuichi MATSUO and Kiyoshi YAMAMOTO  
National Aerospace Laboratory,  
7-44-1, Jindaijihigashi, Chofu, Tokyo 182, JAPAN

## Abstract

Direct Numerical Simulations of compressible, homogeneous, decaying isotropic turbulence are conducted using a Fourier pseudo-spectral method in order to deepen our understanding of physics and mechanics of compressible turbulence and to generate statistical data bases useful for turbulence modeling. The simulations are carried out on a vector-parallel supercomputer NWT at NAL for a  $128^3$  grid. The existence of eddy shocklets is confirmed at high turbulent Mach numbers. The time evolutions of turbulence statistics are also analyzed, indicating that the compressibility effects on turbulence is significant at higher fluctuating Mach numbers.

## 1. Introduction

Compressible turbulent flows are often encountered in various important engineering applications. Some high-speed flows, such as boundary layers on a supersonic aircraft, are known to produce turbulent statistics that are similar to those found in incompressible flows. There are other situations, however, in which nonzero divergence of the velocity field leads to behavior that is fundamentally different from the incompressible case. Examples include both external and internal flows associated with hypersonic flight, supersonic combustion and astrophysical phenomena<sup>1</sup>.

To predict such flows by solving the Navier-Stokes equations, we usually rely on turbulence models developed for incompressible flows under the well-known Morkovin's hypothesis<sup>1</sup>, asserting that the density fluctuation effects are negligible if the free stream Mach number is  $M < 5$  for boundary layers, and  $M < 1.5$  for jets. This conventional mean density approach based on the Favre average works well in most cases, but easily breaks down at high Mach numbers. A typical example is found in predicting a compressible shear layer; The models without compressibility corrections fail to predict the decrease of the spreading rate of a shear layer against the increased convective Mach number<sup>2</sup>. A better understanding of compressible turbulence is thus required, leading not only to the improvement of the current incompressible based turbulence models but also to the reliable numerical predictions.

Isotropic turbulent flow on which the current work focuses is one of the simplest kinds of turbulence. Hence, it forms a natural starting point for the study of compressible turbulence, and its close examination may clarify some of the important aspects of the compressibility effects onto, for example, turbulence fine-scale structure. However, turbulence measurements particularly in high-speed flows are difficult to perform. In this context,

Direct Numerical Simulation (DNS) is quite useful because it can give full information on turbulence statistics regardless of the flow speed.

In this study, DNS of compressible, homogeneous, decaying isotropic turbulent flow is conducted in order primarily to investigate basic features of compressible turbulence and subsequently to generate data bases for use in the development and evaluation of compressible turbulence models. For that purpose, a new computer code that solves time-dependent, compressible Navier-Stokes equations in a periodic box is developed. Our code utilizes a Fourier spectral spatial discretization method along with a hybrid second-order time advancing algorithm. The original code has been developed by one of the authors<sup>3</sup> for incompressible flows. When extending it to compressible flows, some difficulties arise: (1) At least one thermodynamic variable should be retained, this increases the required memory; and (2) the existence of cubic nonlinearities makes the aliasing problem potentially more severe. These problems were successfully removed by using a large scale vector-parallel supercomputer NWT developed at NAL and resorting to a pseudo-spectral technique.

In the following sections, basic natures and current understanding of compressible isotropic turbulence are first discussed. Next, numerical method is described. Finally, simulation results are presented and discussed.

## 2. Nature of compressible isotropic turbulence

In isotropic turbulence, the statistical correlations of the fluctuations are invariant to an arbitrary rotation of the coordinates. Of course, it is homogeneous, namely the statistics are independent of the position<sup>4</sup>.

Since isotropic turbulence has no mechanism to produce turbulent kinetic energy (TKE), it must decay in the absence of external forcing. The equation that de-

scribes the evolution of TKE is written as follows<sup>5</sup>:

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\partial q^2}{\partial t} = -\overline{\mu\omega'_k\omega'_k} - \frac{4}{3}\overline{\mu d'^2} + \overline{p'd'}$$

where  $\frac{1}{2}\rho q^2 (\equiv \frac{1}{2}\overline{\rho u'_i u'_i})$  is TKE,  $\omega_i$  the fluctuating vorticity component in the  $x_i$  direction and  $d' (= u'_{i,i})$  the dilatation. Note that in homogeneous turbulence Favre-averages and Reynolds-averages are identical so that we write here the averaged value of any  $f$  as  $\overline{f}$  and its fluctuation as  $f'$ . In the above equation, two principal compressibility terms are identified: the dilatation dissipation  $\rho\varepsilon_d (= \frac{4}{3}\overline{\mu d'^2})$  and the pressure-dilatation correlation  $\Pi_d (= \overline{p'd'})$ .

A notion of the dilatation dissipation is derived from the fact that in compressible flows the dilatation is nonzero. As a result, the total dissipation  $\varepsilon$  can be decomposed into solenoidal part  $\varepsilon_s$  and dilatational part  $\varepsilon_d$ ,

$$\rho\varepsilon (\equiv \overline{u'_{i,j}\tau'_{ij}}) = \rho\varepsilon_s + \rho\varepsilon_d$$

where

$$\rho\varepsilon_s = \overline{\mu\omega'_k\omega'_k}, \quad \rho\varepsilon_d = \frac{4}{3}\overline{\mu d'^2}$$

where conventional notations are used.

Zeman<sup>5</sup> and Sarkar *et al.*<sup>6</sup> have proposed models for the dilatation dissipation. Both models are formulated as  $\varepsilon_d/\varepsilon_s = f(M_t)$  where  $M_t$  is turbulent Mach number, and have been shown to give better predictions of the spreading rate of a compressible shear layer<sup>5</sup>. But the calibration of  $\varepsilon_d$  from numerical simulations or experiments currently remains incomplete.

Meanwhile, the pressure-dilatation is considered to play an important role in the energy exchange between TKE and the acoustic potential energy  $\overline{p'^2}/(2\gamma\overline{p})$ . Zeman<sup>7</sup> has proposed a model by relating the term to the pressure variance evolution whereas Sarkar *et al.*<sup>8</sup> modeled it by using the Poisson equation for pressure. Although these models are validated by comparison with DNS results in some cases<sup>8</sup>, further refinements may be necessary to capture different physical processes in other types of flows.

In recent years, with the advent of large-scale computers, direct and large-eddy simulations of compressible turbulence have become feasible<sup>9-11</sup>. However, the number of the papers reported so far is still limited. Further, the grid points used in the compressible simulations have not yet been comparable with the ones in incompressible cases, and the range of the parameters such as Reynolds number is also limited. These issues might partly reduce the reliability of the simulations.

Since Passot and Pouquet<sup>12</sup> first reported the appearance of shock-like structures or shocklets in their 2D isotropic simulations, the existence of eddy-shocklets in high  $M_t$  has recently been recognized important. In fact,

Zeman's compressible dissipation model<sup>5</sup> is based on the formation of shocklets. However, the conditions that affect their occurrence are still obscure<sup>13</sup>.

In this way, both modeling and simulation of compressible turbulence are at present far from mature.

### 3. Numerical method

Direct Numerical Simulations are performed on the compressible Navier-Stokes equations for a perfect gas, written below in a conventional nondimensionalized form as:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{RePr} \frac{\partial T}{\partial x_j \partial x_j} + (\gamma - 1)\Phi$$

where the viscous stress tensor  $\tau_{ij}$  and the viscous dissipation  $\Phi$  are defined by

$$\tau_{ij} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right), \quad \Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

respectively. Herein, the Einstein summation convention applies to repeated indices, and conventional notations for fluid dynamic variables are used. The above equations are closed by using the equation of state  $T = \gamma p/\rho$  of a perfect gas. The viscosity coefficient is presumed to be constant for simplicity, and the values of  $Pr = 0.7$ ,  $\gamma = 1.4$  are specified.

The equations are time advanced using a splitting algorithm proposed by Erlebacher *et al.*<sup>13</sup>. The method alleviates a severe restriction on the time step at the low Mach number regime. The first step integrates the equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} &= -\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} - \gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{RePr} \frac{\partial T}{\partial x_j \partial x_j} \\ &\quad + (\gamma - 1)\Phi + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \end{aligned}$$

while the second step integrates

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned}$$

One of the advantages of this splitting is that the principal terms responsible for the acoustic waves are isolated



into the second step whereby one expects the time step restriction to depend upon  $u$  rather than  $u + c$ .

The spatial derivatives in these equations are approximated by a Fourier pseudo-spectral method<sup>14</sup>. Spectral methods, by nature of their high accuracy and low dispersive and dissipative errors, are ideally suited for DNS of isotropic turbulence. Let the function  $\phi(x)$  be discretized on a uniform grid  $x_j$  ( $j = 0, \dots, N - 1$ ). The values of the function  $\phi(x)$  at the grid points can be represented in terms of a discrete Fourier series,

$$\phi_j = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\phi}_k \exp\left(i \frac{2\pi k j}{N}\right) \quad (j = 0, 1, \dots, N - 1)$$

where  $\hat{\phi}_k$  is a Fourier coefficients and  $k$  is a wave number. The sets  $\{\phi_j\}$  and  $\{\hat{\phi}_k\}$  constitute a discrete Fourier transform pair.

Most simulations of incompressible turbulence have used a Fourier-Galerkin method, in which the nonlinear terms are evaluated in wave space from convolution sums. The compressible equations, however, contain cubic nonlinearities rather than quadratic ones, and exact Galerkin methods for compressible flow are more expensive than those for incompressible flow. Hence, we choose to form the nonlinear products in physical space. This is the reason why the present method is called not simply "spectral" but "pseudo-spectral." The essential difference between pseudo-spectral and Galerkin methods is that the former are subject to both truncation and aliasing errors whereas the latter have only truncation errors. To remove the aliasing errors, we here used so-called 2/3 rule.

The data transformations between wave space and physical space are implemented with the Fast Fourier Transform (FFT) algorithm. To perform FFT efficiently on NWT, we parallelized the algorithm. NWT is a vector/parallel supercomputer developed at NAL, consisting of 140 vector processor elements (PEs) connected by a cross bar network and having a peak performance of 236 GFLOPS<sup>15</sup>. If one attempts to transfer any one variable from wave space to physical space or physical to wave, FFT needs to be repeated three times successively in all directions. As shown in Fig. 1, if a direction is selected for FFT, another direction is vectorized and the other direction is parallelized. This substantially accelerates the FFT algorithm.

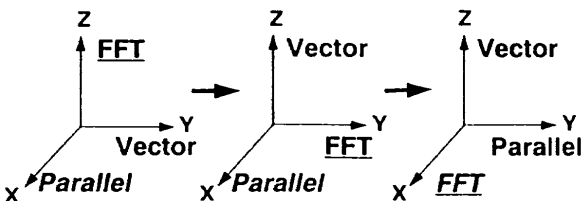


FIG. 1. Parallelization of the FFT algorithm.

In the first step time integration, a second-order Adams-Bashforth scheme is used. To illustrate it, let us consider a equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y)$$

where  $f$  is any function of  $q$ . Then the equation is integrated by a formula

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{2} \left( 3f(y^n) - f(y^{n-1}) \right)$$

where  $n$  denotes the number of time step.

Meanwhile, the second fractional step can be integrated analytically in Fourier space. The integrated equations finally become

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(2)} &= \hat{\rho}^{(1)} + \tilde{A} \{ \cos(k\Delta t) - 1 \} + \tilde{B} \sin(k\Delta t) \\ \widehat{\rho u_j}^{(2)} &= \widehat{\rho u_j}^{(1)} + \frac{i k_j}{k} \left[ \tilde{A} \sin(k\Delta t) - \tilde{B} \{ \cos(k\Delta t) - 1 \} \right] \\ \hat{p}^{(2)} &= \tilde{A} \cos(k\Delta t) + \tilde{B} \sin(k\Delta t) \end{aligned}$$

where Fourier transformed quantities are denoted by a circumflex and

$$\tilde{A} = \hat{p}^{(1)}, \quad \tilde{B} = i k_i \widehat{\rho u_i}^{(1)} / k.$$

The superscript (1) denotes the result of the first fractional step of the splitting and the superscript (2) denotes the result of the second step. The computational domain is set to a cube, normalized to  $[0, 2\pi]^3$ . Periodic boundary conditions are imposed in all directions.

Initial conditions are of particular importance in the simulation of isotropic turbulence. For compressible turbulence, there are more parameters that need to be specified than for incompressible turbulence. In addition, it is well known that the isotropic simulation is highly dependent on its initial conditions<sup>9</sup>. In this study, however, in order to minimize the introduction of compressibility effects due to initial condition and to make the problem simple, all the cases start with nearly incompressible data, that is the velocity field is divergence-free, and the density and temperature fluctuations are zero. Following the method of Blaisdell *et al.*<sup>9</sup>, random phases are generated for the Fourier coefficients of the velocity fluctuations with the energy spectrum of

$$E(k) \propto k^4 \exp[-2(k/k_0)^2]$$

where the spectrum peak is located at  $k_0$  ( $= 4$ ).

Turbulent Mach number  $M_t = q/\bar{c}$  and Taylor microscale Reynolds number  $Re = q\lambda/\nu$  are two independent parameters of the simulation, where  $q = \sqrt{u_i' u_i'}$  and  $\lambda = q/\sqrt{\omega_i' \omega_i'}$ . In Table I, the number of grid points and other parameters used for each simulation are shown. Runs A, C and E are compared to check the grid resolution. In Run D, high  $M_t$  is specified to see if the shocklets occur.

TABLE I. Parameters of the simulations.

Run	$N$	$M_t$	$Re_\lambda$
A	64	0.6	30
B	128	0.1	60
C	128	0.6	30
D	128	1.1	10
E	256	0.6	30

#### 4. Results and Discussions

In Figs. 2(a)-2(c), instantaneous flow fields at normalized time  $t^*(\equiv \varepsilon_0 t/k_0) = 0.2$  on a specified  $x = 0$  plane are compared among Runs B, C and D in terms of the density field. As  $M_t$  increases, more zones with steep gradients can be seen. Although a close examination as to the shock jump conditions is required, the existence of such pronounced compression zones suggests the occurrence of shocklets. According to the 2D simulations by Passot and Pouquet<sup>12</sup>, the shocklets were recognized even at  $M_t = 0.3$ . Meanwhile, Lee *et al.*<sup>16</sup> detected the shocklet formation in their 3D simulations when  $M_t > 0.5$ . The present results show the occurrence of the shocklets for  $M_t > 0.6$  Runs C and D, which follows the observations of Lee *et al.*<sup>16</sup>. It is clear from these results that the turbulence structure is strongly affected by the shocklet formation as the turbulent Mach number becomes high.

Let us next consider the time evolution of turbulence statistics. Fig. 3 shows the evolution of 3D energy spectrum  $E^v(k)$  of the velocity field for Run B.  $E^v(k)$  is defined by

$$E^v(k) = \iint \widehat{u}_i \widehat{u}_i^\dagger dA(k)$$

where  $\dagger$  denotes the complex conjugate. The overall resolution of the simulation appears to be satisfactory.

One useful tool for examining the compressibility is a Helmholtz decomposition of the velocity field:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + \mathbf{u}^C$$

where  $\mathbf{u}^I$ ,  $\mathbf{u}^C$  are respectively the solenoidal and dilatational components which satisfy the relations

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^I = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}^C = 0.$$

Accordingly, the energy spectrum is decomposed into its solenoidal part  $E^S(k)$  and compressible part  $E^C(k)$ ,

$$E^v(k) = E^S(k) + E^C(k).$$

where

$$E^S(k) = \iint \widehat{u}_i^I \widehat{u}_i^{I\dagger} dA, \quad E^C(k) = \iint \widehat{u}_i^C \widehat{u}_i^{C\dagger} dA$$

Likewise, TKE ( $q^2$ ) is decomposed as

$$q^2 \equiv \overline{u_i' u_i'} = q_I^2 + q_C^2$$

where

$$q_I^2 = 2 \int E^S(k) dk, \quad q_C^2 = 2 \int E^C(k) dk.$$

Fig. 4 illustrates the evolutions of TKE ( $q^2$ ) for Runs B, C and D as a function of normalized time  $t^*$ . TKE monotonically decays in each Run due to viscous damping. The evolutions of the ratio  $\chi (\equiv q_C^2/q^2)$  for Run B, C and D are compared in Fig. 5. It is found that while each simulation uses a nearly incompressible state as its initial condition, the compressible part  $q_C^2$  is generated as soon as the simulation starts.

In order to examine the dilatation-dissipation  $\varepsilon_d$  next, it is convenient to define the fraction of the dissipation rate due to dilatation  $\chi_\varepsilon (\equiv \varepsilon_d/\varepsilon_{total})$  which is one of

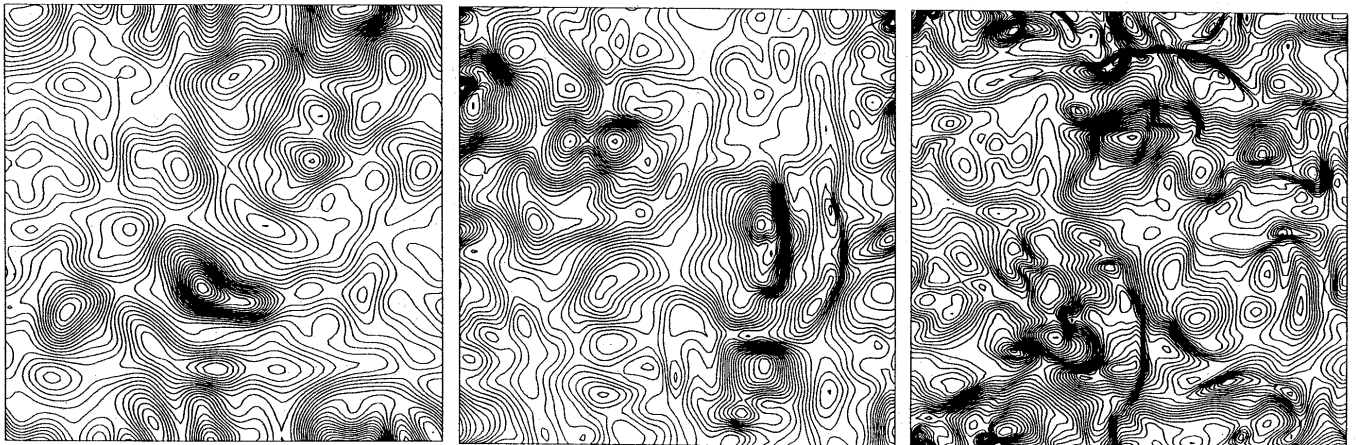


FIG. 2 Snapshot of instantaneous density fields at a specified  $x = 0$  plane: (a) for Run B, (b) for Run C, and (c) for Run D.

the direct measures of compressibility. Fig. 6 compares the histories of  $\chi_\epsilon$  for Run B, C and D. As  $M_t$  increases, the levels of  $\chi_\epsilon$  are seen to become high. From this figure  $\chi_\epsilon$  is apparently scaled with  $M_t$ . However, it is known<sup>9</sup> that the development of  $\chi_\epsilon$  in isotropic turbulence is highly dependent on its initial value and difficult to model solely by  $M_t$ .

Fig. 7 follows the time evolutions of the pressure-dilatation correlation ( $\Pi_d$ ) for Run B, C and D. After initial oscillations, each  $\Pi_d$  approaches gradually its equilibrium state. This results is in accordance with other recently reported DNS data<sup>7,8</sup>. For homogeneous shear flow, the term show more severe oscillations<sup>9</sup>. This behaviour motivates various modeling efforts<sup>7,8,11</sup>, and much work still remains to be done.

In this paper, only part of turbulence statistics are shown and discussed. In order to investigate structures and dynamics of compressible turbulence in more detail, other statistical quantities including density fluctuations or higher-order derivative correlations such as skewness and flatness should be examined. These issues remain as future work.

Finally, let us comment on technical aspects or tips of the simulations on NWT. For the purpose of code validation, Run A was performed twice: One is on a verbose (non-parallel) mode and the other on a parallel mode. Both runs gave exactly the same results, consequently, we confirmed the parallelization is programmed correctly. Run E after all made a big solution file which spent a large amount of disk space. We have not yet analyze the data for Run E because it is too big.

Most cases are run with a parallel mode using 64 PEs. Only Run E needs 128 PEs. Although Run E requires  $(256/64)^3$  times larger size of memory than Run A, the increase of the computation time was not so serious. It is our straightforward impression that the parallelization is very useful in the direct simulation of turbulence.

## 5. Summary

Compressible decaying isotropic turbulence has been studied. A direct simulation code based on a Fourier pseudo-spectral method has been developed and applied. The code has been parallelized so as to be efficiently executed on a parallel supercomputer NWT. We confirmed that the simulation is currently feasible for a  $256^3$  grid. If the code is further refined, the case with a  $512^3$  grid may be possible. As the second author reported in Ref. 17, significant speed-up of the simulations is attainable by NWT. In numerical turbulence researches, computer capability is indispensable. This is all the more true in compressible turbulence because of the increased memory and operations. The introduction of parallel computing will open a new avenue for the researches.

The present results generally supported the recently reported analyses<sup>5-8</sup> and simulations<sup>9-11</sup>. At high turbulent Mach numbers, we confirmed the occurrence of the shock-like structures (eddy shocklets). However, the mechanism around the shocklets should be investigated in more detail to aid the compressible turbulence modeling. The statistical analyses showed that even though the initial state is nearly incompressible, the compressibility effects arise soon and they are by no means negligible. In order to determine the compressibility effects more qualitatively, simulations at various initial conditions and parameters and at other mean flow situations such as homogeneous shear are required. These issues are associated with future study, and hopefully this study will contribute advanced compressible turbulent modeling efforts<sup>18</sup>.

## Acknowledgment

The authors would like to thank Mr. H. Fujiwara of the University of Tokyo for his useful discussions, and are grateful to Mr. T. Nakamura and Mrs. M. Tsuchiya of NAL for their help to parallelize and execute the spectral code.

## References

- 1 Bradshaw, P., *Ann. Rev. Fluid Mech.* **9** (1977) 33.
- 2 NASA SP-321, 1972.
- 3 Yamamoto, K. and Hosokawa, I., *J. Phys. Soc. Japan* **57** (1988) 1532.
- 4 Batchelor, G.K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge Univ. Press (1953).
- 5 Zeman, O., *Phys. Fluids A* **2** (1990) 178.
- 6 Sarkar, S., Erlebacher, G., Hussaini, M.Y. and Kreiss, H.O., *J. Fluid Mech.* **227** (1991) 473.
- 7 Zeman, O., *Phys. Fluids A* **3** (1991) 951.
- 8 Sarkar, S., *Phys. Fluids A* **4** (1992) 2674.
- 9 Blaisdell, G.A., Mansour, N.N., and Reynolds, W.C., *J. Fluid Mech.* **256** (1993) 443.
- 10 Zang, T.A., Dahlburg, R.B. and Dahlburg, J.P., *Phys. Fluids A* **4** (1992) 127.
- 11 Fujiwara, H. and Arakawa, C., in *Proceedings of the Ninth Symposium on Turbulent Shear Flows* (1993) p.22-2.
- 12 Passot, T., and Pouquet, A., *J. Fluid Mech.* **181** (1987) 441.
- 13 Erlebacher, G., Hussaini, M.Y., Speziale, C.G. and Zang, T.A., *J. Fluid Mech.* **238** (1992) 155.
- 14 Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer (1988).
- 15 Iwamiya, T., Fukuda, M., Nakamura, T. and Yoshida, M., to appear in *Proceedings of Parallel CFD '93* (1994).
- 16 Lee, S., Lele, S.K. and Moin, P., *Phys. Fluids A* **3** (1991) 657.
- 17 Yamamoto, K., in *Preprints of Parallel CFD '94* (1994).
- 18 Yoshizawa, A., *Phys. Fluids A* **2** (1990) 838.

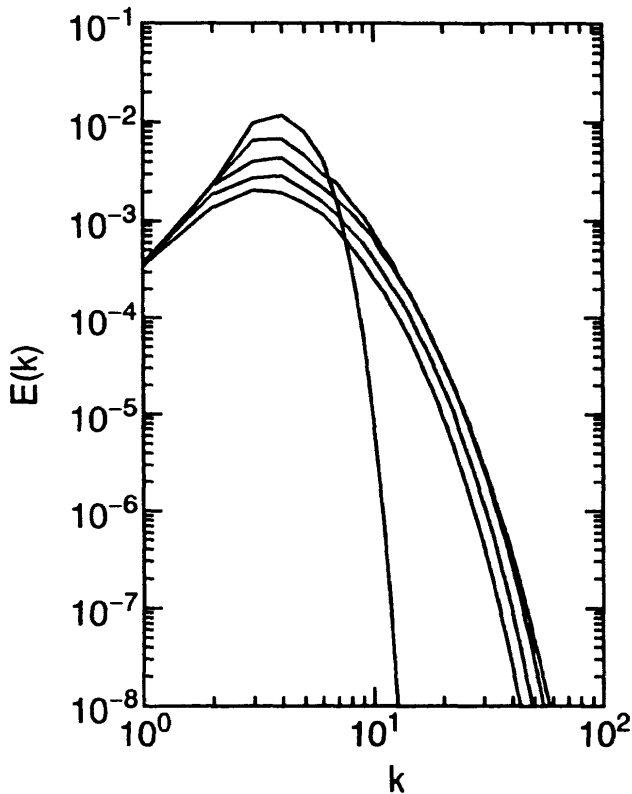


FIG. 3. Time evolution of 3D energy spectrum of the velocity field in Run B.

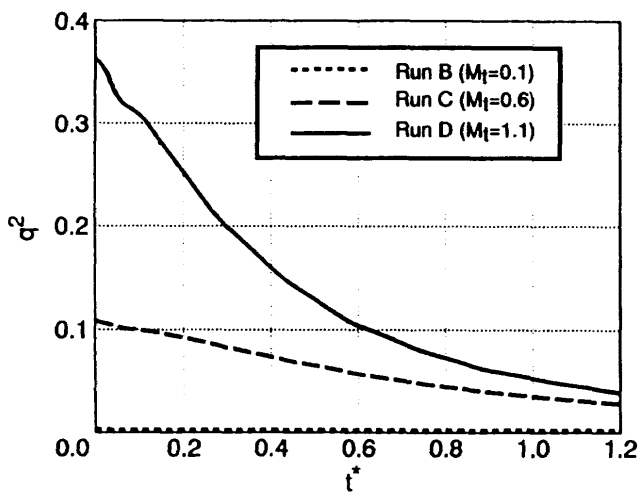


FIG. 4. Comparison of the time evolutions of TKE ( $q^2$ ) for Run B, C and D.

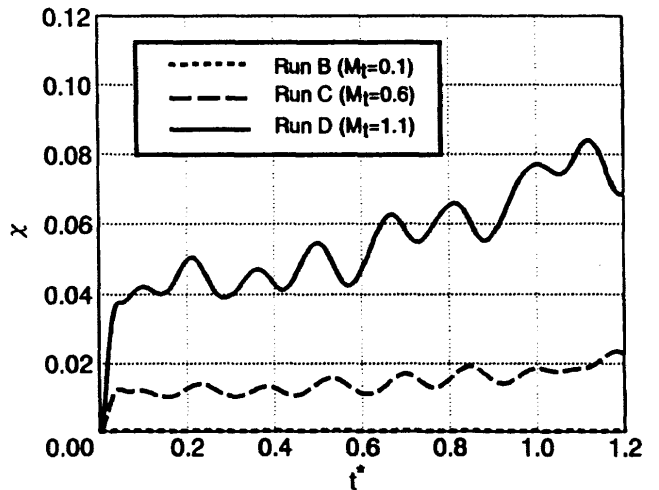


FIG. 5. Comparison of the time evolutions of  $\chi$  for Run B, C and D.

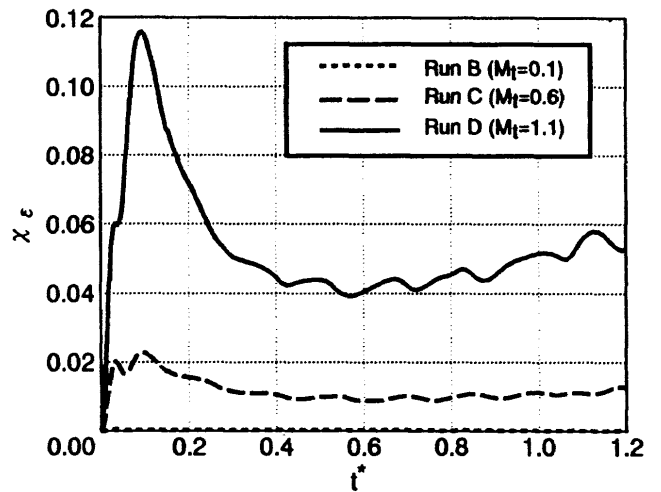


FIG. 6. Comparison of the time evolutions of  $\chi_\epsilon$  for Run B, C and D.

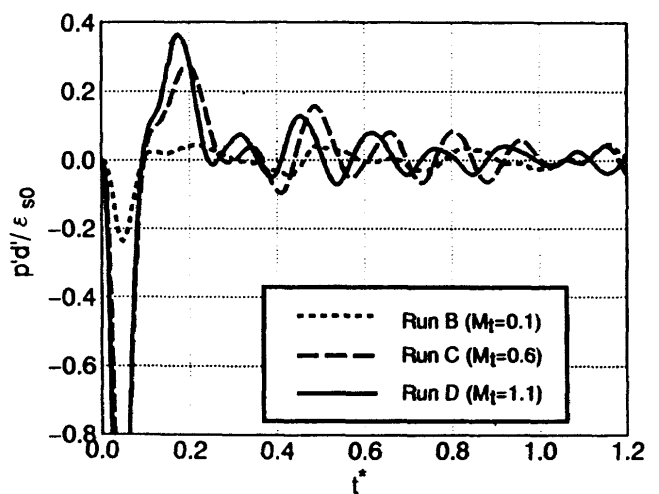


FIG. 7. Comparison of the time evolutions of the pressure-dilatation ( $\Pi_d$ ) for Run B, C and D.

# 境界要素法による前縁はく離渦の効果を入れた デルタ翼の空力計算

菊地勝浩\* 菊池秋広\* 柳澤三憲†

Calculation for Aerodynamic Characteristics on Delta Wing  
with Leading-edge Separated Vortex Effect using Boundary Element Method

by

Katsuhiko KIKUCHI, Akihiro KIKUCHI, Mitsunori YANAGIZAWA  
Science University of Tokyo

## ABSTRACT

In this paper, the method which allows the calculation of the characteristics for flow around a delta wing is described. Flow separations are certain to occur from the leading-edge on highly swept wings at moderate-to-high angles of attack. Since delta wing is considered as slender body, slender body theory is resorted. So first, two-dimensional cross sections are generated by slicing three-dimensional model and the position and strength of leading-edge separation vortices is determined using vortex tracking method. In order to include the effect of leading-edge separation vortex a model is proposed. Some aerodynamic coefficients of delta wing are obtained from the present method and comparisons between numerical and experimental results show good agreement.

## 1 はじめに

航空機の高速化に関する研究、開発にともない、超音速機の翼として、翼の周りの流れが安定しており、構造強度の面からもすぐれ、抵抗が小さく経済性に富んだ前縁の鋭いデルタ翼が有利であるとして、注目を集めるようになった。

しかし、アスペクト比が小さく前縁が鋭いため、翼の周りの流れ場は三次元的な影響が強くなる。その特徴的な現象は、小さな迎角でも流れが鋭い前縁を曲がりきれず、その位置からはく離し、翼面上の流れ場ははく離した三次元流となることである。前縁からはく離した流れは、翼面上に左右に一对の集中渦を形成する(図1)。

この渦の中心は静圧が低く、翼面上での渦の存在するところの揚力は増加し、はく離が存在しないポテンシャル理論から得られる揚力より高くなり、迎角に対して非線形に増加する。

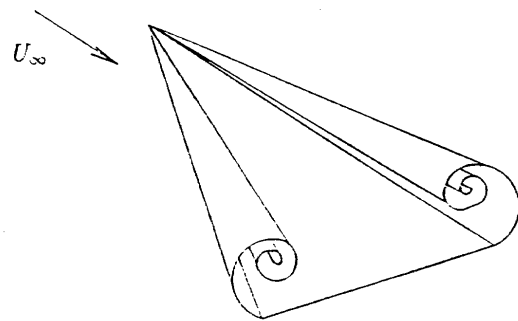


図1: デルタ翼の前縁はく離渦

\*東京理科大学大学院

†東京理科大学理学部

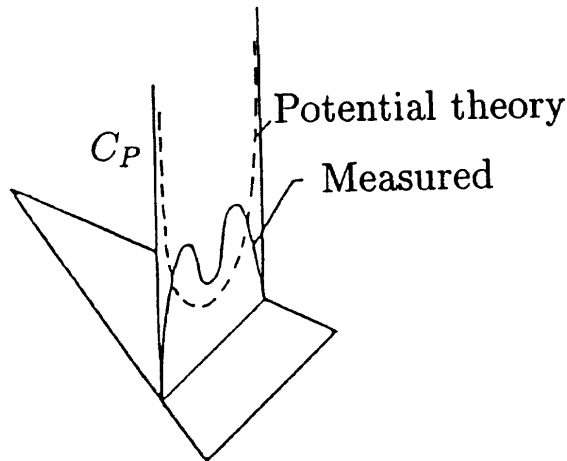


図 2: デルタ翼上面のスパン方向の圧力分布

前縁はく離渦を伴う流れは、揚力の増加をもたらすだけでなく、スパン方向の圧力分布にも変化をもたらす。図 2 に典型的なスパン方向の圧力分布の模式図を示す。前縁はく離渦のために負圧のピークは、ポテンシャル理論から得られるように前縁には発生せず、前縁の内側に起こる。

3次元物体周りの流れの解析ではこれまで、Morino-Yanagizawaの方法に代表されるような境界要素法が用いられ、実験との良い一致が得られてきている。しかし、境界要素法はポテンシャル流を扱うため、直接はく離流を解析することはできない。今回ここでは、連続自由渦法を用いることによって、前縁はく離渦の効果を入れ、デルタ翼の空力計算を境界要素法により行った結果について述べる。

## 2 数値解析法

デルタ翼は細長物体として取り扱えるので、細長物体理論を適用する [1]。細長物体理論では、横断流は二次元的であると見なせる。そこで三次元モデルを二次元に切断し、この二次元断面においてはく離渦の形と強さを決め、それを再び三次元に戻してはく離渦の効果を入れて計算すれば、デルタ翼のようなはく離渦が重要な意味を持つ物体周りの流れの解析が可能となる [2]。解析方法のフローを図 3 に示す。

### 2.1 三次元数値モデルの切断

三次元数値モデルを構成するパネルは、四角形の双曲面とする。曲面の四隅の座標を用いて、面

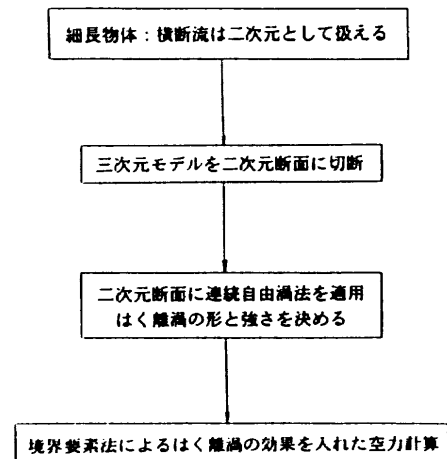


図 3: 解析方法のフロー

内の一点は次のように局所座標で表される。

$$P = P_0 + P_1\xi + P_2\eta + P_3\xi\eta \quad (1)$$

ここで、 $P_0$ 、 $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ はパネルの四隅の座標から求められる。曲面  $S_A$  内の任意の一点は  $\xi$ 、 $\eta$  の関数として与えられる。 $\xi$ 、 $\eta$  を  $0 \leq |\xi| \leq 1$ 、 $0 \leq |\eta| \leq 1$  の範囲で変化させれば、1パネルの全表面を表すことができる。ここでは、パネル  $S_A$  は長方形の平面にするので、(1) 式の右辺第 3 項は省略できる。

次に交差するパネルの辺を直線  $L_B$  で表すと次式のように書ける。

$$L = L_1 + L_2t \quad (2)$$

交点は  $P = L$  として、 $\xi$ 、 $\eta$ 、 $t$  を求めれば良い。

$$L_1 - P_0 = P_1\xi + P_2\eta - L_2t \quad (3)$$

この式は  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $t$  を未知数とする三元連立一次方程式であるから解ける。

交点の解のうち、 $|\xi| \leq 1$ 、 $|\eta| \leq 1$  かつ  $0 \leq t \leq 1$  の条件が成立するとき、直線は平面と交わる (図 4) [3]。

図 5 にスペースプレーンを 10 断面に切断した結果を示す。図より、三次元モデルが二次元の断面にきれいに切断されていることがわかる。

### 2.2 連続自由渦法による前縁はく離渦の生成

連続自由渦法は [4]、これまで高 Reynolds 数の二次元非定常非圧縮性流れの解析に用いられてき

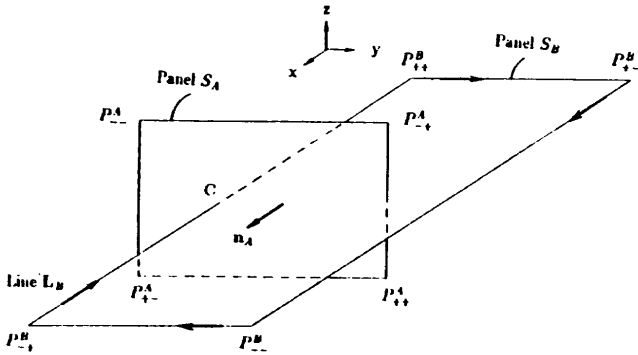
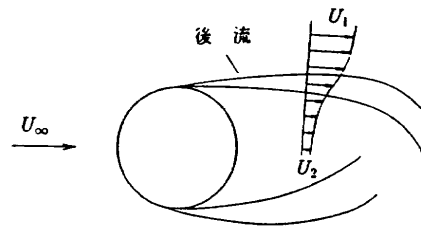
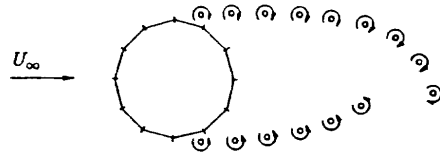


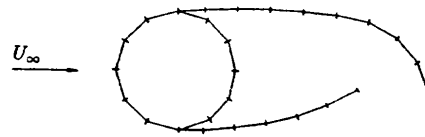
図 4: 双曲面と直線の交点



(a) 実際の流れ

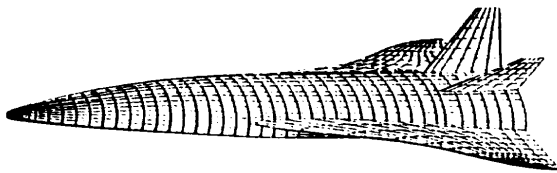


(b) 離散渦モデル

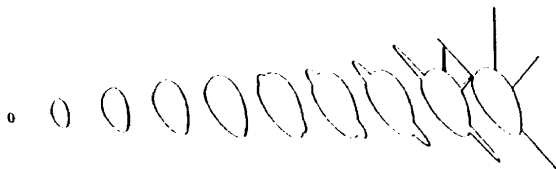


(c) 連続自由渦モデル

図 6: 離散渦法と連続自由渦法



(a) スペースプレーンの数値モデル



(b) 切断面

図 5: スペースプレーンの切断

た、離散渦法とほぼ同様の解析方法である。離散渦法では、はく離したはく離渦を、離散渦でモデル化するが、連続自由渦法では、はく離渦を連続的に分布したモデルで表し、流れの状況を詳細に評価できるところに特徴がある。この連続自由渦法を、三次元モデルを切断することで作成した二次元断面に用いて、前縁はく離渦を生成する。

前縁はく離渦生成のための二次元断面での主流の大きさ  $U_{\infty 2}$  は、三次元での主流の大きさ  $U_{\infty}$  の  $z$  成分（横断流）なので、迎角を  $\alpha$  とすると、

$$U_{\infty 2} = U_{\infty} \sin \alpha \quad (4)$$

となる。

はく離点から放出される速度ポテンシャルの差の大きさを計算する時の  $U_s$  は、

$$U_s = \sqrt{U_s'^2 + U_{\infty x}^2} \quad (5)$$

とした。  $U_s'$  ははく離点上流側の境界層の外側の接線方向の速度で、  $U_{\infty x}$  は三次元での主流の  $x$  成分である。

図 7 にスペースプレーンを 10 断面に切断したときの、最後端の断面での前縁はく離渦の成長過程を示す。はじめは物体に沿って横方向に流されたはく離渦が、時間の経過とともに巻き上がり、翼の上面に一对の前縁はく離渦を作っている様子がよくわかる。

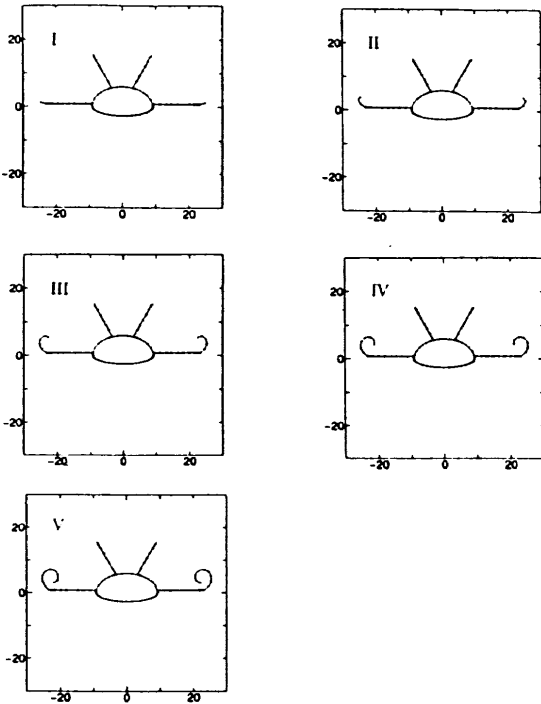


図 7: 前縁はく離渦の成長

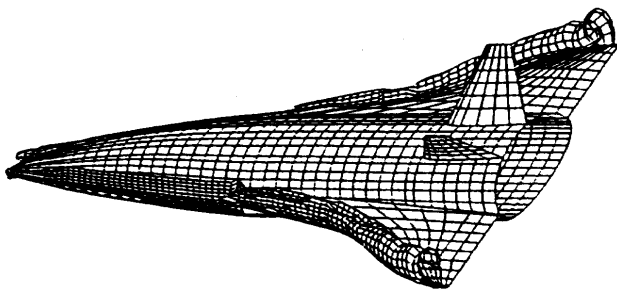


図 8: スペースプレーン上の前縁はく離渦

スペースプレーンを 80 断面に切断し、前縁はく離渦を作成した結果を図 8 に示した。胴体から翼の前縁部分に前縁はく離渦が適切に生成されている。

### 2.3 前縁はく離渦のモデル化

前縁はく離渦は doublet の面でモデル化する。前縁はく離渦モデルの座標は上で述べた方法で求めたものを使う。前縁はく離渦上の各パネルにおけるポテンシャルの差  $\Delta\phi^*$  は、パネルの四隅の値の平均とする。ただし、連続自由渦法で求まる  $\Delta\phi$  は、 $x$  軸方向の単位長さあたりの強さであるから、三次元では一枚のパネルの  $x$  軸方向の長さを  $\Delta x$

として、

$$\Delta\phi_k^* = \frac{1}{4}(\Delta\phi_{k1} + \Delta\phi_{k2} + \Delta\phi_{k3} + \Delta\phi_{k4})\Delta x \quad (6)$$

とする。

前縁はく離渦の効果を考慮した基礎方程式として、次式を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_h - \sum_{k=1}^N \phi_k \int_{S_k} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_k \\ - \sum_{k=1}^{N'} \Delta\phi_k \int_{S_k} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_k \\ = \sum_{k=1}^N \left(-\frac{\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{U}_\infty}{U_\infty}\right) \int_{S_k} \frac{1}{4\pi r} dS_k \\ + \sum_{k=1}^M \Delta\phi_k^* \int_{S_k} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS_k \quad (7) \end{aligned}$$

ここで、 $M$  は前縁はく離渦のパネルの枚数である。右辺第 2 項が前縁はく離渦の効果を表す。

前縁はく離渦と接する物体の上面のパネルには、次の Kutta の条件を課した (図 9)。

$$a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3 - a_4\phi_4 - a_5\phi_5 - a_6\phi_6 = (\phi^+ - \phi^-) \quad (8)$$

$$a_1 = \left(\frac{s_2s_3^2 + s_2^2s_3}{s_1^2s_2 - s_1s_2^2}\right), a_2 = \left(\frac{-s_1s_3^2 - s_1^2s_3}{s_1^2s_2 - s_1s_2^2}\right)$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{(s_1 - s_2)s_3^2 + (s_1^2 - s_2^2)s_3}{s_1^2s_2 - s_1s_2^2}\right)$$

$$a_4 = \left(1 + \frac{(s_5 - s_6)s_4^2 + (s_5^2 - s_6^2)s_4}{s_5^2s_6 - s_5s_6^2}\right)$$

$$a_5 = \left(\frac{s_4s_6^2 + s_4^2s_6}{s_5^2s_6 - s_5s_6^2}\right), a_6 = \left(\frac{-s_4s_5^2 - s_4^2s_5}{s_5^2s_6 - s_5s_6^2}\right)$$

### 3 計算結果と考察

これまで述べた方法は、スペースプレーン形状のモデルにも適用可能であるが、計算機のメモリの制限からここではデルタ翼部分のみを、解析対象とした。

計算に用いた翼断面は次式で与えられる。

$$y = \frac{l}{0.20}(0.29690\sqrt{x} - 0.12600x - 0.35160x^2 + 0.28430x^3 - 0.10150x^4) \quad (9)$$



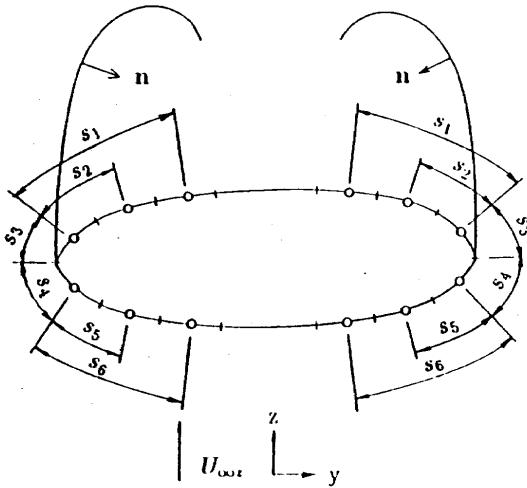


図 9: Kutta 条件での座標系

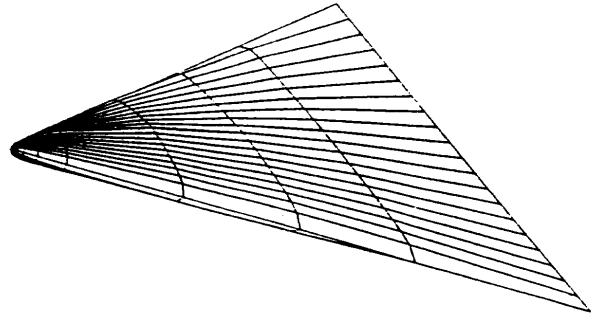


図 10: デルタ翼の数値モデル

ここで、 $t$ は翼厚の最大値で、翼中央のコード長  $c$  の 10%とした。アスペクト比は 2.31 である。

翼はコード方向に 16 分割、スパン方向に翼の片側につき 10 分割とし、全パネルは 640 枚である (図 10)。前縁はく離渦を作成するため、 $x$  軸方向に 10 断面に切断した。迎角は  $-20 \sim 20^\circ$  まで  $5^\circ$  毎に扱った。前縁はく離渦の生成の様子を図 11 に示す。 $\alpha = 5^\circ$  の時は、横断流の大きさが小さいためか、翼の前側のはく離渦は巻かずに、翼に沿って流れている。他の迎角では、翼の後側に行くにつれて大きくなる、きれいな前縁はく離渦が生成されている。

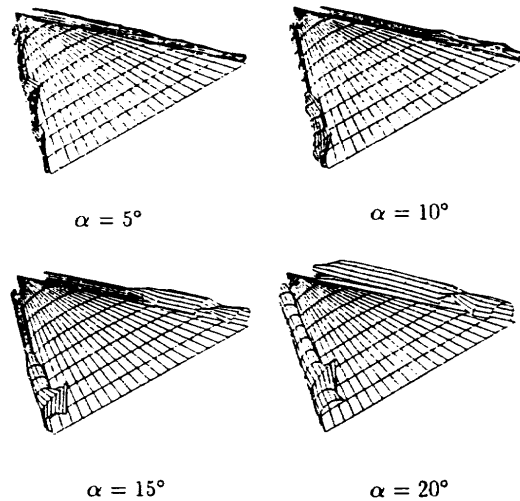


図 11: デルタ翼上の前縁はく離渦の生成の様子

前縁はく離渦の影響を見るために、前縁はく離渦をつけない場合との、各空力係数の比較を行った。空力係数を計算する際、代表的長さは  $c$ 、代表的面積は翼の  $x-y$  平面への投影面積、モーメントの回転軸は  $c$  の 50% の位置とした。

図 12 に迎角に対する揚力係数を示す。理論解は Polhamus の結果 [5] を用いた。図より前縁はく離渦なしでは、迎角が大きくなるにつれて実験結果 [6] からのずれが大きくなっていくが、前縁はく離渦をつけると、実験結果とよくあっていることがわかる。迎角が  $-20^\circ$  の所で多少実験結果からずれているが、これは実験模型の支柱の影響のためと思われる。

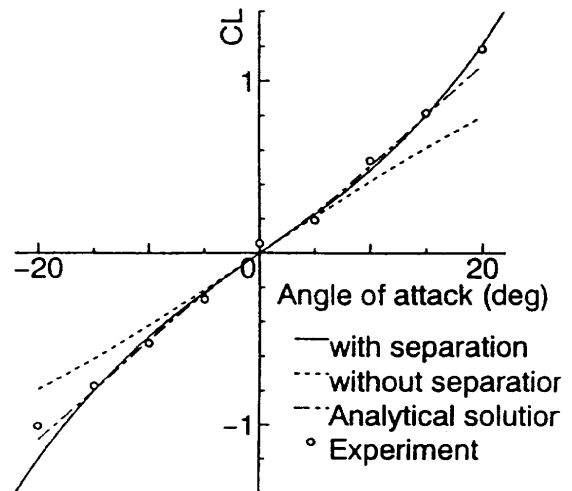


図 12: 迎角に対する揚力係数

次に翼面上に作用する圧力分布を、スパン方向にプロットした結果を示す (図 13)。前縁はく離渦がない場合、負圧のピークは前縁部分で発生している。これに対して前縁はく離渦付きの場合は、はく離渦の中心がある部分で大きな負圧のピークが生じている。翼下面の圧力分布は前縁はく離渦

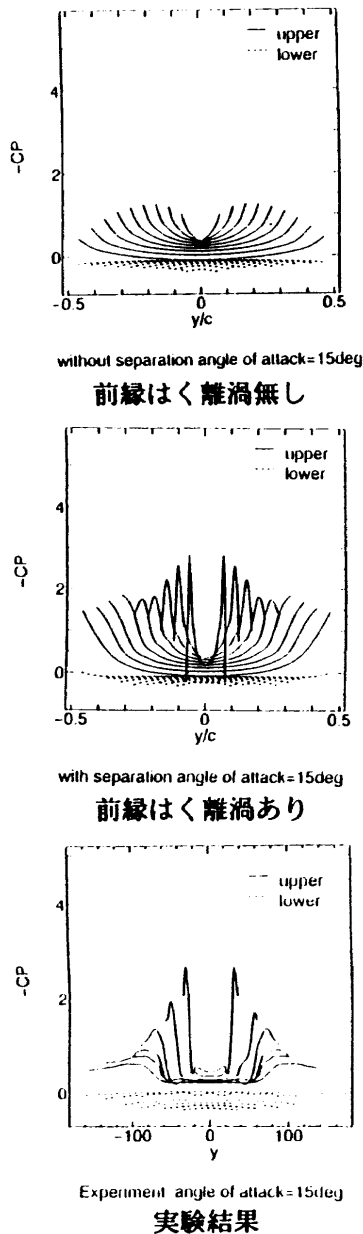


図 13: スパン方向の圧力分布

の効果があってもなくても、大きな違いは見られない。実験結果は翼の形が多少異なるため、解析結果と厳密には比較できないが、圧力分布が翼前縁付近で減少している様子が定性的には捉えられており、今回用いた Kutta の条件が適切であると思われる。

#### 4 まとめ

デルタ翼のような細長物体は主流に垂直な断面に関して、ほぼ二次元的な流れが起こっているものと考えられる。そこで、三次元物体を

主流に垂直な断面に切断し、連続自由渦法を用いてはく離渦を生成した。これを前縁はく離渦としてモデル化し、前縁はく離渦の効果を入れた解析を行った。その結果、計算結果が実験の傾向を再現することを明らかにし、前縁はく離モデルの妥当性と、数値解析プログラムの有効性を示した。

今後の課題としては、はく離渦の粘性による強さの減衰や、より高精度の時間積分法による計算などが残っている。

#### 5 謝辞

本研究で用いたスペースプレーンの数値座標は、航空宇宙研究所空気力学部渡辺重哉技官から頂きました。ここに感謝の意を表します。

#### 参考文献

- [1] Nathman, J.K. Analysis of Leading-Edge Vortices on Complex Configuration. AIAA paper 85-4054. 1985.
- [2] Kikuchi, K. Yanagizawa, M. Analysis of Leading-Edge Vortices on Low-Aspect Delta Wing by Boundary Element Method. WCCM III Extended Abstracts pp.343-344. 1994
- [3] 柳澤三憲. 境界要素法を用いた亜音速流における三次元揚力物体の空力特性の計算. 航空宇宙技術研究所報告. TR-835. 1984.
- [4] 菊地勝浩. 柳澤三憲. 連続自由渦法によるはく離渦の解析. 第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集. pp621-624. 1993.
- [5] Polhamus, E.C. A Concept of the Vortex Lift of Sharp-Edge Delta Wings Based on a Leading-Edge-Section Analogy. NASA TND-3767. 1966.
- [6] 菊池秋広. デルタ翼に生じる前縁剥離渦に関する実験的研究. 平成五年度東京理科大学卒業論文. 1994.

## デルタ翼の空力特性評価における風洞側壁の影響

宮路幸二\*、藤井孝藏\*\*、辛島桂一\*\*

## Sidewall-effect of the Wind Tunnel on the Estimation of the Aerodynamic Characteristics of a Delta Wing

by

Koji MIYAJI, Kozo FUJII and Keiichi KARASHIMA

## Abstract

The effect of the sidewall of a wind tunnel on the flow over a delta wing is investigated numerically. The simulated results show the sidewall changes the flowfield remarkably. Boundary layers on the sidewall separate ahead of the wing and forms a horse-shoes vortex and this vortex changes the direction of the main flow and works for increasing the effective leading-edge sweep angle. As a result, aerodynamic characteristics of the delta wing change.

## 1. はじめに

ひろい飛行領域にわたってデルタ翼の空力特性を向上させるための一手段として翼付近からブローイングを施す方法がある。著者らは新しいタイプのブローイングを提案し<sup>[1-2]</sup>、実験によって得られたブローイングの効果及び機構を数値計算により解明することを試みた<sup>[3]</sup>。シミュレーション結果は、宇宙科学研究所の遷音速風洞で行われた実験結果と定性的に一致したが、いくつかの定量的な不一致がみられた。一つは全ての迎角において計算結果の方が揚力が大きくなるということであり、もう一つは高迎角において実験で示された程のブローイングの効果が得られないということであった。

実験ではデルタ翼の半裁模型が風洞側壁に取付けられたのに対し、計算では側壁に相当する面を滑り壁として取り扱い、いわば全翼模型に対するシミュレーションを行っている。その後の数値計算からブローイングを行わない場合については、ほぼ同じ翼型の全翼模型を用いた実験<sup>[4]</sup>と揚力が一致することが分かった。このことから風洞側壁を成長してくる境界層がデルタ翼の前縁剥離渦に大きな影響を与えているのではないかと考えるに至った。今回、これを明らかにするために側壁境界層を考慮に入れた数値シミュレーションを行った。ここでは滑り壁、及び粘性壁に対する結果を示し、デルタ翼面上の流れ場に及ぼす風洞側壁の影響を考える。

## 2. 計算対象及び数値計算法

実験において用いられた翼型は、平面形が前縁後退角45°のクリップトデルタ翼であり、翼断面形は12%川

弧翼である(図1)。図にある通り、実験では全長187mm、スパン119mmの模型である。風洞は60cm角の測定部を持つ。計算条件として一様流マッハ数は0.3、レイノルズ数 $10^6$ とし、迎角を変化させる。

基礎方程式には3次元圧縮性thin-layer Navier-Stokes方程式を用いる。風洞側壁の粘性を考慮した計算の場合には次式の2方向thin-layer Navier-Stokes方程式とする。

$$\partial_t \hat{Q} + \partial_\xi \hat{E} + \partial_\eta \hat{F} + \partial_\zeta \hat{G} = \text{Re}^{-1} (\partial_\eta \hat{R} + \partial_\zeta \hat{S})$$

対流項はRoeのFlux Difference SplittingをMUSCLで高精度化して離散化する。時間積分にはLU-ADI法<sup>[5]</sup>を用い、局所時間刻みを用いた。乱流モデルにはBaldwin-Lomaxモデルを用いた。側壁の粘性を考慮する場合には、翼面を基準とした渦粘性と側壁を基準とした渦粘性を別個に求めた後、次式によってそれらを混合する<sup>[6]</sup>。

$$\mu_t = \frac{y_2 \varepsilon_1 + y_1 \varepsilon_2}{y_1 + y_2}$$

ここで、 $y_1$ 、 $y_2$ はそれぞれの壁からの距離、 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ は各々の壁面上で求められた渦粘性係数である。

境界条件及び初期条件は以下の通りである。全翼模型であるか半裁翼模型であるかは翼対称面の取り扱いの違いによる。全翼のシミュレーションの場合、対称面を滑り壁とし、壁に平行な速度成分、密度、圧力を0次外挿する。対称面反対側に一点を取り対称条件を施す方が近似には優れていると考えられるがブローイングを行う場合を含めるためにこの様な近似となっている。初期条件は全領域に一様流を与えるimpulsive startとする。一方、半裁翼模型の場合には対称面を粘性壁とし、壁上で速度0、密度、圧力は0次外挿する。入口境界の境界条件として、側壁から離れる方向の境界層の速度分布を与えなければならない。風洞の貯気槽出口から境界層が発達し始めるとして次式により平板の乱流境界層の厚さを決め<sup>[7]</sup>、1/7乗則に従って速度分布を決める。

$$\delta(x) = 0.37x \left( \frac{U_\infty x}{\nu} \right)^{-1/5}$$

\*東京大学大学院

\*\*宇宙科学研究所

$$\frac{u}{U_\infty} = \left( \frac{y}{\delta(x)} \right)^{\frac{1}{7}}$$

初期条件として上式によって決まる速度分布を計算領域の全てで与える。なお、翼面上はいずれの場合も粘性壁とする。境界層厚さは前縁付近でおおよそ50mm程度となっている。

### 3. 計算結果及び考察

計算格子を図2に示す。トポロジーは翼弦方向にC型、翼幅方向にH型で、格子点数は161( $\xi$ 方向) $\times$ 61( $\eta$ 方向) $\times$ 35( $\zeta$ 方向)で、計約340,000点である。

図3にブローイングを行わない場合の $C_L$ - $\alpha$ 線図を示す。全翼模型(滑り壁)の場合の計算及び実験<sup>14)</sup>、半裁翼模型(粘性壁)の場合の計算及び実験の結果が示されている。計算、実験のいずれの場合も全翼の揚力の方が大きくなっている。また、半裁翼模型に対しては少し違いがみられるものの、各々の場合に対する計算結果は実験結果と良い一致を示している。この結果から、風洞側壁の存在によって生じる翼の空力特性の変化は無視できないものであることが分かる。

翼面上の圧力分布をみることによって揚力の差が生じる原因を考える。図4に20°の場合の翼弦方向の圧力分布を示す。滑り壁、粘性壁に対する計算結果が示されている。翼根付近に圧力分布の違いがみられる。粘性壁として取り扱った場合、圧力のピーク位置が前縁よりに移動している。これは前縁剥離渦が前縁側に移動したことを示している。渦によって誘起される低圧部が狭くなるので揚力が減少する。 $\eta > 0.5$ では違いはほとんどなくなってくる。

図5に30°の場合の圧力分布を示す。滑り壁の場合、翼後縁縁付近を除いてほとんど勾配のない平らな圧力分布となっており、剥離渦の崩壊が前縁にまで達していることを示している。粘性壁の場合、 $\eta = 0.2$ では翼前縁付近で左上がりの圧力勾配となっており、前縁渦の存在を示している。前縁付近での圧力はほぼ同じであるが、滑り壁の場合ほとんど平坦な圧力分布であるため、翼上面の大部分で粘性壁の場合よりも圧力が低くなっている。その結果、揚力は滑り壁の方が大きくなる。

図6(a)、(b)に30°における翼上方から見た翼頂点付近の速度ベクトル図を示す。粘性壁の場合、頂点の前に渦が生じている。図7(a)、(b)に横方向から見た風洞側壁上の表面流線を示す。滑り壁の場合のスムーズな流れに対して粘性壁の場合、翼の頂点の周りに剥離線が見られる。図6の渦は側壁上の境界層が剥離したために生じたものである。このような流れは一般に平板上に物体が突き出ているときに観察されるもので(図

8)、物体を取り囲むように生ずる渦は馬蹄形渦(horseshoe vortex)と呼ばれる。

図9(a)、(b)はさらに、翼下面の表面流線及び翼頂点の下を通る流線を示したもので、翼と側壁の結合部を翼下面側から見たものである。粘性壁の場合、側壁から剥離した流れが翼の下面で渦を形成している様子がわかる。渦は上流、下流に分かれ、一部は翼の頂点を回り込んで上面へと流れ、他は翼下面を下流へと流れていく。翼表面上の流線を見ると、馬蹄形渦のために前縁付近で渦の外側の主流の方向が滑り壁の場合と異なっていることが分かる。これは側壁と翼が結合している角に存在する渦のために主流が翼前縁の方向に押しやられているためである。図10(a)、(b)に30°の場合の翼上方から見た翼前縁付近からの流線を示す。粘性壁の場合のほうが明らかに前縁剥離渦が強くなっている。図10(a)、(b)の模式図に示したように、馬蹄形渦によって主流が外側に押しやられた結果、翼の下面の流れに対して前縁後退角が増したような効果を持つものと考えられる。図4において負圧のピークが前縁寄りに移動したこと、また図5において平坦だった圧力分布に勾配が現われたことはこの効果によるものである。

以上により、風洞側壁の存在による流れ場の変化の基本的な構造が明らかになった。次にこの様な側壁の影響が大きく現われた例として、先に述べたブローイングのシミュレーション結果を示す。

図11に吹き出し口位置を示す。実験において吹き出し口は風洞側壁にはめ込まれた円盤に設けられており、吹き出し口中心は翼後縁直下である。そして後縁に平行にソニックジェットを吹き出す。計算においては吹き出し口位置での状態を境界条件として与える。吹き出し口の直径は翼弦に比べて非常に小さいので図2の計算格子だけでは吹き出し口を覆う格子点数が不十分で、ジェットの流量を正確に表せないものと考えられる。そこで吹き出し口付近に局所的に細かい計算格子を用意し、重合格子法を用いてジェットの解像度を上げる。全体格子と局所格子の情報の受渡には解強制置換法<sup>16)</sup>を用いる。局所格子を図12に示す。吹き出し口での状態量はソニックジェットの条件によって定め、速度分布は放物形状を仮定する。ジェットの強さ(一様流の動圧と翼面積の積で無次元化した運動量)は0.076とする。迎角は30°である。

図13(a)、(b)に滑り壁の場合、及び粘性壁の場合の翼上面の圧力分布を示す。図中、実験結果はいずれも半裁翼模型に対するものであるが、比較のため図13(a)にも示してある。実験結果の大幅な圧力変化にたいして、図13(a)に示される滑り壁の計算結果ではブロー

イングの効果はほとんどみられない。一方、図13(b)では実験と同様の圧力変化が得られ、変化量もほぼ一致している。ブローイングのメカニズムについては本報告の主旨ではないので詳しく述べないが、文献<sup>[3]</sup>で明らかにされたブローイングの効果は次のようなものであった。翼後縁に平行に吹き出されたジェットは翼上面で後縁に沿って圧力を下げ、下流に向かう流れを促進する。前縁剥離渦がスムーズに流れていくのを助け、その結果前縁剥離渦の強化、従って前縁付近での圧力をも下げるといったものであった。従って、ブローイングの無い場合に図10(a)のように翼頂点付近でさえ螺旋状の渦を形成できない流れに対してはブローイングを施しても前縁渦を強化する効果が得られないものと考えられる。

図14に各迎角におけるブローイングによる揚力増加量を示す。滑り壁に対するブローイングのシミュレーションでは高迎角において実験結果ほどの揚力増加量が得られなかったのに対し、側壁の粘性を考慮すると大幅な揚力の増加を示している。また、前縁剥離渦の崩壊がさらに進む迎角35°においては実験においても揚力増加量が減少しており、ブローイングの効果と前縁剥離渦の崩壊位置を関連づけた上述の考えを裏付けるものと思われる。

4. 結論

デルタ翼の数値シミュレーション及び実験においては、全翼を取り扱っているのか半翼を取り扱っているのかに注意しなければならないことが明らかになった。実験において半翼を風洞側壁に取付ける場合、側壁上を発達する境界層が翼の上流で剥離して渦を生ずるために、翼根前縁付近の流れ場が変化する。翼頂点付近の馬蹄形渦は前縁剥離渦の生成、崩壊に少なからぬ影響を与える。境界層の厚さの違いはあるものの、実際に航空機の胴体に結合したデルタ翼の性能を見積るときにも同様のことに留意する必要があるのではないかと推測される。

参考文献

1. 辛島桂一, 佐藤清, "低縦横比翼の空力特性に及ぼす Lateral Blowing の効果", 日本航空宇宙学会誌 第31巻 第359号, pp. 14-20, 1983.
2. 辛島桂一, 佐藤清, 谷勝達哉, 山口慶生, "低縦横比翼の空力特性に及ぼす Lateral Blowing の効果", 第30回飛行機シンポジウム講演集, 1992, pp. 156-159.
3. 宮路幸二, 辛島桂一, 藤井孝藏, "デルタ翼の空力特性に及ぼす Trailing-edge Lateral Blowing の効果", 第25回流体力学講演会講演集, 1993, pp. 97-100.

4. Lamar, J. E., "Some Recent Applications of the Suction Analogy to Vortex-Lift Estimate," NASA SP-347, Part II, 1975, pp. 985-1011.
5. Obayashi, S., Matsushima, K., Fujii, K. and Kuwahara, K., "Improvement in Efficiency and Reliability for Navier-Stokes Computations Using the LU-ADI Factorization Algorithms," AIAA Paper 86-338, Jan., 1986.
6. Huband, G. W., Rizzetta, D. P. and Shang, J. J. S. "Numerical Simulation of the Navier-Stokes Equations for an F-16A Configuration," Journal of Aircraft Vol 26, No. 7, 1988.
7. Schlichting, H., "Boundary-Layer Theory"
8. Fujii, K., Tamura, Y. and Kuroda, S., "Unified Zonal Method Based on the Fortified Navier-Stokes Concept," AIAA Paper 91-1558, June, 1991.

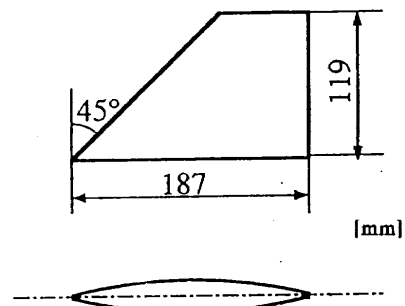


図1 翼模型

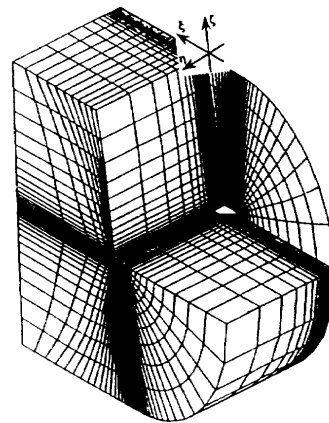


図2 計算格子

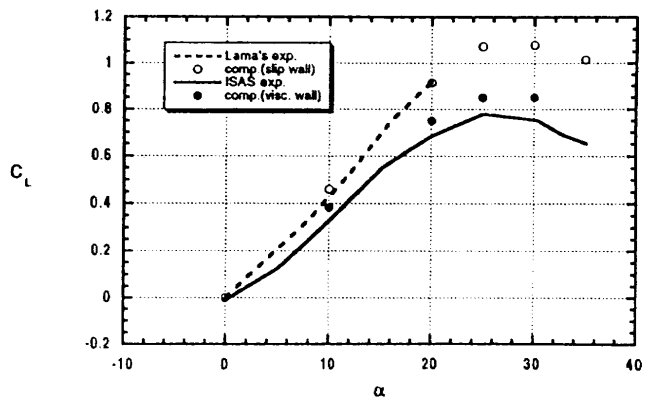


図3 Cl-α線図；側壁の影響

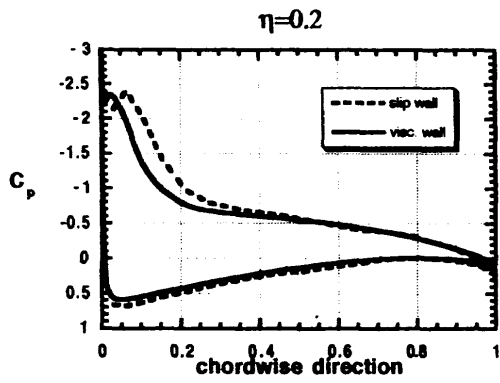
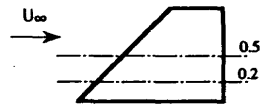


図4 翼弦方向圧力分布;  $\alpha=20^\circ$

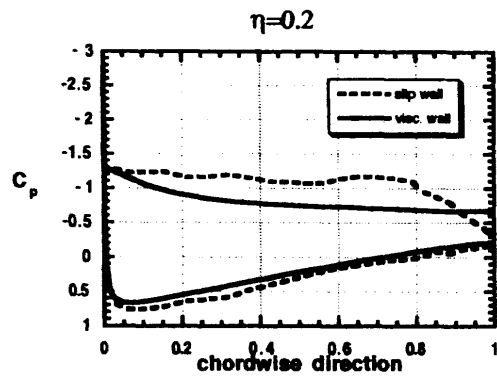
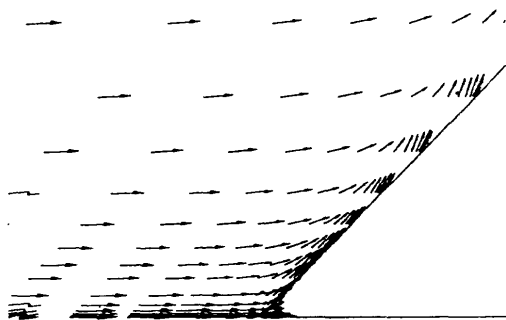
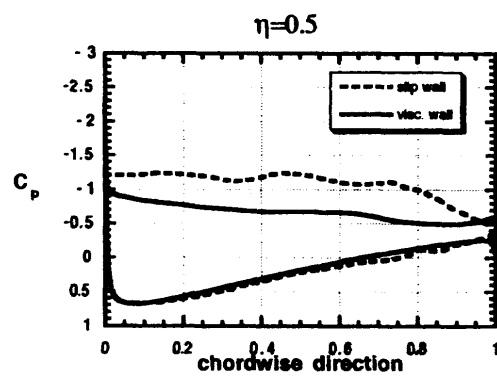
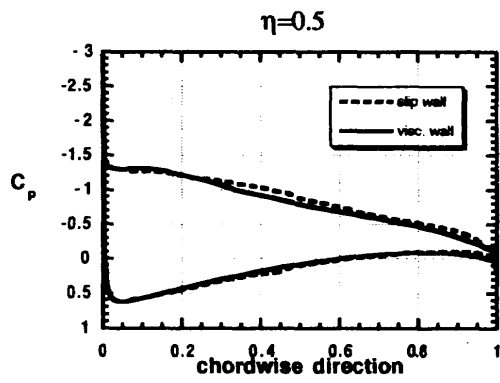
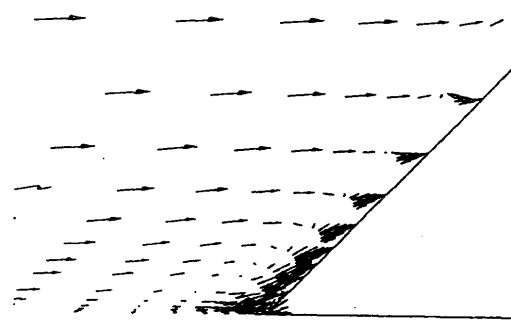


図5 翼弦方向圧力分布;  $\alpha=30^\circ$

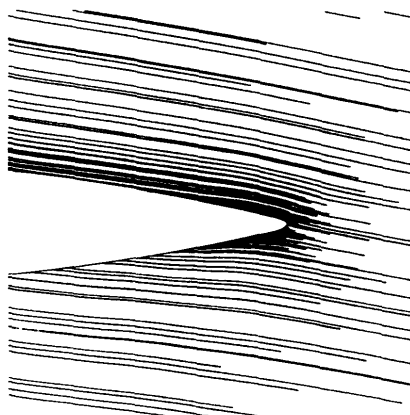


(a) 滑り壁

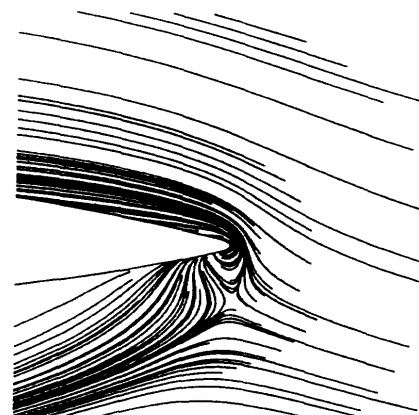


(b) 粘性壁

図6 翼頂点付近の速度ベクトル図



(a) 滑り壁



(b) 粘性壁

図7 風洞側壁上の表面流線

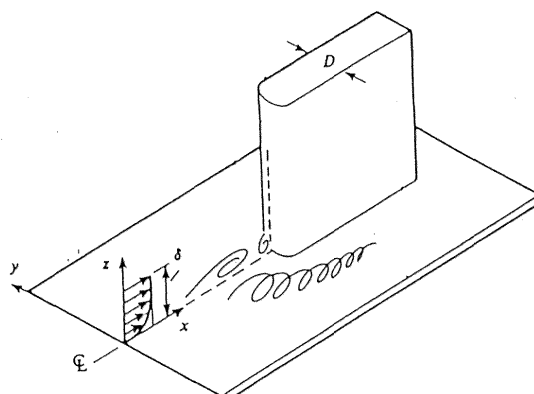


図8 平板上の突起物付近の流れ

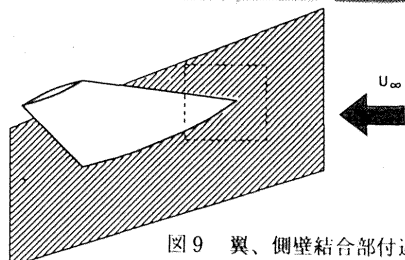
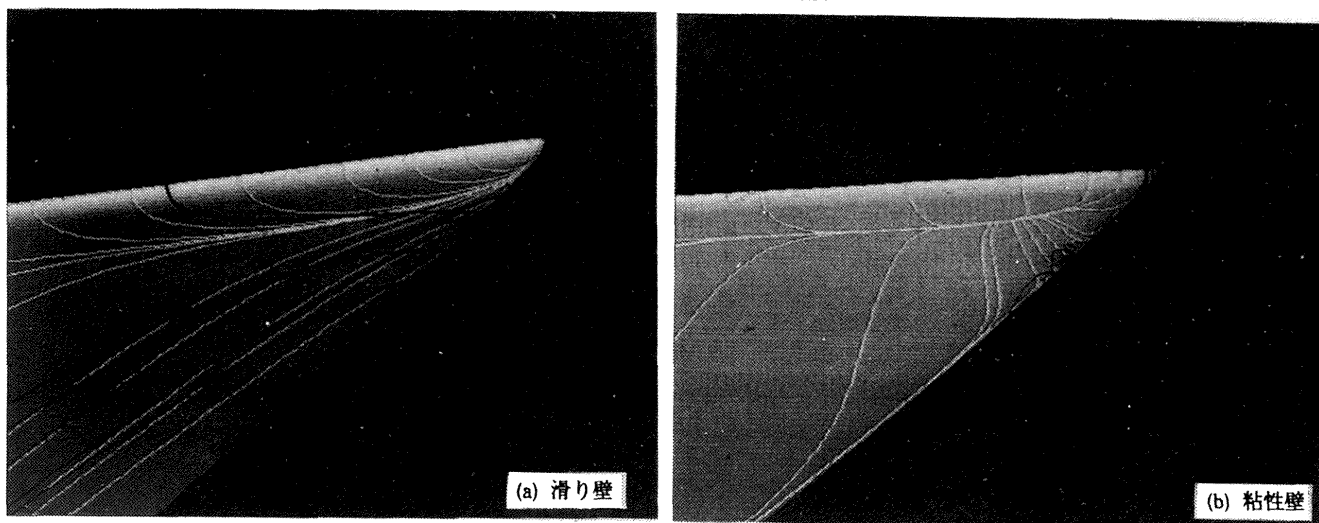


図9 翼、側壁結合部付近の流線

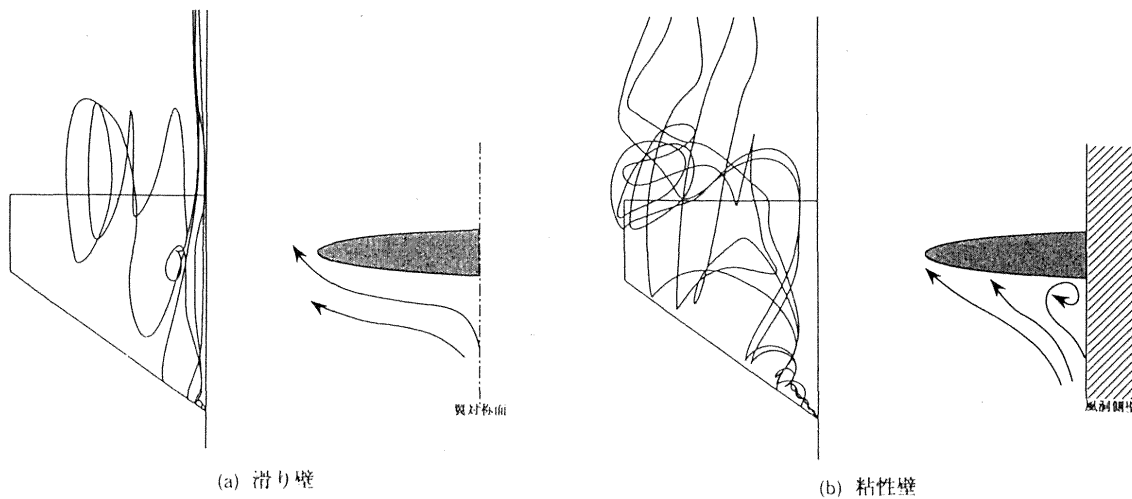


図10 翼前縁付近からの流線及び下面の流れの模式図

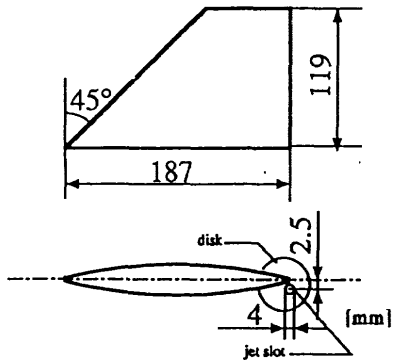


図1 1 吹き出し口位置

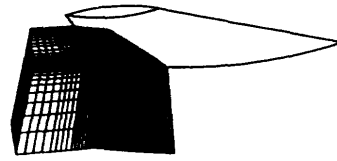


図1 2 局所計算格子

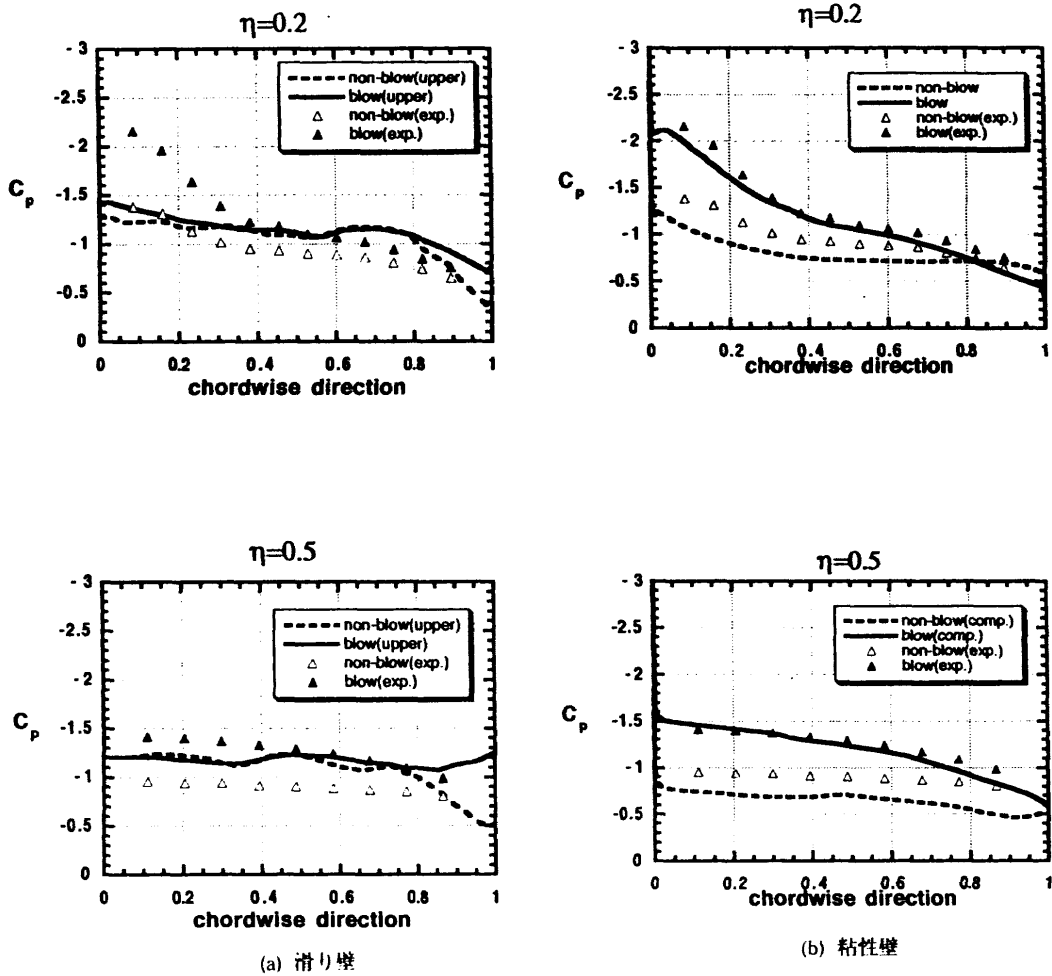


図1 3 ブローイングによる翼上面の圧力分布の変化

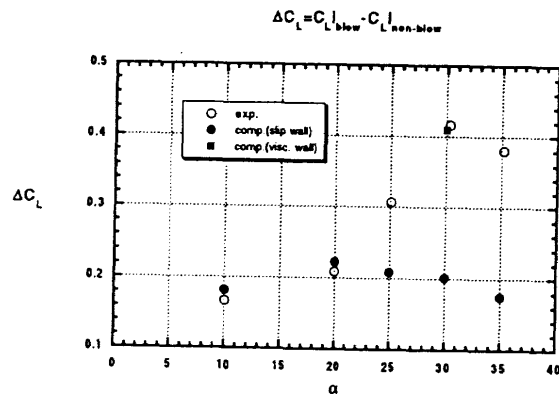


図1 4 各迎角におけるブローイングによる揚力増加量



## 極超音速流れにおける軸対称物体回りのフィルムクーリング冷却法に関する研究

黒滝卓司\* 中村淑子\* 黒崎隆二郎\*  
片山雅之\* 麻生茂\*\*

Numerical Simulation of Film Cooling Effect  
around Axisymmetric Body in Hypersonic Flow Field

by

Takuji Kurotaki, Yoshiko Nakamura, Ryujiro Kurosaki and Masayuki Katayama  
Kamakura Works, Mitsubishi Electric Corporation

Shigeru Aso

Dept. Aeronautics and Astronautics, Kyushu University

ABSTRACT

Film cooling effects due to mass addition on axisymmetric body in hypersonic flow field are numerically investigated and results of numerical simulation are compared with experimental data.

Experiments are conducted by using a conventional shock tunnel. Free stream Mach number is 4.25 and cooling gas ( $N_2$ ) is supplied through the slot located at the nose of a hemisphere model. The direction of mass addition is tangential from the model surface and heat flux around the body is measured.

In numerical analysis, axisymmetric full Navier-Stokes equations are solved by an implicit finite difference method. LU-SGS scheme are used for the time integration and convective terms are evaluated by the MUSCL-type TVD scheme based on Roe-type flux splitting.

Numerical results show significant decreases of surface heat flux which are also obtained in experiments and agreement of numerical and experimental results is qualitatively good. More detailed investigation of the flow inside the boundary layer indicates that the boundary layer consists of two sub layers and that the inner layer plays a role of adiabatic wall structure on the surface. These characteristics are considered most essential in the determination of film cooling effects in this type of hypersonic flow.

1. はじめに

宇宙往還機や再突入回収カプセル等の大気圏再突入飛行物体等は非常に厳しい空力加熱を受けるため、これらの機体を設計する際には、この空力加熱量を正確に捕える技術がますます重要となってきた。同時に、この空力加熱が機体構造材及び機体内部に伝わるのをいかに防ぐかという熱防衛技術の発展もこれからの大きな課題である。

従来から用いられている再突入物体に対する熱防衛法のうちで実用化されているものとしては、加熱吸収法、アブレーション法、輻射冷却法等が挙げられる。これらの方法は既に大きな実績を上げているが、将来予想されるより厳しい熱環境下での使用あるいはより完全な再使用性での実用を目指して、フィルムクーリング法、しみ出し冷却法等のいわゆる強制冷却法の研究が各国で進められつつある。

筆者らは、上記のような背景のもとに、極超音速流中での物体における熱伝達に関して、実験及び数値解析の両面から研究を行っている。その一環として、物体先端部において2次流体を吹き出すことにより熱流束を減らすフィルムクーリング法の実験を行っており、適切な吹き出し方向及び流量を与えることにより熱流束を大幅に減少できることを示した<sup>1,2)</sup>。本研究は、

これと平行して、数値解析的にこの現象をシミュレートし、フィルムクーリング法に関するより精密な知見を得ることを目的として行ったものである。

2. 実験の概略

図2.1に極超音速流中に置かれた軸対称物体をフィルムクーリング法により冷却する場合の概念図を示す。このような流れ場では、強い衝撃波が物体前方に形成され、その後方の衝撃層内の温度が上昇し物体を加熱する。フィルムクーリング法は、物体先端部から2次冷却流体を吹き出すことによって物体表面に薄層フィルムを形成し、その効果で壁面熱流束を減少させようとするものである。

対応する実験には九州大学の衝撃風洞を使用した。一樣流マッハ数  $M_\infty = 4.25$ 、作動流体は空気である。

図2.2に本研究に用いた衝撃風洞の構成図を示す<sup>1)</sup>。高压室は全長1.5m、低压室は全長5.0mであり、共に内径90mmのアルミパイプを用いていて、第一隔膜で隔てられている。低压室末端には第二隔膜が設けられており、その下流側に出口直径100mmの超音速ノズルが置かれている。ノズルから出た気流が膨張することにより、測定部に自由噴流として極超音速気流が得られる。

実験に用いた風試模型の模式図を図2.3に示す。材

\* 三菱電機(株)鎌倉製作所

\*\* 九州大学工学部

質はバイレックスガラスで、直径 40 mm の軸対称半球型模型である。また、衝撃風洞の持続時間は数 msec と短いため、熱流束測定素子としては、応答時間が十分短いという特徴を持つ白金薄膜ゲージ法を用い、模型表面に中心軸と 30° をなす位置から 10° おきに 7 本ゲージを焼き付けた。

フィルムクーリングのための 2 次冷却流体には窒素ガスを用い、任意の安定した吹き出し全圧を得るため、風試模型と窒素ポンペをチャンパーを介して接続した。2 次冷却流体は模型に対して接線方向に吹き出し、吹き出し部における 2 次冷却流体の物理量を推定するため、流量計により吹き出し流量を測定した。

3. 基礎方程式及びスキーム

数値解析に用いる基礎方程式系として、軸対称の Full ナビエ-ストークス方程式を考える。今回の実験における流れでは、一様流総温が比較的小さいため化学反応などの実在気体効果を考慮する必要はないが、窒素ガスという空気とは異なる 2 次冷却流体の分布の様子を調べることと将来的に大気圏再突入時等の実在気体効果を含む高速流に拡張することを考え、7 成分空気 (O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O, N, NO, NO<sup>+</sup>, e<sup>-</sup>) を前提としたものを用いた<sup>3,4)</sup>。基礎方程式は、デカルト座標系で以下のように表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(E - E_v) + \frac{\partial}{\partial y}(F - F_v) + \alpha H = S + \alpha H_v$$

ここに、 $\alpha = 1$  (軸対称時)

$$Q = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho v \\ E_t \\ E_{vib} + E_e \\ \rho_s \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E_t + p) \\ u(E_{vib} + E_e) \\ \rho_s u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E_t + p) \\ v(E_{vib} + E_e) \\ \rho_s v \end{bmatrix} \quad (1)$$

E<sub>v</sub>, F<sub>v</sub> : 粘性項マトリックス

S : ソース項マトリックス

H, H<sub>v</sub> : 軸対称時の対流項及び粘性項マトリックス追加項

ρ : 密度、u, v : 速度、p : 圧力

E<sub>t</sub> : 単位体積当たり全エネルギー

E<sub>vib</sub>, E<sub>e</sub> : 単位体積当たり振動、電子エネルギー

添字 s : 気体種 (O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O, N, NO, NO<sup>+</sup>); 1 ~ 6 である。

基礎方程式 (1) は無次元化された後、一般座標系に変換されて解かれるが、本解析では陰的差分法を用いて定式化を行い、時間積分には並列計算に適した LUSGS スキームを用いた<sup>5)</sup>。また、対流項の評価に関しては、Roe の近似リーマン解法に基づく MUSCL-type の TVD スキームを非平衡流に拡張したのを用い、保存量の内挿は Chakravarthy による方法によった<sup>6)</sup>。これ

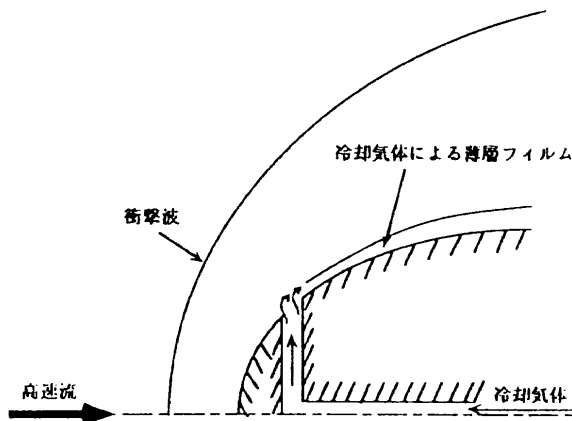


図 2.1 フィルムクーリング法概念図

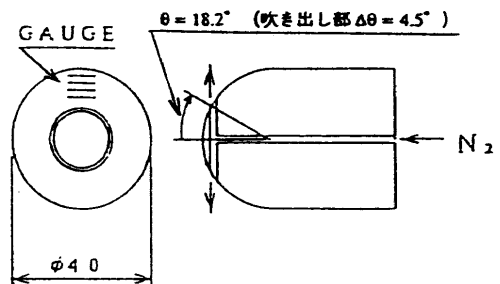


図 2.3 実験用風試模型模式図

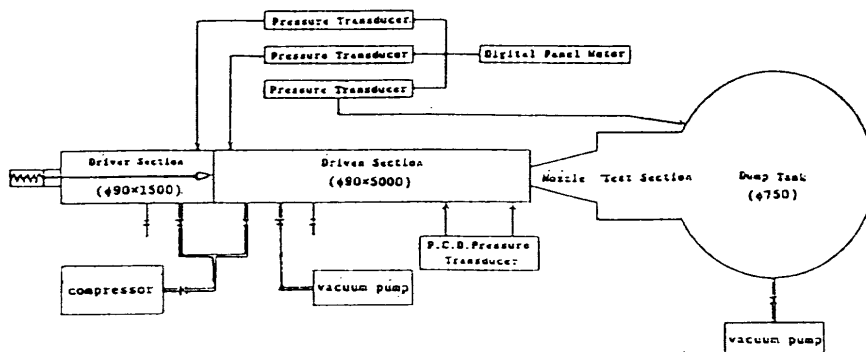


図 2.2 衝撃風洞構成図

らの組み合わせにより、非常に強い衝撃波を3点程度で捕獲することが可能である<sup>3,4)</sup>。

4. 計算条件

本解析に用いた一様流計算条件は、マッハ数  $M_\infty=4.25$ 、総温  $T_{0\infty}=515.7\text{ K}$ 、総圧  $p_{0\infty}=0.669\text{ MPa}$  である。また、壁面における温度境界条件として、壁面温度一定 ( $T_w=280.0\text{ K}$ )、速度境界条件として non-slip 条件を与えた。

さらに、2次冷却流体の吹き出し口における境界条件として、ガス温度一定 ( $T_g=280.0\text{ K}$ ) 及び吹き出し口における流量分布一定を仮定し、具体的物理量は、総流量  $\dot{m}$  [kg/s]、状態方程式及び物体に直交する方向 ( $\eta$ -方向) における運動量方程式から求めた。

また、直径を基準としたレイノルズ数は  $Re_\infty=4.7 \times 10^5$  であること及び同程度のディメンジョンを持つ風試模型を用いてこれまでに実施した実験結果<sup>7)</sup>を考慮して、層流境界層を仮定した。

図4.1に本解析で使用した計算格子を示す。格子点は、物体に沿う方向 ( $\xi$ -方向)、物体に直交する方向 ( $\eta$ -方向) にそれぞれ  $101 \times 101$  である。吹き出し口付近では  $\xi$ -方向に格子を密にとり、特に吹き出し口を横切ってほぼ10点の格子点を与えている。格子は代数的手法で作成し、壁面での熱流束を評価することを重視して、壁面から  $\eta$ -方向に数点は、厳密に壁面に直交させ、かつ間隔も等しく与えている。また、物体前方の淀み点流線付近 ( $\xi=1, 2$ ) では、この線をまたぎ、かつこの線に対して対称な位置に格子点を与えた。

一般に壁面近傍の熱流束を正確にシミュレートするためには、壁面付近の格子点間隔を小さくすることが重要であることが知られているが、本解析ではセルレイノルズ数  $R_{ocll}$  (壁面及び  $\eta$ -方向の次の格子点との間隔を基準長としたレイノルズ数) を10程度にとった。

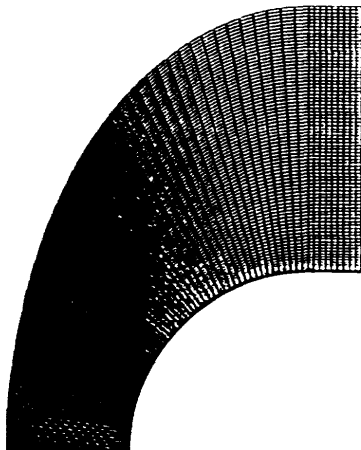


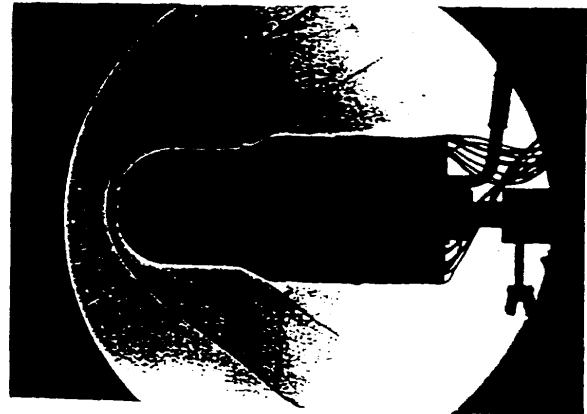
図4.1 計算格子

5. 計算結果

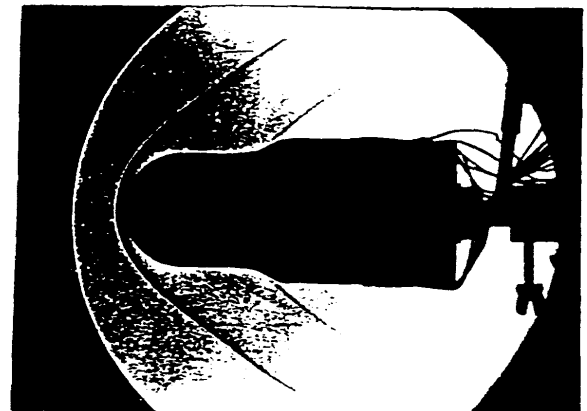
2項で述べた実験においては、2次冷却流体の噴出条件として全圧  $p_c=0\text{ MPa}$  (フィルムクーリング無し) から  $0.392\text{ MPa}$  まで変化させて壁面熱流束を測定した。この場合の総流量  $\dot{m}$  はほぼ  $0 \sim 5 \times 10^{-4}\text{ kg/s}$  に相当すると推定される。図5.1にフィルムクーリングが無い場合 ( $p_c=0\text{ MPa}$ ) と有る場合 ( $p_c=0.392\text{ MPa}$ ) のシュリーレン写真を示す。本実験の噴出条件の範囲では、2次冷却流体の噴出速度は亜音速であり、衝撃波の形状等に与える影響はほとんど見られない。

計算においては、総流量  $\dot{m}$  [kg/s] をパラメータとして与え、これを  $0 \sim 1.04 \times 10^{-3}\text{ kg/s}$  の範囲で実施した。この場合の温度分布の計算結果を図5.2に示す。実験におけるシュリーレン写真と同様に、衝撃波の形状は総流量によってほとんど変化せず、衝撃層内の非粘性領域における温度もほぼ同一の分布を示す。しかし、総流量が増加するに従って境界層厚さは増加しており、2次冷却流体の影響はほとんど物体近傍に限られていることがわかる。

同図に対応する2次冷却流体 (窒素ガス) のモル分率分布を図5.3に示す。図5.2で見られた総流量によ



(a)  $p_c = 0.0\text{ MPa}$



(b)  $p_c = 0.392\text{ MPa}$

図5.1 シュリーレン写真 ( $M_\infty=4.25$ )

る境界層厚さの変化が2次冷却流体の存在によるものであること、また2次冷却流体の存在範囲は境界層内にほぼ限定されていることがこの図より明らかである。

図5.4には、実験及び計算における壁面熱流束  $q_w$  を重ねて示す。図において、 $\theta$  は図2.3において定義した風試模型中心軸とのなす角度である。2次冷却流体が無い ( $\dot{m} = 0 \text{ kg/s}$ ) 場合、4項で述べた一様流条件から算出したFay & Riddleの式を用いた淀み点における解析値は約  $0.137 \text{ MW/m}^2$  であり、計算値と良く一致する。実験の場合は模型製作の都合上淀み点における熱流束は測定していないが、 $\theta = 30^\circ$  の位置より後流での熱流束分布の実験値と計算値が良好に一致していることを考慮すると、2次冷却流体無しの場合の計算は、比較的精度良くシミュレートされていると考えられる。

2次冷却流体が有る場合には、実験で観察された吹き出し口より後流での大幅な熱流束の減少は、計算でも捕らえられている。また当然予想されるように、総流量  $\dot{m}$  が増加するに従いこの減少の傾向は顕著である。しかし、定量的に見ると両者の分布には若干の相違が見られ、特に実験で観察された  $\theta = 40^\circ$  付近での熱流束のピークが計算では捕らえられていない。この原因は現在考察中であるが、考えられる要因としては、吹き出し口付近での境界層の遷移、実験における総流量  $\dot{m}$  の測定精度等が考えられる。

以上議論してきたことから、2次冷却流体の存在が熱流束の大幅な減少に果たす役割をより正確に知るためには、吹き出し口より後流での境界層内における現象を考察する必要があることがわかる。図5.5及び図5.6に、それぞれ吹き出し口直後 ( $\theta = 30^\circ$ ) 及びそれよりやや後流付近 ( $\theta = 50^\circ$ ) における境界層内の速度、温度、2次冷却流体(窒素ガス)モル分率分布を総流量  $\dot{m}$  をパラメータとして示す。図において、速度、温度はそれぞれ一様流速度  $U_\infty = 900.1 \text{ m/s}$ 、一様流静温  $T_\infty = 111.8 \text{ K}$  で無次元化している。また、縦軸の  $\eta$  は物体表面からの距離で、模型半径  $R$  で無次元化している。

特に、図5.5の総流量  $\dot{m}$  の大きいケースから明らかのように、冷却効果の著しい領域では境界層内がかなり明確に2層に別れており、2次冷却流体モル分率及び温度がほぼ一定な領域(内層)と非粘性流における値に漸近していく領域(外層)が観測される。さらに外層における温度分布をみると、あたかも内層と外層の境界付近で断熱壁境界条件を与えたような形をしている。気体は一般に熱伝導率が低く、熱防御の観点から見ると非常に高性能な断熱材として通常の構造材にも利用されている。これを考えると、2次冷却流体を吹き出すことによって生成された内層即ちフィルム層

が、あたかも物体表面において断熱材が存在しているような状態を作りだし、これがフィルムクーリング法における冷却効果の本質的な役割を果たしていることがわかる。図5.5及び図5.6に見られるように、総流量  $\dot{m}$  が減少するか、あるいは流れが吹き出し口より後方に行くに従い、この傾向は鈍化していくが、上述の本質的な特徴は残されており、この特徴の度合いが冷却効果をほぼ決定付けている。

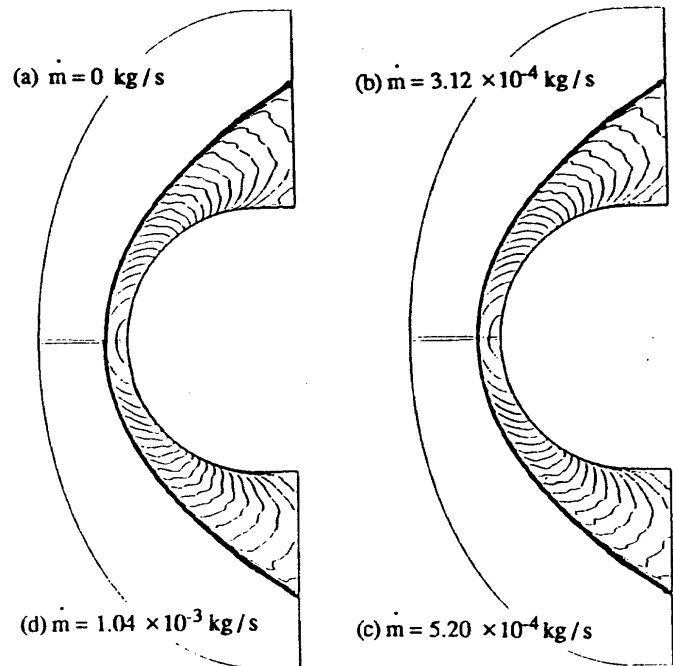


図5.2 温度分布

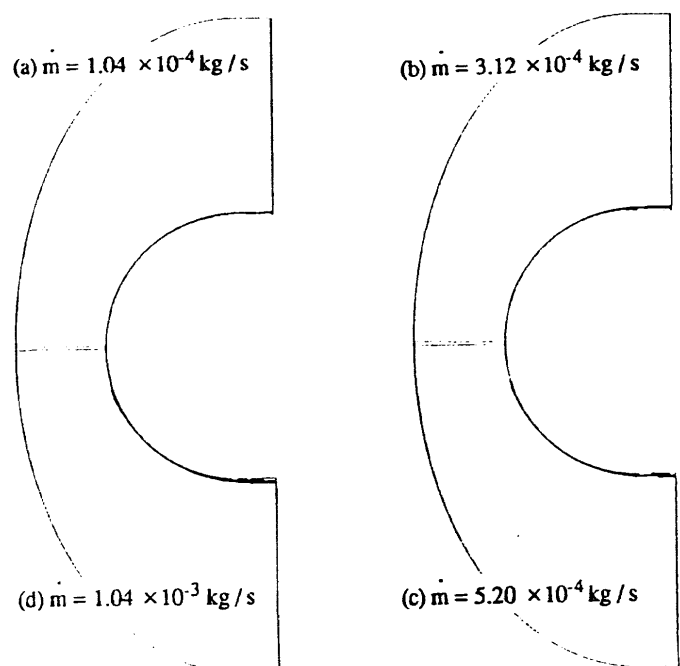


図5.3 2次冷却流体モル分率分布

上述したような境界層内におけるフィルム層をスムーズに作り出すためには、今回取り上げたように2次冷却流体をできるだけ接線方向に吹き出すことが有利であることが直感的に予想される。我々は既に実験的手法によって、接線方向及び垂直方向の2種類の吹き出し方向について冷却効果を比較し、接線方向に2次冷却流体を吹き出す方が冷却効果が大きいことを示した<sup>1,2)</sup>。接線方向に2次冷却流体を吹き出した場合( $\dot{m} = 1.04 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$ )における、吹き出し口付近の速度分布を図5.7に示す。吹き出しによる流れの剥離等の現象は見られず、比較的スムーズにフィルム層が生成されていることがこの図から推測される。垂直方向に2次冷却流体を吹き出す場合との比較は今後の課題である。

6. 結論及び課題

数値解析により2次冷却流体の吹き出しを含む物体周りの極超音速流れ場をシミュレートし、実験で観察された大幅な熱流束の減少を捕えることができた。また、冷却効果の著しい領域では、フィルム層とその外側を形成する境界層内の諸量の分布がかなり明確に2層に別れ、物体表面にあたかも断熱材が存在しているような構造になっており、これがフィルムクーリング法における冷却効果の本質的な役割を果たしていることがわかった。

今後の課題としては、まず実験結果と計算結果の熱流束分布比較で見られる誤差要因を明確にすることが挙げられる。そのためには、吹き出し口付近での境界層の遷移の可能性、実験における総流量  $\dot{m}$  の測定精度等の向上等を考察する必要があると考えられる。それと平行して、吹き出し方向あるいは総流量の冷却効果に与える影響を実験的、数値解析的双方のアプローチにより、検討することを予定している。

参考文献

- 1) 麻生茂 他, "鈍頭物体のフィルムクーリングによる熱防御と全温度推定法について", 第25回流体力学講演会講演集, pp.175-178, 1993.
- 2) Aso, S. et al., "Experimental and Computational Studies on Heat Protection of Blunt Body with Film Cooling", 19th ISTS, 1994 to be published.
- 3) 黒滝卓司, "2次元/軸対称極超音速非平衡流の数値解析", 第10回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-19, pp.93-98, 1992.
- 4) 黒滝卓司, "極超音速非平衡流の数値解析 - 物理モデルに関する考察 -", 第6回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.73-76, 1992.
- 5) Yoon, S. and Kwak, D., "Implicit Methods for the Navier-Stokes Equations", Computational Technology for Flight Vehicles, Vol. 1, pp.535-547, 1990.
- 6) Chakravarthy, S.R., "The Versatility and Reliability of Euler Solvers Based on High-Accuracy TVD Formulations", AIAA Paper 86-0243, 1986.
- 7) 片山雅之 他, "極超音速流中の鈍頭物体まわりの空力加熱解析", 第5回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp.167-170, 1991.

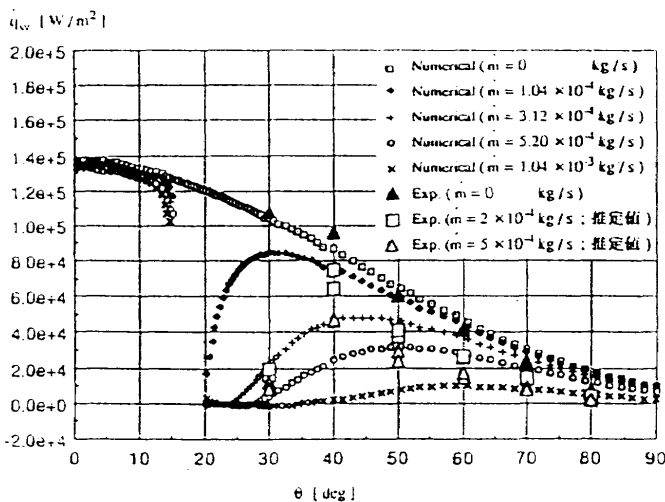


図5.4 壁面熱流束分布

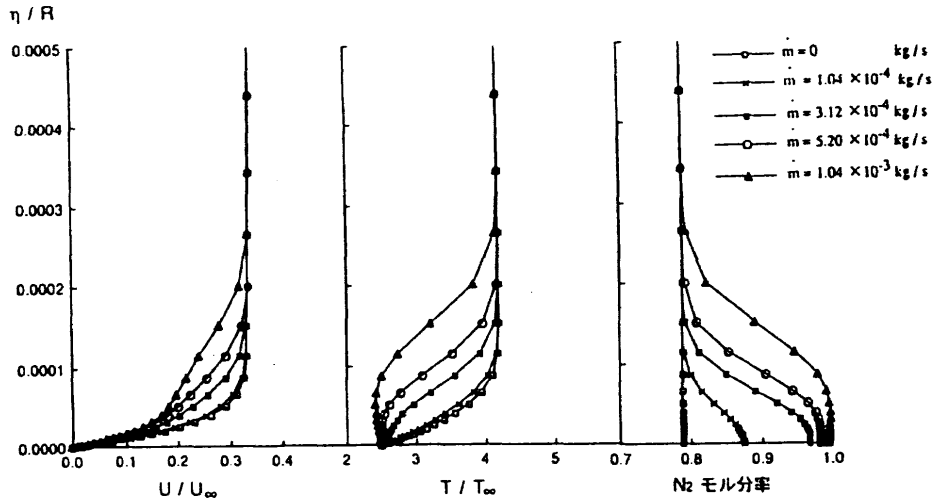


図 5.5 境界層内速度、温度、2次冷却流体モル分率分布 ( $\theta = 30^\circ$ )

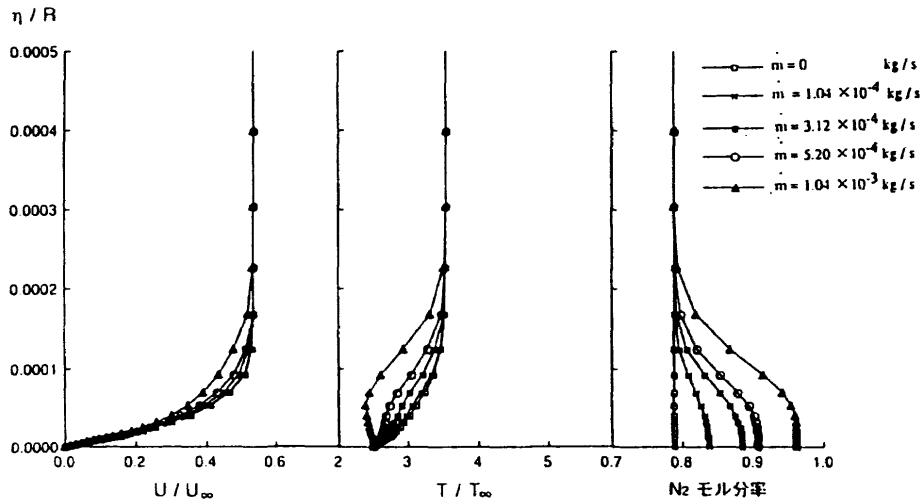


図 5.6 境界層内速度、温度、2次冷却流体モル分率分布 ( $\theta = 50^\circ$ )

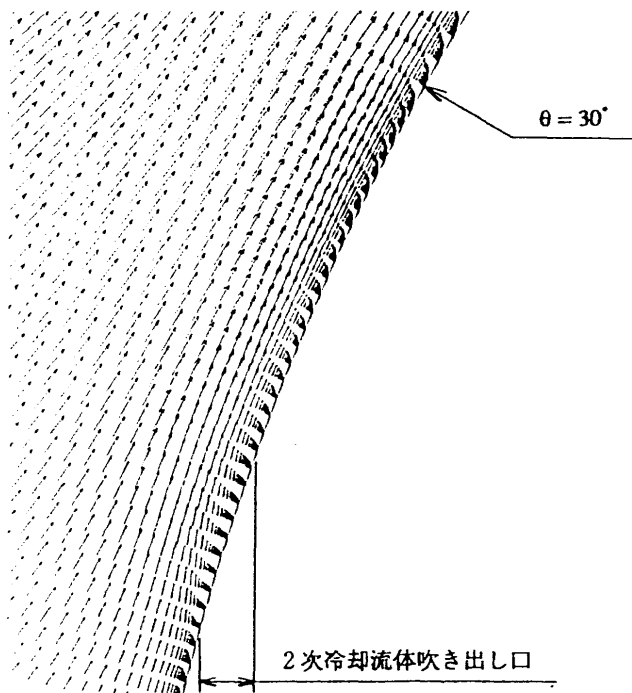


図 5.7 吹き出し口付近速度分布 ( $\dot{m} = 1.04 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$ )

## Structure of Weak shock waves in bubbly liquid

by

Ryuji Ishii\* and Takeshi Hashimoto\*\*

\* Department of Aeronautical Engineering, Kyoto University

\*\* Toyota Motor Cooperation, Toyota 471

### ABSTRACT

In this paper, steady and unsteady weak shock waves in a bubbly liquid are treated numerically. A new system of model equations describing the bubbly flow is applied and the flow structure behind a shock front is investigated in detail. It is shown that the heat conduction between the liquid and the gas phases through the bubble surface affects significantly the wave profile near the shock front. It is, however, shown that the velocity difference between the liquid and the gas phases affects the wave profile remarkably for weak shock waves. Radial oscillation of bubbles tends to produce oscillatory profile of the mixture pressure especially near the wave fronts. Numerical simulation shows that the weak shock consists of a precursor near the shock front and a main shock downstream of it. It is confirmed that the stationary shock wave for a constant polytropic-exponent model is realized as an asymptotic solution for a shock tube problem with uniform conditions in the low pressure and high pressure chambers.

### I. INTRODUCTION

So far, the problem of propagation of shock waves through a bubbly liquid has received considerable attention. The speed of shock wave propagating through a liquid containing small gas bubbles was first studied theoretically and experimentally by Campbell and Pitcher<sup>1</sup>. Later, Crespo<sup>2</sup> investigated analytically the shock structure under some simplifying assumptions. Noordzij & Wijngaarden<sup>3</sup> performed experiments of shock propagation in a bubbly liquid and found that there are three types of shock structure.

Recently, Beylich & Gülhan<sup>4</sup> performed systematic numerical simulation and experiment of shock waves in bubbly liquid and obtained good agreement between them. In their analysis, however, a few empirical parameters are introduced to fit the numerical results to the experiments.

In many previous papers, the effects of velocity difference between the two-phases on the shock waves are assumed to be negligible. This assumption is not always appropriate for the weak shock wave. Although in general the thermal dissipation plays the most important role in the determination of the shock structure, the effect of the relative translational motion of the bubbles can not be neglected, especially for weak shock waves. Dispersion and dissipation processes associated with the expanding and contracting motions of bubbles usually affect the shock structure rather in the region near

the shock front. The shock structure, however, cannot be predicted precisely without considering the effect of the velocity difference between the two phases as well as that of the thermal dissipation.

In the present paper, first stationary shock waves in a bubbly liquid are treated. Here the weak shock wave is defined as the shock with a pressure ratio less than or at most equal to the ratio of specific heats of the gas  $\gamma$ . The detailed flow structure behind the shock front and the effect of the velocity difference between the two-phases on the shock structure is investigated numerically. Next shock tube problems are treated and unsteady behavior of the shocks is discussed. All the numerical simulations are performed on a supercomputer Fujitsu VP-2600 in the Data Processing Center of Kyoto University.

### II. BASIC EQUATIONS

We consider a one-dimensional flow of a mixture composed of an incompressible liquid and small gas bubbles dispersed in it. It is assumed that the bubbles remain spherical throughout the flow, have locally uniform size and do not break up or coalesce, the pressure within each bubble is uniform, no phase change takes place and the temperature of the liquid remains constant throughout the flow.

Under these assumptions, the governing equations for a one-dimensional unsteady flow are given as<sup>5</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\alpha) + \frac{\partial}{\partial x}[(1-\alpha)u_l] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g \alpha) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_g \alpha u_g) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-\alpha)u_l] + \frac{\partial}{\partial x}[(1-\alpha)u_l^2 + p] = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_g u}{Dt} + \frac{\varepsilon}{k\tau} \frac{D_g}{Dt}(k\tau) - (1 + \frac{1}{k}) \frac{D_l u_l}{Dt} + \frac{D_w}{k\alpha} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \rho_g) \\ + \frac{H}{k\alpha} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{D_g \alpha}{Dt}) = - \frac{9}{Re} \frac{\varepsilon}{kR^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

where

$$\tau = \frac{1}{\rho_g} = R^3, \quad (5)$$

$$\varepsilon = u_g - u_l, \quad (6)$$

$$k = \frac{1}{2}(1 + \lambda \alpha), \quad (7)$$

$$\frac{D_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{D_l}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_l \frac{\partial}{\partial x}. \quad (8)$$

Here the time  $t$ , the space coordinate  $x$ , the fluid velocity  $u$ , the pressure  $p$ , the gas density  $\rho_g$ , the bubble radius  $R$ , and the coefficients of diffusion force and repulsive force,  $D_w$  and  $H$ , are nondimensionalized by  $R_0/U_0$ ,  $R_0$ ,  $U_0$ ,  $\rho_l U_0^2$ ,  $\rho_g U_0$ ,  $R_0$ ,  $(4/3)\pi R_0^3 \rho_l U_0^2$ ,  $R_0 U_0$ , respectively, where  $U_0$  is a reference velocity. The subscript zero denotes the uniform flow conditions ahead of the shock front and the subscripts  $g$  and  $l$  denote the gas phase and the liquid phase, respectively. The parameter  $\lambda$  in the added mass coefficient of a spherical bubble  $k$  in Eq.(7) is given by Wijngaarden<sup>6</sup> as  $\lambda = 2.78$ . The bubble Reynolds number in Eq. (4) is defined by

$$Re = \frac{\rho_l U_0 R_0}{\mu_l}, \quad (9)$$

The parameters  $D_w$  and  $H$  first introduced by Batchelor<sup>7</sup> are quantities that can be determined at least in principle from the detailed study of hydrodynamic interactions between bubbles. Unfortunately, these forces have not yet been evaluated theoretically. In the following analysis, therefore,  $D_w$  and  $H$  are assumed to be small positive constants.

Since the gas inside each bubble is compressible, two more equations are needed to close the system. These are the momentum equation for radial motion of each bubble and the equation of state of the gas inside the bubble. The first is given in the nondimensional form as

$$p_g - p = R \frac{D_g^2 R}{Dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{D_g R}{Dt} \right)^2 + \frac{4\Psi}{Re} \frac{1}{R} \frac{D_g R}{Dt}, \quad (10)$$

which is the so called Rayleigh-Plesset equation where the parameter  $\Psi$  is a correction factor

due to dissipation processes in the liquid phases. The damping factor  $\Psi$  in Eq.(10) is approximated to be a constant given by the linear analysis of Devin<sup>8</sup>.

The second is given by

$$p_g = \Gamma \rho_g^n \quad (11)$$

where  $n$  is an effective polytropic exponent of the gas. The nondimensional parameter  $\Gamma$  is defined by

$$\Gamma = \frac{p_0}{\rho_l U_0^2}. \quad (12)$$

In the analysis of the bubbly liquid, sometimes the polytropic exponent  $n$  is assumed to be some constant in the range from 1 to  $\gamma$ . In such a case, the effect of the thermal dissipation can be included in the parameter  $\Psi$  in Eq.(10)<sup>8</sup>.

Strictly speaking, the gas temperature and the density inside the bubble is not uniform even under the reasonable assumption of uniform gas pressure.<sup>9</sup> But to make the problem tractable numerically or analytically, some averaging of the gas density over each bubble is inevitable. This averaging process is closely connected to evaluation of the thermal damping or the polytropic exponent  $n$ .

In the present paper, only weak shock waves are considered and then the temperature field is solved by a linear approximation to evaluate the value of  $n$ . Although the shock phenomenon is nonlinear and then the main system of Eqs.(1) to (4) must be solved directly as a nonlinear system, only the temperature field is solved by a linear analysis.

By putting

$$p_g = 1 + p_g', \quad \rho_g = 1 + \rho_g', \quad (13)$$

it is given from Eq.(14) that

$$p_g' = \Gamma n \rho_g', \quad \text{or} \quad n = \frac{p_g'}{\Gamma \rho_g'}. \quad (14)$$

Under the simplifying approximation of uniform pressure in the bubble and the constant temperature of the liquid at the bubble surface, we get

$$\begin{aligned} \Gamma \rho_g'(t) = \frac{1}{\gamma} p_g'(t) \\ + 6 \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{D}{\Gamma} \sum_0^\infty \int_0^\infty p_g'(s) \exp[-\frac{D}{\Gamma} \pi^2 j^2 (t-s)] ds, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\text{along} \quad \frac{dx_g}{dt} = u_g, \quad (15b)$$

where

$$D = \frac{\chi_g}{R_0 U_0}, \quad \chi_g = \frac{\kappa_g c_{p_g}}{\rho_g c_{p_g}}. \quad (16)$$



Here  $\kappa_g$  and  $\chi_g$  are the thermal conductivity and diffusivity of the gas, respectively and  $C_{p,g}$  is the specific heat at constant pressure. The gas density  $\rho_g$  in Eq.(15a) is defined as an averaged density over the bubble.

It is reasonably expected that the gas phase will behave nearly adiabatically near the shock front ( $n \sim \gamma$ ) but nearly isothermally far downstream ( $n \sim 1$ ). But this is not always the case and should be modified. Here it has to be pointed out that the polytropic exponent  $n$  can take, at least theoretically, any value from  $-\infty$  to  $+\infty$ . This is very important in the discussion of shock structure.

### III. STATIONARY SHOCK WAVES

#### A. Numerical scheme

For stationary shock waves, the coordinate system  $(t, x)$  is transformed into  $(\xi, \eta)$  by

$$\xi = x + U_s t, \quad \eta = t \quad (17)$$

where  $U_s$  is the speed of shock wave defined later. After straightforward but lengthy manipulation, Eqs. (1) to (4) and (10) in conjunction with Eqs. (5) to (7) are rearranged by making use of the relation  $\partial(\cdot)/\partial \eta = 0$  to yield

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\xi} + \frac{\beta}{\rho_g} \frac{d\rho_g}{d\xi} - \frac{\varepsilon}{U_s} \beta^2 \rho_g \left( \frac{\lambda \alpha_o}{1 + \lambda \alpha_o \beta} \frac{d\beta}{d\xi} - \frac{1}{\rho_g} \frac{d\rho_g}{d\xi} \right) \\ + \alpha_o \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \beta^2 \rho_g^2 \frac{(1 - \alpha_o)^2}{(1 - \alpha_o \beta)^2} \frac{d\beta}{d\xi} \\ - \frac{9}{\text{Re} U_s} \beta^2 \rho_g^{11/3} \frac{\varepsilon}{U_s} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho_g}{d\xi^2} - \frac{17}{6} \frac{1}{\rho_g} \left( \frac{d\rho_g}{d\xi} \right)^2 - \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{d\xi} \frac{d\rho_g}{d\xi} \\ + \left( \frac{4\Psi}{\text{Re} U_s} \right) \beta \rho_g^{5/3} \frac{d\rho_g}{d\xi} + \frac{3\Gamma}{U_s^2} \beta^2 \rho_g^{11/3} \frac{\Delta p}{\Gamma} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

where

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha_o}, \quad \frac{\varepsilon}{U_s} = \frac{1 - \beta}{\beta \rho_g} + \alpha_o \frac{1 - \beta}{1 - \alpha_o \beta}, \quad (20)$$

$$\frac{\Delta p}{\Gamma} = \rho_g^n - 1 + \frac{\rho_{g1} (1 - \rho_{g1}) (\beta - 1)}{(1 - \rho_{g1}) (1 - \alpha_o \beta)}, \quad U_s^2 = \frac{\Gamma \rho_{g1}}{\alpha_o (1 - \alpha_o)}$$

The above system is subject to the boundary conditions

$$u_g = u_1 = 0, \quad \rho_g = 1, \quad \alpha = \alpha_o, \quad p = p_g = \Gamma, \quad n_o = \gamma,$$

$$\text{at } x = -\infty, \text{ and} \quad (21)$$

$$u_g = u_1, \quad \rho_g = \rho_{g1}, \quad \alpha = \alpha_1, \quad p = p_g = \Gamma \rho_{g1}, \quad n_1 = 1,$$

$$\text{at } x = \infty.$$

Numerically the shock front is approximately located at  $x = 0$ . The subscript 1 denotes flow conditions far downstream of the shock. In these equations, the diffusion and the repulsive force

are neglected. This is because the steady solution is free from ill-posedness of the system as an initial value problem and moreover these forces do not affect appreciably the flow properties<sup>5</sup>.

Since Eqs. (18) and (19) in conjunction with Eqs. (15) and (20) constitute a system of simultaneous ordinary differential equations for  $\beta$  and  $\rho_g$ , they can be solved for the boundary conditions (21).

The numerical simulations are performed for bubbly liquids composed of air and water. The reference velocity  $U_o$  is put to 10 m/s so as to make the parameter  $\Gamma$  order unity for analytical numerical convenience.

The fourth-order Runge-Kutta-Gill method was adopted for the numerical simulation of stationary shock waves. Undisturbed flow conditions are  $p_o = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $T_o = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_o = 0.05$ , and  $R_o = 0.5 \text{ mm}$ .

#### B. Shock front

Before proceeding to the numerical discussions, here the wave profile near the shock front is investigated in detail.

Eqs. (18) and (19) are combined to yield in conjunction with (10) and (15)

$$C_o \frac{d^3 \rho_g}{d\xi^3} + C_1 \frac{d^2 \rho_g}{d\xi^2} + C_2 \frac{d\rho_g}{d\xi} + C_3 \rho_g = 0, \quad (22)$$

near the shock front, where

$$C_o = 1 + \alpha_o \left( 1 + \frac{1}{k_o} \right),$$

$$C_1 = \left[ 1 + \alpha_o \left( 1 + \frac{1}{k_o} \right) \right] \frac{4\Psi}{\text{Re} U_s} + \frac{9}{(1 - \alpha_o) \text{Re} k_o U_s},$$

$$C_2 = \frac{3\Gamma}{U_s^2} \left\{ n_o \left[ 1 + \alpha_o \left( 1 + \frac{1}{k_o} \right) \right] - \frac{\theta}{(1 - \alpha_o)} \right\}$$

$$+ \frac{36\Psi}{(1 - \alpha_o) (\text{Re} U_s)^2 k_o}, \quad (23)$$

$$C_3 = \frac{27\Gamma (n_o - \theta)}{(1 - \alpha_o) \text{Re} k_o U_s^3}.$$

Here  $n_o$  is the polytropic exponent at the shock front and  $\theta = p_1/p_o$ . Since  $D\xi/U_s \ll 1$  near the shock front,  $n_o$  should be taken as  $\gamma$ .

If we assume a solution to Eq. (22) in the form  $\rho_g = \exp(\lambda \xi)$ , we can get

$$\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda_2 = a - ib, \quad \lambda_3 = c, \quad \text{for } 1 < \theta < n_c$$

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = b, \quad \lambda_3 = c, \quad \text{for } \theta \geq n_c, \quad (24)$$

where  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $n_c$  are real constants. For the pressure ratio  $\theta$  less than or equal to  $n_o (= \gamma)$ , both  $a$  and  $c$  are negative and  $b$  is not zero, which means the shock front is a stable spiral

point in the phase plane. For  $\gamma < n_0 < n_c$ , we have  $a < 0, c > 0$ , and  $b \neq 0$ , and then the shock front is an unstable spiral point, where  $n_c$  is a constant greater than  $\gamma$  depending on  $p_1/p_0, \alpha_0, Re$  and  $\Psi$ . For  $n_0 > n_c$ , we have  $a < 0, c > 0$ , and  $b < 0$ , which means that the shock front is an unstable saddle point.

Summarizing the above results, it can be said that the stationary shock can exit only for  $\theta > \gamma$ . The shock front is oscillatory for  $\gamma < \theta < n_c$  and non-oscillatory for  $n_c < \theta$ . In Fig.1, a sample of the numerical results for  $n_c$  is shown.

From the entropy consideration, however, the stationary shock can exist for  $1 < \theta$  as shown by Campbell and Pitcher<sup>1</sup>. Experiments have also shown the possibility of presence of the stationary shock even for  $0 < 1 < \theta^2$ . Numerical results in the present analysis actually show the presence of stationary shocks even for  $1 < \theta < \gamma$ .

When some disturbance is added to the shock front, however small it is, the oscillatory motion is initiated following the solution to Eq.(22). Then the polytropic exponent  $n$  changes from  $\gamma$  drastically and can take any value less than  $\theta$  at least temporarily. When  $n$  becomes less than  $\theta$ , the shock front shifts from a stable spiral point to an unstable saddle or spiral point and then the solution curve will tend to proceed toward another stable point, the downstream end of the shock.

The structure of the weak shock is, therefore, divided into two parts. The front part is essentially oscillatory and its shape depends on the initial disturbances introduced at the shock front. Here we will name this part "precursor". The latter part is essentially stable and it does not depend on the small initial disturbances introduced artificially at the shock front. We call this "main shock" here.

Theoretically Eq.(11) defining the polytropic exponent  $n$  is responsible for the precursor. As was shown previously, the polytropic exponent  $n$  can take any value from  $-\infty$  to  $+\infty$  when the oscillatory pressure fluctuation is imposed on the bubble, however small the fluctuation is. Then the polytropic exponent  $n_0$  at the shock front cannot always be specified as  $n_0 = \gamma$ . In light of this, it will be reasonable to consider that the approximation with a constant exponent  $n$  ( $\leq p_1/p_0$ ) can be one of the possible approximations at least for the analysis of the weak shock wave<sup>3</sup>. Here we call this "constant exponent model".

C. Numerical results

In Fig.2, pressure profiles are shown for  $p_1/p_0$

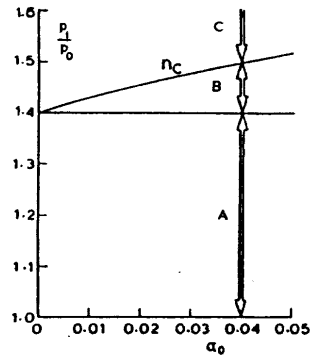


Fig.1 Characteristics of shock front in air-water mixture: A shock front with precursor B shock front with oscillatory shock front, C shock front without oscillatory shock front.

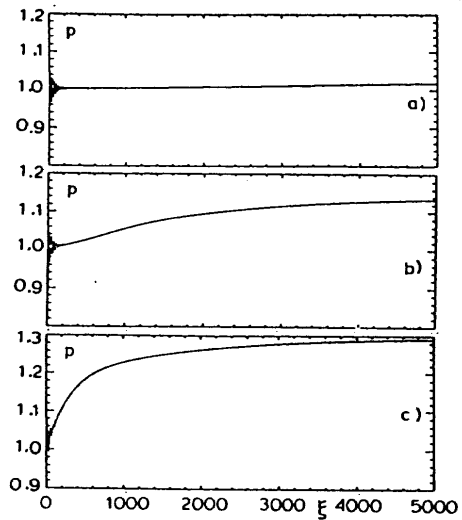


Fig.2 Pressure distributions in air-water mixture for  $\alpha_0 = 0.05$ : a)  $p_1/p_0 = 1.05$ , b)  $p_1/p_0 = 1.15$ , c)  $p_1/p_0 = 1.30$ .

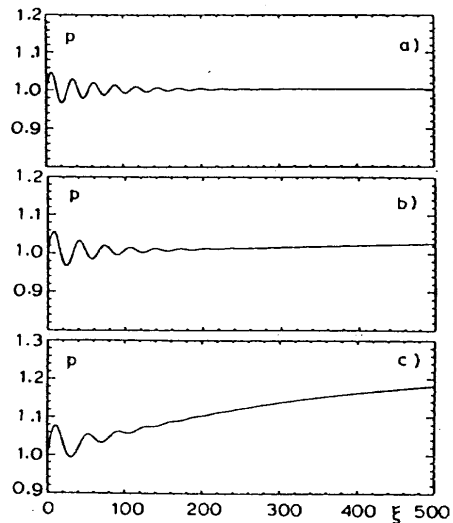


Fig.3 Precursors in air-water mixture.

=1.05, 1.15 and 1.3, respectively. Obviously the precursor becomes longer as the shock becomes weaker. The main shock, on the contrary, becomes more oscillatory with increasing shock strength. It is important to point out that the precursor obtained numerically is never the numerical noise but has a systematic structure. To show this, time enlarged pressure profiles are shown in Fig.3.

In Fig.4, a translational velocity profile for  $p_1/p_0=1.15$  is shown, where the velocity slip is appreciable in all flow field. To investigate the effect of the velocity slip, the corresponding shocks for the mixture model are calculated by replacing Eq.(18) by  $u_g=u_s$  or

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_0)\rho_g + \alpha_0} \quad (24)$$

The results are shown in Fig.5 for  $p_1/p_0=1.05, 1.15$  and  $1.30$ . Obviously, the difference between the shocks in Figs.2 and 5 is remarkable.

As was discussed previously, one of the interesting approximations is the constant exponent model. In Fig.6, pressure profiles are shown for  $p_1/p_0=1.15$  for the constant exponent model ( $n=1.0$ ), where the damping coefficients  $\Psi$  evaluated following Devin is 114.4. The result is compared with that for the full model in this figure. Near the shock front, the constant exponent model yields relatively very sharp increase in pressure, which means the effect of the thermal damping will be underestimated near the

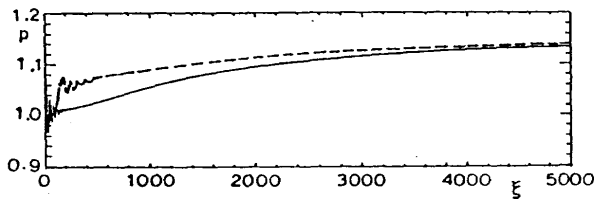


Fig.6 Comparison between the full model solution and the constant exponent model solution for air-water mixture for  $p_1/p_0=1.15, \alpha_0 = 0.05$ : ——— full model, - - - constant exponent model.

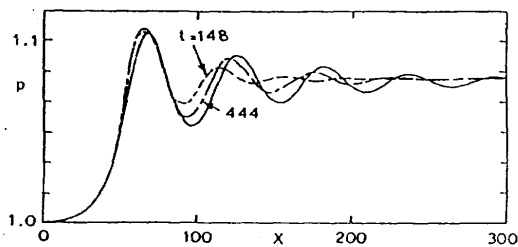


Fig.7 Time-convergency of shock front for mixture model with a constant exponent  $n=1$  for  $p_2/p_0=1.2$ ; - - - - unsteady shock at  $t=148$ , - · - · - unsteady shock at  $t = 444$ , ——— stationary shock for  $p_1/p_0 = 1.0933$ .

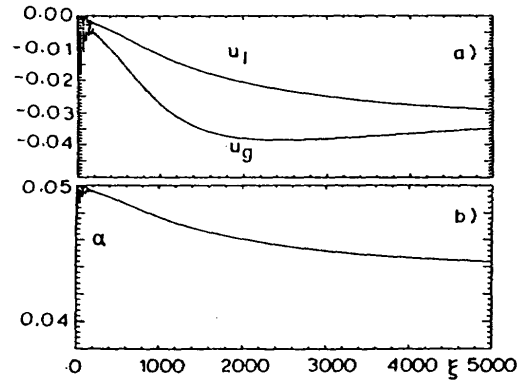


Fig.4 Distributions of bubble velocity  $u_g$ , liquid velocity  $u_s$  and void fraction  $\alpha$  in air-water mixture for  $p_1/p_0 = 1.15, \alpha_0 = 0.05$ .

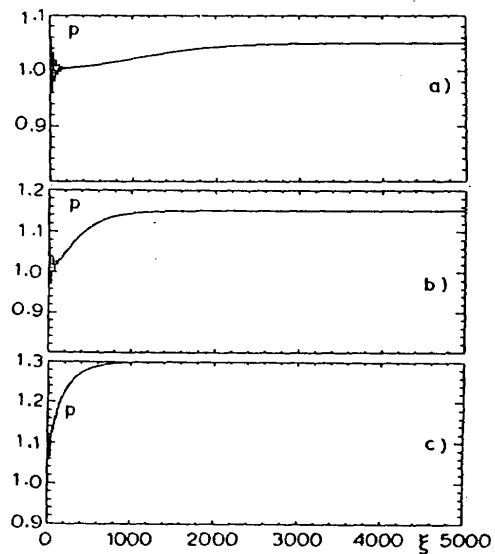


Fig.5 Pressure distributions in air-water mixture for the mixture model ( $u_g = u_s$ ) for  $\alpha_0 = 0.05$ : a)  $p_1/p_0 = 1.05$ , b)  $p_1/p_0 = 1.15$ , c)  $p_1/p_0 = 1.30$ .

shock front in this model.

#### IV. UNSTEADY SHOCK WAVES

##### A. Numerical scheme

Next we consider a shock tube problem, where the undisturbed conditions in the two chambers are uniform. Mathematically, hyperbolicity or well-posedness of the system is of crucial importance. Fortunately, the governing equations (1-4), (10) and (14) in conjunction with Eqs. (5-8), (18-19) constitute a well-posed system as an initial value problem, if the coefficient of diffusion force  $D_w$  is chosen to be some small positive constant<sup>5</sup>. Here we apply an Total-Variation-Diminishing (TVD) scheme developed by Chakravarthy & Osher<sup>10</sup>.

##### B. Solutions for constant exponent model

In the shock tube problem, the initial flow

conditions in the high and the low pressure chambers separated by a diaphragm are specified as follows;

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \rho_g = 1, \quad p = p_0 = \Gamma, \quad \text{for } x > 0 \quad (25)$$

$$u_1 = u_2 = 0, \quad \alpha = \alpha_2, \quad \rho_g = \rho_{g2}, \quad p = p_0 = p_2, \quad \text{for } x \leq 0$$

where the diaphragm is located at  $x=0$  and the subscript 2 denotes the high pressure chamber. Since the initial states are assumed to be in thermal equilibrium and the initial temperature is uniform throughout the whole flow region, we can put

$$p_2 = \Gamma \rho_{g2}, \quad \alpha_2 = \alpha_0 / \rho_{g2}. \quad (26)$$

All the numerical results shown later are for  $p_0 = 1 \text{ atm}$ ,  $\alpha_0 = 0.05$ ,  $R_0 = 0.5 \text{ mm}$ ,  $D_w = 0.01$  and  $H = 0.001$ .

A numerical solution to the mixture model ( $u_g = u_l = u$ ) with a constant polytropic exponent ( $n=1$ ) was performed and the results are shown in Fig. 7, where the unsteady pressure profiles are compared with a stationary shock for  $p_1/p_0 = 1.0933$ . We can see a good time-convergency of the unsteady shock to the corresponding stationary shock.

The steady and unsteady shocks were calculated with completely different numerical schemes. In spite of this, the good agreement between the stationary and unsteady shocks for large  $t$  suggests sufficient reliability and accuracy of the present numerical schemes.

### C. Solutions for full model

For analytical convenience, the initial conditions are given as follows,

$$u_g = u_l = 0, \quad \alpha = 0.05, \quad \rho_g = 1.0, \quad p = p_0 = \Gamma, \quad \text{for } x \leq 0, \quad (27)$$

$$u_g = u_l = -0.04, \quad \alpha = 0.05, \quad \rho_g = 1.0, \quad p = p_0 = \Gamma, \quad \text{for } x > 0.$$

In this case, two uniform flows collide at  $x=0$  at  $t=0$  and two shocks are produced near  $x=0$  which propagate into both the right and the left directions.

In Fig. 8, distributions of the mixture pressure, the void fraction and the velocities are shown at the time-step 2700 ( $t=176$ ). Oscillatory behavior of the shock front almost disappear and any symptom of the precursor is not seen at least in this stage.

### V. CONCLUSIONS

Weak shock waves in a bubbly liquid were treated numerically. The weak shock has always a precursor which is essentially oscillatory and is followed by a relatively much more smooth main shock. The shocks with a precursor has not yet been observed experimentally. In light of this,

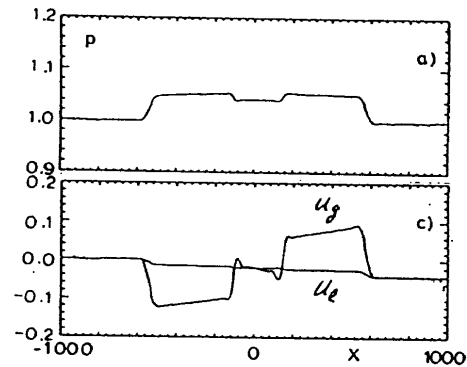


Fig. 8 Distributions of mixture pressure and gas and liquid velocities at  $t=176$ .

the constant exponent model can be a good model at least for the analysis of weak shocks if the effect of the thermal dissipation is correctly taken into account, for example, in the correction factor  $\Psi$ .

Weak unsteady shocks for the full model were also treated. Neither instability nor the precursor was found. This might come from the fact that the undisturbed conditions are always fixed numerically.

### References

1. I.J. Campbell and A.S. Pitcher, "Shock Waves in Liquid Containing Gas Bubbles," Proc. Royal. Soc. (London) A243, 534 (1958).
2. A. Crespo, "Sound and Shock Waves in Liquids Containing Bubbles," The Physics of Fluids 12, 2274 (1969).
3. L. Noordzij and L. van Wijngaarden, "Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble/liquid mixtures," J. Fluid Mech. 66, part. 1, 115 (1974).
4. A.E. Beylich and Ali Gülhan, "On the structure of nonlinear waves in liquid with gas bubbles," Phys. Fluids A 2, 1412 (1990).
5. R. Ishii, Y. Umeda, S. Murata and N. Shishido, "Bubbly flows through a converging-diverging nozzle," Physics of fluids A 5, 1630 (1993).
6. L. van Wijngaarden, "Hydrodynamic interaction between gas bubbles," J. Fluid Mech. 77, 27 (1976).
7. G.K. Batchelor, "A new theory of a uniform fluidized bed," J. Fluid Mech. 193, 75 (1988).
8. C. Devin, Jr., "Survey of Thermal, Radiation, and Viscous Damping of Pulsating Air Bubbles in Water," J. Acoust. Soc. Amer. 31, 1654 (1959).
9. A. Prosperetti, "The thermal behaviour of oscillating gas bubbles," J. Fluid Mech. 222, 587 (1991).
10. S.R. Chakravarthy, & S. Osher, "A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws," AIAA paper 85-0363 (1985).

## 浮力が作用する曲円管内の流れと熱伝達

望月 宗和\*、石垣 博\*

### The Effect of Buoyancy on Flow and Heat Transfer in Curved Pipes

Munekazu Mochizuki & Hiroshi ISHIGAKI

Fully developed laminar flow in a heated horizontal curved pipe is studied numerically. The thermal boundary conditions at the wall are uniform wall heat flux axially and uniform wall temperature peripherally. Flow and heat transfer are governed by Dean number, Prandtl number and buoyancy number. Detailed prediction of the friction factor, average heat transfer rate, velocity profile, temperature profile and secondary-flow streamlines are given.

#### 1. まえがき

曲り管は各種の熱交換器、加熱・冷却装置に用いられ、工学的に重要な役割を持っている。このような加熱曲管内を流れる流体には曲率による遠心力と管壁の加熱(冷却)による浮力が同時に作用し、水平なコイル管の場合には2つの力が90°異なった方向に作用するので、流れは加熱されない場合にくらべてさらに複雑な様相を呈する。この流れは浮力効果がない曲管内の流れ<sup>(1),(2)</sup>と曲率効果のない加熱水平直管内の流れ<sup>(3),(4)</sup>を二つの極限状態としてもつが、これらについてはすでに報告した。本報告では水平な加熱コイル管内層流の流動伝熱について数値解析した結果を述べる。

これまでの著者らの研究から二つの極限の特性は

浮力が作用する水平加熱直円管内層流については

- (1) 層流熱伝達特性は基本的には ( $Pr \ll 1$ をのぞけば) 層流特性数  $K_{LB} = \sqrt{Ra_q}$ のみで決まり、 $Pr$ に無関係である
- (2) 速度場は  $Pr$ によって大きく影響される

浮力が作用しない曲円管内層流については

- (1) 層流の流れ特性は層流特性数(ディーン数) $K_{LC} = Re/\sqrt{\lambda}$ のみで決まり、 $Pr$ に無関係である
- (2) 温度場は  $Pr$ によって大きく影響される

ことが明らかになっている。本研究であつかう流れはこれらの中間状態になるはずであり、ここでは上記の両極限をふまえて流動伝熱特性を示す。

本報告では実用と関係が深い基本的な問題として軸方向に熱流束一定、周方向に等温の条件で管壁が加熱された円管内の層流をとりあげ、速度場、温度場ともに完全に発達した領域での特性を数値計算により明確にする。

#### 2. 主な記号

$\hat{B}$	: 体積力比	$= Pr K_{LC}^2 / K_{LB}^2$
$d$	: 加熱円管内直径	
$f$	: 管摩擦係数	$= -(\partial p / \partial z) d / \frac{1}{2} \rho w_m^2$
$K_{LB}$	: 水平直管複合対流の層流特性数	$= \sqrt{Ra_q}$
$K_{LC}$	: 曲管の層流特性数	$= Re / \sqrt{\lambda}$
$Nu$	: 周平均ヌセルト数	$= q_w d / [(T_w - T_b) k]$
$Pr$	: プラントル数	$= \nu / \alpha$
$q_w$	: 壁熱流束	
$Ra_q$	: 修正レイリー数	$= g \beta q_w d^4 / (\nu k \alpha)$
$Re$	: 主流のレイノルズ数	$= w_m d / \nu$

\* 航空宇宙技術研究所角田宇宙推進技術研究センター (〒981-15 角田市君萱字小金沢1)。

- $T_b$  : 混合平均温度
- $T_w$  : 管壁温度
- $w_m$  : 管内平均流速
- $\beta$  : 体積膨張係数
- $\lambda$  : 曲率パラメータ =  $R/d$

3. 基礎式と数値解法

図1に示したように曲管に固定して円環座標系  $(r, \theta, \phi)$  をとり、速度成分を  $(u, v, w)$  とする。さらに曲率パラメータ  $\lambda$  が十分に大きいと仮定すれば、管軸距離  $z = R\phi$  として円筒座標  $(r, \theta, z)$  に変換できる。管内の流れは定常非圧縮性層流で、速度場、温度場ともに完全に発達した状態にあるものとする。また Boussinesq 近似を導入して密度変化は浮力項でのみ考慮し、粘性係数などの物性値は一定と仮定する。

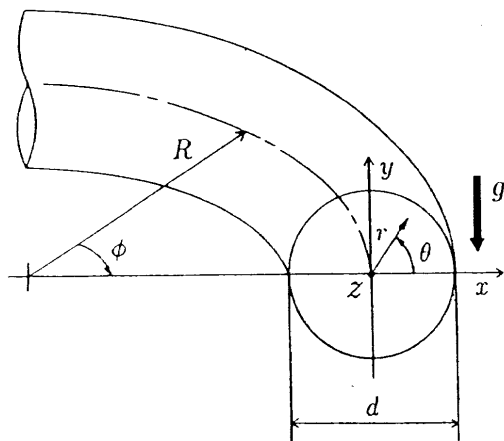


図1 曲円管の座標系

このとき温度を  $T$  とすれば、加熱曲円管内の完全発達層流の基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{w^2 \cos \theta}{R} + g\beta(T - T_b) \sin \theta + \nu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{w^2 \sin \theta}{R} + g\beta(T - T_b) \cos \theta + \nu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \dots \dots \dots (4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \dots \dots \dots (5)$$

ここに  $\nu$  は動粘性係数、 $\alpha$  は熱拡散率であり、ラプラシアンは次式で与えられる。

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

完全発達流では  $\partial p / \partial z$  は一定となるから

$$\frac{\partial p}{\partial z} = C \dots \dots \dots (6a)$$

さらに温度場も完全発達している条件により

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{4q_w}{\rho c_p w_m d} \dots \dots \dots (6b)$$

の関係がある。ここに  $\rho$  は密度、 $c_p$  は比熱である。境界条件は次のように与えられる。

$$r = d/2 : u = v = w = 0, T = T_w,$$

速度場、温度場ともに発達している場のエネルギー式の計算方法は Kays & Crawford の著書<sup>(5)</sup>を参考にした。

数値計算プログラムは Patanker の著書<sup>(6)</sup>を参考に作成したもので、著者らの一連の研究に用いているものである。有限体積法、スタガード格子、ベキ乗スキーム、SIMPLE 法によっている。格子点は  $r$  方向 32、 $\theta$  方向 53 点とり、 $\theta$  方向は  $h \times$  等間隔、 $r$  方向は壁近傍で密な不等間隔にとった。反復計算では各従属変数の無次元残差が  $10^{-6}$  以下になったときを収束条件とした。

4. 速度場と温度場の基本構造

著者らの相似性の考察によれば水平直管流れを基準にとったとき、加熱曲円管内層流の流動伝熱特性は三つのパラメータすなわち  $K_{LB}$ 、 $Pr$  および  $\bar{B}$  によって支配される。 $\bar{B}$  の物理的意味は遠心力と浮力の比であり、 $\bar{B} = 0$  は水平加熱直管流、 $\bar{B} = \infty$  は浮力の影響がない曲管流をあらわす。以下3種の  $Pr$  について  $K_{LB}$  を一定にとり、 $\bar{B}$  を大きくしていったときに速度場、温度場の構造がどのように変化するかを示す。

図2(a),(b),(c)は3種の  $Pr$  について  $K_{LB} = 100$  に固定し、 $\bar{B}$  すなわち  $K_{LC}$  を大きくしていったときの軸速度、二次流線、温度の無次元等高線分布を示したものである。左端の  $\bar{B} = 0$  は浮力のみが作用する直円管を示し、温度分布は  $K_{LB} = 100$  で決まるパターン ( $K_{LB}$  が小さいので熱伝導型) をとり、 $Pr$  によってほとんど変化しない。軸速度分布は  $Pr = 7.0$  (水) では直円管内のポアズイユ分布、 $Pr = 0.7$  (空気) では

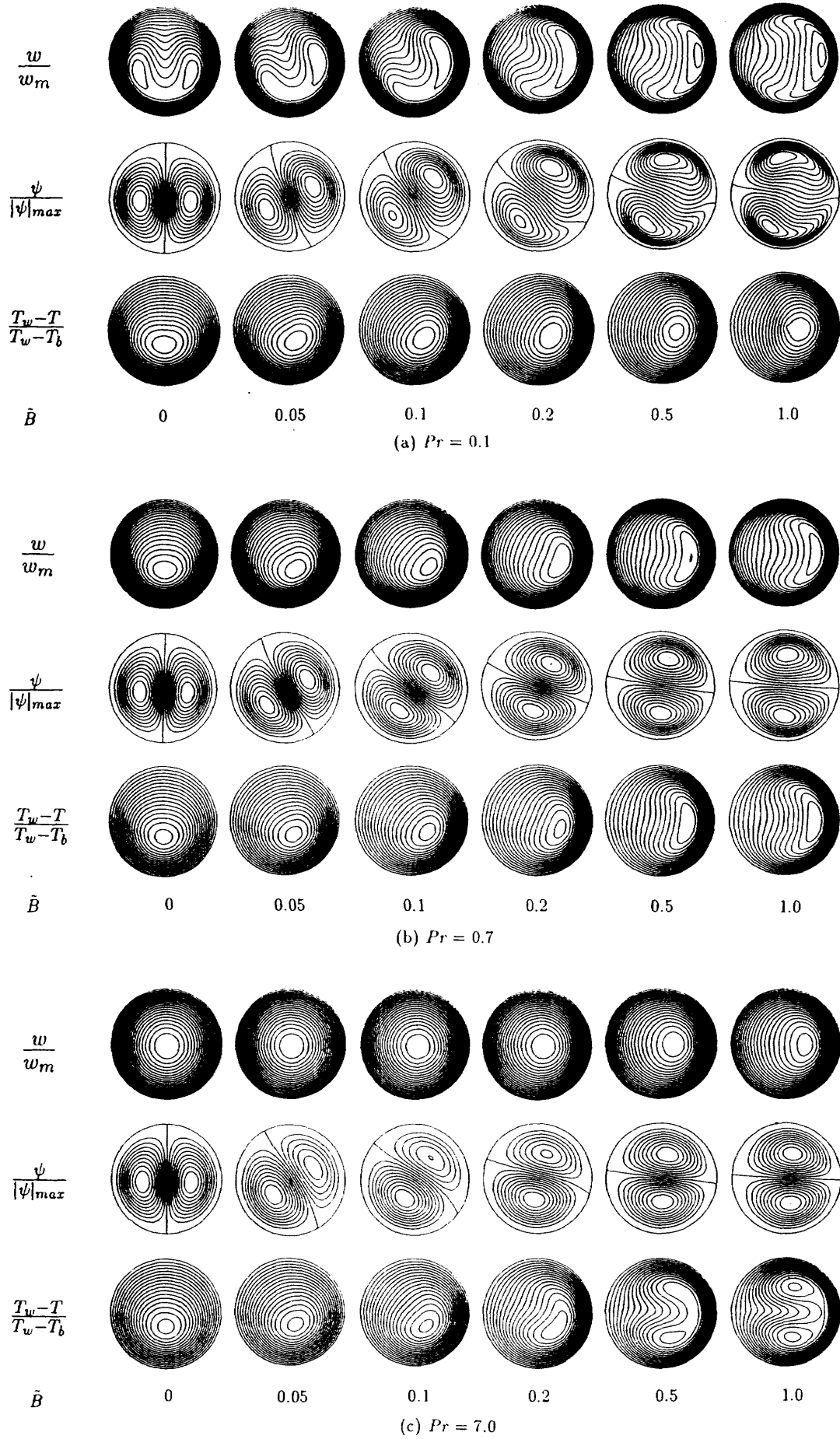


図2  $K_{LB} = 100$  における3種の  $Pr$  の等高線 (軸速度, 二次流線, 温度)

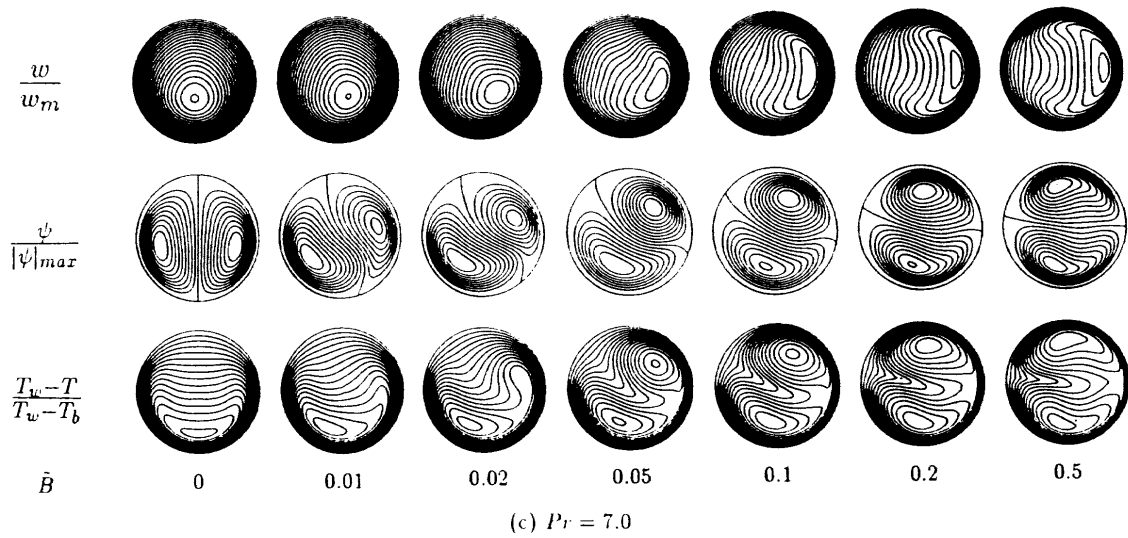
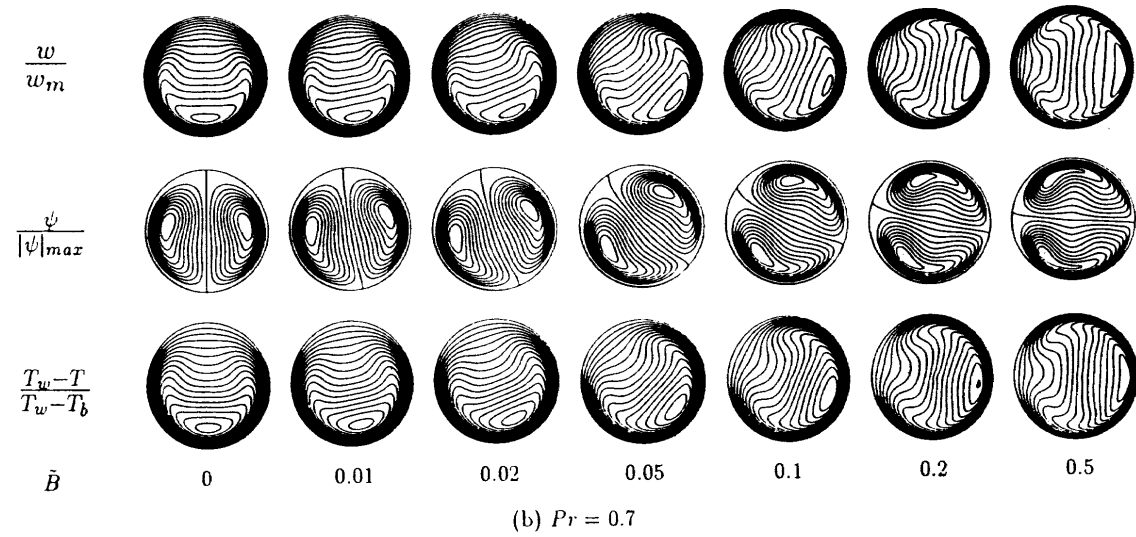
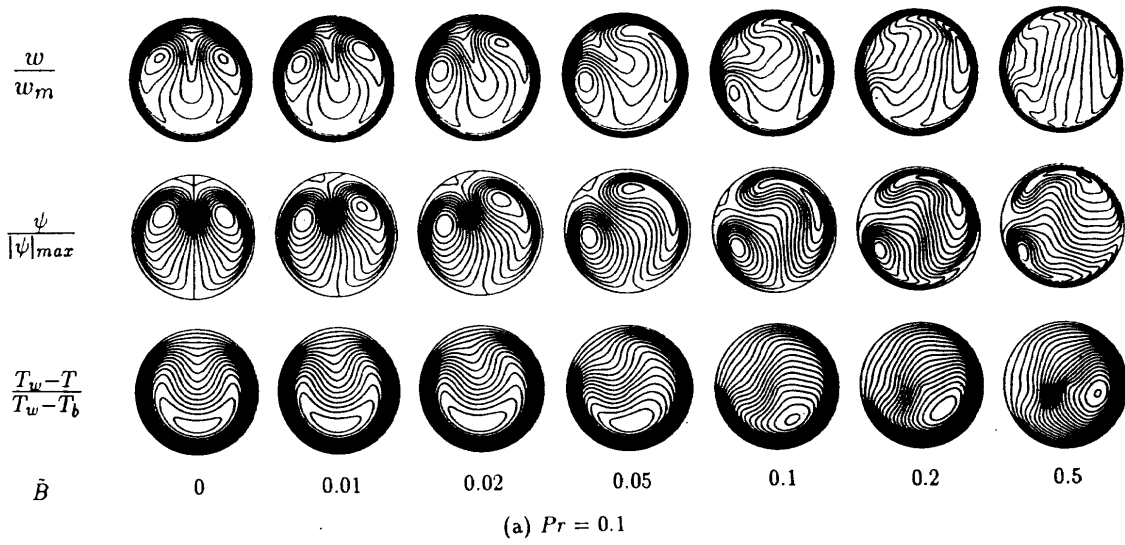


図3  $K_{LB} = 1000$  における3種の  $Pr$  の等高線 (軸速度, 二次流線, 温度)



温度分布と相似、 $Pr = 0.1$ では2ヶ所に極大値をもつ二次流線 $\psi$ に類似した分布( $Pr = 0.01$ ではこの類似性はさらに明白である)をとっている。

右端の $\bar{B} = 1$ は遠心力が優勢になった状況で、温度分布は $Pr = 7.0$ では $\psi$ 、 $Pr = 0.7$ では軸速度分布、 $Pr = 0.1$ では強制対流型の放物面分布にそれぞれ似たパターンとなっている。軸速度分布はすべての $Pr$ について $K_{LC} = K_{LB}\sqrt{\bar{B}/Pr}$ により定まる分布をとる。

次に $\bar{B}$ の中間値を見ると、 $Pr = 0.7$ の場合には軸速度分布と温度分布はつねに相似性をたもちながら、垂直から水平にとパターンが回転し、分布の様相も $K_{LB}$ で規定されるパターンから $K_{LC}$ で規定されるパターンへと変化していく。また $Pr = 0.1$ と $7.0$ の場合もそれぞれ前節で述べた二つの極限の中間的移行状態となっている。これらの図から $\bar{B}$ が増加するにつれて(i) $\psi$ に似たパターンは $Pr = 0.1$ の $w$ から $Pr = 7.0$ の $T$ に移動し、(ii)ポアズユパターンは $Pr = 7.0$ の $w$ から $Pr = 0.1$ の $T$ に移動していくことがわかる。

つぎに $K_{LB} = 1000$ についてのパターンを図3(a),(b),(c)に示す。このときは $K_{LB}$ の値が大きいので、 $\bar{B} = 0$ における温度場は境界層型である。ここでも上に述べた基本構造の説明が成立している。

5. 平均ヌッセルト数

図4に平均ヌッセルト数比 $Nu/Nu_0$ を $K_{LB}$ を横軸、 $\bar{B}$ をパラメータにして表示した。ここに $Nu_0$ は非加熱直管の値4.36である。実線が $Pr = 0.71$ (空気)、点線が $Pr = 7.0$ (水)の場合であり、浮力のみが作用する流れ場( $\bar{B} = 0$ )の場合、温度場は $Pr$ によって影響を受けないので、図から分かる通り二者はほぼ同じ値をとっている。 $\bar{B}$ の値が大きくなるにつれ

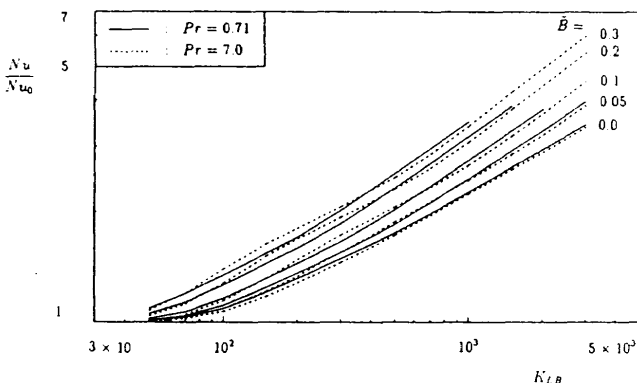


図4 平均ヌッセルト数比 ( $Nu_0$ は非加熱直管の値=4.36)

て図2,3からわかるように $Pr = 0.7$ と $7.0$ の温度パターンは異なったものになっていくから $Nu$ もはなれていく。

6. 管摩擦係数

図5に管摩擦係数比 $f/f_0$ を示した。ここに $f_0$ は非加熱直管の値 $16/Re$ である。実線が $Pr = 0.71$ (空気)、点線が $Pr = 7.0$ (水)の場合であり、浮力のみが作用する $\bar{B} = 0$ の場合でも、速度場は $Pr$ に大きく影響されるので、二者はかけはなれた値をとる。

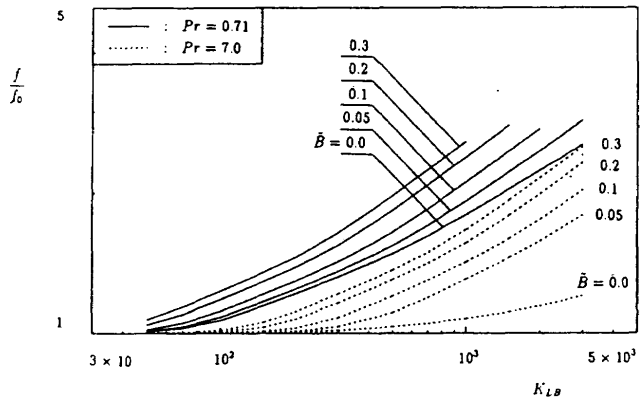


図5 管摩擦係数比 ( $f_0$ は非加熱直管の値= $16/Re$ )

7. あとがき

浮力が作用する曲円管内の流れと熱伝達について、速度場、温度場の特性を数値解析により明らかにした。加熱曲円管内層流の流動伝熱特性は三つのパラメーター $K_{LB}$ 、 $Pr$ および $\bar{B}$ によって支配されることを示した。また曲率効果のない加熱管内の流れ( $\bar{B} = 0$ )と浮力効果のない曲管内の流れ( $\bar{B} = \infty$ )の中間状態として速度場、温度場の詳細を明らかにした。

文献

- (1) 石垣, 機論, 58-550-B (1992), 1661.
- (2) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 268 (1994), 133.
- (3) 石垣, 機論, 59-560-B (1993), 1094.
- (4) 石垣, 望月, 航技研特別資料 SP-14 (1990), 181.
- (5) Kays, W. M. & Crawford, M. E., Convective Heat and Mass Transfer, 2nd ed. (1980), 90.
- (6) Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980), 113, Hemisphere.



古浦勝久 (航空宇宙技術研究所)

## Molecular Models for Monte Carlo Simulation of Rarefied Real Gases

by

Katsuhisa Koura (National Aerospace Laboratory)

## ABSTRACT

The molecular models developed recently for use in the Monte Carlo simulation of rarefied real gases are briefly discussed.

## 1. はじめに

希薄実在気体モンテカルロ・シミュレーションのための高精度・高効率分子モデルの開発研究が精力的に進められているが、多くの研究はBorgnakke-Larsenに始まる現象論的モデルの拡張である。しかし、これらの現象論的モデルは分子特性との関係が不明な現象論的パラメータを含み、その値は問題ごとに異なる可能性がある。さらに、全衝突断面積をVariable Hard Sphere (VHS)モデル等の既知衝突断面積であると仮定し、弾性・非弾性衝突、化学反応等の各分子衝突過程はsteric factorと称する確率によって生起するとされる。このため、確率や確率の和が1を越える等の困難が生じる。

著者等はミクロな分子特性パラメータを用いた分子(衝突断面積)モデルの開発研究を進めている。全衝突断面積は各分子衝突過程に対する衝突断面積の和で与えられる。現在までに開発した衝突断面積モデルは文献1)-3)に詳述してあるので、本報告ではそれらの概略を述べる。なお、これらの断面積を用いた希薄実在気体モンテカルロ・シミュレーションのためにNull-Collision

Technique<sup>4)</sup>を改良したImproved Null-Collision Techniqueと原子の再結合シミュレーションのために導入したNull-Molecule概念が文献3)に記述されている。

## 2. 分子モデル

弾性衝突モデル<sup>1)</sup>

実在気体の粘性及び拡散係数の両者を良い精度で近似する計算効率の高いVariable Soft Sphere (VSS)モデルを開発した。VSSモデルは混合気体のシミュレーションにおいてVHSモデルよりも優れているが、両者とも速度分布関数の精度において不十分である。

回転非弾性衝突モデル<sup>2)</sup>

分子の衝突前後の回転状態の無相関の仮定、微視的詳細の釣り合い、Parkerのエネルギー利得関数等を用いてStatistical Inelastic Cross Section (SICS)モデルを開発した。SICSモデルは現象論的モデルにおける巨視的・微視的回転衝突数の混同等を解明し、窒素分子衝撃波中で測定された二極性回転分布等を良く再現するが、初期回転緩和が実験結果と比較して速すぎる難点がある。

振動非弾性衝突モデル<sup>3)</sup>

半古典的ITFITS振動遷移確率とLine-of-Centers Cross Section (LCCS)を微視的詳細の釣り合いを満たすように組合わせたITFITS-LCCSモデルを開発した。低温においてMillikan-Whiteの振動緩和時間の半経験式と良い精度で一致するように立体因子とポテンシャル・パラメータを決定する。ITFITS-LCCSモデルの高温での振動緩和時間はParkの予想と一致して温度の上昇に伴う増大を示す。調和振動子モデルを用いているので、非調和振動の影響を吟味する必要がある。

解離モデル<sup>3)</sup>

Weak-Vibrational-Bias (WVB)解離確率とLCCSを組合わせたWVB-LCCSモデルを開発した。(非平衡)解離速度定数の実験値と良い精度で一致するように立体因子とWVBパラメータを決定する。WVB-LCCSモデルによって求められた解離誘導時間は実験結果と良い一致を示す。調和振動子モデルを用いているので、非調和振動の影響を吟味する必要がある。

再結合モデル<sup>3)</sup>

三体再結合反応をOrbiting Pair (OP)の生成と安定化の二段階二体衝突で記述するTwo-Step Binary Collision (TSBC)モデルを開発した。OPの生成断面積は質量作用の法則から、また、OPの安定化断面積は解離断面積との微視的詳細の釣り合いから決定する。TSBCモデルは適合パラメータを含まないが、電子的励起を考慮していない。

## 参考文献

- 1) K. Koura et al., Phys. Fluids A3, 2459 (1991); A4, 1083 (1992); AIAA Prog. Astronaut. Aeronaut. 159, 459 (1994).

- 2) K. Koura, Phys. Fluids A4, 1782 (1992); A5, 778 (1993); AIAA Prog. Astronaut. Aeronaut. 158, 164 (1994).
- 3) K. Koura, Phys. Fluids 6, 3473 (1994).
- 4) K. Koura, Phys. Fluids 29, 3509 (1986); AIAA Prog. Astronaut. Aeronaut. 117, 25 (1989); Phys. Fluids A2, 1287 (1990).

NWTを用いた希薄流モンテカルロ直接シミュレーション  
 高平 幹成 (大興電子通信株式会社) 古浦 勝久 (航空宇宙技術研究所)

Monte Carlo Direct Simulation of Rarefied Gas Flows Using the NWT

by

Mikinari TAKAHIRA (Daiko Denshi Tsushin, Ltd)

Katsuhisa KOURA (National Aerospace Laboratory)

#### ABSTRACT

A code of the "rarefied gas numerical wind tunnel (RGNWT)" developed for the Monte Carlo direct simulation of rarefied gas flows is paralleled to work on the NWT parallel vector computer system. Some simulation results indicate that the NWT is preferable to the Monte Carlo direct simulation of rarefied gas flows.

#### 1. はじめに

H O P E等の高層大気飛行物体の希薄大気飛行時における空力特性を求めため「希薄気体数値風洞」の開発研究を進めている<sup>1)</sup>。希薄気流中の3次元全機シミュレーションには、高精度・高効率な手法が必要であり、擬衝突直接シミュレーション・モンテカルロ(NC-DSMC)法を用いているが、飛行高度の減少につれて流れは連続流に近づき、計算時間と記憶容量が急速に増大する。そのため、1993年2月に航空宇宙技術研究所に導入されたNWTを用いてコードの並列化を行い、希薄流シミュレーションにおけるNWTの有効性を検討した。

#### 2. コードの並列化

NWTはVP400相当の要素計算機(PE)を140台配置し、それらを高速のクロスバーネットワークで結合した分散メモリ型並列計算機システムであるが、PE間のデータアクセス(グローバルアクセス)速度が計算処理速度等に比べて非常に遅い事に注意して並列化を行う必要がある。「希薄気体数値風洞」においてNWTの性能を十分に引き出すため次の様な並列化を行った。

DSMC法では分子運動と分子衝突を小さな時間ステップの間分離して取り扱う。分子運動については、PE間の分子データの転送を極力少なくするため、衝突セルを最小単位とする計算領域を一様流方向にそって各PEに分割する。物体の形状に関する比較的少量のデータは各PEに重複したローカルデータとして持たせ、分子と物体の衝突は各PEで独立に処理を行う。また、PE間を移動する分子データは用意したバッファにローカルアクセスで入れ、その後、SPREAD MOVEで

まとめて他のPEへ転送する。この際、使用するメモリーを少なくするため、隣接PEへの転送用2種類及び2つ以上離れたPEへの非常に少ない分子データ転送用の1種類の計3種類のバッファを用意した。

分子衝突については、分子を計算領域毎にまとめ、それぞれのPEが受け持つ計算領域における分子に独立に通し番号をつけ、各PEでローカルに独立な処理を行う。また各衝突セルの分子間衝突シミュレーションの計算時間は一律ではないので、各PEの計算領域の大きさを任意に指定できるようにし、各PEの計算時間のばらつきを小さくするように工夫した。

並列化前後の上述のイメージを図1、2に示す。

#### 3. NWT台数効果

「希薄気体数値風洞」の並列化コードを用いてNWTのPE台数効果の評価を行った。

2次元並列化プログラムを用いて、一様流マッハ数 $M_\infty=20$ 、一様流温度 $T_\infty=20\text{K}$ 、及び連続流に近い一様流クヌーセン数 $Kn_\infty=0.025$ の2次元円柱周りの窒素分子流のシミュレーションを行った。衝突セル数 $405 \times 505$ 個、データセル数 $81 \times 101$ 個、及び計算領域内の分子数 $\sim 10^6$ 個を用いた。ベクトル化のみを行ったプログラムをPE1台で実行した場合を基準とし、さらに並列化を行ったプログラムの計算速度及び実効記憶容量の比を図3に示す。PE16台を用いた場合、計算速度は15倍、実効記憶容量は11倍程度の向上がみられる。

3次元並列化プログラムを用いて、一様流マッハ数 $M_\infty=20$ 、一様流温度 $T_\infty=300\text{K}$ 、及び一様流クヌーセン数 $Kn_\infty=0.1$ の3次元H O P E形状周りの窒

素分子流シミュレーションを行った。衝突セル数 $64 \times 64 \times 64$ 個、データセル数 $64 \times 64 \times 64$ 個、計算領域内の分子数 $\sim 2 \times 10^6$ 個を用いた並列化プログラムの台数効果を図4に示す。PE16台を用いた場合、計算速度は14倍、実効記憶容量は13倍程度の向上がみられる。

以上の結果よりNWTが希薄流モンテカルロ直接シミュレーションに対し有効であることが確認できたので、「希薄気体数値風洞」の汎用コードの並列化をさらに進める予定である。

参考文献

- 1) 古浦勝久、高平幹成：  
NAL SP-16 (1991)；  
NAL SP-19 (1992)；  
NAL SP-22 (1993)。

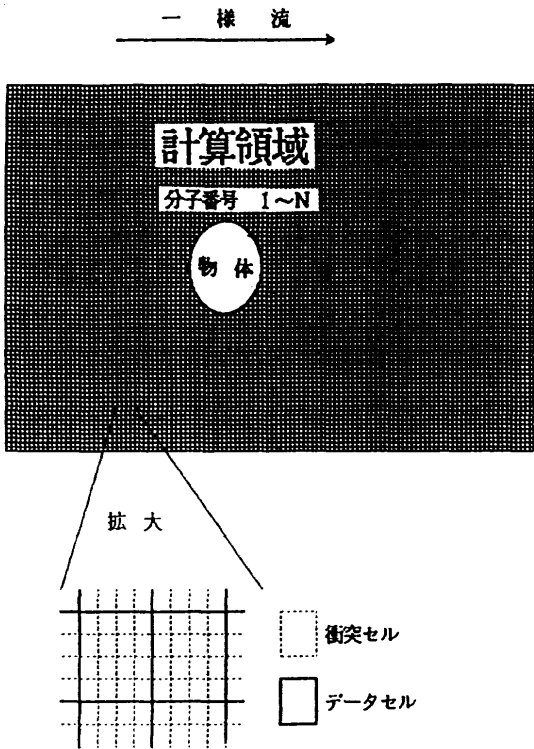
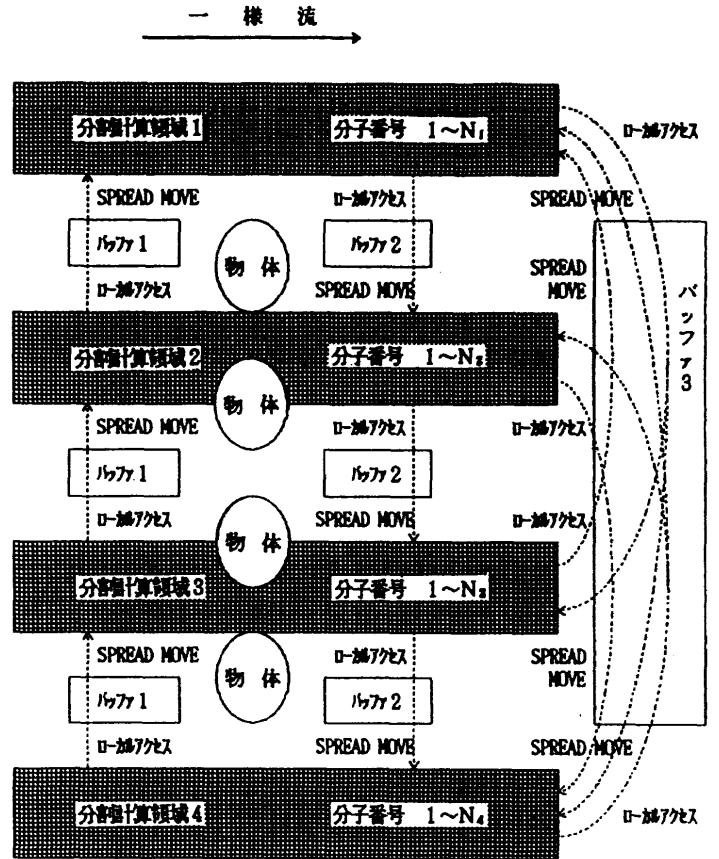


図1 並列化前のイメージ



$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N$$

---> : 分子移動

バッファ1、2の必要量=分割数×隣接する計算領域に移動する分子数

バッファ3の必要量=分割数×分割数×2つ以上離れた計算領域に移動する分子数

図2 並列化後のイメージ (PE 4台使用の場合)

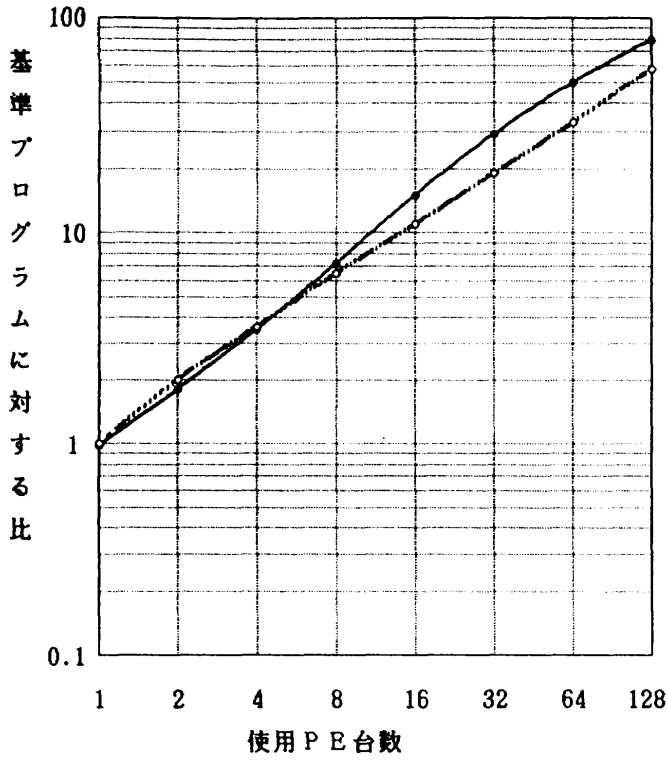


図3 NWTの台数効果(2次元円柱)

—●— : 計算速度比  
 - - ○ - - : 実効記憶容量比

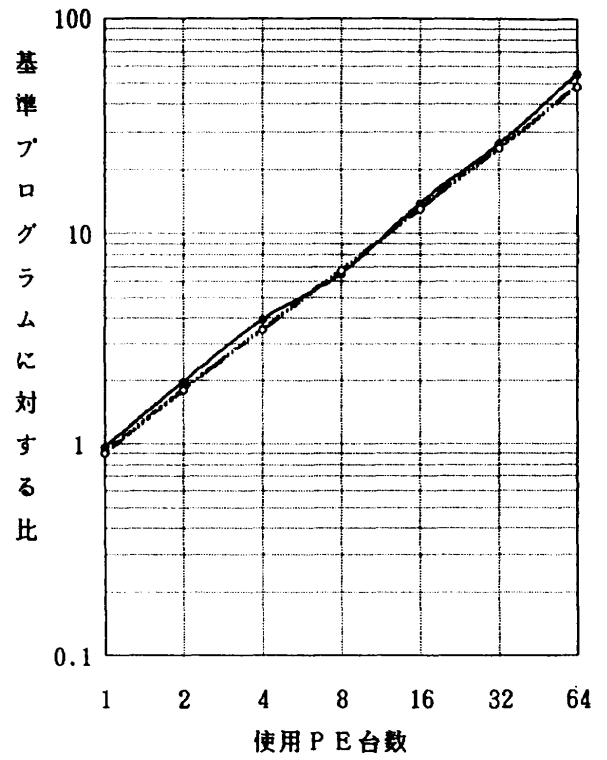


図4 NWTの台数効果(3次元HOPE形状)

—●— : 計算速度比  
 - - ○ - - : 実効記憶容量比





# 圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いた 非圧縮性一様等方乱流の直接数値シミュレーション

西田 秀利\*, 河本 天\*  
虎尾 禎己\*\*

## Direct Numerical Simulation of Incompressible Homogeneous Isotropic Turbulence Using Compressible Navier-Stokes Equations

by

Hidetoshi NISHIDA\*, Makoto KAWAMOTO\*

Kyoto Institute of Technology

and

Yoshimi TORAO\*\*

Shin-Meiwa Industry Co., Ltd.

### ABSTRACT

In this paper, the incompressible homogeneous isotropic turbulence is simulated by using the compressible Navier-Stokes equations. The compressible Navier-Stokes equations are solved by the higher order method of lines. The spatial derivatives of the governing equations are discretized by the modified differential quadrature (MDQ) method, and the resulting system of the ordinary differential equations in time is integrated by the low-storage Runge-Kutta scheme. The direct numerical simulation is carried out with  $Re=50\sqrt{2}$ ,  $Ma=0.03$ . The present 10th order solutions are in good agreement with the incompressible solutions with 10th order of spatial accuracy obtained by the vorticity-streamfunction formulation.

### 1. はじめに

非圧縮性乱流解析は通常、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式系を支配方程式として行われるが、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式系においては時間発展型方程式である運動方程式及び楕円型方程式により構成されるために、毎時間ステップごとに楕円型方程式の収束解を求める必要があり、この楕円型方程式の解法に費やされる計算時間は全体の計算時間の大部分を占める。その点、圧縮性ナビエ・ストークス方程式系は運動方程式と代数関係で示される状態方程式とで構成されるため、楕円型方程式を解く必要がなく、1時間ステップ当たりの計算時間の減少が見込まれる。しかしながら、安定性の観点からはマッハ数が低くなるに従って、計算可能な時間ステップ $\Delta t$ が小さくなるという欠点も存在するが、Morinishi等<sup>1)</sup>は圧縮性方程式を用いて非圧縮性流れを解析し、非圧縮性方程式の数値解と比較し、良好な結果を得ている。

圧縮性方程式に支配される乱流(圧縮性乱流)は、準非圧縮性乱流( $Ma \leq 1$ ,  $\rho_{r.m.s.0} \leq Ma^2$ )・衝撃波無し乱流

( $Ma < 1$ ,  $\rho_{r.m.s.0} = O(Ma)$ )・弱い衝撃波を伴う乱流( $Ma < 1$ ,  $\rho_{r.m.s.0} = O(1)$ )及び強い衝撃波を伴う乱流( $Ma = O(1)$ )に分類することが<sup>2),3)</sup>が、本報告においてはその内の一様流マッハ数の非常に低い準非圧縮性乱流を取り上げ高次精度直接数値シミュレーションを行った結果について、非圧縮性方程式(渦度-流れ関数表示ナビエ・ストークス方程式)の数値解と比較することにより、圧縮性方程式による非圧縮性乱流解析が可能であるかを検討することを目的とする。

### 2. 支配方程式及び計算条件

支配方程式は2次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式であり、無次元・保存形ベクトル表示で以下のように記述される。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \right) \dots \dots (1)$$

ただし、ベクトル $\mathbf{q}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{R}$ 及び $\mathbf{S}$ は保存量ベクトルであり、式(2)のように表わされる。また、式(1)の無次元化は、代表長さ・代表速度・代表密度・代表温度を用いて行っており、非圧縮性方程式との整合性を保つために粘性係数及び熱伝導係数は定数としている。

\* 京都工芸繊維大学工芸学部機械システム工学科

\*\* 新明和工業株式会社

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ R_4 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ S_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

ここで、粘性応力項  $\sigma_x, \sigma_y$  及び  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  並びに熱流束項  $R_4, S_4$  は次のように定義される。

$$\sigma_x = \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y}, \sigma_y = \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$R_4 = u\sigma_x + v\tau_{xy} + \frac{1}{(\gamma - 1)\text{Pr}Ma^2} \frac{\partial T}{\partial x} \dots\dots\dots(3)$$

$$S_4 = u\tau_{yx} + v\sigma_y + \frac{1}{(\gamma - 1)\text{Pr}Ma^2} \frac{\partial T}{\partial y}$$

ただし、比熱比  $\gamma$  は一定とし、 $\text{Re}, \text{Pr}$  及び  $\text{Ma}$  はレイノルズ数、プラントル数及びマッハ数である。また、状態方程式は、理想気体を仮定すると、

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \dots\dots\dots(4)$$

と表わされる。

一方、比較の対象として取り上げる過度一流れ関数表示ナビエ・ストークス方程式は、式(1)と同様の無次元化を施すと、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \dots\dots\dots(5)$$

と表わされる。ここで、 $\omega$  は過度であり、 $\Psi$  は流れ関数である。

計算領域は、一辺  $2\pi$  の正方領域とし、一様等方性を仮定しているために  $x$  及び  $y$  方向共に周期境界条件とする。また、初期条件は自己相関スペクトルを

$$C(k) = k^4 \exp(-2k^2/k_0^2) \dots\dots\dots(6)$$

と定義し、速度及び密度に関して式(6)を満足するように乱数を用いて与える。ここで、 $k_0$  はピーク波数であり、本報告においては  $k_0=3.7$  に設定している。圧力に関しては、非圧縮性流れにおいて楕円型方程式を解くことによって相対圧力を求めることによって決定することとし、温度は状態方程式より求める。

### 3. 数値計算法

数値計算法は高次精度線の方法<sup>(4)</sup>を採用する。高次精度線の方法は、空間微分項と時間微分項を別個に取り扱う方法であり、空間微分項の離散化には修正微分求積法 (Modified Differential Quadrature Method; MDQ法)<sup>(5)</sup>を採用する。その結果、時間・空間に関する偏微分方程式は時間に関する連立常微分方程式に帰着し、この時間に関する連立常微分方程式の積分には3段階4次精度の縮退ルンゲ・クッタ法 (Low Storage Runge-Kutta Scheme)<sup>(6)</sup>を採用する。

#### 3.1 空間微分項の離散化

空間微分項の離散化には前述のMDQ法を採用する。MDQ法は空間微分項を適当に定めた係数と関数値との線形結合で近似するものである。例えば、速度成分  $u$  の1階及び2階偏微分は各々以下のように近似することができる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} = \sum_{m=-q}^q a_{im} u_{i+m,j}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \sum_{m=-q}^q b_{im} u_{i+m,j} \dots\dots\dots(7)$$

ここで、 $a_{im}$  及び  $b_{im}$  は重み係数であり、1階微分の係数  $a_{im}$  は

$$a_{im} = \frac{\Pi'(x_{i,j})}{(x_{i,j} - x_{i+m,j})\Pi'(x_{i+m,j})} \quad (m \neq 0)$$

$$a_{im} = \frac{\Pi''(x_{i,j})}{2\Pi'(x_{i,j})} \quad (m = 0) \dots\dots\dots(8)$$

で与えられる。ただし、 $\Pi(x)$  は

$$\Pi(x) = (x - x_{i-q,j}) \dots (x - x_{i,j}) \dots (x - x_{i+q,j}) \dots\dots\dots(9)$$

で定義される補助関数である。また、2階微分の係数  $b_{im}$  は1階微分の係数  $a_{im}$  を用いて

$$b_{im} = \sum_{\ell=-q}^q a_{i\ell} a_{\ell m} \dots\dots\dots(10)$$

と与えられる。MDQ法においては  $M=2q+1$  をMDQ法の次数と呼び、一般に  $(M-1)$  次精度となる。従って、 $M$  を変化させることにより任意に空間精度を選択することができる。さらに、 $M=3$  の時は2次精度の中心差分近似と、 $M \rightarrow \infty$  の極限においてはフーリエ級数展開法と同一の結果を与えることが知られている<sup>(7)</sup>。本報告においては  $M=11$  とし、10次精度で計算を行っている。

#### 3.2 時間積分法

MDQ法により任意の空間精度で空間微分項を離散化すると時間に関する連立常微分方程式

$$\frac{dq}{dt} = W(q) \dots\dots\dots(11)$$

に帰着される。ただし、 $W$  は空間微分項離散化演算子

とする。この連立常微分方程式の解法には3段階4次精度の縮退ルンゲ・クッタ法を用いる。縮退ルンゲ・クッタ法の計算手順は以下ようになる。

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= \Delta t W(q^*), \quad q^{(1)} = q^* + Q^{(1)} \\ Q^{(2)} &= -5Q^{(1)} + \Delta t W(q^{(1)}), \quad q^{(2)} = q^{(1)} + Q^{(2)}/8 \quad \dots(12) \\ Q^{(3)} &= Q^{(2)}/16 + \Delta t W(q^{(2)}), \quad q^{*+1} = q^{(2)} + 2Q^{(3)}/3 \end{aligned}$$

### 3.3 非圧縮性方程式の解法

式(5)の渦度-流れ関数表示ナビエ・ストークス方程式系の解法は、渦度輸送方程式については上述した高次精度線の方法を採用する。ここで、空間精度は同様に10次精度としている。また、楕円型方程式である流れ関数方程式は境界条件が周期条件であるために、フーリエ級数展開法を採用する。

### 4. 計算結果

本報告においては、格子点数128×128の等間隔格子を採用し、一様流マッハ数Ma=0.03, プラントル数はPr=1.0とし、レイノルズ数はRe=50√2 (初期のマイクロスケールレイノルズ数ではRe<sub>λ0</sub>=50)と設定する。初期の速度場は完全に非圧縮性であり、初期の密度変動についてはρ<sub>r.m.s.0</sub>=0.0 (Case A)及びρ<sub>r.m.s.0</sub>=Ma<sup>2</sup> (Case B)の2種類の場合を取り上げる。

まず、Case A及びCase Bの渦度ω(=∂v/∂x-∂u/∂y)の時間推移を等高線で図1及び2に示す。ただし、図中実線は圧縮性の数値解を破線は非圧縮性の数値解を各々示すものとする。Case A及びCase B共に非圧縮性の数値解と比較すると、ほぼ完全に一致した数値解が各時刻において得られていることが認められる。また、図3には密度場、図4には温度場を両ケースについて等高線で示す。密度場については変動幅が1/1000のオーダー、温度場については1/10000のオーダーであり、密度変動のほとんど無い等温の流れ場になっていることが認められ、準非圧縮性として振る舞うことが確認される。

次に、非圧縮性乱流において良く用いられる乱流統計量の比較を行う。ここで取り上げる統計量は全エネルギーΣ, エンストロフィΩ, エンストロフィ散逸率η及びマイクロスケールに対するレイノルズ数Re<sub>λ</sub>の4種類であるが、各々はエネルギー・スペクトルE(k)

$$\begin{aligned} E(k) &= \sum_{k=1/2 \leq k' \leq k+1/2} U(k'), \quad k' = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ U(k_1, k_2) &= \frac{1}{2} |\hat{u}(k_1, k_2)|^2 \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

を用いて、以下のように表わされる。ただし、「^」は波数空間における関数を表わす。

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{N/2} E(k), \quad \Omega = \sum_{k=1}^{N/2} k^2 E(k), \quad \eta = 2\nu \sum_{k=1}^{N/2} k^4 E(k)$$

$$\lambda = \left( \frac{\nu \Omega}{\eta} \right)^{1/2}, \quad Re_\lambda = \left( \frac{\Sigma \Omega}{\nu \eta} \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで、λはマイクロスケールであり、νは動粘性係数である。図5にこれら4種の統計量の時間変化を示す。図中のシンボルは「□」がCase A, 「△」がCase Bの結果を各々示し、「○」は非圧縮性の結果を示している。これらの結果より、各統計量共に、3者は極めて良好に一致していることが認められる。

さらに、エネルギー・スペクトルE(k)の分布を図6に示す。ここで、圧縮性乱流の結果において速度を圧縮性成分(u<sup>c</sup>)と非圧縮性成分(u<sup>i</sup>)に分解し、

$$u = u^c + u^i \quad (\nabla \cdot u^i = 0, \nabla \times u^c = 0) \quad \dots(15)$$

各々の成分に対するエネルギー・スペクトルを式(13)より求めている。図6より、各Case共にエネルギー・スペクトルの非圧縮性成分が支配的であり、非圧縮性成分は非圧縮性のエネルギー・スペクトルと高波数のごく一部分を除いて良好に一致していることが確認される。図7にはエネルギー・スペクトルの非圧縮性成分の時間変化を示すが、2次元乱流の特長であるエネルギーの逆カスケード現象が生じていることも認められる。

最後に、次式で定義される圧縮性率χの時間変化を図8に示す。

$$\chi = \int u^c(x)^2 dx / \int (u^i(x)^2 + u^c(x)^2) dx \quad \dots\dots\dots(16)$$

初期は非圧縮性を仮定しているためにχ=0.0であり、流れ場が非圧縮性のまま推移するならば、χもほぼ0のまま推移することが予想されるが、Case A, Case B共にほぼ0のまま推移している様子が認められる。

以上のことを総合すると、圧縮性方程式(圧縮性ナビエ・ストークス方程式)を高次精度線の方法用いて低マッハ数で数値計算を行うことにより、乱流のような非定常現象でも非圧縮性の数値解と遜色のない数値解が得られることが判明した。

### 5. おわりに

本報告においては、圧縮性ナビエ・ストークス方程式をマッハ数が非常に低い場合について、高次精度線の方法で解くことにより非圧縮性乱流を再現できるかについて検討を行った。その結果、準非圧縮性として振る舞うとされている条件(Ma<1, ρ<sub>r.m.s.0</sub>≤Ma<sup>2</sup>)においては、流れ場・乱流統計量及びエネルギー・スペクトル共に非圧縮性方程式の数値解(非圧縮性乱流)と良好に一致することが確認された。しかしながら、今回は計算効率は全く考慮しておらず、この点からいえば非圧縮性乱流を圧縮性方程式で再現するためには、非圧縮性方程式の計算時間の約40倍の計算時間を必要とした。圧縮性方程式を用いて非定常非圧縮性流れを解析する際には、この点をどのように克服するかが今後の課題であろうと思われる。

参考文献

- (1) Morinishi, K. and Satofuka, N., "Validity of Rational Runge-Kutta Solution for Low Mach Number Flows", AIAA Paper 90-3017, pp.1-12 (1990).
- (2) Passot, T. and Pouquet, A., "Numerical Simulation of Compressible Homogeneous Flow in the Turbulent Regime", J. Comp. Phys., Vol.181, pp.441-466 (1987).
- (3) Hussaini, M.Y., Speziale, C.G. and Zang, T.A., "Discussion of the Potential Limitations of Direct and Large-Eddy Simulations", NASA CR-18605, ICASE Report No.89-61, pp.1-15 (1989).
- (4) Satofuka, N. and Nishida, H., "A New Method for the Numerical Simulation of Turbulence", BAIL III, Proc. of the Third Int. Conf. on Boundary and Interior Layers (Boole Press), pp.291-296 (1984).
- (5) Satofuka, N., Morinishi, K. and Nishida, H., "Numerical Solutions of the Vlasov Equation", Institute of Plasma Physics Research Report, IPPJ-725 (Nagoya University), pp.11-24 (1985).
- (6) Williamson, J.H., "Low-Storage Runge-Kutta Schemes", J. Comp. Phys., Vol.35, pp.48-56 (1980).
- (7) Satofuka, N., "A New Explicit Method for the Numerical Solution of Parabolic Differential Equations", Numerical Properties and Methodologies in Heat Transfer (Hemisphere), pp.97-108 (1983).

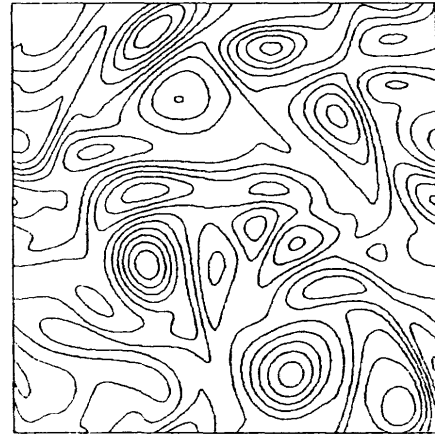


图 1 (c) 渦度場 (Case A,  $t = 3.0$ )

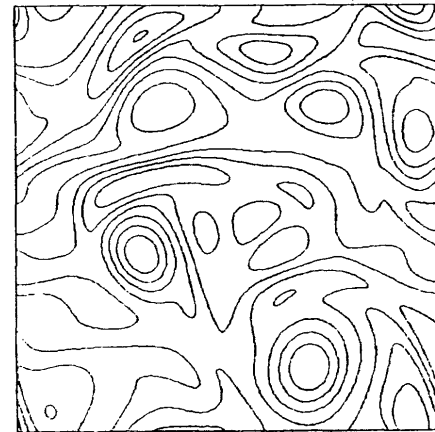


图 1 (d) 渦度場 (Case A,  $t = 4.0$ )



图 1 (a) 渦度場 (Case A,  $t = 1.0$ )



图 2 (a) 渦度場 (Case B,  $t = 1.0$ )

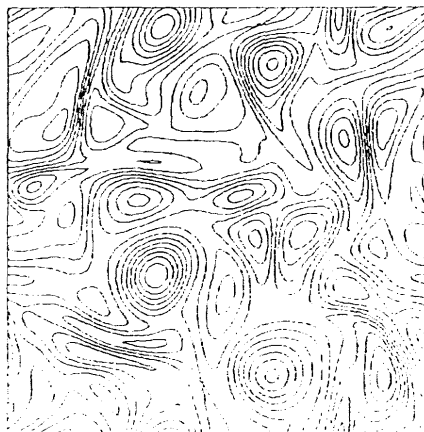


图 1 (b) 渦度場 (Case A,  $t = 2.0$ )

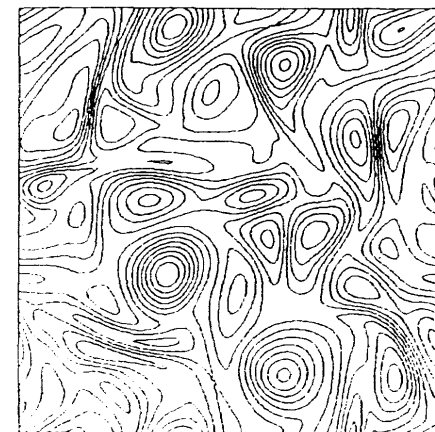


图 2 (b) 渦度場 (Case B,  $t = 2.0$ )

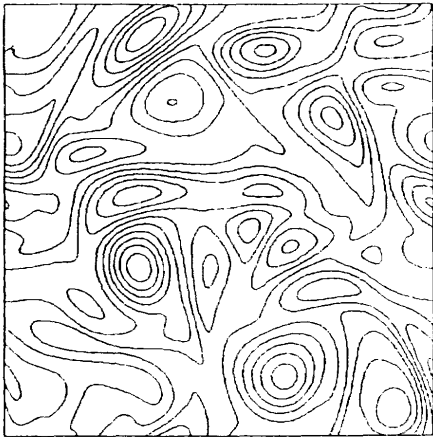


図 2 (c) 渦度場 (Case B,  $t = 3.0$ )



図 2 (d) 渦度場 (Case B,  $t = 4.0$ )

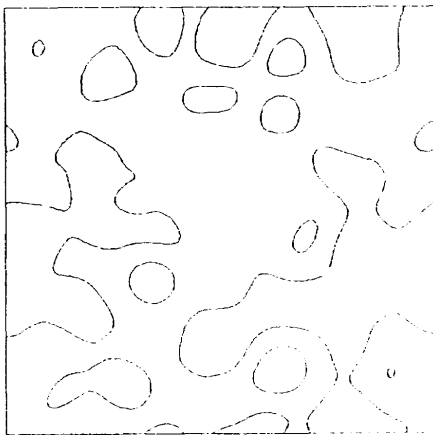


図 3 (a) 密度場 (Case A,  $t = 2.0$ )

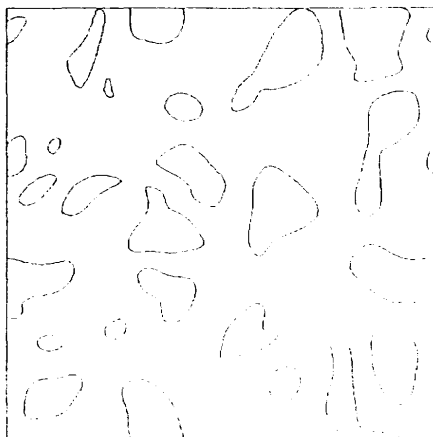


図 3 (b) 密度場 (Case B,  $t = 2.0$ )

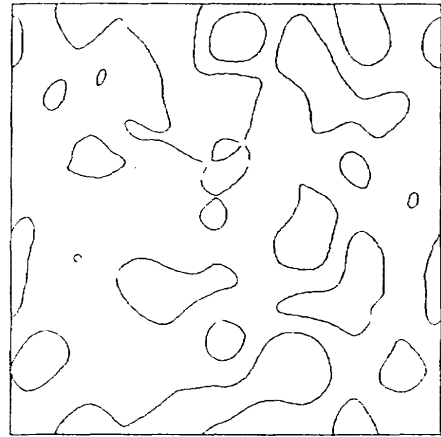


図 4 (a) 温度場 (Case A,  $t = 2.0$ )

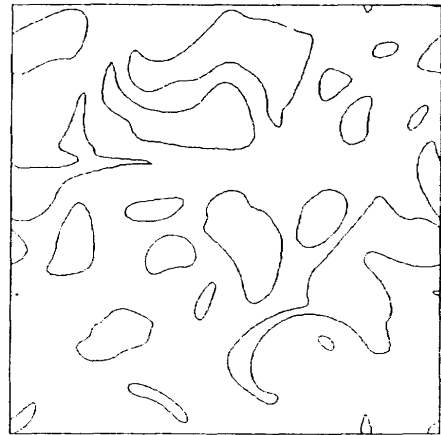


図 4 (b) 温度場 (Case B,  $t = 2.0$ )

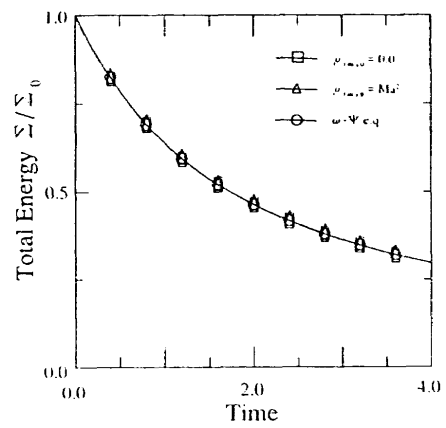


図 5 (a) 全エネルギーの時間変化

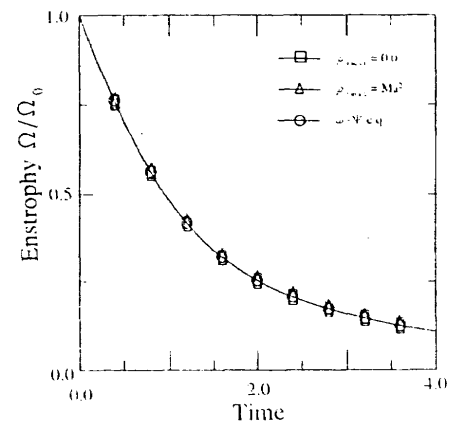


図 5 (b) エンストロフィの時間変化

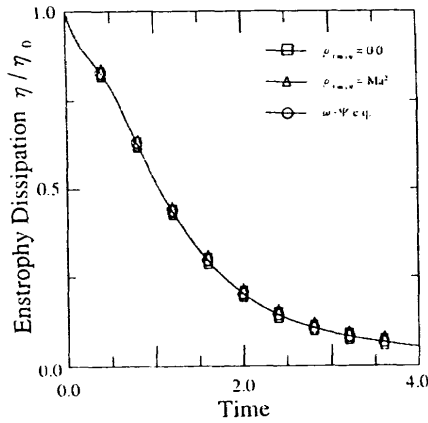


図 5 (c) エンストロフィ散逸率の時間変化

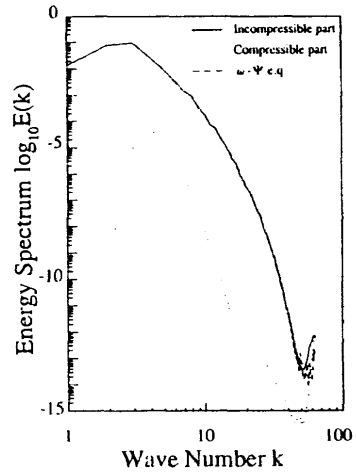


図 6 (b) エネルギー・スペクトル (Case B, t=2.0)

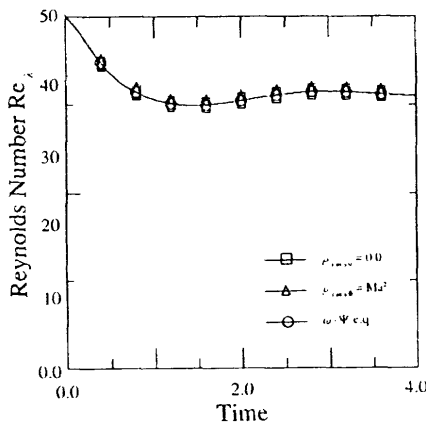


図 5 (d) マイクロスケールレイノルズ数の時間変化

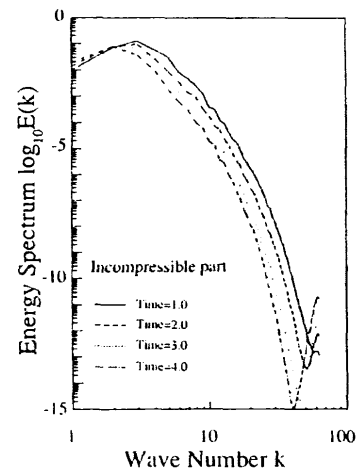


図 7 エネルギー・スペクトルの時間変化 (Case B)

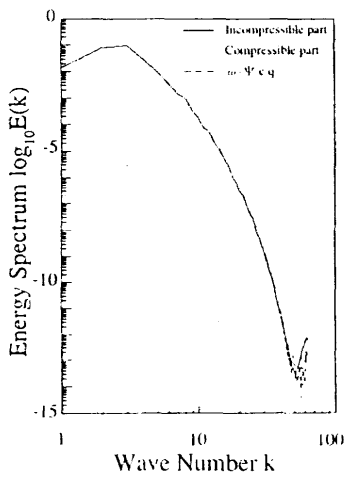


図 6 (a) エネルギー・スペクトル (Case A, t=2.0)

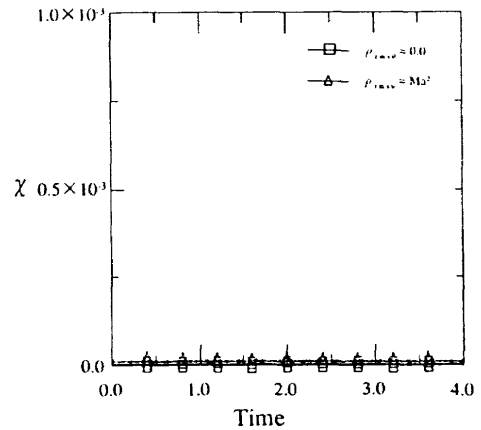


図 8 圧縮性率の時間変化

航空宇宙技術研究所 山本稀義  
電気通信大学 細川巖、生出伸一

Direct Numerical Simulation of Incompressible Homogeneous Isotropic Turbulence  
Using NWT

by

Kiyoshi Yamamoto<sup>1</sup>, Iwao Hosokawa<sup>2</sup> and Shin-ichi Oide<sup>2</sup>

<sup>1</sup>National Aerospace Laboratory

<sup>2</sup>The University of Electro-Communications

Abstract

Direct numerical simulation (DNS) of incompressible homogeneous isotropic turbulence is conducted by the use of the Numerical Wind Tunnel (NWT), a parallel computer introduced to NAL last year. The DNS with  $512^3$  mesh points in space can be calculated by the NWT with 128 processor elements. The fully developed turbulent fields, velocity and temperature, are obtained by the DNS which used the Fourier spectral method for the calculation of the Navier-Stokes equation and the diffusion equation. The energy spectrum obtained takes the  $k^{-5/3}$  power law in the inertial subrange. The probability distribution function has the Gaussian distribution for the velocity, but exponential functions for the various velocity derivatives. The intense vorticity concentrates into short tube-like regions in space, but the temperature gradient into sheet-like regions.

Keywords : DNS, isotropic turbulence, parallel computer, spectral method.

1. はじめに

計算機の進歩によって流体力学に於ける計算流体力学 (CFD) の役割は益々重要になってきている。これは乱流についても同様であって、従来の実験的研究に加えて、数値シミュレーションは乱流研究の重要な源となってきている。計算方法についても従来は乱流モデルを使用した差分法が中心であったが、現在では計算精度の良いスペクトル法による直接数値シミュレーション (DNS) が多くの成果を挙げる様になってきた。これは主として最近の計算機の飛躍的發展による。スーパーコンピュータは現在ベクトル計算機から並列計算機へと発展しているが、その結果、計算速度もGFLOPSからTFLOPSへと進展しようとしている。航空宇宙技術研究所では昨年新しい並列計算機である数値風洞 (Numerical Wind Tunnel: NWT) を導入したが、その理論的ピーク速度は236 GFLOPSになっている。ここではこれを用いて行われた減衰一様等方性乱流のDNSについて述べる。

一様等方性乱流のDNSはしばしばその時点の最先端のスーパーコンピュータを用いて挑戦されてきた

研究課題である。それらの中で、Kerr(1885)<sup>1)</sup>は $128^3$ 格子点の強制乱流のDNSを行い、テイラーのマイクロスケールレイノルズ数、 $R$ が83までの乱流速度場を計算した。また、山本と細川(1988)<sup>2)</sup>は同じ $128^3$ 格子点で減衰乱流のDNSを行い、 $R \sim 100$ の乱流速度場を得た。一方、Vincent & Meneguzzi(1991)<sup>3)</sup>は $240^3$ 格子点で強制乱流のDNSを行い、 $R \sim 150$ の結果を得た。さらに、最近Chen et al(1993)<sup>4)</sup>およびJiménez et al (1993)<sup>5)</sup>等は $512^3$ 格子点で強制乱流のDNSを行い、 $R \sim 200$ までの乱流速度場を計算した。これらの内で格子点数 $128^3$ でのDNSはベクトル計算機によって行われ、これより大きい格子点数のDNSは並列計算機によって行われた。この様に、乱流のDNSの主流は現在並列計算機となってきている。

2. 数値風洞 (NWT)

NWTは1.7 GFLOPSのピーク速度を持つベクトル計算機をその要素計算機 (PE) として最大 140台並列

化した並列計算機で、その理論的ピーク速度は236 GFLOPSとなる<sup>1)</sup>。しかし、現実のCFDプログラムの計算速度はこれよりはかなり小さくなる。その原因は現実の計算プログラムでは各PE間のデータ転送が頻繁に必要となるが、これはPE内だけの計算速度に比べてかなり遅いため、PE間のデータ転送の頻度に依存して計算速度は遅くなるためである。また、各PEがベクトル計算機であるので、複雑な計算プログラムについて、ベクトル化と並列化を同時に理想的に達成する事はそれほど容易ではない。本DNSでは、計算の主要部分を3次元高速フーリエ変換(FFT)が占めているので、FFTの計算について3次元空間をそれぞれベクトル化の軸、並列化の軸、FFT演算の軸と分担して計算する事によって、ベクトル化と並列化を同時に達成することが出来た。

図1は本DNSの実際の計算におけるNWTの性能測定の結果を示す。横軸の $N_{PE}$ はNWTに使用されたPE台数を表し、縦軸はDNSの時間方向の積分において単位時間ステップ進むのに必要なCPU時間(秒)である。図中のいろいろな記号はDNSに使用された格子点数を示す。また、実線は $1/N_{PE}$ の勾配を示し、これはプログラムの並列化が理想的に行われた時の性能曲線と考えられる。それぞれの計算結果は $N_{PE}$ の最大の点を除いてはほぼ実線と同じ勾配に並んでいて、この範囲では並列化はほぼ理想的に行われていると考えられる。一方、 $N_{PE}$ の最大の点のデータが直線からずれるのは、PE内の計算量に比べてPE間のデータ転送の時間が無視出来なくなるからである。以下のDNSでは $N_{PE}$ はこの直線の範囲で選ばれる。すなわち、 $128^3$ のDNSは16台のPEを使用し、 $256^3$ のDNSは64台のPEを使用して行う。また、 $512^3$ のDNSは128台のPEで可能となる。その結果、NWTによる本DNSの計算速度は53 GFLOPSとなっている。

### 3. 基礎方程式

流れの周期性を仮定し、速度場 $u(x, t)$ を

$$u(x, t) = \sum_k u(k, t) \exp(ik \cdot x) \quad (1)$$

とフーリエ級数展開すると、 $u(k)$ の基礎方程式はナビエ・ストークス方程式から

$$\frac{\partial u(k)}{\partial t} = -i \sum_{k'} u(k') k \cdot u(k - k') - i k p(k) - \frac{k^2}{R} u(k) \quad (2)$$

とえられる。ここではさらに、受動的スカラーとして温度場 $\theta(x, t)$ を考えるとそのフーリエ成分の方程式

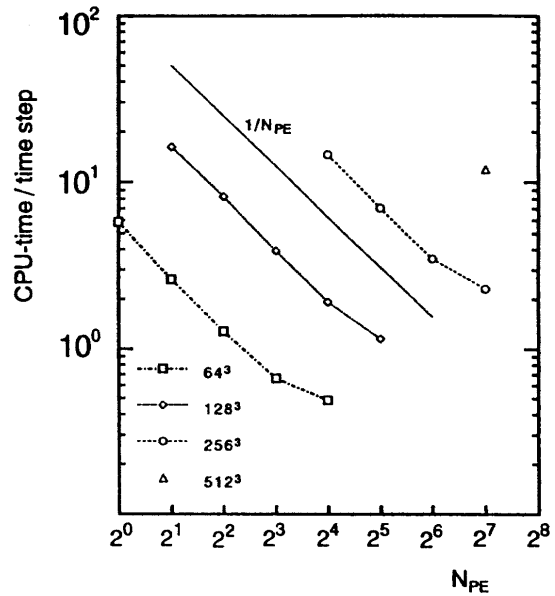


図1 DNSのプログラムによって測定されたNWTの性能  
 $N_{PE}$ はNWTに使用されたPE台数を表す。

は

$$\frac{\partial \theta(k)}{\partial t} = -i \sum_{k'} \theta(k') k \cdot u(k - k') - \frac{k^2}{R P_r} \theta(k) \quad (3)$$

となる。ここで、 $R$ は初期の流れに基づくレイノルズ数、 $P_r$ はプラントル数である。これらの方程式はフーリエ・スペクトル法で計算されるが、その計算法の主たる特徴は(2)、(3)式のコンボリューション和を高速フーリエ変換で効率的に行うことである。乱流の計算においてはこの際に発生する aliasing 誤差を消去することが特に重要となるが、これにはシフト法を使用して消去する<sup>1)</sup>。そのため、スペクトル法は一般に差分法にくらべて計算精度が良いことが知られている。また、時間方向の積分には精度の良いRunge-Kutta-Gill法が使用される。

ここでは減衰等方性乱流を取り扱うので初期の乱流場、速度と温度の両方、を与える必要がある。これには初期の乱れのスペクトルを

$$E(k) = \frac{16}{3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k^4 \exp(-2k^2) \quad (4)$$

と与える。これよりレイノルズ数は $R = v_0 / k_0 \nu$ と定義される。ここで、 $v_0$ は $v_0 = \sqrt{2 \int E(k) dk}$ 、 $k_0$ は初期スペクトル $E(k)$ が最大値を持つ波数(すなわち、 $k_0=1$ )である。



(1) 式のフーリエ成分の個数はレイノルズ数  $R$  が 1000 の場合は  $256^3$  個、2000 の場合には  $512^3$  が選ばれる。この様にしてフーリエ成分で与えられた速度場は (1) 式によって物理空間に変換されるので、その結果は物理空間の同じ数の空間格子点で与えられた場合と等価である。

4. 計算結果と検討

4.1 エネルギースペクトル

図2は速度場のエネルギースペクトルの時間的発達の結果を示す。レイノルズ数  $R$  は2000である。点線は初期に与えられたエネルギースペクトル、(4)式を表す。エネルギースペクトルは時間と共に低波数領域のエネルギーが高波数領域に流れて、時間と共に発達した乱流スペクトルが形成される。そして、無次元時間  $t$  がほぼ10で高波数領域におけるエネルギースペクトルは最大になり、その後は全領域ではほぼ単調に減衰する。そして、この  $t=10$  で得られたエネルギースペクトルの波数の中間領域 (波数  $k$  が2 ~ 30の範囲) で  $k^{-5/3}$  分布、コルモゴロフ・スペクトル、が観測される。しかし、その一致は必ずしも厳密ではない。この不一致はこれまでのDNSでも見られる傾向で<sup>1)</sup>、今後の問題である。しかし、この  $t=10$  で得られた速度場は発達した乱流の速度場と考えることが出来るので、これを数値解析して乱流のいろいろな力学的性質を調べてみる。

図3は温度場の分散のスペクトルの時間的発達の結果を示す。プラントル数は1と選んだ。スペクトルの発達の傾向は図2のエネルギースペクトルとはほぼ同様であるが、その発達の時間スケールはエネルギースペクトルに比べて早く、 $t=7$  で高波数領域の最も発達したスペクトルが得られている。この温度分散スペクトルについては Batchelor<sup>2)</sup> によって慣性領域で同様に  $k^{-5/3}$  分布となることが予測されている。計算結果におけるこのスペクトルの実現性は図2のエネルギースペクトルに比べて良くない。

4.2 確率分布関数

乱流の力学を記述する基本的な物理量は速度の確率分布関数である。 $t=10$  で得られた速度場と温度場のデータからいろいろな流れ場の確率分布を計算してみる。

図4は速度  $u$  の確率分布の計算結果を示す。実線はガウス分布を示す。計算結果はガウス分布と良く一致している。速度場のガウス分布については実験的にも検証されている<sup>10)</sup>。

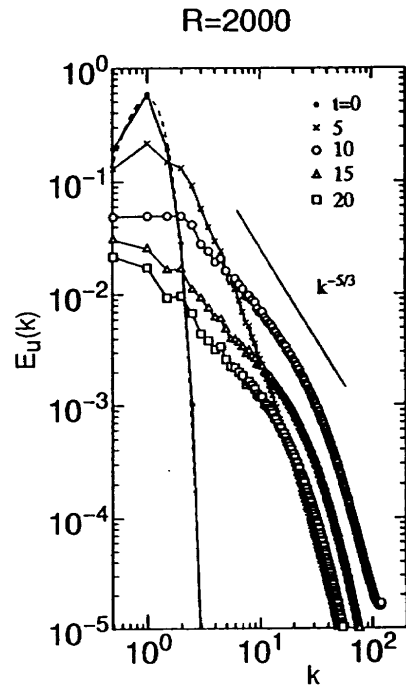


図2 エネルギースペクトルの時間的発達  $R = 2000$ 、点線は初期スペクトル(4)を表す。

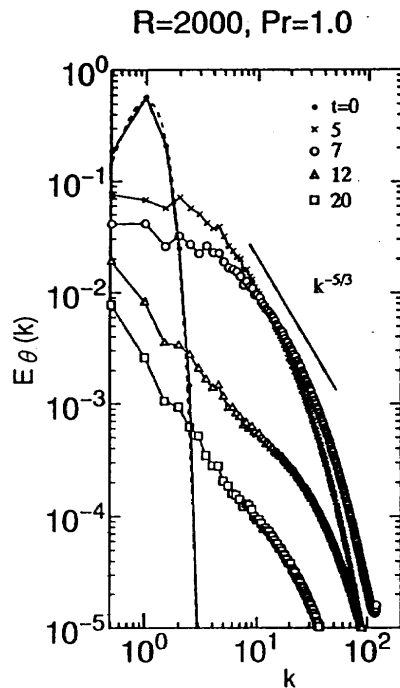


図3 温度場の分散スペクトルの時間的発達  $R = 2000, Pr = 1$ 、点線は初期スペクトル(4)を表す。

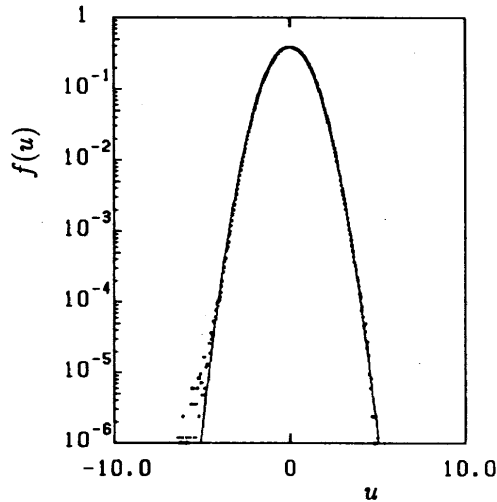


図4 速度  $u$  の確率分布関数

$R = 2000, t = 10$ .

実線はガウス分布を示す。

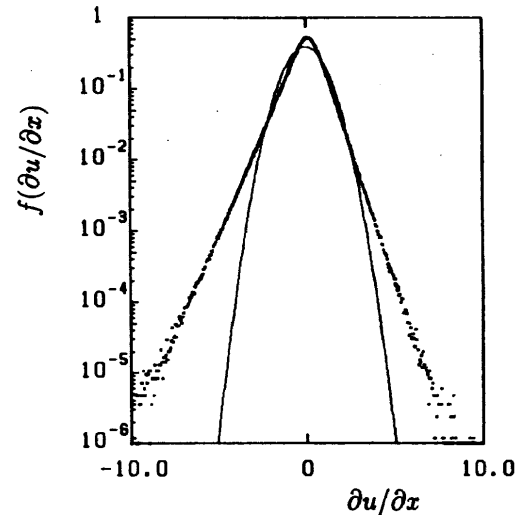


図5 速度の縦微分  $\partial u/\partial x$  の確率分布関数

$R = 2000, t = 10$ 。実線はガウス分布

を示す。

一方、図5は速度の縦微分  $\partial u/\partial x$  の確率分布の計算結果を示す。計算結果はガウス分布とは全く異なり指数分布をしている。乱流におけるこのような指数分布は最近のDNSによって検出された結果で<sup>11), 12), 13)</sup>、乱流ではしばしば現れる分布であることが分かってきた。図5の結果の他の特徴は分布が横軸の原点について非対称で、負の領域の確率が正の領域の確率より大きくなっていることである。これは乱流におけるカスケード機構に関連している重要な性質である。他方、図6は速度の横微分  $\partial u/\partial y$  の計算結果を示す。この場合も分布は指数関数を示すが、分布は原点について対称である。また、温度場の確率分布も計算されたが、その結果はほぼガウス分布となっている（結果はここでは省略）。

#### 4.3 乱流の微細構造

乱流場の変動のデータを時空間で得られるのがDNSの大きな利点である。これを数値解析することによって、乱流場の時空間の微細構造を直接調べることが出来る。

図7は高渦度領域の空間的集中を示す計算結果で、等高線は $3.5 \langle \omega \rangle$ のレベルで描いてある。ここで $\langle \omega \rangle$ は渦度の自乗平均である。図から渦度は細長い管状の

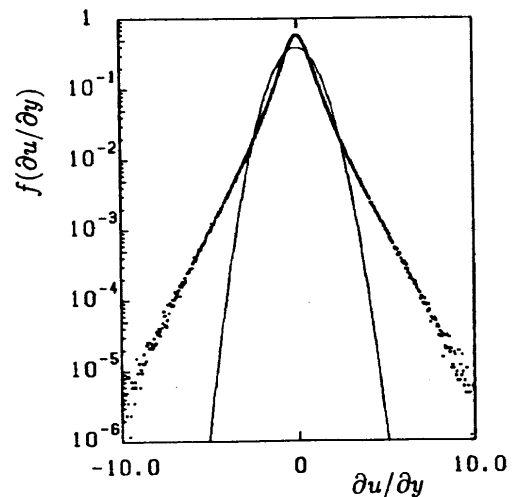


図6 速度の横微分  $\partial u/\partial y$  の確率分布関数

$R = 2000, t = 10$ 。実線はガウス分布

を示す。



図7 高渦度領域の空間的集中する形状  
 $R = 2000, t = 10$ 。等高線は  
 $3.5 < \omega >$  の高さを示す。



図8 高渦度格子点における渦度ベクトルと速度ベクトル  
 図7の四角で囲まれた領域を拡大して高渦度領域（渦管）に含まれる格子点上で渦度ベクトルと速度ベクトルを描く。

領域に集中し、その内部が渦度の高い部分である。このような高渦度の管状の領域はしばしばワーム (worm) と呼ばれている<sup>2), 5)</sup>。ワームが渦管であることを確認するために図7の四角で囲われた部分の渦管内の格子点で渦度ベクトルと速度ベクトルを拡張して描いた結果を図8に示す。(原図では渦度ベクトルは黒い矢印、速度ベクトルは赤い矢印で区別して示されている。その結果、渦度ベクトルは比較的組織的に並び、渦管を形成するが、速度ベクトルはその方向がかなり偶然的事であることが示されている。また、渦度の集中する形状に関してはこれまで理論的に渦管<sup>14)</sup>およびシート<sup>15)</sup>が予測されているが、図7の結果は前者を支持する。

他方、図9は温度勾配 $H$ の強い部分が空間的に集中する領域を示す。ここで、 $H = \nabla\theta$  である。図から分かることは $H$ の強い領域は2次元的なシート状を形成することである。このような渦度場と温度勾配の渦管およびシート状集中の力学機構はまだ必ずしも明確ではない。



図9 温度場の高勾配領域が空間的に集中する形状  
 $R = 2000, Pr = 1, t = 10$ 。等高線は  
 $3.0 < H >$  の高さを示す。

## 5. 結 び

航空宇宙技術研究所に導入された数値風洞 (NWT) を応用して減衰等方性乱流の空間格子点数が $512^3$ までのDNSを行い、乱流の速度場や温度場のエネルギースペクトルの時間的発達を調べた。また、 $t=10$ で得られた発達した乱流場を数値解析して、いろいろな乱流場の確率分布を計算した。さらに、渦度場や温度勾配の空間的集中領域を数値解析した結果、渦度場は空間的に1次元的な管状領域に集中し、温度勾配は2次元的なシート状領域に集中することが分かった。このような乱流場の空間的集中の力学機構はまだ明確には分かっていないので、今後の課題である。

## 参 考 文 献

- 1) R. M. Ker: J. Fluid Mech., 153 (1985) 31.
- 2) K. Yamamoto and I. Hosokawa: J. Phys. Soc. Japan, 57 (1988) 1532.
- 3) A. Vincent and M. Meneguzzi: J. Fluid Mech., 225 (1991) 1.
- 4) S. Chen et al: Phys. Fluids, A 5 (1993) 458.
- 5) J. Jiménez et al: J. Fluid Mech., 255 (1993) 65.
- 6) T. Iwamiya et al: to appear in Proc. Parallel CFD' 93.
- 7) C. Canuto et al: Spectral Methods in Fluid Dynamics, 1988, Springer-Verlag, New York.
- 8) Z-S. She et al: Phys. Rev. Letts., 70 (1993) 3251.
- 9) G. K. Batchelor: J. Fluid Mech., 5 (1956) 113.
- 10) A. S. Monin and A. M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics, Vol. 1, 2, 1975, MIT Press Cambridge.
- 11) Z-S. She et al: J. Sci. Comput. 3 (1988) 497.
- 12) I. Hosokawa and K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Japan, 58 (1989) 20.
- 13) K. Yamamoto and T. Kambe: Fluid Dynamics Research, 8 (1991) 65.
- 14) H. Tennekes: Phys. Fluids, 11 (1968) 669.
- 15) R. Betchov: J. Fluid Mech., 1 (1956) 497.

## 衝撃波の反射に関するスキームの影響

東野文男\*、高倉葉子\* 吉田正廣\*\*、小川 哲\*\*

Effect of Schemes on Numerical Simulations of Shock Wave Reflection

by

Fumio HIGASHINO and Yoko TAKAKURA

*Tokyo Noko University*

Masahiro YOSHIDA and Satoru OGAWA

*National Aerospace Laboratory*

### ABSTRACT

The full Navier-Stokes equations were solved numerically by using a parallel computer at NAL to simulate oblique reflection of plane shock waves over a rigid wall. The dependent hyperbolic conservation forms for finite volume cells were integrated by applying a second order TVD scheme. The three stage Runge-Kutta method was used for time integration. Various types of Riemann solvers of both the Euler and the Navier-Stokes were tested to compare the accuracy of the results. The present numerical simulations show that the results computed by the Euler code showed good reflection patterns of the shock waves but the complicated flowfields behind the Mach stem were not well computed. The lambda shock wave created in front of the corner of a wedge was not simulated by the Euler code. The present scheme based on the Harten-Yee type TVD scheme coupled with Roe's approximate solver gave fairly good results in predicting various types of shock reflection. In the present computation the use of 2-4 parallel processors was effective.

#### 1. まえがき

衝撃波の反射に関する数値シミュレーションは数値計算法の基礎研究として重要であるばかりではなく、応用研究としても重要である。フォン・ノイマンが理論解析した斜め衝撃波の定常反射に関する2衝撃波理論(正常反射)と3衝撃波理論(マッハ反射)はよく知られているが、衝撃波管を用いた実験等から、準定常流に対してはさらに複雑な反射形態があることが報告されている。斜め衝撃波の反射形態としてはフォン・ノイマンが分類した正常反射、単純マッハ反射の他に現在では複合マッハ反射および二重マッハ反射が存在することが実験的にも確かめられている(Gabi, Ben-Dor, 1992)。実験に対応する現象をオイラー・コードを用いて数値シミュレーションしてみると、やはり、正常反射、単純マッハ反射、複合マッハ反射および二重マッハ反射が存在することが確認できる(H.M. Glaz, 1985)。従って、これらの複雑な平面衝撃波の反射形態は気体の粘性には関係なく起こることが分かる。

それでは衝撃波管を用いた実験等で気体の粘性が現象に大きく影響する領域は何処かということはいきなり境界層の近傍であろうということはすぐに気がつく。しかし、実際にスーパーコンピュータがかなり使えるようになった今でも衝撃波の反射に関して近似することなくナビエー・ストークス方程式を解いた例は少ない。この問題は非常に簡単であり、現象も理解し易いが、実際

に計算してみるとかなり大変であることが分かる。例えば、計算領域について考えてみても空間的に20万点以上の格子点が必要であり、それを非定常的に解かなければならないから計算時間はスーパーコンピュータを用いても10時間以上のCPU時間が必要である。これまでの計算では計算機の性能によりオイラー方程式を用いて解くのが精いっぱいであり、ナビエー・ストークス方程式を使って境界層も含めた解析がある精度以上で解くことはかなり大変な仕事であったから、移動格子法などの計算を含めても、この種の論文は少なかつた。

我々の研究室ではまず、衝撃波管を用いて上記のような平面斜め衝撃波の複雑な反射形態が存在することを確かめた後に、この実験的研究に並行して並列スーパー・コンピューター(NALのNWT)を使い、「楔上を伝播する平面斜め衝撃波の反射形態」の数値シミュレーション行ってきた(Higashino et al. 1994)。この計算は衝撃波管を用いた実験に対応するものであり、並列計算機を利用しないと実行が不可能な基礎研究の一つである。本報告では単純マッハ反射を中心にこれまでに得られた種々な計算結果についてオイラー・コードとナビエー・ストークス・コードの比較検討を行い、各々の特徴を述べる。これまでの計算結果で重要なことはオイラー計算でもナビエー・ストークス計算でも衝撃波の反射形態については大きな差は認められないが、反射衝撃波の後方に生じる流れのうち、特に楔の角部の境界層流れに大

\*東京農工大学工学部

\*\*航空宇宙技術研究所

流れに大きな差があることが分かった。実験写真との比較から、楔の上流側に発生する $\lambda$ 型衝撃波の存在は重要であり、この種の流れの数値シミュレーションにはナビエ・ストークス方程式を用いて計算する必要があることが分かる(東野 他,1994)。さらに、衝撃波の強さが比較的強い場合には現象を支配するパラメータはマッハ数であるから、粘性の影響は小さいと思われるが、衝撃波が弱くなると粘性の影響が無視できなくなる。この種の例として、近年、新しく分類されたフォン・ノイマン反射について結果と特徴を述べる。

## 2. 計算方法

本計算では基礎方程式に2次元非定常のオイラー方程式およびナビエ・ストークス(N-S)方程式をそれぞれ用いて有限体積法により積分した。差分スキームにはHarten-Yee型TVDスキームを用いた。またN-S計算では粘性項を中心差分で差分近似し、レイノルズ数は $Re=1.0 \times 10^6$ とした。なお、 $Re=1.0 \times 10^5$ の場合についても計算したが、実験との比較から $Re=1.0 \times 10^6$ の方が良い結果を示した。また、時間積分は陽解法を用い、2次精度を達成するために3段階Runge-Kutta法を用いた。計算格子は単純変形メッシュで格子点数はオイラー計算では $601 \times 301$ とし、N-S計算では $897 \times 640$ 点としたが、N-S計算では境界層付近の流れ場の解像度を上げるために壁面付近で壁面と垂直な方向に格子を集中させた。

第1図に計算格子と壁面境界条件を示す。また計算条件は、流入条件として入射衝撃波マッハ数に対応する圧力と密度を計算した。この時、初期条件として計算領域の左端の格子点に衝撃波上流の状態量を、またその他の格子点には衝撃波下流の状態量(標準大気)をそれぞれ与えた。衝撃波上流の状態量は与えられた入射衝撃波マッハ数に対して、垂直衝撃波の関係式を満たすように決定した。計算領域は入射衝撃波が傾斜壁面上の予め設定していた地点(衝撃波が斜面に入射してから約10cmの位置)に達したときに、計算を終了させるようにした。また壁面条件としては、壁面上の格子点においても他の内点と同じように流れの保存則が成り立つようにしたもので、壁面上での不連続を正しく評価できるようにした。ただしN-S計算では壁面上の境界条件は通常の滑りなしの条件と断熱壁の条件を用いた。

## 3. 計算結果

本計算ではHarten-Yee, Chakravarthy-Osher, Godunov(Piecewise Parabolized Method)型TVDスキームを用いてオイラー計算をし、ナビエ・ストークス計算についてはHarten-Yee型TVDスキームを用いた。我々の計算結果はGlaz et al.(1985)が得た正常反射、単純マッハ反射、複合マッハ反射、二重マッハ反射に対する結果とほぼ同じ結果を示した。そこで、典型的な例として楔角が20度、衝撃波マッハが $Ms=2.9$ または1.5の単純マッハ反射の計算結果を第2図に示す。ここで比熱比は $\gamma=1.4$ とした。これらの図において衝撃波マッハ

数が1.5程度以上であればどの計算スキームを用いても衝撃波の形状に関してはスキームによる差は殆ど見られなかった。このようにオイラー計算でもN-S計算でも入射衝撃波、反射衝撃波およびマッハ・シュテムの形状については殆ど同じであり、3重点からの接触面の発生についても単純マッハ反射の特徴をよく捉えていることが分かる。しかし、Godunov法で計算した接触面は実験で観測される不連続面よりも幅が厚くなった。このことから衝撃波の形状変化に関する幾何学的衝撃波運動理論は極めてよい近似理論であることが分かる。衝撃波面後方の流れまで含めた流れの解析にはN-SコードとHarten-Yee型のTVDスキームを組み合わせた計算スキームがよい。この方法で計算した結果は衝撃波が弱くなっても不連続面をよく捉えており実験結果と比較した場合に満足のゆく結果が得られた。今回は単純マッハ反射とフォン・ノイマン反射の他に、複合マッハ反射、二重マッハ反射および正常反射の計算を行ったが、これらの全ての場合について衝撃波の反射形態については数値計算により現象をかなり良くシミュレーションできることが分かった。N-S計算による正常反射、複合マッハ反射、二重マッハ反射の結果をそれぞれ第4図、第5図および第6図に示す。壁面上に発達する境界層とその剝離、特に、楔の先端付近に発生するラムダ形衝撃波の発生はオイラー計算では実現できず、実験との比較も含めてN-S計算の方が物理現象を忠実に表現していることが分かる。なお、気体の粘性の影響は個体壁面からかなり離れた3重点近くよりも、壁面上で特に、楔先端付近における境界層領域の方が強く、また、重要であると思われる。これらの流れの状況は第4-6図によく現れており、Glaz et al.の結果と大きく異なる点である。また、この計算では反射波後方に現れる密度の非物理的な不均一分布を修正した。

衝撃波マッハ数が極めて弱くなるとマッハ反射の特徴である接触面が現れなくなり、いわゆるvon Neumann反射に移行する。衝撃波面を通しての圧力の変化量を $1+\epsilon$ とすると、エントロピーの変化量は $\epsilon$ の2乗のオーダーであるから、実験でも計算でもエントロピー変化が見られなくなる。この場合の計算例を第3図に示す。普通のマッハ反射と異なる点でこれまでに知られていることはvon Neumann反射ではマッハ・シュテムが局所的に曲率をもつことである。従って、入射波、反射波およびマッハ・シュテムが1点に会する3重点は単純マッハ反射のように一意的には決まらない。第3図からすべり面が現れないことは理解できるが、3重点近傍のマッハ・シュテムの曲率については本計算結果では不十分であり、さらに詳細な解析が必要である。

今回の衝撃波の反射問題をFACOM-VP2600を利用して計算すると、CPU時間はオイラー計算で約40分程度であるが、N-S計算では10時間以上かかる。この場合、N-S計算では壁面に垂直な方向の境界層を詳細に調べるために壁面近くの格子数をオイラー計算の約2倍の640点とした。表1に並列計算の場合の各要素計算機(PE)の効率の比較を示した。ホスト計算機の

他に2台の要素計算機を使うと、CPUで10時間の計算は実際には5時間ではなく5.81時間(10/1.72)を要したから、この場合の効率を $5/5.81=0.86$ と表した。すなわち、各要素計算機は1台の86%分の力を発揮する。要素計算機の台数が増えると1台当たりの効率は少しずつ減少するが、CPUで1時間程度の計算が実用的であると考えれば、本計算では要素計算機を8台程度使うのが実用上は適当であると思われる。

#### 4. 結論

本研究では超並列計算機を使って斜め衝撃波の反射の問題を計算した。その結果、1) オイラー計算でもN-S計算でも衝撃波の反射形態については殆ど差がなかったため、衝撃波の反射形状だけを問題にするのであれば、CPU時間の少ないオイラー計算で十分である。しかし、空力加熱等の問題では境界層の影響が顕著なのでN-S計算を行う必要がある。2) N-S計算では8台程度の並列計算機の使用が実用的である。

#### 謝辞

本論文中の非粘性流(Euler Code)に対する計算結果は東京農工大学大学院工学系研究科三浦義郎君の修士論文として計算されたものの一部である。ここに感謝の意を表す。

#### 参考文献

Gabi Ben-Dor; Shock Wave Reflection Phenomena, Springer-Verlag, (1992).

S.R.Chakravarthy and S.Osher; Computing with High-Resolution Upwind Schemes for Hyperbolic Equations, Lectures in Applied Mathematics, 22,55,(1985)

P.Collela and P.R.Woodward; The Piecewise Parabolic Method for Gas Dynamical Simulations, J.Comp. Phys., 54,174,(1984)

H.M.Glaz, P.Collela, I.I.Glass and R.L.Deschambault, Proc. Roy. Soc. London A398,(1985).

F.Higashino, M.Yoshida and S.Ogawa; Oblique Reflection of Shock Waves Simulated by the N-S Equations, Prep. PARALLEL CFD '94,4-3,(1994).

F.Higashino, L.F.Henderson and F. Shimizu; Experiments on the Interaction of a Pair of Cylindrical Weak Blast Waves in Air, Shock Waves, 2, 227, (1991).

東野文男、高倉葉子、吉田正広、小川哲; 並列計算による斜め衝撃波反射の数値シミュレーション、日本機械学会第72期全国大会講演論文集、VOL.II, PP.89-91,(1994).

坂本一郎、東野文男、Rolf Holl; 幾何学的衝撃波運動理論による反射衝撃波の収束、日本機械学会論文集(B編)、57巻、541号、3071-3077 (1991).

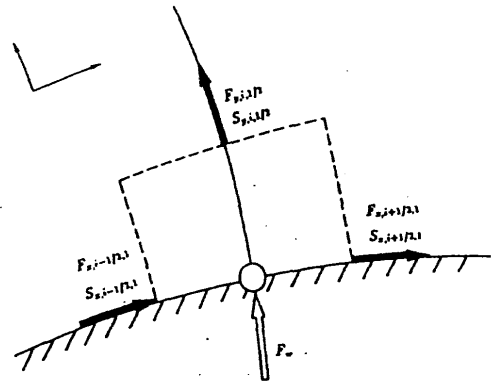
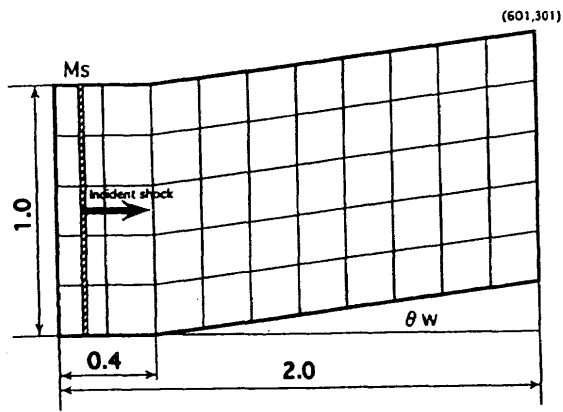
三浦義郎; 弱い衝撃波の反射の数値シミュレーション、東京農工大学大学院工学系研究科修士論文、平成6年3月.

第1表 NALのNWTによるNavier-Stokesコードの計算効率

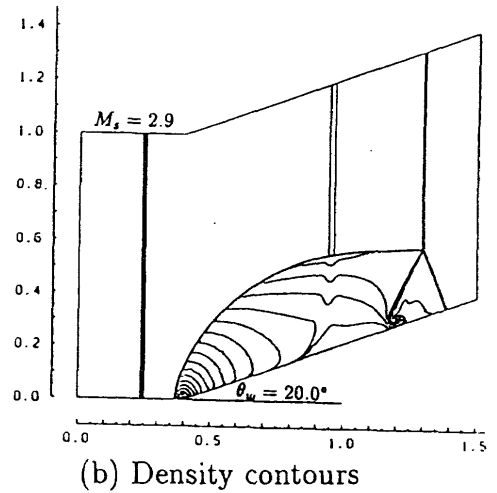
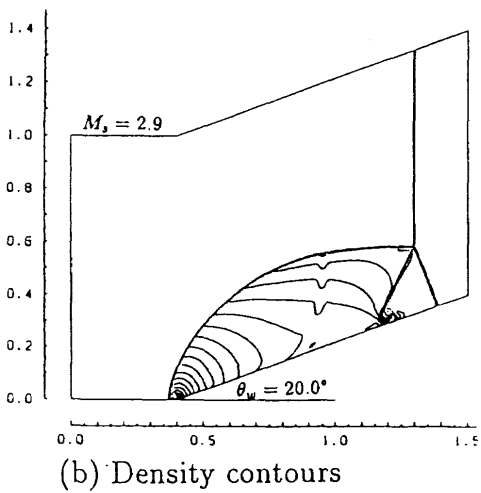
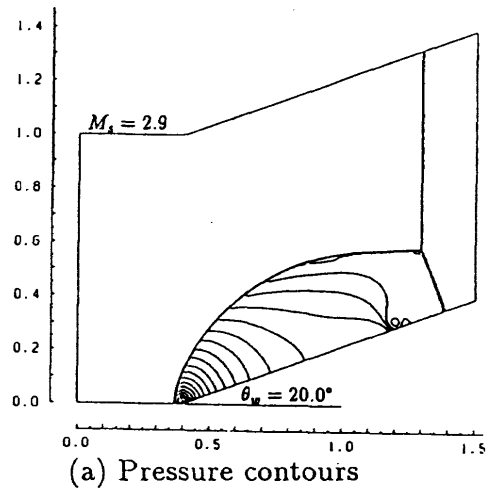
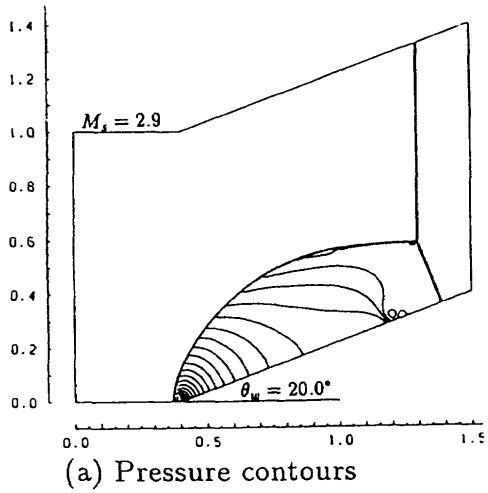
— Effect of Number of PEs —

Grid Size : 897 × 640

No of PE	2	4	8	16
Speed-up	1.72	3.34	6.51	11.14
Effect	0.86	0.84	0.81	0.70



第1図 計算格子の概略図と壁面境界条件

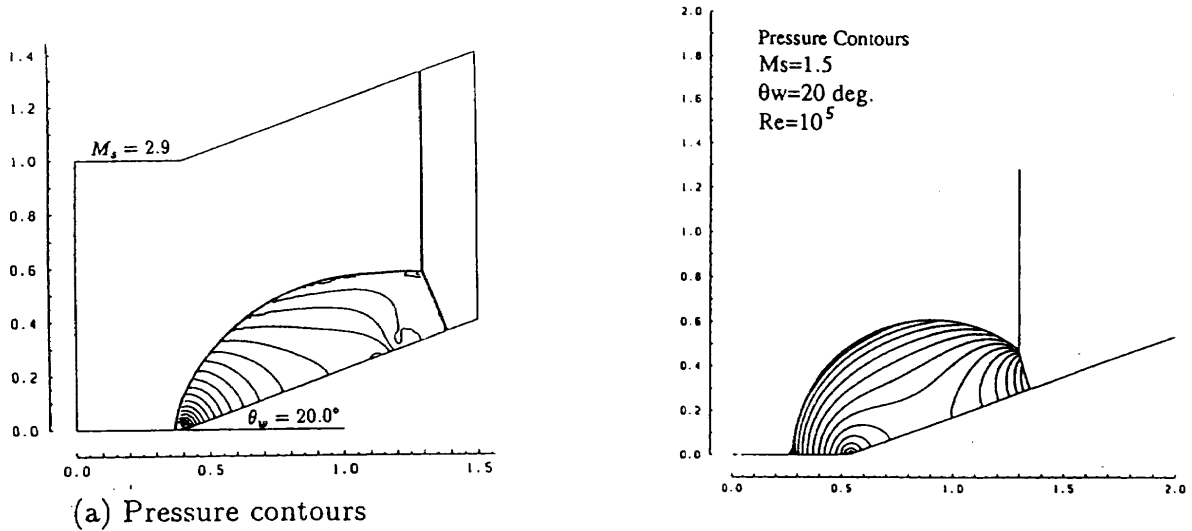


Euler (Harten-Yee)

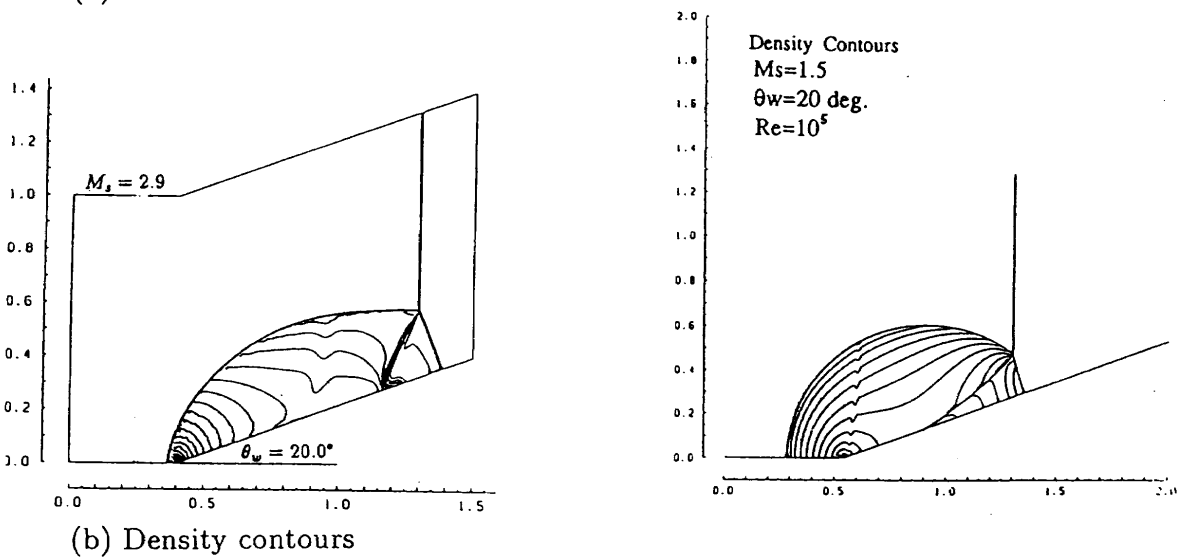
Euler (Chakravarthy-Osher)

第2図 単純マッハ反射に関するスキームの比較





(a) Pressure contours

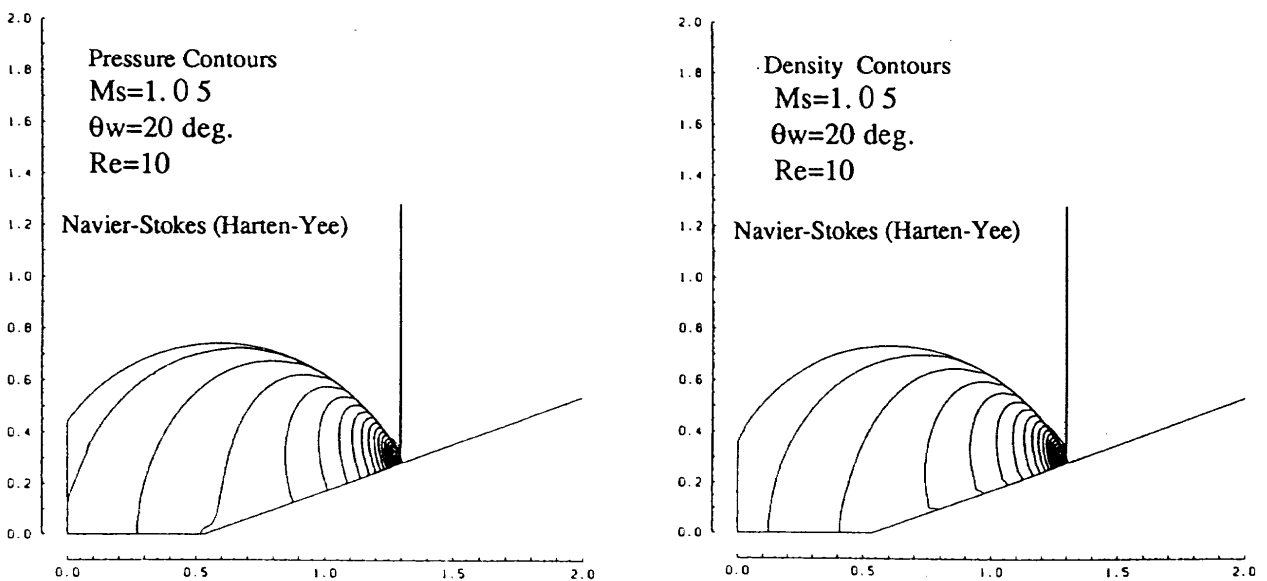


(b) Density contours

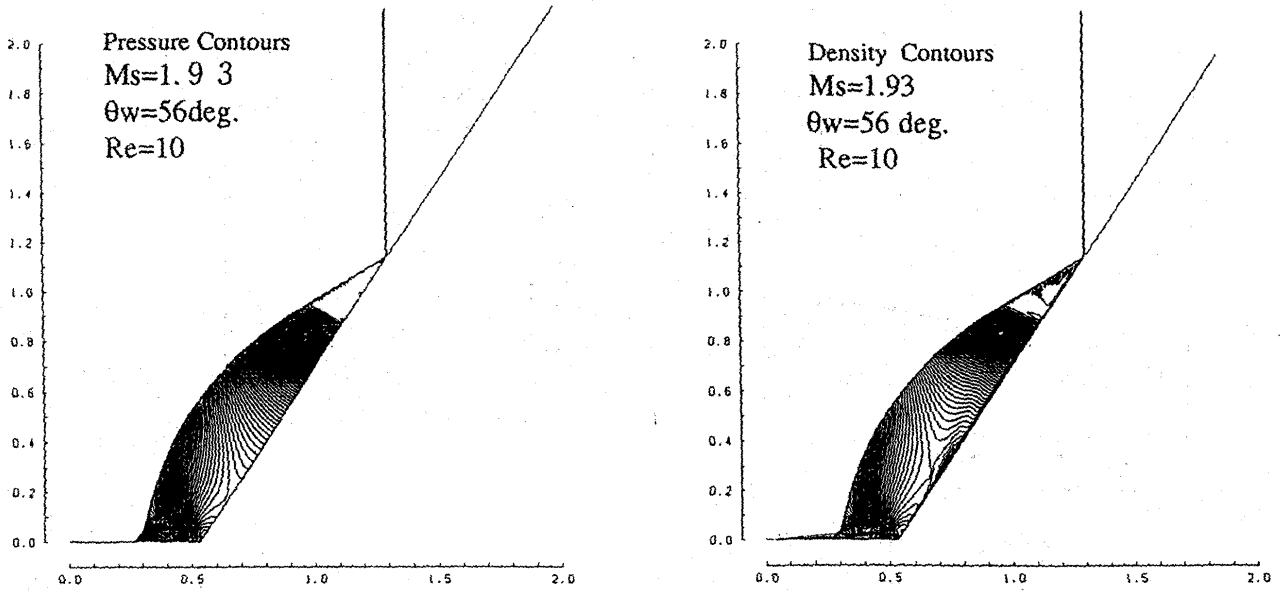
Euler (Godnov)

Navier-Stokes (Harten-Yee)

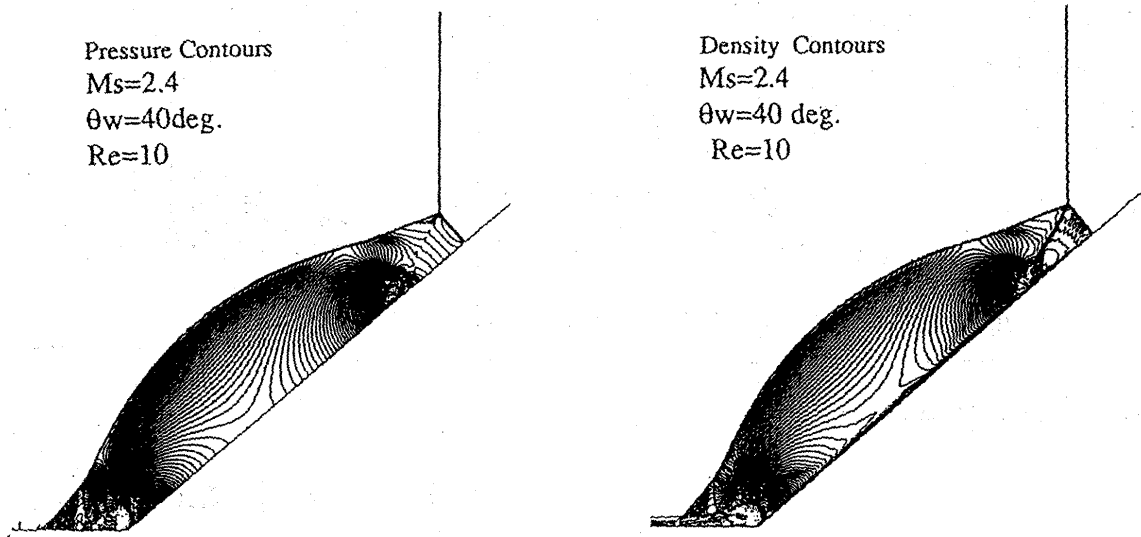
第2図 単純マッハ反射に関するスキームの比較 (前ページの続き)



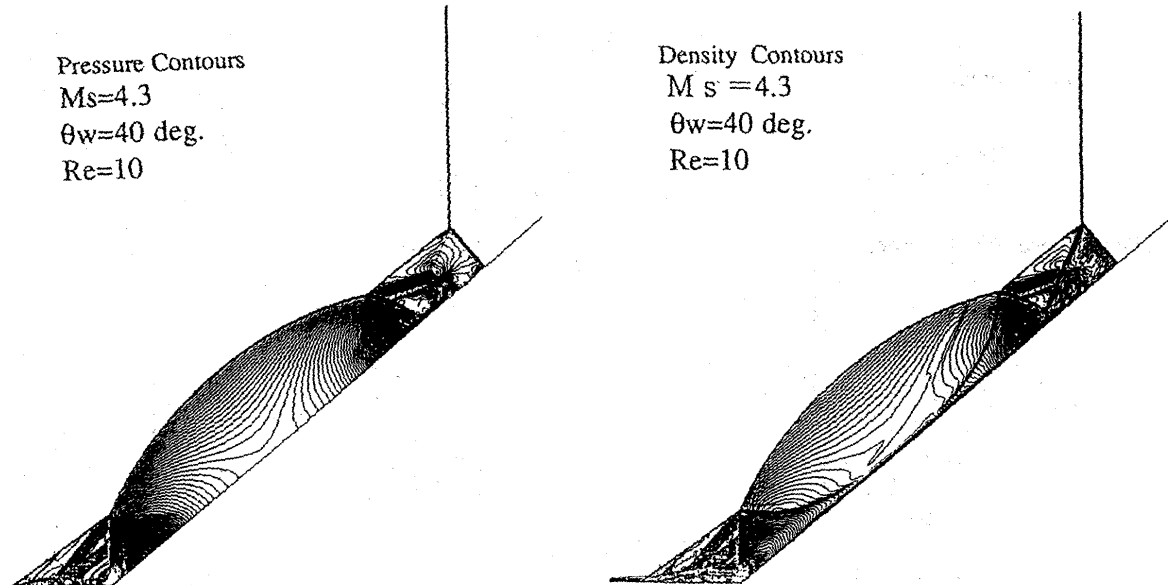
第3図 非常に弱い衝撃波の反射 (von Neumann Reflection)



第4図 正常反射 Navier-Stokes (Harten-Yee)



第5図 複合マッハ反射 Navier-Stokes (Harten-Yee)



第6図 二重マッハ反射 Navier-Stokes (Harten-Yee)

## Elementary benchmarks of the NWT computer system and program performance

by

Shigeki HATAYAMA

National Aerospace Laboratory, 7-44-1 Jindaijihigashi-machi Chofu-shi Tokyo, Japan 182

### Abstract

The NWT computer system of the NAL comprises two system administrators, 140 processing elements and a crossbar network, which operates as a distributed-memory message-passing MIMD computer. Each processing element itself is a vector computer. This paper presents measurements of the elementary characteristic parameters of the NWT with SIMD computing and with MIMD computings in the local and global memory access, and measurements of the maximum actual performance obtained when we execute programs for computation of the incompressible viscous flow in two- and three-dimensional lid-driven cavities in parallel on the 128-processing element system.

#### 1. Introducing remarks

Most of the overheads incurred in the parallel processing arise from the time spent in system software routines supporting user programs. Hence the obtained results in this report apply only to the NWT system software available at the NAL during the period April to June 1993 which we call v1, and to the NWT system software during the period April to May 1994 which we call v2. This report indicates a comparison between the actual program performance of the NWT for v1 and one for v2, and the degree of the improvement,  $I_{21}$ , which is the ratio of the start-up time for v1 to the start-up time for v2. Hence the start-up time for v2 means an  $I_{21}$ -fold decrease of one for v1. Furthermore the dyadic operation in Sections 2, 3 and 5 means the multiplication of matrices ( $A=B*C$ ), and the triadic operation the multiplication and addition of matrices ( $A=B*C+D$ ). By the way all the benchmark programs were run with other users on the system.

#### 2. The $(\tau_{\infty}, n_{1/2})$ benchmark

The characteristic parameters for a dyadic and triadic operation on a long-vector of length,  $n$ , with SIMD computing are given as follows: for dyads and v1

$$\tau_{\infty} = 3.897824 * 10^2 \text{ (Mflop/s)}, \quad (1)$$

$$n_{1/2} = 2.885078 * 10^2 \text{ (flop)}, \quad (2)$$

$$n_b = 2.473941 * 10^1 \text{ (flop)}; \quad (3)$$

for dyads and v2

$$\tau_{\infty} = 3.928646 * 10^2 \text{ (Mflop/s)}, \quad (4)$$

$$n_{1/2} = 3.014385 * 10^2 \text{ (flop)}, \quad (5)$$

$$n_b = 2.562819 * 10^1 \text{ (flop)}; \quad (6)$$

and for triads and v1

$$\tau_{\infty} = 5.514041 * 10^2 \text{ (Mflop/s)}, \quad (7)$$

$$n_{1/2} = 4.447699 * 10^2 \text{ (flop)}, \quad (8)$$

$$n_b = 4.197182 * 10^1 \text{ (flop)}; \quad (9)$$

for triads and v2

$$\tau_{\infty} = 5.603720 * 10^2 \text{ (Mflop/s)}, \quad (10)$$

$$n_{1/2} = 4.473542 * 10^2 \text{ (flop)}, \quad (11)$$

$$n_b = 4.149311 * 10^1 \text{ (flop)}, \quad (12)$$

where  $\tau_{\infty}$  is the maximum rate,  $n_{1/2}$  the half-performance length and  $n_b$  the vector breakeven length which is the vector length above which the vector processing takes less time to perform the operation on a vector than the scalar processing. Hence the actual performance,  $\tau$ , with SIMD computing can be computed from

$$\tau = \tau_{\infty} / (1 + n_{1/2}/n) \text{ (Mflop/s)}. \quad (13)$$

Fig.1 shows a comparison between v1 and v2 of actual processing rates as a function of vector length with SIMD computation on a single processing element. Furthermore, since the start-up time  $t_0$  is  $t_0 = \tau_{\infty}^{-1} n_{1/2}$ ,  $I_{21} = 0.9647$  (dyads) and  $I_{21} = 1.0104$  (triads) (see [1],[3] for details). Finally we note the followings:

(1) For a dyadic and triadic operation on the short-vector length and v2, we obtain  $\tau_{\infty} = 4.286826 * 10^2$  (Mflop/s,dyads) and  $\tau_{\infty} = 5.624414 * 10^2$  (Mflop/s,triads).

(2) The theoretical peak performance of each processing element derived from its architecture is 2-fold for dyads and 3-fold for triads as many as the maximum rate.

(3) Hence we can estimate that the hardware performance per one arithmetic pipeline of the processing element is  $8.505137 * 10^2$  (Mflop/s) on the average.

#### 3. The $(\tau_{\infty}, s_{1/2})$ benchmark

When the efficiency of scheduling is perfect, the characteristic parameters for a dyadic and triadic operation on an amount of computational work,  $s$ , with MIMD computing in the local memory access are given as follows: for dyads and v1

$$\tau_{\infty} = 3.858962 * 10^2 pe (Mflop/s), \quad (14)$$

$$s_{1/2} = -2.497182 * 10^3 + 1.325439 * 10^4 pe (flop), \quad (15)$$

$$s_b = (1.325439 * 10^4 pe - 2.497182 * 10^3)/(pe - 1) (flop); (16)$$

for dyads and v2

$$\tau_{\infty} = 3.850414 * 10^2 pe (Mflop/s), \quad (17)$$

$$s_{1/2} = -2.441883 * 10^3 + 1.092176 * 10^4 pe (flop), \quad (18)$$

$$s_b = (1.092176 * 10^4 pe - 2.441883 * 10^3)/(pe - 1) (flop); (19)$$

and for triads and v1

$$\tau_{\infty} = 5.468374 * 10^2 pe (Mflop/s), \quad (20)$$

$$s_{1/2} = -3.451546 * 10^3 + 1.878137 * 10^4 pe (flop), \quad (21)$$

$$s_b = (1.878137 * 10^4 pe - 3.451546 * 10^3)/(pe - 1) (flop); (22)$$

for triads and v2

$$\tau_{\infty} = 5.445832 * 10^2 pe (Mflop/s), \quad (23)$$

$$s_{1/2} = -3.496416 * 10^3 + 1.565948 * 10^4 pe (flop), \quad (24)$$

$$s_b = (1.565948 * 10^4 pe - 3.496416 * 10^3)/(pe - 1) (flop); (25)$$

where  $pe$  is the selected number of processing elements,  $s_{1/2}$  the half-performance grain size and  $s_b$  the breakeven grain size above which it is faster to suffer the synchronization overhead and split the job between the  $pe$  processing elements than to avoid synchronization altogether by using a single processing element. Hence the actual performance,  $\tau$ , with MIMD computing in the local memory access can be computed from

$$\tau = \tau_{\infty}/(1 + s_{1/2}/s) (Mflop/s). \quad (26)$$

Fig.2 shows a comparison between v1 and v2 of actual processing rates as a function of the amount of arithmetic operations with MIMD computation in the local memory access when  $pe = 64$ . Furthermore, since the start-up time is  $t_0 = t_{\infty}^{-1} s_{1/2}$ ,  $I_{21} = 1.1656 \sim 1.2804$ ,  $1.2128$  on the average (dyads) and  $I_{21} = 1.1876 \sim 1.2610$ ,  $1.2176$  on the average (triads) (see [1],[3] for details). Finally we note that the values of  $\tau_{\infty}$  well coincide with ones in Section 2 when  $pe = 1$ .

#### 4. A variation of the pingpong benchmark

The characteristic parameters on a long-message of length,  $n$ , with the data transfer between the global and local memory spaces are given as follows: for v1

$$\tau_{\infty} = 7.554390 * 10^2 pe (Mbyte/s), \quad (27)$$

$$n_{1/2} = -3.315542 * 10^4 + 1.834119 * 10^5 pe (byte); \quad (28)$$

and for v2

$$\tau_{\infty} = 7.444648 * 10^2 pe (Mbyte/s), \quad (29)$$

$$n_{1/2} = -1.372388 * 10^4 + 5.285085 * 10^4 pe (byte), \quad (30)$$

where  $\tau_{\infty}$  is the maximum bandwidth and  $n_{1/2}$  the half-performance message length. Hence the actual performance,  $\tau$ , with the data transfer between the global and local memory spaces can be computed from

$$\tau = \tau_{\infty}/(1 + n_{1/2}/n) (Mbyte/s). \quad (31)$$

Fig.3 shows a comparison between v1 and v2 of actual data transfer rates as a function of message length when  $pe = 1 \sim 16$ . Furthermore, since the start-up time is  $t_0 = (1.024^2 t_{\infty})^{-1} n_{1/2}$ ,  $I_{21} = 3.4212 \sim 3.8765$ ,  $3.6082$  on the average (see [2],[3] for details).

#### 5. The $(\bar{\tau}_{\infty}, \bar{s}_{1/2}, f_{1/2})$ benchmark

The characteristic parameters for a dyadic and triadic operation on an amount of computational work,  $s$ , and a computational intensity,  $f$ , with MIMD computing in the global memory access are given as follows: for dyads and v1

$$\tau_{\infty} = 5.857613 * 10^1 pe (Mflop/s), \quad (32)$$

$$s_{1/2} = 469.8217 + 30817.60pe + 73.00503pe^2 (flop), \quad (33)$$

$$f_{1/2} = 1.932356 (flop/I/O \text{ word}); \quad (34)$$

for dyads and v2

$$\tau_{\infty} = 5.824027 * 10^1 pe (Mflop/s), \quad (35)$$

$$s_{1/2} = -2387.097 + 13299.69pe + 56.36769pe^2 (flop), \quad (36)$$

$$f_{1/2} = 1.972983 (flop/I/O \text{ word}); \quad (37)$$

for triads and v1

$$\tau_{\infty} = 8.619480 * 10^1 pe (Mflop/s), \quad (38)$$

$$s_{1/2} = -1021.786 + 49481.97pe + 121.3604pe^2 (flop), \quad (39)$$

$$f_{1/2} = 2.783590 (flop/I/O \text{ word}); \quad (40)$$

for triads and v2

$$\tau_{\infty} = 8.784405 * 10^1 pe (Mflop/s), \quad (41)$$

$$s_{1/2} = -5098.177 + 23233.29pe + 95.54521pe^2 (flop), \quad (42)$$

$$f_{1/2} = 2.790488 (flop/I/O \text{ word}), \quad (43)$$

and

$$\bar{\tau}_{\infty} = \tau_{\infty}(1 + f_{1/2}/f) (Mflop/s), \quad (44)$$

$$\bar{s}_{1/2} = s_{1/2}(1 + f_{1/2}/f) (flop), \quad (45)$$

where  $\hat{\tau}_\infty$  is the peak maximum rate,  $\hat{s}_{1/2}$  the peak half-performance grain size and  $f_{1/2}$  the half-performance intensity. Hence the actual performance,  $\tau$ , with MIMD computing in the global memory access can be computed from

$$\tau = \hat{\tau}_\infty / (1 + \hat{s}_{1/2}/s + f_{1/2}/f) \quad (Mflop/s). \quad (46)$$

Fig.4 shows a comparison between v1 and v2 of actual processing rates as a function of the amount of arithmetic operations with MIMD computation in the global memory access when  $pe = 64$ . Furthermore, since the start-up time is  $t_0 = t_\infty^{-1} s_{1/2}$ ,  $I_{21} = 1.9266 \sim 2.8392, 2.4259$  on the average (dyads) and  $I_{21} = 1.8540 \sim 2.6953, 2.2709$  on the average (triads) (see [2],[3] for details). Finally we note the followings:

(1) The degree of degradation of peak maximum rate due to communication overheads when  $s \rightarrow \infty$  is  $1/6.797068$  (v1),  $1/6.918949$  (v2) for dyads and  $1/6.56718$  (v1),  $1/6.580976$  (v2) for triads, because data transferred from the global memory to the local memory uses only once, i.e.,  $f = 1/3$  for dyads and  $f = 1/2$  for triads.

(2) The values of  $\hat{\tau}_\infty$  for v1 and v2 computed from (44) when  $f = 1/3$  for dyads and  $f = 1/2$  for triads well coincide with ones of  $\tau_\infty$  in Section 3.

(3) The number of reference of data transferred to the local memory to be required to reach 90% of the peak maximum rate when  $s \rightarrow \infty$  can be computed from (46), and is 53 for dyads and 50 for triads both v1 and v2.

## 6. Program performance

We consider an incompressible viscous flow in two- and three-dimensional cavities by a uniformly moving upper surface, and measure the maximum actual rate obtained when we execute programs to compute the flow in the cavity in parallel on the 128-processing element system of the NWT.

### 6.1 Square cavity problem

Let  $H$  be the depth of cavity,  $L$  the width of cavity, and  $H = L = 1$ . The dimensionless steady-state stream-function vorticity conservation form of the two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations is as follows:

$$\psi_y \zeta_x - \psi_x \zeta_y = \frac{1}{Re} (\zeta_{xx} + \zeta_{yy}), \quad (47)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\zeta, \quad (48)$$

where  $\zeta$  is the vorticity,  $\psi$  the stream-function,  $Re$  the Reynolds number, and  $x$  and  $y$  the axial and normal coordinates, respectively.

The boundary conditions on (48) for flow in a lid-driven cavity with the upper surface translating to the right with uniform velocity  $u = 1$  and with no flow at the other boundaries are at the upper surface

$$\psi_y = 1, \quad \psi_x = 0, \quad \psi = 0, \quad (49)$$

and at the bottom, left and right surfaces

$$\psi_y = 0, \quad \psi_x = 0, \quad \psi = 0. \quad (50)$$

The boundary conditions on (47) are obtained by applying the boundary conditions for the stream-function at the solid boundaries as follows:

$$\zeta = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}), \quad \text{at } x = 0, 1 \text{ and } y = 0, 1. \quad (51)$$

When we could obtain the steady-state solutions  $\zeta$  and  $\psi$ , the primitive variables can be computed from the following equations:

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad (52)$$

$$p_{xx} + p_{yy} = (v\zeta)_x - (u\zeta)_y = \sigma, \quad (53)$$

where  $p, u$  and  $v$  are the total pressure, velocity component in the  $x$ -direction and velocity component in the  $y$ -direction, respectively.

The boundary conditions on (52) are at the upper surface

$$u = 1, \quad v = 0, \quad (54)$$

and at the bottom, left and right surfaces

$$u = 0, \quad v = 0. \quad (55)$$

The following Neumann boundary conditions on (53) are obtained by applying the momentum equations at the solid boundaries:

$$p_x = v\zeta - \frac{1}{Re} \zeta_y, \quad \text{at } x = 0, 1, \quad (56)$$

$$p_y = -u\zeta + \frac{1}{Re} \zeta_x, \quad \text{at } y = 0, 1. \quad (57)$$

Solutions to (53) with (56) and (57) are unique within an arbitrary constant, which can be determined by using the relation

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 p \, dx \, dy = \text{constant}. \quad (58)$$

The existence of a solution for (53) with (56) and (57) requires the satisfaction of the following compatibility condition:

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \sigma \, dx \, dy = \int p_n \, dS, \quad (59)$$

where  $n$  is the outward normal to the boundary contour  $S$ , enclosing the solution domain.

In order to obtain numerical solutions, we adopt finite-difference approximations for (47)-(59) on non-staggered and uniform grids. All partial derivatives are approximated using second order accurate formulas. We note that the finite-difference approximation for (51) are obtained from (48)-(50) by enforcing reflection at the boundaries, and that for the compatibility condition (59) to be exactly satisfied on a non-staggered grid, we must use the consistent finite-difference approximations for (53), (56) and (57) [4].

We use the following four iterative methods to obtain the steady-state solutions of  $\zeta$ ,  $\psi$  and  $p$ :

- (1) Jacobi's method,
- (2) red-black ordering,
- (3) conjugate gradient (CG) method,
- (4) alternating direction implicit (ADI) method.

Futhermore the solutions of  $u$  and  $v$  are computed from (52) after obtained  $\psi$ .

A large amount of numerical information on the Reynolds number range of  $Re = 10^{-6} \sim 10^5$  has been collected during this investigation. See [5] for details. Fig.5 shows the square cavity flow at  $Re = 20,000$ .

## 6.2 Cubical and 3-D narrow cavity problem

Let  $L$  be the length of cavity in the x-direction,  $H$  the height of cavity in the z-direction, and  $W$  the breadth of cavity in the y-direction. For a cubical cavity,  $L = H = W = 1$  and for a 3-D narrow cavity,  $L = H = 1$  and  $\lambda = W/L < 1$ . The dimensionless divergence form of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations is as follows:

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (60)$$

$$u_t + uu_x + vv_y + ww_z = -p_x + \frac{1}{Re}(u_{xx} + v_{yy} + w_{zz}), \quad (61)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + ww_z = -p_y + \frac{1}{Re}(u_{xx} + v_{yy} + w_{zz}), \quad (62)$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = -p_z + \frac{1}{Re}(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}), \quad (63)$$

and

$$(p_x)_x + (p_y)_y + (p_z)_z = -D_t - Q, \quad (64)$$

where

$$D = u_x + v_y + w_z, \quad (65)$$

$$Q = (uu_x + vv_y + ww_z)_x + (uv_x + vv_y + ww_z)_y + (uw_x + vw_y + ww_z)_z, \quad (66)$$

and  $Re$  is the Reynolds number,  $p$  the static pressure,  $t$  the time,  $u$ ,  $v$  and  $w$  the velocity components in the x-, y- and z-directions, respectively.

The boundary conditions on the velocity for flow in a lid-driven cavity with the upper surface translating to the right with uniform velocity  $u = 1$  and with no flow at the other boundaries are at the upper surface

$$u = 1, v = 0, w = 0, \quad (67)$$

and at the other surfaces

$$u = 0, v = 0, w = 0. \quad (68)$$

The following Neumann boundary conditions on the pressure are obtained by applying the momentum equations at the solid boundaries: at the  $y = 0$  and  $y = 1$  surfaces

$$-p_x = uu_x + vv_y + ww_z - \frac{1}{Re}(u_{xx} + v_{yy} + w_{zz}), \quad (69)$$

at the  $x = 0$  and  $x = 1$  surfaces

$$-p_y = uv_x + vv_y + ww_z - \frac{1}{Re}(u_{xx} + v_{yy} + w_{zz}), \quad (70)$$

and at the  $z = 0$  and  $z = 1$  surfaces

$$-p_z = uw_x + vw_y + ww_z - \frac{1}{Re}(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}). \quad (71)$$

The momentum equations (61)-(63) are solved for the velocity components by marching in time. Equation (64) is a second order elliptic partial differential equation of the Poisson type, which is explicitly independent of the Reynolds number, because the diffusion terms are eliminated by the continuity equation (60). The governing equations (60)-(64) for the primitive variables are not independent. The continuity equation (60) is eliminated from the system of equations, and is iteratively satisfied through the solution of the pressure equation (64) as following: we can approximate the unsteady term  $D_t$  for the dilation in (64) by  $(D^{n+1} - D^n)/\Delta t$ , where the superscripts  $n$  and  $n + 1$  refer to the time levels  $t$  and  $t + \Delta t$ , respectively. In order to attempt to be satisfied (60), we set  $D^{n+1} = 0$ .

Solutions to (64) with (69)-(71) are unique within an arbitrary constant, which can be determined by using the relation

$$\int_{z=0}^1 \int_{y=0}^{\lambda} \int_{x=0}^1 p dx dy dz = constant. \quad (72)$$

The existence of a solution for (64) with (69)-(71) requires the satisfaction of the following compatibility condition:

$$\int_{z=0}^1 \int_{y=0}^{\lambda} \int_{x=0}^1 -(D_t + Q) dx dy dz = \int \int p_n d\theta V, \quad (73)$$

where  $n$  is the outward normal to the boundary surface  $\partial V$ , enclosing the solution domain.

In order to obtain numerical solutions, we adopt finite-difference approximations for (61)-(73) on non-staggered and uniform grids. All the other partial derivatives except for the time are approximated using second order accurate formulas. We note that for the compatibility condition (73) to be exactly satisfied on a non-staggered grid, we must use the consistent finite-difference approximations for (64) and (69)-(71) of which method is described in [6] with respect to two-dimensional case. Futhermore we use the four iterative methods mentioned in Subsection 6.1 to obtain the pressure solution.

A large amount of numerical information on the Reynolds number range of  $Re = 10^1 \sim 10^4$  has been collected during this investigation. Fig.6 shows the cubical cavity flow at  $Re = 100$ .

6.3 Measurements of program performance

(1) Definition of the symbols used below

- $r_1$  = actual rate of the part of the solution method in programs,
- $r_2$  = actual rate of programs in case of including the computation part of convergence decision,
- $r_3$  = actual rate of programs in case of not including the computation part of convergence decision,
- $r_4$  = actual rate of programs in case of intentionally suppressing execution of the explicit memory access statements,
- $r_5$  = actual rate of programs in case of using the coalescing technique,
- $d_{ma} = r_4/r_3$  = degree of degradation of actual rate due to the memory access bottleneck.

(2) Maximum program performance

Table 1 shows maximum actual rates for each solution method of programs to compute the square cavity flow with respect to the v1 and v2 system software when  $pe = 128$ . Table 2 and 3 show maximum actual rates for each solution method of programs to compute the cubical and 3-D narrow cavity flow with respect to the v1 and v2 system software when  $pe = 128$ .

(3) Remarks

We remark here the followings to obtained results: (a)To apply ADI method to 2-D problem is not advisable, because of incurring a large amount of communication overheads by the global memory access. (b)The reason that actual rates of the red-black method are inferior to ones of the other methods is for the amount of works in each parallel section to become half the others. (c)The reason that the values of  $d_{ma}$  for Jacobi method and 3-D problem are larger than the others is because dimensional computer variables are stored to and retrieved from memory each iteration. (d)For 3-D problem, actual rates for narrow cavity problem rise than for cubical cavity problem except ADI, but vice versa for shallow cavity problem. (e) Finally we mention that the solution method shown larger actual rate is not always advantageous to obtain convergence solutions, and that it is a fact to find difficulty in being converged to solutions when  $Re$  grows larger if we did not use the Jacobi-red-black or CG-red-black combination as a solution method.

7. Concluding remarks

(1) The degree of the improvement on the start-up times of v2 to v1 is 1.18 to 1.28-fold decrease with MIMD computing in the local memory access, 3.42 to 3.88-fold decrease with the data transfer, and 1.86 to 2.84-fold decrease with MIMD computing in the global memory access. In other words, synchronization overheads have decreased about 1.2 to 1.3-fold, and communication overheads about 5.0 to 5.7-fold.

(2) The parallel compiler can stand improvement on the long-vector length performance with SIMD computing, and more decrease of all sorts of the start-up times in the global memory access.

(3) Saying from the real state of the operating and operational system, more speedup of the operating system by trace scheduling, more improvement on the traffic control function of the operational system, and introduction to the distributed

process for the traffic are desired.

References

- [1] S. Hatayama, The characteristic parameters of the NWT computer system in the local memory access, *Parallel Computing* (submitted for publication).
- [2] S. Hatayama, The characteristic parameters of the NWT computer system in the global memory access, *Parallel Computing* (submitted for publication).
- [3] S. Hatayama, On an improvement on the NWT system software, *Parallel Computing* (submitted for publication).
- [4] S. Abdallah, Numerical solution for the pressure Poisson equation with Neumann boundary conditions using a non-staggered grid I, *Journal of Computational Physics*, 70, 182-192(1987).
- [5] S. Hatayama, Computation of incompressible viscous flow in a lid-driven square cavity and its program performance on the NWT computer system, *Parallel Computing* (submitted for publication).
- [6] S. Abdallah, Numerical solution for the incompressible Navier-Stokes equation in primitive variables using a non-staggered grid II, *Journal of Computational Physics*, 70, 193-202(1987).

Table 1 Program performance for a square cavity problem. (1)  $pe = 128$  and v1.

method	grid	$r_1$ (Gflop/s)	$r_2$ (Gflop/s)	$r_3$ (Gflop/s)	$r_4$ (Gflop/s)	$d_{ma}$
Jacobi	16384 <sup>2</sup>	103.938	91.202	100.828	133.873	1.328
red-black	16384 <sup>2</sup>	74.108	59.703	68.854	76.721	1.114
CG	12000 <sup>2</sup>	100.916	88.901	100.005	105.547	1.055
ADI	12001 <sup>2</sup>	3.323	3.391	3.114	3.253	1.045

(2)  $pe = 128$  and v2

method	grid	$r_1$ (Gflop/s)	$r_2$ (Gflop/s)	$r_3$ (Gflop/s)	$r_4$ (Gflop/s)	$d_{ma}$	$r_5$ (Gflop/s)
Jacobi	16384 <sup>2</sup>	107.213	94.166	106.374	142.363	1.340	17.760
red-black	16384 <sup>2</sup>	73.604	59.932	64.144	79.160	1.162	3.224
CG	12000 <sup>2</sup>	93.123	82.001	103.110	110.266	1.069	16.591
ADI	12001 <sup>2</sup>	3.174	3.202	3.472	3.931	1.071	1.680

Table 2 Program performance for a cubical cavity problem. (1)  $pe = 128$  and v1

method	grid	$r_1$ (Gflop/s)	$r_2$ (Gflop/s)	$r_3$ (Gflop/s)	$r_4$ (Gflop/s)	$d_{ma}$
Jacobi	601*601*601	63.599	---	34.425	104.362	2.670
red-black	602*602*602	19.656	---	26.607	63.936	2.335
CG	551*551*551	49.649	---	41.454	---	---
ADI	561*561*561	38.973	---	39.641	76.509	1.779

(2)  $pe = 128$  and v2

method	grid	$r_1$ (Gflop/s)	$r_2$ (Gflop/s)	$r_3$ (Gflop/s)	$r_4$ (Gflop/s)	$d_{ma}$
Jacobi	601*601*601	63.974	27.076	42.914	104.695	2.534
red-black	602*602*602	25.653	22.555	34.366	63.673	1.659
CG	551*551*551	59.320	32.910	47.668	---	---
ADI	561*561*561	42.619	31.796	40.485	71.200	1.741

Table 3 Program performance for a 3-D narrow cavity problem ( $pe = 128$  and v2).

method	grid	$r_1$ (Gflop/s)	$r_2$ (Gflop/s)	$r_3$ (Gflop/s)
Jacobi	1280*90*1280	92.211	33.718	63.618
red-black	1280*90*1280	34.332	30.942	50.839
CG	1280*70*1280	84.063	46.540	73.466
ADI	1280*70*1280	18.038	21.030	24.075

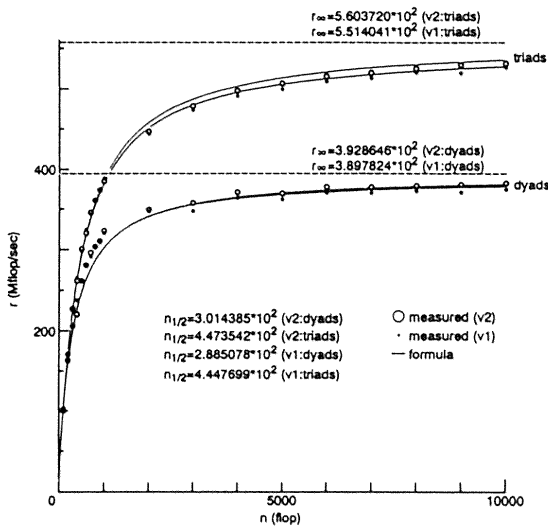


Fig.1 The  $(r_{\infty}, n_{1/2})$  benchmark (actual processing rates with SIMD computing).

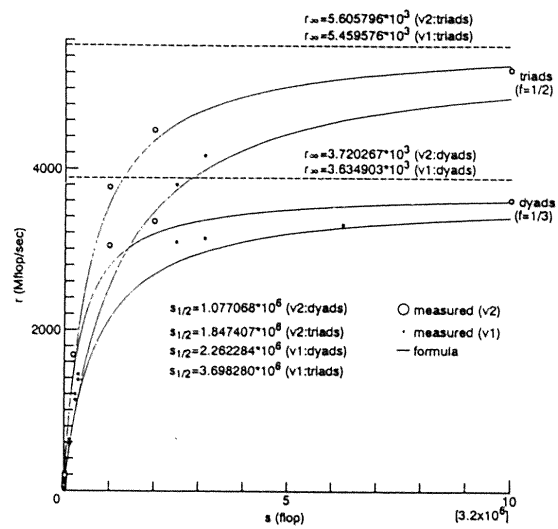


Fig.4 The  $(\hat{r}_{\infty}, \hat{s}_{1/2}, f_{1/2})$  benchmark (actual processing rates with MIMD computing in the globalmemory access when  $pe = 64$ ).

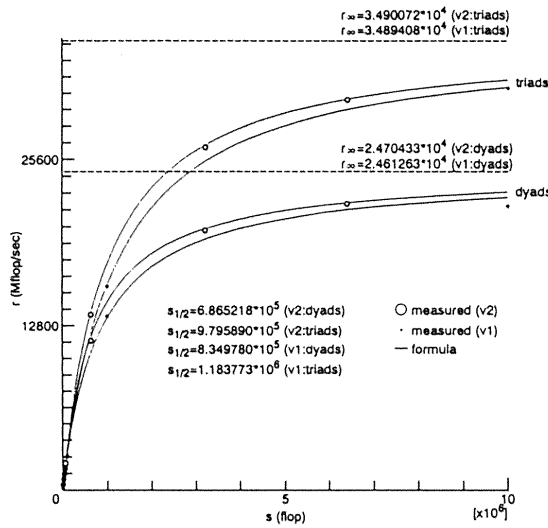


Fig.2 The  $(r_{\infty}, s_{1/2})$  benchmark (actual processing rates with MIMD computing in the local memory access when  $pe = 64$ ).

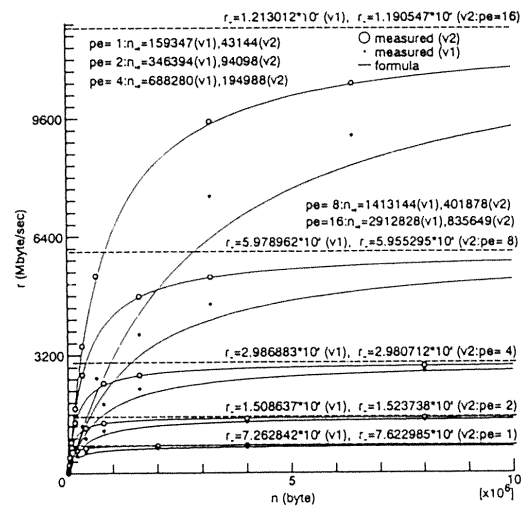


Fig.3 The pingpong benchmark (actual rates with data transfer between the local and global memory spaces when  $pe = 1 \sim 16$ ).

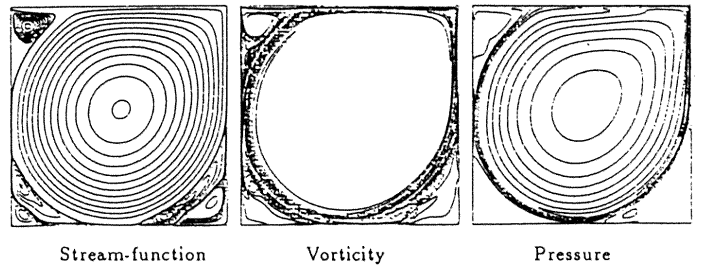
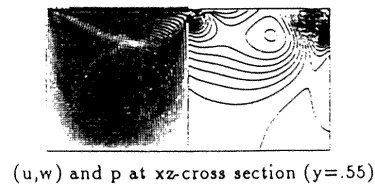
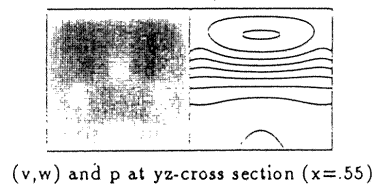
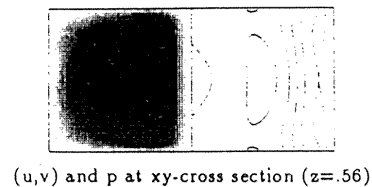


Fig.5 The square cavity flow at  $Re = 20,000$ .



Streamline started at  $(0.5, 0.7, 0.97)$ . Locations that flow-particles appear on the right yz-cross section of  $x = 0.5$ .

Fig.6 The cubical cavity flow at  $Re = 100$ .



## 非圧縮NSコードによるNWTの性能評価

中村孝\*、吉田正廣\*

## Performance Evaluation of the NWT with Incompressible NS code

by

Takashi Nakamura and Masahiro Yoshida (NAL)

## ABSTRACT

We parallelized an incompressible CFD code to evaluate the effectiveness of the Numerical Wind Tunnel (NWT) for a code with small operations per grid point.

The original CFD code is based on the MAC method and solved by the SOR method. Since the SOR iterative algorithm is not suitable for vector computers nor parallel computers, various methods to vectorize have been proposed. We chose the red and black method, a modified version. This method imposes smaller operations per grid point and less-time of data transfer per iteration than compressible CFD codes with IAF method.

This study shows the parallelization performance on the NWT with the code.

## 1. はじめに

航空宇宙技術研究所で1993年2月より稼働している数値風洞(Numerical Wind Tunnel "NWT")は、定常3次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式の近似因子分解法(IAF法)を基本としたCFDプログラムの高速処理を主目標として開発された計算機である。その結果、要素計算機(PE)にはベクトル型コンピュータを採用し、それらを

高速のクロスバーネットワークで結合した、分散主記憶型の並列計算機となった(図1)。

この形態の並列計算機の性能を引き出すためには、

- (1) ベクトル長を十分長くする
- (2) PE間データ転送回数および転送量を極力少なくする
- (3) 並列実行粒度を揃える

等を考慮したプログラムとする必要がある。クロスバーネットワークを用いているので転送におけるPE間の距離は等しい。従って、データ転送相手の配置を意識する必要はない。

圧縮性3次元NS方程式に基づくCFDプログラムは、格子点あたりの演算数が多く(2000~10000)、また3次元以上の配列も多く(20~100)使用している。さらにIAF解法を用いているので配列の分割方向の転置を行う必要があった。我々はこれまでにこの種のプログラムを用いてNWTの性能評価を行い、NWTの有用性を示してきた[1]、[2]、[3]。また、プログラムの手順は似ているものの演

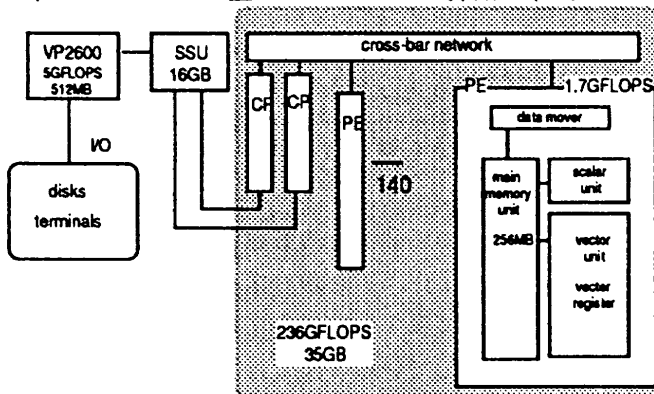


図1 NWT構成図

算数の少ないものとしてFFTによるプログラムについても評価を行ってきた [4]。

ここでは演算数の少ない別の例として、非圧縮NS方程式のMAC法に基づく数値解法プログラムを用いて並列化し、NWTの性能評価を行った。並列化にはRED and Black (R&B) 法を用いた。SOR法、R&B法は手順が陽解法と似ている。表1に陰解法と陽解法について簡単な比較を示す。

表1 解法の違いによる性能比較

	ベクトル性能	粒度	転送量	収束性	演算数
陰解法	良	良	多い	速い	多い
陽解法	優	優	少ない	遅い	中

2. 並列化

非圧縮NS方程式は保存形で (1) 式のように表され、MAC法による離散化は (2 a, 2 b) 式のように表せる。ここでUは速度ベクトル、Pは圧力、Aは (1) 式の空間差分オペレータであり、RHSは運動量保存方程式を各々 x, y, z で更に微分した3つの式を加えたPを含まない項である。nは時刻を表し、Δtは時間ステップである。

$$U_t + E_x + F_y + G_z = 0 \tag{1}$$

$$U^{n+1} - U^n + \Delta t A U^{n+1} = 0 \tag{2a}$$

$$\nabla^2 P^n = RHS^n \tag{2b}$$

非圧縮NS方程式のMAC法によるプログラムは、圧縮性NS方程式のIAF法プログラムに対し、格子点あたりの演算数が少なく (434)、使用している配列も少ない (27) などの特徴がある。また別に非圧縮NS方程式の解法の一つとして疑似圧縮性によるプログラムがあるが、離散化、演算数などの特徴は圧縮性とほぼ同等である。

図2にオリジナルのMAC法によるプログラムのフローチャートを示す。まず或る時刻nでの既知のUから圧力Pを陰的に求める。次に時刻nでのUとPからU<sup>n+1</sup>を同じく陰的に求める。境界条件を計算し、修正量が予め与えた値に達するまで上の手順を繰り返

す。陰解法にはいくつかの方法があるが、ここでは収束速度の速いとされているSOR法を用いている。SOR法を (3) 式に示す。

$$P^{q+1} = (I - \omega L)^{-1} \{ \omega U + (1 - \omega) I \} P^q + \omega (I - \omega L)^{-1} RHS \tag{3}$$

(I - L - U) が (2 b) 式の左辺である。qはSORの反復を表す。ωは緩和係数である。

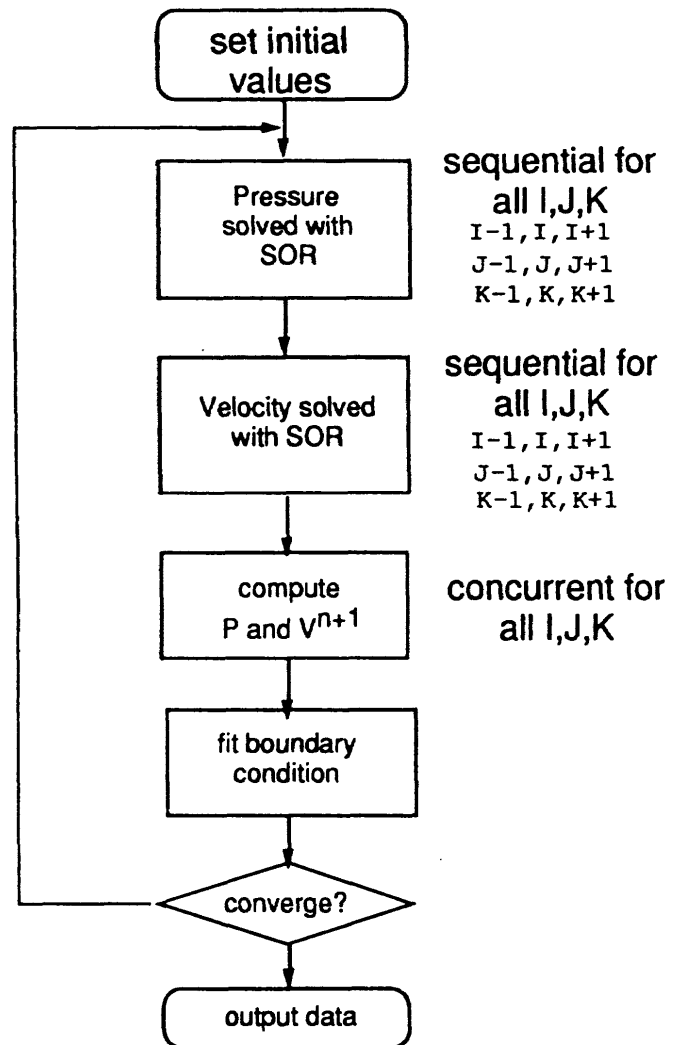


図2 MAC法による非圧縮NS解法

図3に簡単のために2次元のSOR法の手順を示す。ここである点 (i, j) が現在求めようとしている位置であり、白丸で表す。白い十字は白丸を求めるのに必要な4点を示している。図ではまずi方向に進み、次にj方向に進みながら格子点上の値を求めて行く。

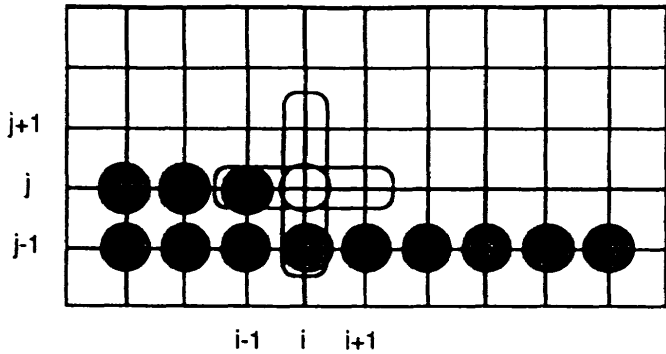


図3 5点差分スキームとSOR法

グレイの丸印は  $q$  回目の反復中に更新された格子点を表し、クロス（無印の格子点）は  $q-1$  回の反復に求めた格子点を表す。このようにSOR法は直前のデータを必要とし、そのままでは独立に実行できる方向がなく全ての方向が逐次演算となり、ベクトル化すら容易ではない。

今回用いたオリジナルのプログラムでは、SOR法を変更して一つの方向の格子点の全てのデータを1反復前の値を用いることによりベクトル化し、残りの方向を2次元のSORとして解いている。こうすることにより収束速度は犠牲になるもののベクトル化によりスピードアップを図ることが可能になる。ここでさらに並列化を行うわけであるが、この残りの逐次部分をどのように並列化するかにより、いくつかのアプローチがある。ここでは、RED and BLACK (R & B) 法を用いた (図4)。

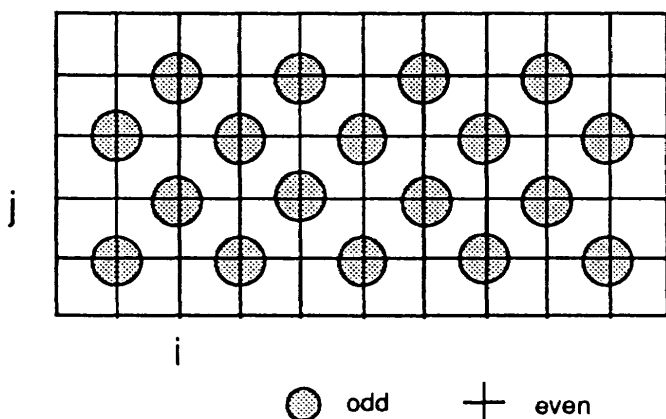


図4 R & B 法

2次元でのR & B法を例にとる。(  $i, j$  ) で (  $x, y$  ) の格子を表すとする。まず始めに、  $i + j$  が奇数の部分を全て解く。その場合、その前後左右の格子点 (  $i + j$  が偶数の点 ) を必要とするが、その値は1イタレーション前の値を使用する。次に偶数の部分を解

く場合には既に求めた奇数の値を使用する。奇数の部分を解く場合には偶数の部分のみを必要とし、最新の奇数は必要としない。偶数の場合も同様である。従って偶数または奇数の格子点はそれぞれ独立に演算可能である。独立に演算可能な方向を並列化することができる。しかし、情報が伝わるのが遅い分収束が遅いが、並列化により利益を得られる。また配列の分割部分に隣接する値のみを転送するだけでよいので、転送量は比較的少なく、PEを増加させても1台当たりの転送量は不変である。計算領域を分割して複数のPEで実行する場合、均等な短冊型に分割する場合を考える。分割に接する格子点の演算にはとなりのPEに格納されているデータを必要とする。ここで、配列を分割する際に、1ないし2個のデータを隣り合ったPEが重複して持っていれば、PEに閉じて計算を進めることが可能である。これを実現する機能が「袖付き分割」である。イタレーションを進める度に袖の値を隣り合ったPE間で更新するだけでよい。

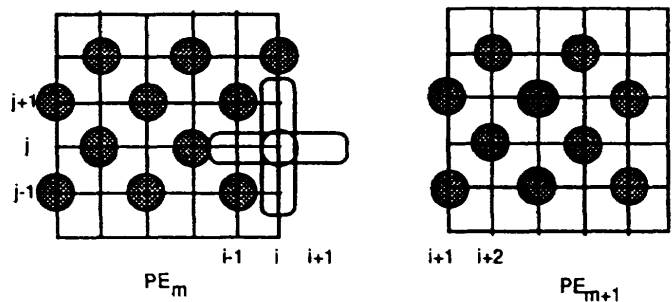


図5 分割境界上の演算

分割した境界上の値を求める場合を図5に示す。この例では (  $i, j$  ) の値を求める場合、 (  $i + 1, j$  ) の値が必要であり、それは  $PE_{m+1}$  に格納されている。そこで、図6のように  $PE_m$  が予め (  $i + 1, j$  ) のデータも持つことにすれば、 (  $i, j$  ) の演算が  $PE_m$  内で行え、  $PE_{m+1}$  から転送しなくても済むことになる。このような余分にデータを持つ (袖付き) 分割例を図7に示す。袖と呼んでいる部分、  $PE_m$  では  $i + 1$  の部分、のデータをとなりに転送するだけなので、台数が増加しても1台当たりの転送量は増加しない。  $PE_m$  は  $i + 1$  の部分は自身で更新しないで  $PE_{m+1}$  から1イタレーション後に転送して更新する。

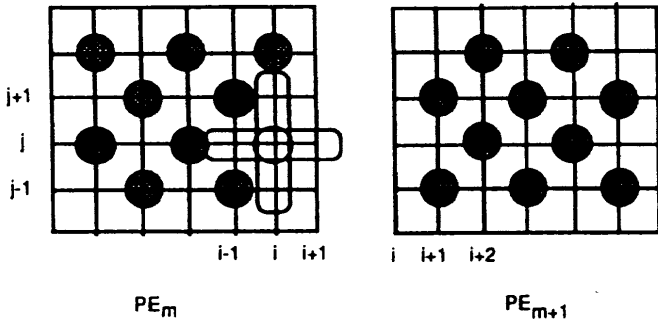


図6 袖付き分割による境界上の演算

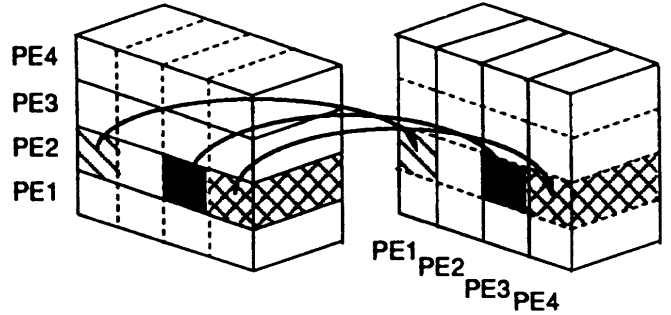


図8 転置転送

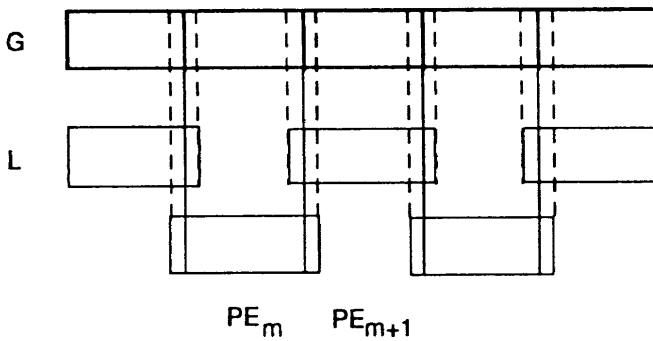


図7 袖付き分割

データ転送にかかる時間は、転置転送の場合、

$$(t_1 + N^3 / p^2 \times r) \times (p - 1)$$

で表されるが、袖転送の場合は、

$$(t_1 + c \times N^2 \times r) \times 2$$

で表される。ここで、 $t_1$  はバケット生成時間、 $r$  は転送速度、 $p$  はPE台数、 $N$  は配列の大きさ、 $c$  は袖の幅である。転送データ量は  $N \times N \times N$  の3次元配列を基に計算した。図8に転置転送の場合のデータの動きを示す。転置では、1台のPEから他の全てのPEにデータを転送する必要があるが、データ数は台数と共に減少する。しかし、PE台数の増加とともに  $t_1$  が支配的になり、一旦減少した転送時間はまた増加する。それに対し、袖転送の場合は、PEが3台以上は台数が増加しても両端のPE以外のPEからみた転送先は常に両隣の2台のみで、データ量も変化しない。従ってネットワーク上での衝突などを避けるように転送を行えば、転送時間はPE台数に依存しない。

図9に並列化したR&B法のフローチャートを示す。図中ハッチのある部分が並列計算におけるオーバーヘッドとなる部分である。他の白い箱で示す部分の演算は全て並列に行うことができ、さらに、配列の大きさをPE台数の整数倍に選べば並列実行粒度を揃えることが可能になり、並列実行効率を上げることができる。

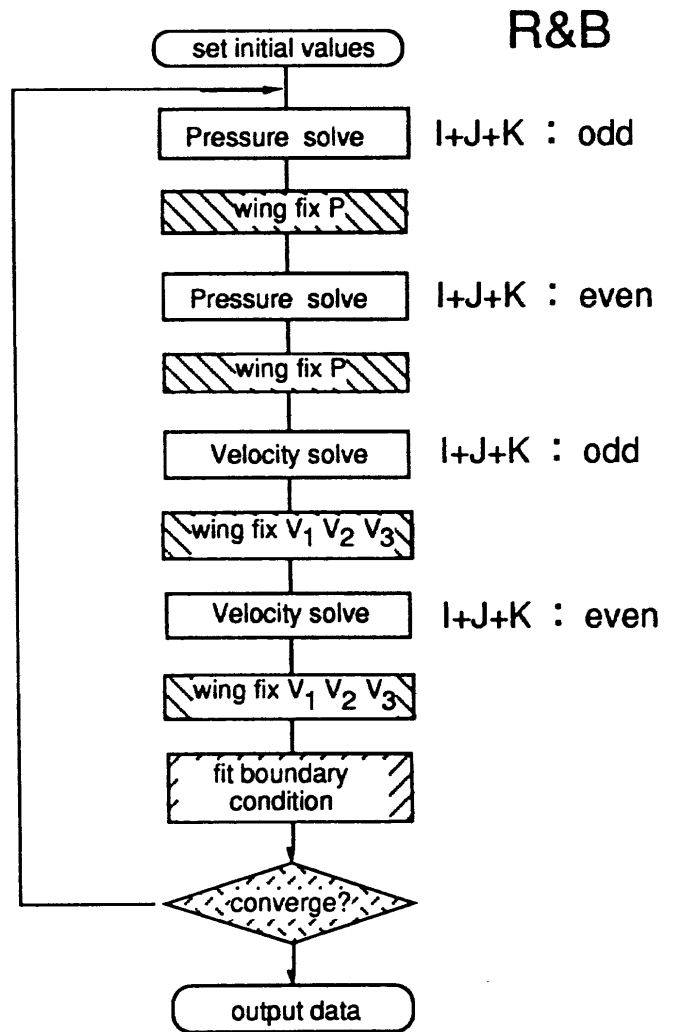


図9 MAC法フローチャート

w i n g f i xが袖部分のデータ転送を示している。この例では1回のイタレーションで4回の転送となっているが、後の2回は速度ベクトルに関するもので、データは3つある。収束判定を行う部分では、全てのPE上のデータを集める必要があり、グローバル関数機能を用いることにより実現する。グローバル関数には、総和 (SUM)、最大/最小 (MAX/MIN) がある。この場合も並列化のオーバーヘッドになる。また、境界の値を計算する部分では、分割方法により、特定のPEにのみデータがある場合があり、その部分の計算は担当するPEのみが実行するので、その他のPEはアイドルとなり効率は下がる。しかし、演算数が少ないので、転送して並列化率を上げるか否かは、実時間の長さで決まる。

3. 演算性能と転送性能

性能の計測は入出力を除いた、実行時間のほとんどのウェイトを占めるメインのイタレーションに対して行った。演算数はソースプログラムから算定し、世界時刻を測定するサブルーチンを用いて演算時間および転送時間を計測した。単一計算機の場合は、性能を計るものとしてCPU時間を計測すればよいが、並列計算機では、データ転送時間や同期待ち時間なども計る必要があり、世界時刻を取得するサブルーチンを用いる。

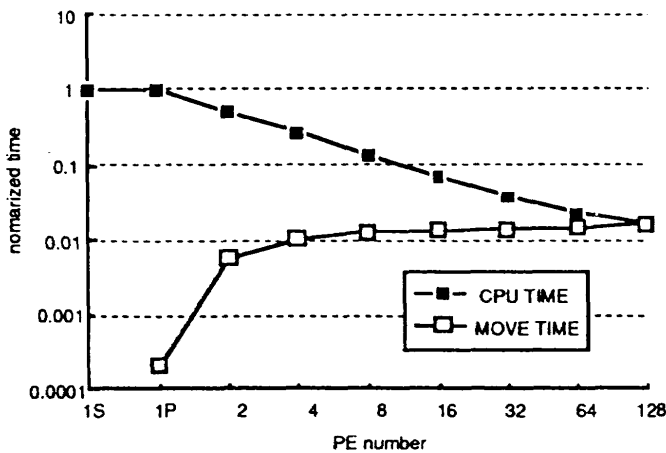


図10 台数効果 (問題規模一定)

図10に問題規模を一定にした場合の台数効果について示す(格子サイズは64×128×128、百万点)。格子数は1台のPEの主記憶に納まる量で決まる。図10で、1Sとあるのはオリジナルプログラムを1台のPEで実行した場合の時間を示し、それを基準にして時間を正規化している。1Pとあるのは並列化した

プログラムを並列コンパイルして1台のPEで実行した場合を表している。CPU TIMEとは1回の反復演算に要した計算時間を表している。MOVE TIMEは転送における準備などのパケット生成時間と実際の転送時間の和を表している。転送は完了するまで待つ機能を用いているので、待ち時間を含む。1Pの転送時間はライブラリを呼ぶだけで終わり、2台の場合は各々のPEが他のPEに1回だけ転送をすればよく従って転送時間が短い。4台以上では、転送時間は問題規模が一定なので、台数が増加しても不変になるのをよく表している。わずかに増加しているのは転送の同期の乱れと予想される。CPU時間は、台数と共に減少する。128台ではCPU時間と転送の時間がほぼ一致し、反復に必要な時間のうち約50%が転送時間となる。図11に反復時間の内に占める転送時間の比を示す。

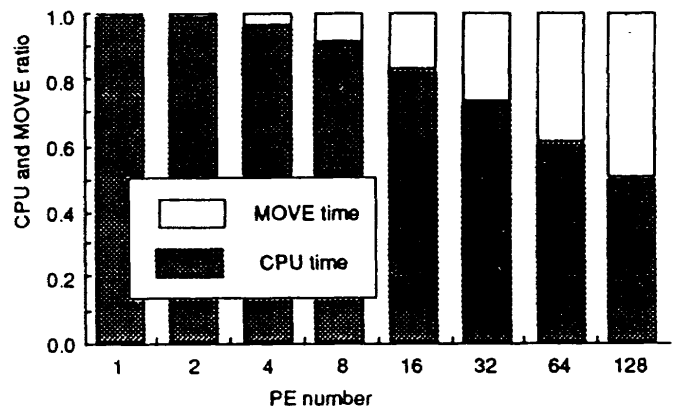


図11 転送時間とCPU時間の比

次に、台数と共に問題規模を拡張した場合と一定の場合とを図12に示す。格子数を増加させた場合、1台のPEのメモリに載らないので、時間による直接の

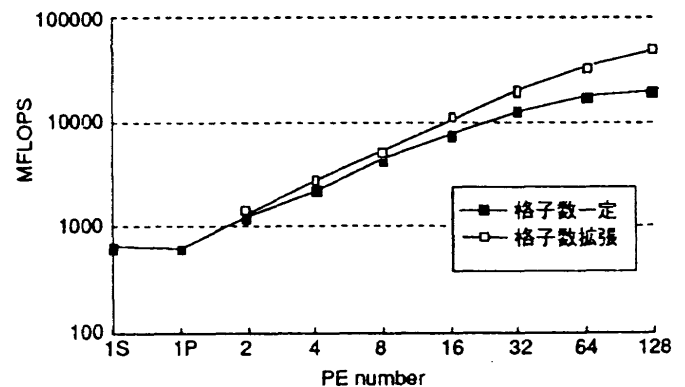


図12 台数効果 (規模を増加させた場合)

比較は出来ないが、MFLOPS値を用いて比較した。1台のPEに納まる程度の、問題規模が小さい場合は

台数を増加させて行くに従って、性能が頭打ちになるが、規模を増やしていく場合は、担当する演算量はほぼ不変に出来るので、32台までは順調に性能向上がみられる。さらにPE台数が増加するにつれて、問題も大きくなるので、転送するデータ量が増えることによるオーバーヘッドが大きくなり、従って並列効率が下がり、性能向上のカーブの上昇が鈍る。

#### 4. 評価

格子点あたりの演算数が比較的少ないので、問題規模一定の場合の台数効果はある数以上のPEでは性能上昇は期待できないが、PE台数と共に問題規模を増加させることにより高い効率を維持することが可能になる。図13に効率曲線を示す。この図は、MFLOPS値を用いて、オリジナルのPE1台の場合を基準にして正規化し、台数で割った値を示している。

今回のMAC法に基づくプログラムの場合、

- (1) 格子点数一定での並列効率は、
  - 16台まで75%以上(1.2倍)
  - 128台では24%(3.1倍)
- (2) 格子点数をPE台数と共に増加させた場合は、
  - 64PEでは3.3GFLOPS  
(5.2倍、 $5.12 \times 3.84 \times 2.56$ )
  - 128PEで4.8GFLOPS  
(7.6倍、 $5.12 \times 5.12 \times 2.56$ )
- (3) 軸転送パターンになることにより転送時間が台数によらず一定と結論できる。図で、オリジナルの1Sより効率の高い値があるのはベクトル長が長くなったことによる性能向上による。

#### 5. おわりに

NWTは、PEがベクトル型の計算機であること、大量のデータを多数のPE間で転送を行う場合にクロスバネットワークの性能が発揮される、などの特徴があるので、今回のような演算数が少ないプログラムで問題規模の小さいものでも、軸転送による転送時間の効果によりある程度の台数までは台数効果があり、問題規模を増加させれば或る程度の並列性能向上が期待できる。しかし、演算数が少なければ実時間が少なくて済むので、効率だけではなく、実演算時間と収束速度の評価が今後の課題となる。

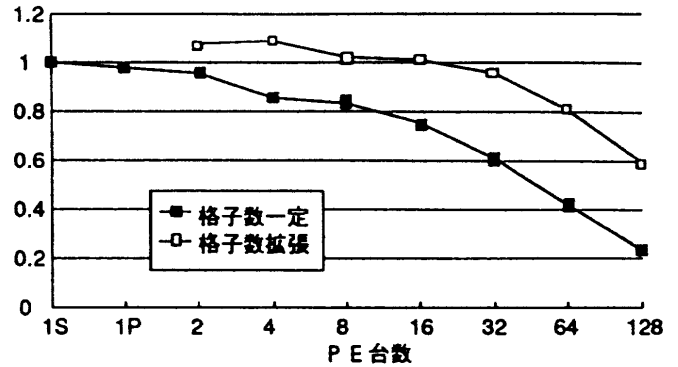


図13 効率の変化

さらに、入出力の性能等、ジョブを投入してから答を得るまでの時間の評価が必要であり、あわせて今後の課題である。

ここでMAC法によるプログラムのオリジナルは東京大学工学部航空工学科久保田研究室で開発されたものを使わせていただいた。ここに感謝します。

#### 参考文献

- 1) Iwamiya, T., Fukuda, M., Nakamura, T., Yoshida, M. "On the Numerical Wind Tunnel", Parallel CFD '93
- 2) 中村孝、吉田正廣、福田正大、村瀬丈夫、松崎達哉 「CFDプログラムによるNWTの性能評価」第11回航空機計算空気力学シンポジウム、航技研特別資料、SP-22,1994
- 3) Fukuda, M., Yoshida, M., Nakamura, T., Iwamiya, T. "On The NAL Numerical Wind Tunnel and Its Performances", 5th International symposium on Computational Fluid Dynamics 1993
- 4) 福田正大、吉田正廣、中村孝、村瀬丈夫、小山隆司 「並列ベクトル計算機「数値風洞」によるFFTプログラムの性能評価」、第47回情報処理学会全国大会、1993

## 高並列コンピュータAP1000のアーキテクチャと基本ソフトウェア

佐藤 弘幸

(株) 富士通研究所 並列処理研究センター

### Highly Parallel Computer AP1000: Architecture and Basic Software

Hiroyuki Sato Parallel Computing Research Center, Fujitsu Laboratories Ltd.

Massively parallel computer, such as the AP1000 can be used for speeding up visualization of simulation results. To use the AP1000 highly parallel computer in visual computing, we developed (1) video hardware having a 400 MB/s peak transfer rate, able to display HDTV images generated by processors at 30 frames/s, and (2) parallel disk hardware that uses a 3.5-inch disk drive for each cell, providing a large capacity and high aggregate transfer speed. We also developed parallel visualization software CaVis, implementing it with a pipeline of task programs, each of which represents a visualization phase.

#### 1. はじめに

AP1000[1, 2]は富士通研究所により開発された分散メモリ型の並列コンピュータである。プロセッサエレメントには、RISC型の汎用高速マイクロプロセッサを使用しており、低コストで高い性能を実現している。また、プロセッサの性能を最大限引き出すには、通信・同期のためのネットワークが重要であり、AP1000では3種類のネットワークによりオーバーヘッドの少ない並列処理を可能としている。スカラー並列処理により、ベクトル処理が有効でない分野の応用問題、例えば粒子系のシミュレーションやグラフィックス等にも効果的に適用できる。本発表では、AP1000のアーキテクチャと基本ソフトを概説し、さらにビジュアルシミュレーションへのためのオプションハードウェア、可視化ソフトCaVisを解説し、分子動力学計算への適用例について性能評価を行なう。

#### 2. AP1000のアーキテクチャ

##### 2.1 全体構成

AP1000の構成を図1に示す。AP1000はセルと呼ぶプロセッサエレメントからなり、4プロセッサから最大1024プロセッサまでシステム拡張が可能である。セルプロセッサには50 MFLOPSの演算性能をもつSuperSPARC (50MHz)を使用しており、最大

構成時には51.2 GFLOPSのピーク性能が得られる。セル群は、ブロードキャストネットワーク(B-net: 50MB/s)、トーラスネットワーク(T-net: 25MB/s/channel)、同期ネットワーク(S-net)の3種類のネットワークで結ばれている。これら3種類のネットワークにより、放送通信(B-net)、任意プロセッサ間の1対1通信(T-net)、バリア同期(S-net)を高速化しており、オーバーヘッドの少ない並列処理を可能にしている。

##### 2.2 分散ディスクビデオ(DDV)オプションハードウェア

オプションハードウェアとして、画像表示出力とディスクへの高速アクセスを可能にする分散ディスクビデオDDV[3]を開発した(図2参照)。これにより、

- 1) 高解像度画像のリアルタイム(30フレーム/秒)の画像表示
- 2) 大容量、高速なディスクへのアクセス
- 3) 分散ディスク上の画像データのアニメーション表示

が可能になった。

セルに直接接続されるオプションボードには、分散フレームメモリとディスクインタフェースが実装されている。分散フレームメモリは高速のビデオバスを介して、表示フレームメモリに接続さ

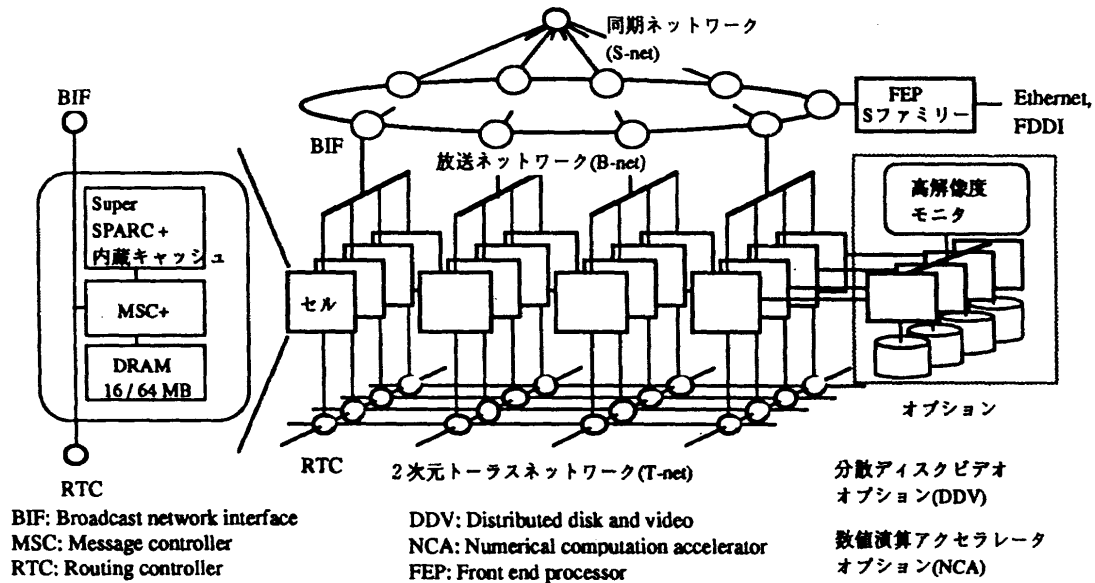


図1 AP1000の構成

れる。

表示動作は、以下のように行なわれる。まずセルは、生成した画像をそれぞれ分散フレームメモリに書き込み、次に表示コマンドを一斉にDDVに対して発行する。画像データはビデオバスを介して表示フレームメモリに書かれ、さらにモニターに出力される。

一枚の画像データは、画面上の縦方向のライン状の領域を単位としてサイクリックに分割して並列処理する。画像生成処理では全セルで画像領域を分割担当し、画像生成を行なってセルのメモリに保持する。DDVへの表示出力時には、DDVオプションの分散フレームメモリに書き込む。DDVオプション数がセル数よりも少ない時は、通信によってオプション付きセルにデータを収集マージする。画像表示には最低16台のオプションが必要である。

画像データは、さらに表示フレームメモリに収集・マージされて、一枚の画像フレームデータが構成される。縦ラインによる分割は、ハードのタイミング制御を容易する必要から採用している。

分散フレームメモリおよび、表示フレームメモリはそれぞれダブルバッファ構成になっており、読み込みと書き込みを交互に切り分けて使用される。

ビデオバスは、400MB/sの速度があり、HDTV解像度(1920x1035画素)画像を毎秒30フレーム出力できる。

オプションボードにはSPARCプロセッサが搭載されており、SCSIインタフェースを制御し、3.5イ

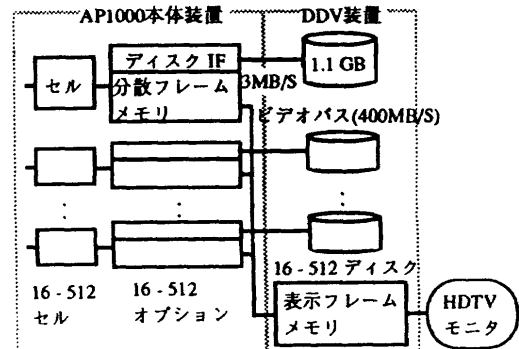


図2 DDVオプションの構成

ンチのハードディスク装置とのデータ入出力動作を行なう。ディスクは、単体で1.1GBの容量を持ち、3MB/sの転送速度がある。単体ではさほど高速ではないが、16台から最大512台までオプションを追加できる(ただし、セルと同数かそれ以下)のでオプション数に比例した容量、転送速度が得られる。

### 3. 基本ソフトウェア[4]

独自開発のセルOSがすべてのセル上で動作し、マルチタスクの実行制御を行なう。

プログラミングモデルとしてメッセージパッシングと並列言語の2種類を用意している。メッセージパッシングでは、データの送受信をプログラマが陽に記述する。FORTRANまたはC言語プログラムから通信/同期の関数を呼び出すことで様々な並列アルゴリズムを実現できる。並列言語としては、VPP FORTRAN[5]が使用可能である。これ



はVPP500用のものと互換性がある。

ツールとしては、並列プログラムの実行状態を表示するランタイム・モニタ、実行時の履歴データを解析してすべてのセルの稼働状況（CPU処理、通信処理、アイドル状態）をグラフィック表示するパフォーマンス・アナライザや、ソースデバッグが可能な並列デバッガがある。また、実機を使わずにワークステーション上で並列プログラムのシミュレーション実行が可能なシミュレータCASIMがある。

#### 4. 可視化ソフトウェアCaVis[3]

数値計算の高速化、大型化に伴って、出力される数値データも膨大になり、可視化処理の高速化・効率化が課題となってきている。我々は、可視化処理を並列処理することでこの問題を解決しようとしている。可視化ソフトの開発目標を次の3点に置いた。

##### (1) 並列処理による高速化

大型数値計算では、数値データを映像化可能な形状データに変換する処理が重くなってくるので、多角形等の形状データの高速表示ハードを備えたグラフィックワークステーションでは問題を解決できない。大量データをプロセッサに分散して処理するデータ並列処理が有効である。可視化処理は複雑な処理を多く含み、ベクトル処理は困難な場合が多いが、スカラー並列処理には向いている。実現に当たっては超並列処理向きの各種並列アルゴリズムの開発が必要である。

##### (2) 計算との一体化

計算と可視化を並列計算機のなかで同時に行なえると効果的である。計算と可視化処理が、相互に密な通信が行なえるので、計算と可視化を異なる機種で行なう場合にしばしば問題になるデータ転送の遅さが解消される。また、大量のデータを可視化プロセスがただちに消費し捨ててしまうことで、大量データの保持や転送のコストを削減できる。

##### (3) 開発、保守の容易性

可視化への機能要件は多く、プログラムは複雑になりやすい。開発や保守を容易にするため、モジュールプログラミングを採用する。

##### (4) 優れたユーザインターフェース

可視化ソフトのユーザは、グラフィックスに関して素人が多いので、簡単に使えるユーザインターフェースが必要である。並列化されたモジュールをさまざまに組み合わせ、結合して、所望の諸機能を簡単に実現できる機能を実現する。

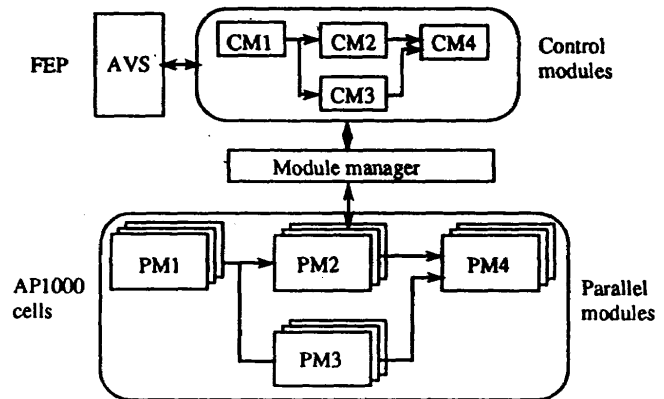


図3 CaVisのプログラム構造

開発した可視化ソフトCaVisの構成を図3に示す。上半分は、FEP上で動作する制御・ユーザインタフェースに関連する部分、下半分がAP1000のセルで並列実行される並列モジュール群である。

並列モジュールは、データの入力と出力ポートを持ち、入力ポートからデータを取り込み、モジュール固有の処理をして、出力ポートに出力する。同じモジュールが全セルに在って、データ分散による並列処理を行なう。

上部のソフトは、ユーザが会話的に並列のモジュールのネットワークを変更したり、モジュールの実行制御パラメータを変更したりできるようにするためにつけ加えた部分である。一般に広く使われているAVS (Application Visualization System)を利用して並列モジュールのグラフィックツールを使つての実行制御を可能にする。

AVSは直接、並列モジュールを制御できないので、並列モジュールを制御する制御モジュールを導入し、ユーザは制御モジュールを介して間接的に並列モジュールを制御する。

制御モジュールのネットワークが実行されると、制御モジュールは、並列モジュールの接続情報を作り出して、モジュールマネージャーに知らせる。モジュールマネージャーは対応する並列モジュールの実行を制御する。

並列モジュールは、制御モジュールの影に隠れてユーザからは見えないので、ユーザは並列処理を意識せずに可視化処理のモジュール群を扱うことができる。

図4に並列モジュールの典型的なネットワークの一例を示し、各並列モジュールの機能を以下に説明する。

シミュレーション：計算を行なうモジュールで、ライブラリコールによりCaVisが受け入れるデータフォーマットでデータを出力する。例えば、三次

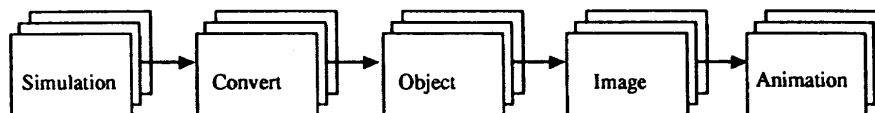


図4 並列モジュールのネットワークの例

元のフィールドデータなど。図形データは、直接オブジェクトタスクに渡される。

コンバージョン：フィールドデータを図形データに変換するモジュールで、等高線、等値面の生成を始め、様々な機能が求められる。

オブジェクト：形状データから画像データを生成する。各形状データ（オブジェクト）毎にそれが占める画像領域内の画素について、輝度、デプス（視点からの距離）、透明度等を計算し、イメージモジュールに送る。

イメージ：オブジェクトモジュールで生成されたばらばらの画素データを一枚の画像として構成する。重なり合う画素では陰面処理を行なう。また、半透明の画素の輝度合成処理やギザギザ感を軽減するアンチエイリアシング処理機能も備える。画像データの分割は、DDVオプションのハードが受け付けるデータ分割パターン（縦ライン単位でのサイクリックな分割）に整合させてある。

アニメーション：ディスクに蓄えられた画像データを連続的に読み出して、アニメーション表示を行なう。

#### 5. ビジュアルシミュレーションへの応用

計算プログラムと並行して可視化プログラムを動作させることで、計算と可視化を一体化したビジュアルシミュレーションシステムを構築できる。ここでは、分子動力学計算に適用した例を紹介する。

我々は、分子動力学計算プログラムAMBERをAP1000用に並列化した[6]。AMBERは、蛋白質の熱力学的な性質を解析するために用いられる。蛋白質の運動のアニメーションは、分子レベルのダイナミクス理解に役に立つ。今回は、シミュレーションと並行してアニメーションを作成するビジュ

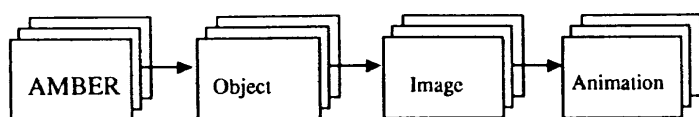


図5 分子動力学のビジュアルシミュレーション

アルシミュレーションシステムを構築した。用いた並列モジュールのネットワークを図5に示す。

図6は、実行時間を解析した結果である。データは、20,665原子からなり、原子を球でボンド結合をラインとして表示している（図7）。

分子動力学計算の1ステップ計算と一枚の画像（1024x1024画素）を生成する時間の内訳をプロセッサ台数を横軸に示している。各並列モジュールの時間と、通信の処理時間（通信データの処理等に費やされたCPU時間）とアイドル時間に分けている。時間はそれぞれ全セルの平均時間である。

オブジェクト、イメージとも並列処理の効果が出ており、512台まで性能が伸びている。また、これらのモジュールの通信処理時間は、512セルのときでも、オブジェクト、イメージの計算時間の和に比べて十分小さい。AMBERを加えたトータルな性能でも、並列処理の効果が十分に出ている。

速度向上に加えて、計算と可視化が一体化されたため、アニメーション作成は大変効率化された。数ステップ毎に画像生成を行なうようにパラメタセットして、実行すれば後は終了を待つだけになる。シミュレーション終了後、ディスクに格納されている画像はただちにリプレイが可能である。十分な数のDDVオプションがあればリアルタイムの出力が可能なので、VTRへの録画では駒撮りが不要になり、録画作業も効率化できる。

#### 6. まとめ

AP1000のアーキテクチャ、基本ソフトを紹介し、特にビジュアリゼーションのためのハードとソフトおよび応用例を紹介した。

並列計算機に画像の高速出力オプションと並列の可視化ソフトを実装することで、ビジュアルシミュレーションが大幅に効率化できることを示した。

今後は、並列モジュール群を充実させ、機能の強化（ボリュームレンダリング[7]、流れ場の可視化機能等）を図って行きたい。

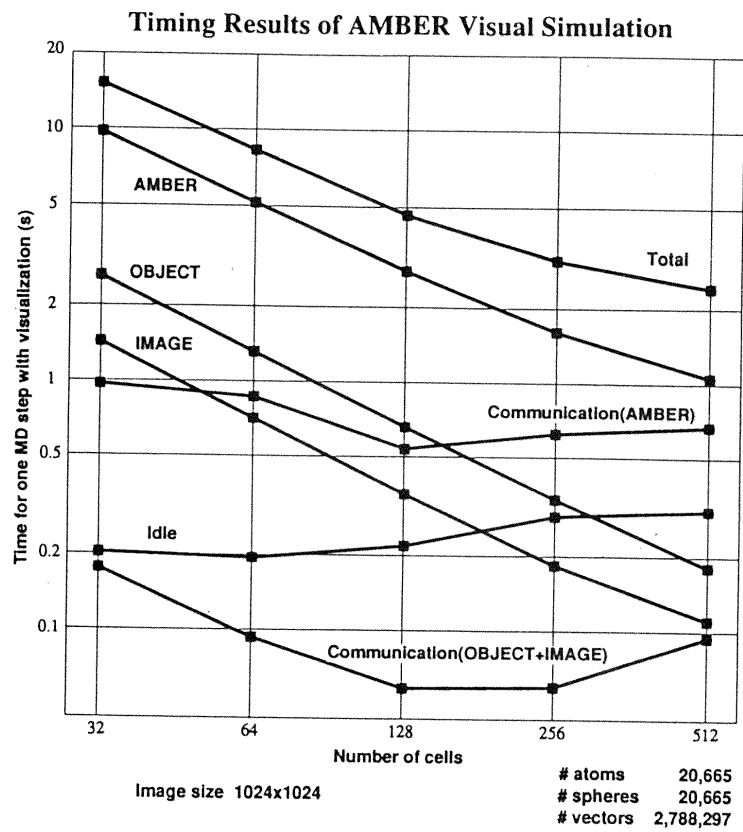


図6 AMBERのビジュアルシミュレーションの性能評価

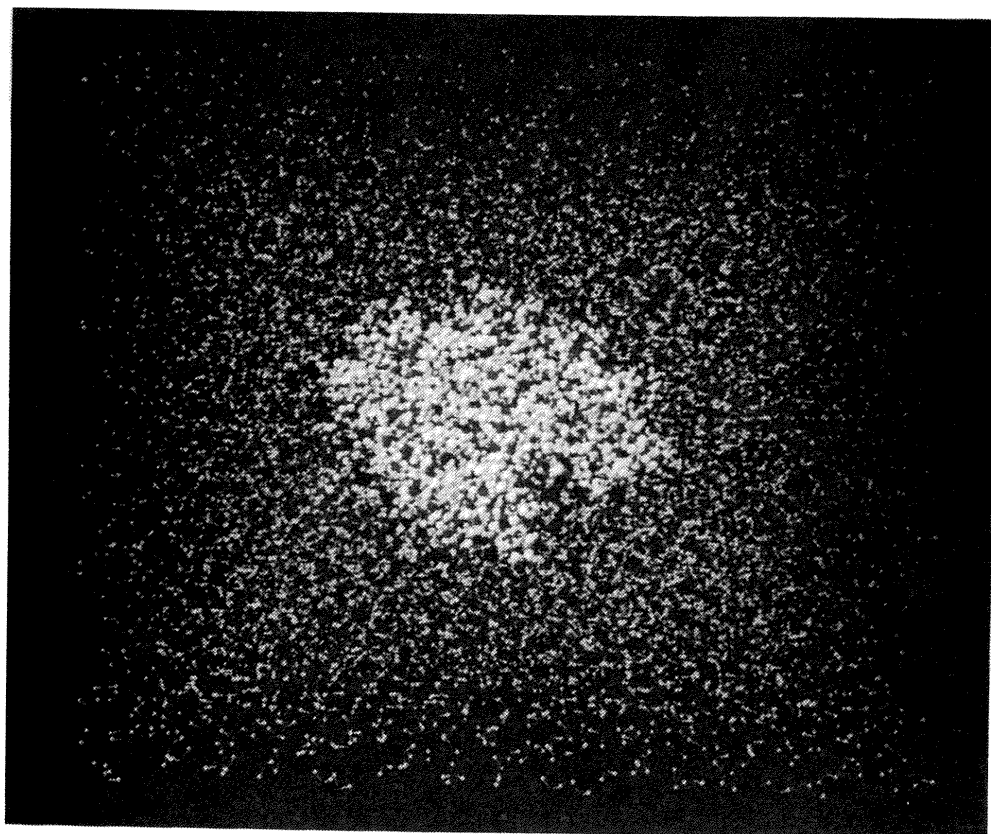


図7 画像表示例

<参考文献>

- [1] H. Ishihata, T. Horie, S. Inano, T. Shimizu, and S. Kato: An Architecture of Highly Parallel Computer AP1000. Proc. IEEE Pacific Rim Conf. on Commun., Comput. Signal Proc., 1991, pp. 13-16
- [2] 石畑、堀江、清水、林、小柳、今村、白木：AP1000+: デザインコンセプト. SWoPP 琉球'94 ARC 研究会(20), 1994, pp.153-160.
- [3] H. Sato, S. Inano, H. Yoshijima: Parallel Visual Computing on the AP1000: Hardware and Software. Fujitsu Scientific & Technical Journal Special Issue on Cellular Array Processor AP1000, Spring 1993 Vol. 29, No.1 (ISSN 0016-2523), pp. 41-49
- [4] T. Horie and M. Ikesaka: AP1000 Software Environment for Parallel Programming. Fujitsu Scientific & Technical Journal Special Issue on Cellular Array Processor AP1000, Spring 1993 Vol. 29, No.1 (ISSN 0016-2523), pp. 25-31.
- [5] 進藤、岩下、土肥、萩原: AP1000を対象としたVPP fortran処理系の実現と評価。SWoPP 駒の浦'93 HPC研究会、Vol.93-HPC-48-2, pp. 9-16, 1993
- [6] H. Sato, T. Yasumasa, H. Iwama, K. Kawakita, M. Saito, K. Morikami, T. Yao, and S. Tsutsumi: Parallelization of AMBER Molecular Dynamics Program For the AP1000 Highly Parallel Computer. Proc. Scalable High Perform. Comp. Conf. (SHPCC-92), pp. 113-120. (1992)
- [7] B. Corrie and P. Mackerras: Parallel Volume Rendering and Data Coherence. Proc. of the Parallel Rendering Symposium, pp. 23-26, Santa Jose, October 1993.

# 超並列計算機T3Dのプログラム開発環境とCFDへの応用

木下 利博\* 齋藤 務\*

## Program Developing Environment and a CFD Application on the Cray T3D

by

Toshihiro KINOSHITA and Tsutomu SAITO

*Cray Research Japan Ltd.*

### ABSTRACT

This paper addresses the performance evaluation of three-dimensional compressible inviscid flow analysis code on the Cray T3D massively parallel processing system. Second-order upwind TVD scheme and Strang-type time splitting method are employed in the analysis code. The method of data decomposition and array redistribution for minimizing the communication cost will be discussed. The outline of T3D system and its programming environments such as programming model and tools will be also given.

#### 1. はじめに

単一プロセッサの実効性能に飛躍的な向上が期待できなくなっている昨今、科学技術計算の分野における並列計算機への期待は急速に高まっている。超並列という考え方そのものは決して新しいものではないが、そこに現在の新しい技術を投入した高性能の計算機が指向されてきている。

こうした超並列計算機 (MPP) は、分散共有型のメモリの採用により、プロセッサ数に比例した (スケラブルな) 性能をできるだけ容易に得ることを目指して開発が行われているが、モンテカルロ・シミュレーションのように完全に並列な問題ばかりでなく、科学技術計算で最もよく使われる手法のひとつである差分法による計算においてもスケラブルな性能が実現される必要がある。本報告では、差分法による解析の一例として、3次元非定常オイラー方程式をTVD差分法で解くコードを用いて、Cray T3Dにおける性能を評価した。

#### 2. Cray T3Dシステム

##### 2.1 T3Dシステムの概要

図1の概念図に示されるようにT3Dの各ノードは、3方向全てに関して3次元の格子の端を反対側の端に接続した、3次元トーラスと呼ばれる構造のネットワークによって接続されている。このネットワークは1方向当たり300MB/秒のバンド幅を持つため、それぞれのノードには6方向の合計1.8GB/秒のバンド幅が確保されてる。また、フロントエンドシステムであるCray Y-MPやCray C90へは、I/Oゲートウェイと呼ばれる専用のノードを介してチャンネルで接続されている。このシステムのメモリは物理的には分散されているが、ハードウェアによる共有メモリ機構により、論理的には共有メモリシステムのように利用することが可能である。各PE(Processing Element)は、150MFLOPSの理論性能を持つDEC Alpha、16MBまたは64MBのローカル・メモリ、及び周辺回路から構成されており、最大構成の2048PEのシステムの理論性能は307GFLOPSである。

\* 日本クレイ (株)

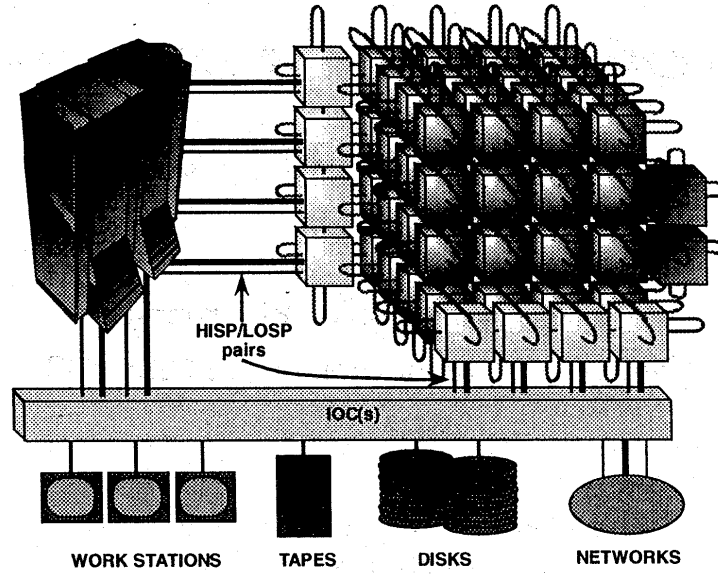


図1 Cray T3D システムの概念図

2.2 プログラミング・モデル

MPPの上でサポートされるプログラミング・モデルは、分散メモリ型と共有メモリ型の2つのモデルに大別される。分散メモリ型モデルは、初期のMPPから広く用いられてきたモデルであり、PE間の通信や同期を、明示的に記述したライブラリ・コールによって実現するスタイルのものである。従来のプログラムに対して付加的なプログラミングを多く必要とし、プログラミングはやや難しいと言える。これに対して共有メモリ型モデルは、従来の逐次処理システムに対するプログラミングにできるだけ近づけたもので、PE間の通信を明示的に記述する必要はなく、ディレクティブ（指示行）や特定の構文で、配列の分散方法や並列処理を指示するスタイルのものである。

Cray T3Dでは、分散メモリ型モデルとしては、並列計算システムにおいて標準となりつつあるPVM(Parallel Virtual Machine)を、また共有メモリ型モデルとしては、Fortran 90の配列構文に基づいたデータ・パラレルと、HPFやFORTRAN Dを参考にして設計された独自のディレクティブによって指示するワークシェアリングというプログラミング・モデルをサポートしている。さらに、共有メモリの機構を使って明示的に通信を記述するライブラリも用意されている。今回の解析コードの作成においては、この共有メモリ型のデータ通信ライブラリを利用してメッセージパッシングに近い形のプログラミングを行なった。

2.3 プログラミング支援ツール

超並列計算機のプログラム開発においては、プログラミングそのものの難しさに加えて、並列計算機特有のバグの発見ということがしばしば問題となる。従って、並列計算機の特性にあった、会話型で使えるソースコード・レベルのシンボリック・デバッガが必要である。具体的には、PEごとにブレーク・ポイントの設定やステップ実行などの制御が可能で、変数の値などの情報がPEごとに容易に表示できることが不可欠である。また、性能解析に関しても、例えばPEが実際に演算を行っていた時間、あるいは他のPEの処理が終わるまで同期待ちしていた

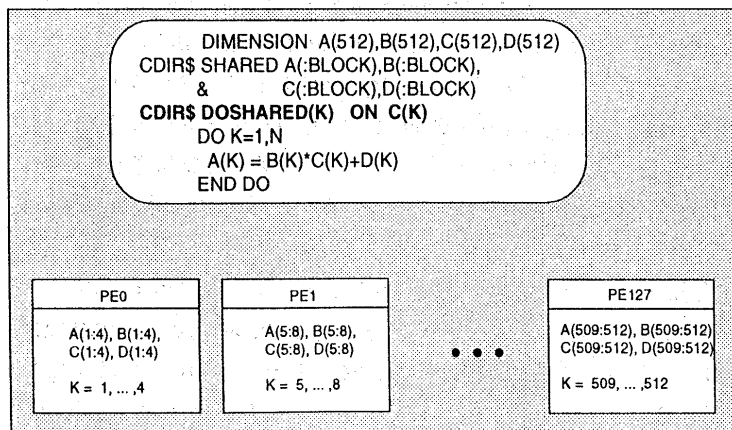


図2 ワーク・シェアリングによるプログラミング

などのオーバーヘッドの時間、キャッシュの利用状況などの情報が容易に把握できるツールが望まれる。Cray T3Dでは、並列計算機用のデバッグとして高い実績をもつBBN社のTotalView™、また性能解析ツールとしては独自に開発したMPP Apprenticeを提供している。

### 3. T3Dによる圧縮性流れの解析

#### 3.1 解析コード

T3D用に作成した3次元非粘性圧縮性流れの解析コードは、一般曲線座標系上で定義された構造格子を用いて、3次元非定常オイラー方程式を陽解法で解くものである。解法には、Harten-Yeeによる2次精度TVDスキーム<sup>1,2)</sup>を用いている。このコードでは3次元の問題に対して、Strang-typeの時間分割法<sup>3)</sup>を適用しており、時刻nにおける保存量ベクトルを $Q^n$ 、x, y, z方向の差分演算子をそれぞれ $L_x, L_y, L_z$ で表すとき、時刻n+2における保存量ベクトル $Q^{n+2}$ は次式で表される。

$$Q^{n+2} = L_x L_y L_z L_z L_y L_x Q^n \quad (1)$$

それぞれの演算子は1次元的な差分作用素であり、図3に示されているように、x方向の計算をする際には、矢印の方向には順番に計算しなければならないが、異なる矢印、即ちy, zが異なる格子点列あるいは領域は、並列に計算が行える。y方向の計算、z方向の計算も同様であり、領域分割によって容易に並列処理を実現できることがわかる。また、PE間のロード・バランスに関しては、各PEに割り当てられる格子点数が均等になるように領域を分割すれば、良好なロード・バランスを実現することができると思われる。

#### 3.2 領域分割の方法

x方向の計算を領域分割により並列処理する場合を考えると、図4のように3種類の分割方法が考えられる。1次元的な分割や2次元的な分割では、逐次処理を行うx方向

のデータを、同一のプロセッサに持たせることが可能である。しかし、3次元的な分割では、計算(スweep)を分断するような分割面ができてしまい、スweepの途中で同期をとって、通信を行う必要が生じてくる。また、スweepの後半部分の領域は前半部分の計算が終わってからでないと計算が始められないため、一部のPEがアイドル状態にならないように、領域へのPEの割り当て方には注意が必要である。1次元的な分割と2次元的な分割を比較した場合、1次元的な分割では、分割する方向の格子点数がPE数よりも多く、しかもPE数の整数倍になっていないと、PE間のロードバランスが極端に悪くなる場合があるのに対して、2次元的な分割では、PE数が多い場合でもロードバランスがとりやすいという利点がある。

#### 3.3 配列の再分散

(1)式に示されるようなx,y,z,z,y,xという一連の計算の並列処理を考えると、x, y, z各方向の計算に適した領域分割の方法がそれぞれ異なるという点が問題になってくる。図4の1次元的な領域分割あるいは2次元的な領域分割を組み合わせ、計算の方向を切り替えるときに配列の再分散を行うか、または、どの方向の計算にも対応できるように3次元的な領域分割を行

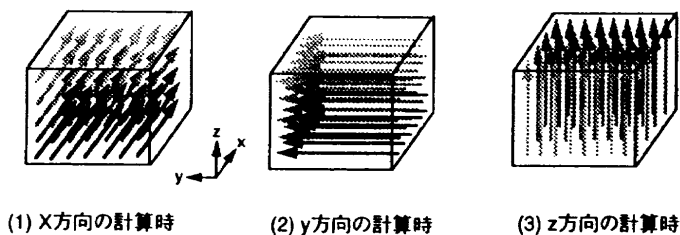


図3 解析コードの並列性

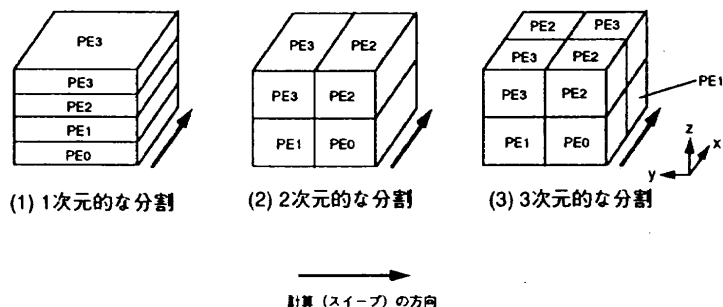


図4 x方向の計算を並列処理する際の領域分割の方法(4PEの場合)

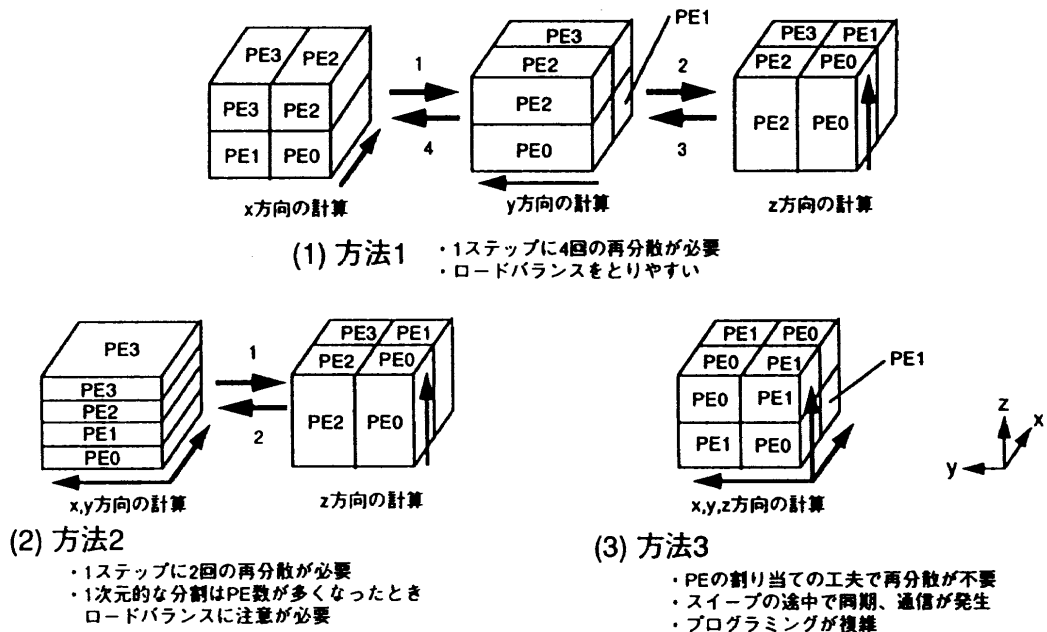


図5 配列の再分散

う必要がある。図5の方法1は、各方向に2次元的な領域分割を採用するもので、どの軸に関してPE間のロードバランスをとりやすいという長所がある。しかし、図中に矢印で示されているように、1ステップに4回の配列の再分散が必要になる。方法2は、x方向の計算とy方向の計算に、同じ領域分割が使えるように1次元的な領域分割を採用したもので、1ステップ中の配列の再分散が2回で済むという利点がある反面、1次元的な分割はPE数が多くなったときにPE間のロードバランスが悪くなるという問題が残る。方法3は、グローバルな配列の再分散を行わずに、領域の境界部分のデータだけを転送することになるので、データの総転送量は少なくなる。しかし、逐次処理を行う場合と同一のスキームを使用するとすれば、スweepの途中で同期をとる回数がPE数に応じて増加していくことになる。さらに、どの方向の計算にも並列処理を行うためには、図6のように分割された領域のPEへの割り当てが複雑になり、プログラミングが困難になると同時に、PE

数が多くなった場合に、やはりPE間のロードバランスの問題が生じてくる。

配列の再分散を行う際の通信パターンは非常に複雑で、ネットワーク上でのコンテンションも大きいと考えられるため、配列の再分散の回数は少なくする必要があり、解析コードの作成にあたっては図5の方法2に示される領域分割及び配列の再分散を採用することにした。

グローバルな配列の再分散が1ステップあたり2回

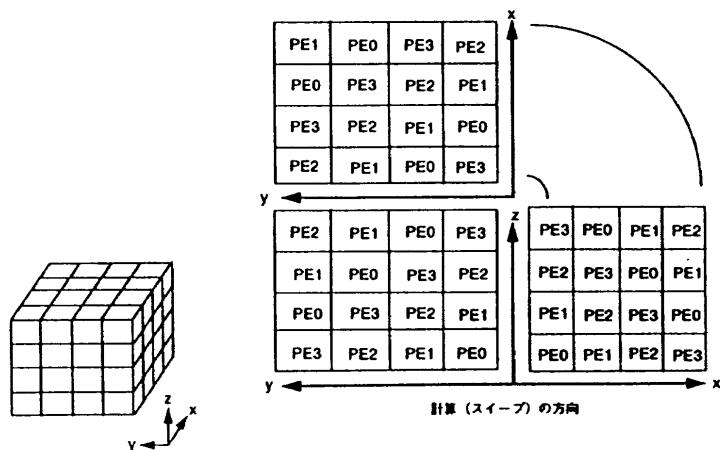


図6 方法3採用時の領域のPEへの割り当て例 (4PEの場合)



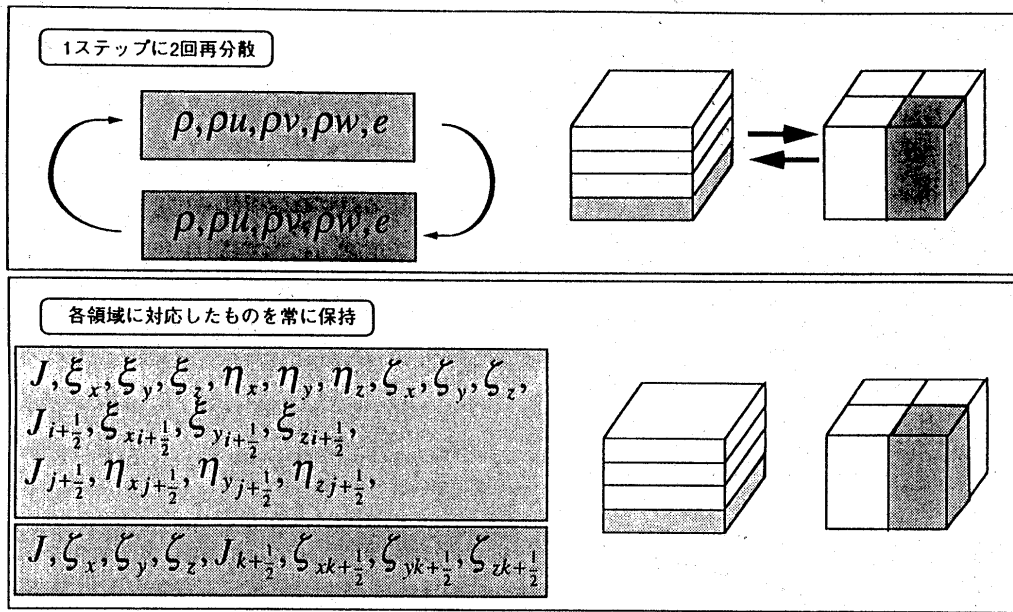


図7 データ通信量の低減

必要であるが、データ通信量を極力小さくするため、再分散を行うのは保存変数（密度、モーメント、エネルギー）に限定した。座標変換のメトリックスやヤコビアンは、流れ場の計算中に更新される量ではないので、図7に示されるように、2種類の領域に対応して必要なものを各PEが常に保持するようにした。座標変換のメトリックスなどを計算する際に必要な格子点の座標値も、同様な2種類の領域分割を行ったが、セルの界面でのメトリックスを計算する際には、他の領域に属する格子点の座標値も必要になってくる。このため、各領域に図8のようなゴーストセルを設けて、隣接格子点の座標も予め持たせるようにした。

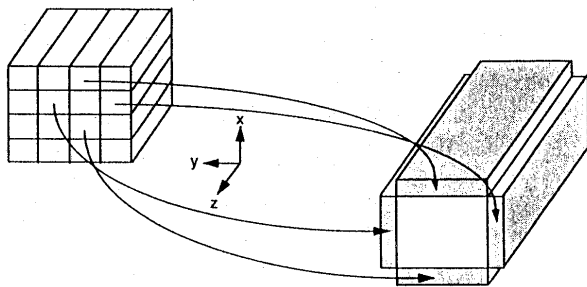


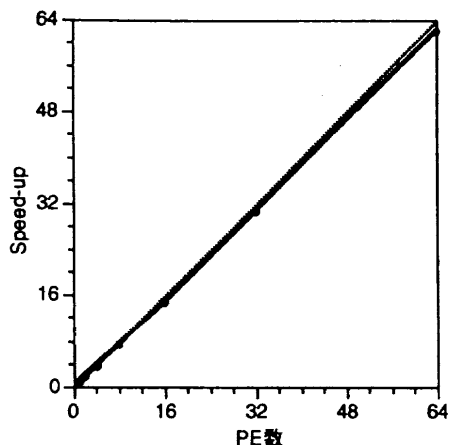
図8 格子点座標値の領域分割

#### 4. Cray T3Dにおける性能

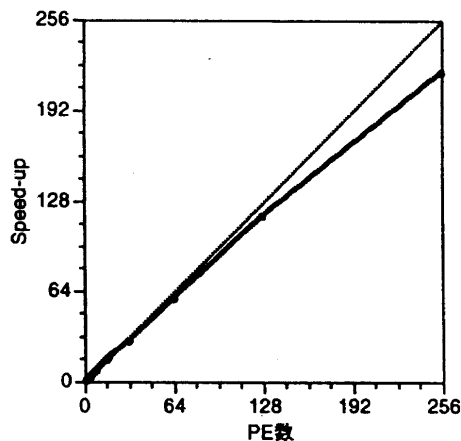
解析コードのT3Dにおける評価として、まず同一の問題を対象に、使用するPEの数を変えて性能を調べてみた。性能の評価に用いた問題は、マッハ数1.5の平面衝撃波が90° 曲がり円管に入射した後の挙動の解析である。計算格子のトポロジーは直方体であり、格子点数は32×32×128の約13万点である。1ステップあたりにグローバルに転送されるデータの総量は約10.5Mbytesで、PE数を増やしていった場合、PEあたりのデータ転送量は線形に減少していく。

この計算例でのPE数とスピードアップの関係は、図9(a)に示されるように非常に線形に近いものとなった。同じ問題を解く際に使用するPEの数を増やしていくと、1つのPEに割り当てられる領域は小さくなっていくため、キャッシュのヒット率が向上し、1プロセッサあたりの性能は向上していく。一方、同期をとる際のオーバーヘッドなどは、PE数の増加とともに増大していくため、両者の効果が相殺して結果的に線形に近いスピードアップが得られていると考えられる。PEあたりの問題の規模が小さくなると、通信時間の占める割合が増えていく傾向にあるが、1%から2%の程度であり、演算時間に比較して十分小さい。

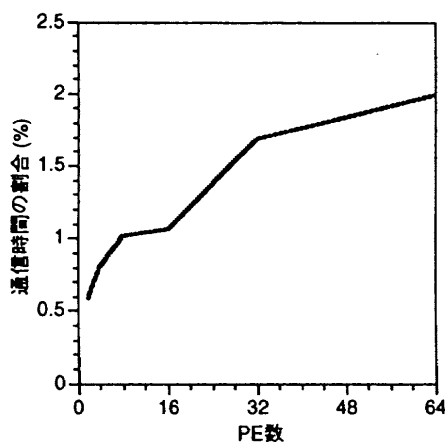
次に同様の問題を、PEあたりの格子点数が一定になるように、PE数の増加に応じて問題の規模も増大させるという条件で評価を行った。PEあたりの格子点数は



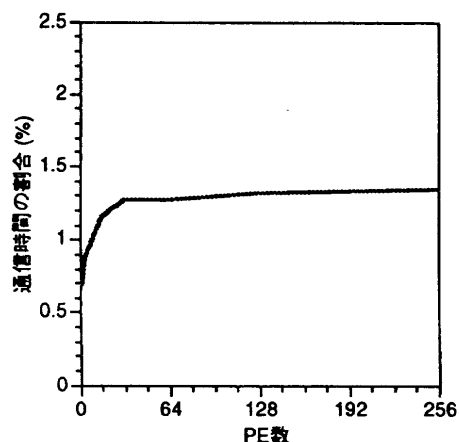
(a) PE数とスピードアップ



(a) PE数とスピードアップ



(b)通信時間の割合



(b)通信時間の割合

図9 問題のサイズを固定した場合の性能

図10 問題のサイズを線形に変化させた場合の性能

約16,000点とし、128PEのとき約210万点、256PEのとき約420万点の問題を解いた。PE数に応じて解く問題が異なるので、格子点一点あたりの計算時間で性能の比較を行った。

この場合のPE数に対するスピードアップは、図10(a)に示されるように、PE数の増加とともに線形な値から遠ざかっているものの、256PEという比較的多数のPEを使った場合でも、スピードアップのカーブは鈍化していない。各PEに割り当てられる領域の大きさ、及びPEあたりのデータ転送量が一定であるため、通信時間が占める割合もほぼ一定であり、約1.3%という低いレベルにとどまっている。

## 5. まとめ

一般に通信はMPPのボトルネックになりやすいが、今回作成した3次元非粘性圧縮性流れ解析コードでは、通信に要する時間は演算時間に比較して十分低く抑えられていることが確認できた。従って、解適合格

子を採用するなど、MPP上では動的な負荷分散が必要となるコードへの応用も期待できる。

## 参考文献

- 1) Yee, H.C., *Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes*, NASA Technical Memorandum 89464.
- 2) Harten, A., *High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, Journal of Computational Physics 49, (1983), pp.357-393.
- 3) Strang, G., *On the Construction and Comparison of Difference Schemes*, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 5, No. 3, September 1968.

## 数値風洞による遠心圧縮機インペラー／ディフューザ翼列の 非定常数値解析

山根 敬\*

### An Unsteady Simulation of a Centrifugal Compressor Stage Using the NWT

by

Takashi YAMANE

National Aerospace Laboratory

#### ABSTRACT

Numerical calculations have been performed for the analysis of the impeller/diffuser interaction flow field of a centrifugal compressor using the Numerical Wind Tunnel (NWT) system. The three dimensional unsteady simulation took enormous calculation time but the parallel processing on the NWT solved its problem. The calculation using 16 processor elements (PE) achieved 11 times faster speed than on a single PE.

#### 1. 緒 言

圧縮機の動翼と静翼の非定常数値解析は干渉の効果が及ぼす翼列性能への影響の解明に寄与すると期待されているが、膨大な計算時間を必要とすることを考慮するとあまりに不経済と言わざるを得ず、動翼と静翼の組合せの全体的な性能評価を目的として数値解析をする場合は、動静翼接続境界で翼ピッチ方向に平均することによる定常的段解析で全体性能を調べる方法が行なわれてきた。この定常解析による結果は、現実の非定常現象の時間平均結果と比較してそれほど矛盾するものではなく、費用対効果を考えると経済的であると言える。

しかしながら、粘性の影響を考慮した時、前置翼列からの流れに大きな剥離域が存在する流れ場の場合では、定常段解析では剥離部分が平均化されてしまい、後置翼列への影響が考慮されなくなる。特に遠心圧縮機で

はインペラー出口において、多くの場合大きな Wake 領域が翼の負圧面側のシュラウド寄りに現れることが知られており、この Wake のディフューザ翼列の流入角への影響は無視できない。筆者はこれまでに遠心圧縮機の非定常数値解析を行ない、定常段解析結果と比較することによって、両者の結果の違いを明らかにしてきた。しかし膨大な計算時間のために数多くの条件での解析は困難であった。

しかし数値風洞の導入はその問題を解決した。1つの要素計算機 (PE) が富士通 VP400 に匹敵する性能をもつ数値風洞は、1PE の利用では従来の VP シリーズ上で開発されたプログラムをほとんどそのまま使用でき、またプログラムを並列化することで複数の PE を使ってより速く計算結果を得、またより多くのメモリを使うことができる。本報告では、数値風洞における数値解析コードの並列化手法を紹介し、その成果について述べる。

\*航空宇宙技術研究所

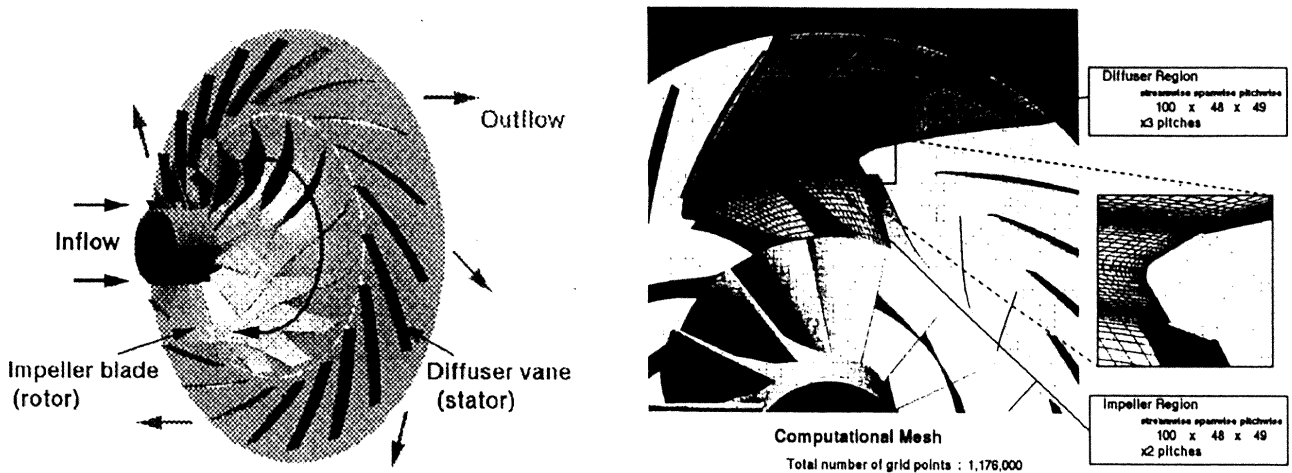


図1: 遠心圧縮機と計算格子

## 2. 計算モデルと数値解析手法

図1に計算対象とした遠心圧縮機と計算格子を示す。数値解法には、Chakravarthy-Osher の TVD 法を基本に、流束制限関数に Differentiable limiter を使用する手法を用いた。また、時間積分には LU-ADI 法を用いた。乱流粘性には Baldwin-Lomax の代数モデルを使用している。

計算対象とした圧縮機のインペラー直径は 136mm で、回転数は 70000rpm とし、ディフューザ出口静圧を変化させたいいくつかの作動条件での解析結果を得ることを目標とした。格子点数はインペラー、ディフューザともに翼間 1 ピッチあたり  $100 \times 48 \times 49$  であり、インペラーとディフューザの接続部では 1 格子分重ね合わせて、1 タイムステップ毎に値をやりとりする。定常解析の場合はピッチ間平均した値を相対系—絶対系の変換をして相互に渡すため、翼枚数に関わらず計算にはインペラー・ディフューザともに 1 ピッチあれば十分であるが、非定常計算ではインペラーの回転に伴って周方向の格子点は移動するので最寄りの格子点の値から補間する。本研究ではインペラー翼 14 枚、ディフューザ翼 21 枚のモデルについて解析を行なったので、実際に必要な計算領域はインペラー 2 ピッチ、ディフューザ 3 ピッチである。したがって全計算領域は 5 つに分割されており、各領域を順に計算した後境界条件の処理で接続する。

## 3. 並列化手法

本研究の計算対象の場合は、並列化手法として以下の 2 つの方法を検討した。

### ・翼ピッチを並列に処理する (図2左)

もともと 5 つの計算領域に分かれているので、それぞれを並列化すれば良い。この方法の利点は、

- プログラミングが容易

という点にあるが、一方で、

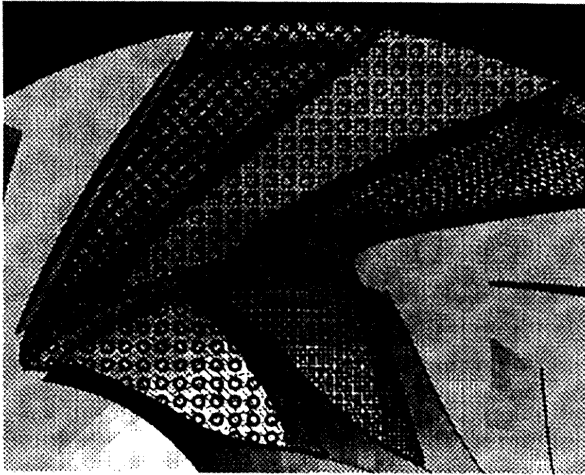
- 使用する PE 台数は常に 5 台であるため、それ以上高速化できない。
- 一つの翼ピッチ間の格子点数は 1PE のメモリ容量で制限される。
- 単独翼列の計算では並列計算できない。

という欠点がある。

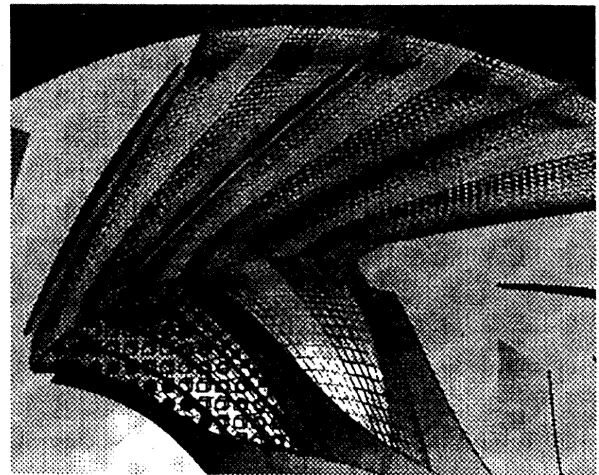
### ・一つの翼間を複数の PE で処理する (図2右)

そしてその一方で各計算領域はこれまでどおり順に計算する。この方法ならば、

- より多くの PE を利用でき、前記の方法より高速化可能。
- 計算領域の数に左右されないため、段解析や単独翼列解析でも並列化による高速計算ができる。
- PE 台数の選択に自由度がある。



Decomposition of Multiple Regions



Decomposition of Single Region

図 2: 並列処理のための空間分割方法

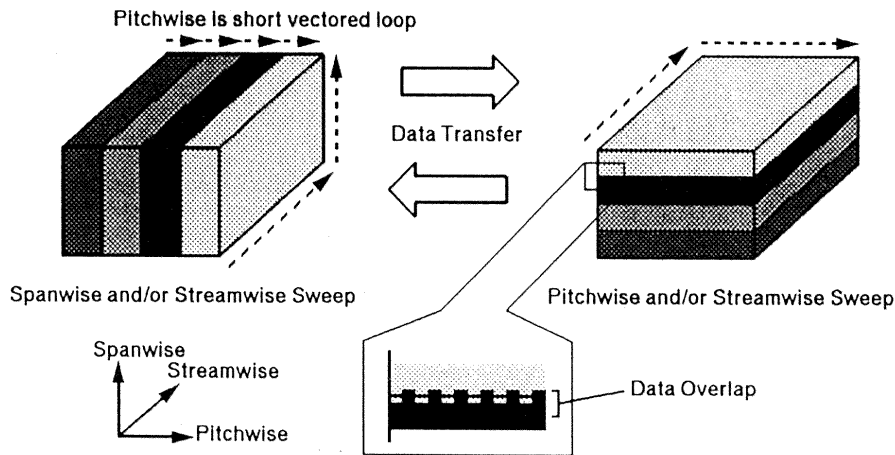


図 3: 計算空間分割の概念図

- 格子点を増してメモリが不足すれば、PE 台数をふやせばよい。

と、前者の方法より多くの利点がある。しかしながら、

- プログラミングは複雑である。
- データ転送によるオーバーヘッドが前者の方法よりはるかに大きい。
- 作業用にメモリを消費する。

という欠点も挙げられる。

以上の点を考慮し、高速化を優先して後者の手法を選択した。一つの計算領域内の並列化処理を模式的に書くと図3のようになる。ここでは4PEによる分割を

例としているが、分割方向の格子点数が許す限り PE 台数は増やすことができ、実際の計算では後述の通り最大16PEを使用した。まず、流れ方向と翼スパン方向の DO LOOP は図の左側のように分割された空間で処理される。一方、翼ピッチ方向の LOOP については、左の分割方式では4つの短い LOOP に分けられているが、それぞれの PE がベクトルコンピュータでもある数値風洞では、短い DO LOOP はベクトル性能を悪化させるため計算速度低下の一因となる。そこで図の右側のように計算空間を分割し直し、データをすべて転送してから翼ピッチ方向の計算を行なった後、ふたたび左の分割へデータを再転送した。この場合、ひとつの配列変数に対して二つの分割方式が必要

なため実際にはそれぞれに変数を宣言しなければならず、必要なメモリは2倍になるうえデータの転送の待ち時間が発生する。さらに、粘性計算においては各格子点の上下左右前後すべての点の情報が必要になるので、分割された境界上でオーバーラップ領域を設けて、境界+1の情報を各PEが保持しなければならない。このオーバーラップの領域もメモリをよけいに消費し、また値を適宜修正するために待ち時間が発生する場合がある。これらのオーバーヘッドは、分割による境界の数が増すほど大きくなるので、PE台数を増やすほど並列化による速度向上が次第に頭打ちになることが予想できる。

さて、究極的には前記の2つの並列化手法を組み合わせることも可能であるが、プログラミングがさらに複雑になるため今のところ試みていない。

#### 4. 並列化の効果と数値解析結果

図4に示すのが本研究での計算例の場合のPE台数と速度比の関係を示すグラフである。16台のPEを使えば速度比は16倍になるのが理想であるが、前述の通りオーバーヘッドが発生するので現実の速度比は理想値よりも小さくなる。また、格子点数がPE台数で割り切れるかどうか、並列化の効果を左右することになる。本研究のケースでは、翼スパン方向の48の格子点および翼ピッチ方向の49の格子点を分割したので、16PEのケースでは両端の境界の点を除けば各PEがほぼ均等に3格子点を受け持つことになり、速度比で11倍とまずまずの性能を発揮した。しかし、これ以上は使用PE台数を増やしても1台あたりの格子点数が2ないし3となるため、速度向上はほとんど望めないと推定される。

最後に計算結果の一例を示す。これまでにディフューザ出口静圧をパラメータとして5条件での非定常解析を行なったが、出口静圧が低いと流れはディフューザ翼列のスロート部でチョークした。図5はチョークし始める条件での結果を、ミッドスパンの絶対マッハ数等高線で表示している。インペラー翼列のディフューザ翼列に対する相対位置の変化によって、チョークにとまう超音速領域が周期的に出現したり消滅したりす

る様子がとらえられた。しかし、定常段解析ではこのような周期的変動は当然ながらまったくあられない。

#### 5. まとめ

遠心圧縮機インペラー/ディフューザの非定常解析を数値風洞システム上で並列化したプログラムによって行なうことに成功し、これまでは現実的ではなかった多くの条件での計算が可能になった。また、16PEを使用して最大11倍程度の計算速度の大幅な向上を達成できた。

これ以上の高速化は現在の格子点数では効率的でないことが推定されたが、さらにプログラムが複雑になることをいとわなければ、図2で示した2つの並列化手法を組み合わせることにより、80PEを使用して50倍以上の計算速度を得られる可能性がある。

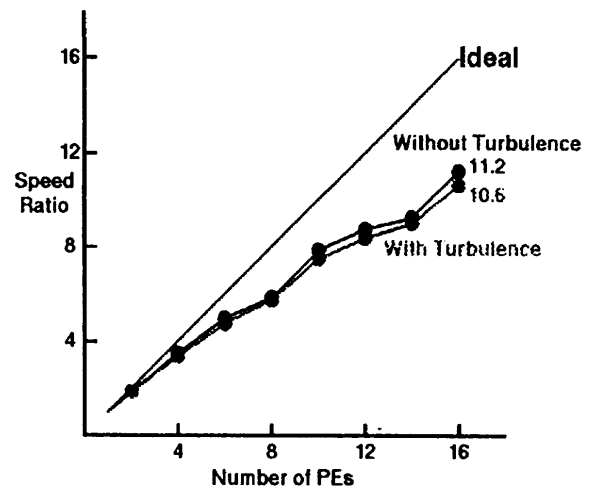


図4: 並列化の効果

#### 参考文献

- 1) 山根 敬、長島 利夫「遠心圧縮機の内部流れに関する数値解析」、第10回航空機計算空気力学シンポジウム論文集、NAL SP-20, 1993

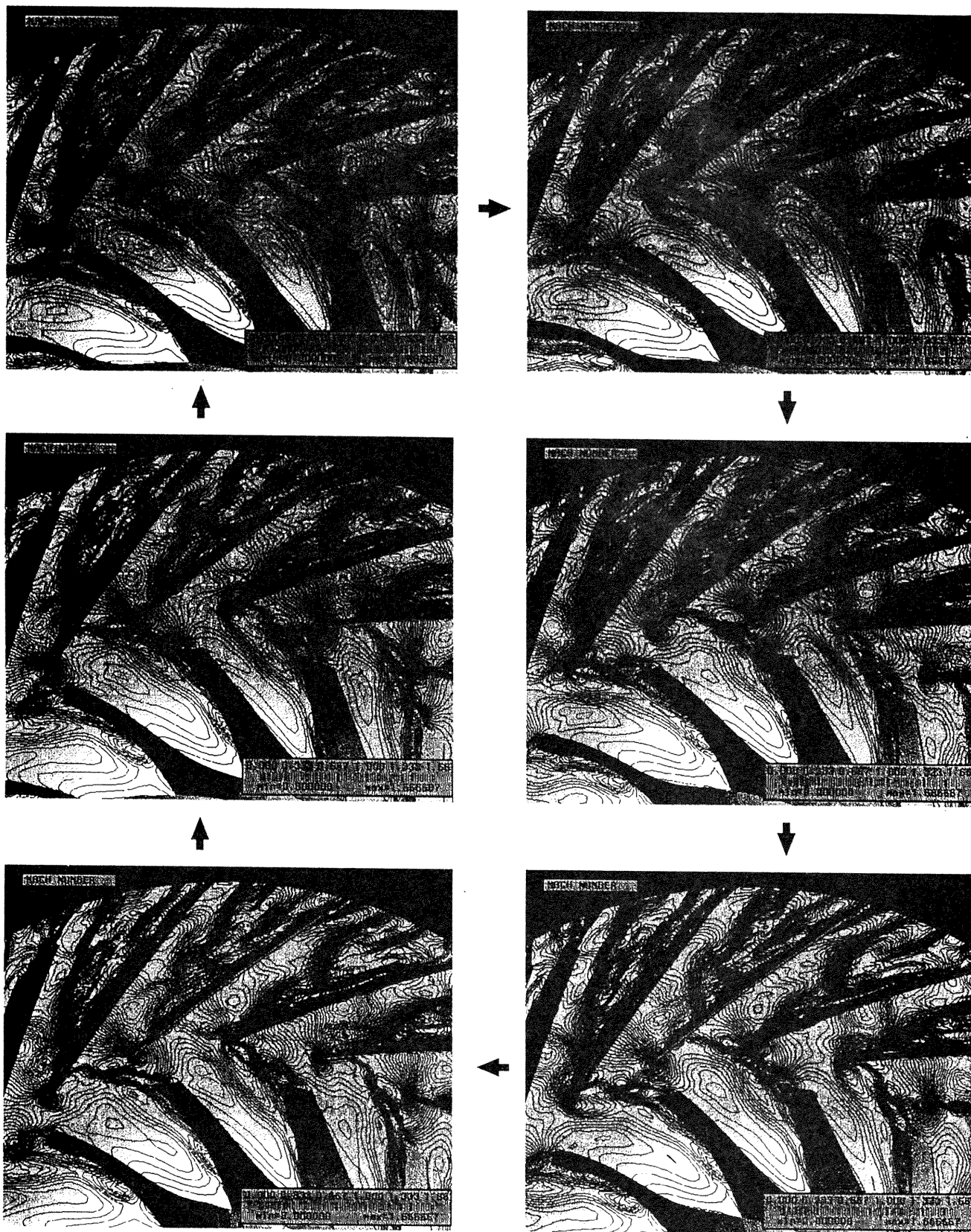


図 5: 非定常計算結果 (ミッドスパンでのマッハ数)





## 領域分割法による航空機形状まわりの遷音速流の並列計算

伊藤 良三\* 高梨 進\*\*

Parallel Computation of Transonic Flows  
About an Aircraft Configuration Using Multi-Block Structured Grids

by

Ryozo ITO\* Susumu TAKANASHI\*\*

## ABSTRACT

Three dimensional Navier-Stokes computation of transonic flows about ONBRA-M5 has been carried out using the NAL's parallel vector computer called "NWT". The computational space around ONBRA-M5 is decomposed into 14 blocks. The code is parallelized in two methods. The first one is sharing the computation for each block to each PE. The second one is combining the first one and the parallelization in each block. The performance of the parallelization is estimated by measuring the cpu-time for solving the Navier-Stokes equations.

Validation of the computational results has also been done.

## 1. はじめに

NALに1993年2月に設置された分散主記憶型並列計算機(NWT)は、140台のPE(要素計算機)を持ち、各々のPEのピーク性能は約1.7GigaFLOPSである。筆者らはVP400用に書かれたマルチ・ブロックCFDコード<sup>1)</sup>をNWT用に並列化し、その計算に要するCPU時間を大幅に短縮できることを確認した。

## 2. CFDコード

コードはReynolds平均薄層近似Navier-Stokes方程式を有限体積法で解くものである。対流項の計算には三次精度のTVDスキームを適用している。時間積分においては局所時間刻みを用い、定常解を求めている。以下で扱っている計算ではいずれも流れ場に対称条件を課して、片側の流れ場だけを解いている。また、乱流モデルとして、Baldwin-Lomaxのものを用いている。詳細は参考文献<sup>1)</sup>を参照のこと。コードの概略的な流れ図を図1に示す。この図で、"PARALLEL REGION"と記された範囲の処理を並列化した。

## 3. 計算格子

計算領域をブロック状に分割する。三次元空間を一般曲線座標で表し、一様流方向を $\xi$ 、これに直交する方向を $\eta$ 、物体面かwake面から離れる方向を $\zeta$ とする。各ブロックの底面( $\zeta=0$ )は、物体の表面か、wake面と一致し、その反対側の面は、遠方境界面と一致している。隣合うブロックの境界面上の格子点の座標は互いに完全に一致している。

## 4. 並列化の方法

基本的には、一つのブロック内のCFD計算を一台のPEで行う。即ちブロック内の計算は従来の逐次型計算機によるものと同じである。具体的には、配列の次元のうち、ブロック番号に対応する次元を分割することによって並列化する。例えば、物理量 $Q(I, J, K, 5, IB)$ のうちの最後の添字がこれに相当する。各PEの計算負荷を等しくすれば並列化の効率を高めることができる。これは、各ブロックに含まれるセルの数を揃えることに相当する。負荷を調整するために複数のブロックを一台のPEに割り当てることもある。このコードでは、あるブロックの境界部分の物理量の値を計算するために、隣接したブロック内の値が必要であり、もしこれらの二つのブロックの計算が別々のPEに割り当てられているときは、図2に示す様にPE間のデータ転送が発生する。PE間のデータ転送は並列化に特有の処理なのでこの処理を最小限に食い止めることが重要である。尚、この並列化の改修により、元のプログラムと比較して計算に要する主記憶の量は約12%増加した。

## 5. 計算結果

## 1) 球の周りの流れの計算

完全に各PEの計算負荷が揃っているときに、並列化による計算の高速化がどの程度達成されるかを評価するために行った。球の様に単純な形状の周りの流れを計算する場合、わざわざマルチ・ブロック格子を用いる必要はない。格子のトポロジーはO-O型のため

\* 大興電子通信株式会社 DAIKO Ltd.

\*\*航空宇宙技術研究所 National Aerospace Laboratory

wakeから立ち上がるブロックは無く、ブロック数は16で、各ブロック内のセル数(ξ\*η\*ζ)は16\*16\*64で総セル数は約26万。図3に表面格子とブロックの配置を示す。これをPE台数1、2、4、8、16で実行し、CFDの繰り返し計算(三次精度TVD, 1000回)にかかるCPU時間を測定したところ、表1、図4のようになった。CPU時間は、図5の様に関数CLOCKVを繰り返し計算の始まりと終わりの二箇所に挿入したときの、二箇所の時間差とした。これを以下「最長-CPU時間」と呼ぶ。PEが16台のときの最長-CPU時間は、PEが1台のときの1/15.4になった。1台のPEで計算したときの最長-CPU時間をT<sub>1</sub>とし、同じ計算をN台のPEで並列計算したときの最長-CPU時間をT<sub>N</sub>とし(T<sub>1</sub>/T<sub>N</sub>)/Nを、N台のPEでの台数効果とすると、PE台数16個のときの台数効果は約96%になる。PE台数16台のときを例にして、台数効果が100%にならない原因を考えてみる。まず、4.の並列化の方法のところでもふれた様に、各ブロックの流れ場を別々のPEで計算するために、境界条件の値を他のPEから転送してやらなければならない。これに要するCPU時間は1000回当たり2.5秒で、逐次計算のときと比べてこの分だけ確実に遅くなる。また、図6に示す方法で、各PE内でCFDの計算のみに要するCPU時間を測定して、先に求めた最長-CPU時間の内、CFD計算でもPE間転送でもない時間を求めたところ、各PEで約6秒であった。これは最長-CPU時間の約3%に相当する。この時間は、SPRBD DOにかかる時間、PEの同期にかかる時間の合計と考えられ、逐次計算のときはかからない時間である。これらの時間を差し引くと、CFD計算のみに要する時間は約176秒になる。

## 2) ONERA-M5周りの遷音速流の計算 (CASE-1, 2)

計算格子は参考文献2)の「CFDワークショップ」で用いたものと同じで、セルの総数は約56万である(図7)。流れ場の条件は、一様流マッハ数0.84、迎角-1.0°、Reynolds数10<sup>6</sup>である。以下の二通りのブロックの切り方で結果を比較した。CASE-1: ブロック数14(図8-a)で、各ブロックがPEと1:1に対応している場合、CASE-2: 並列化の台数効果を上げるためにブロック数を23個にして各PEが担当するブロックのセル数を揃えた場合(図8-b)。使用したPE台数はそれぞれ14、16である。各ブロックのセル数、また、ブロックとPEの対応関係は表2、表3の通りである。CASE-2ではブロックとPEが1:1に対応していない。並列計算では、各PEの同期をとるため、最長-CPU時間は最も計算量の多いPEで決定される。

計算量はほぼ各PEの担当するブロックに含まれるセル数に比例すると考えられる。計算量が最大になると推定されるPEは、CASE-1とCASE-2とでそれぞれPE-4とPE-3であり、そのセル数の比は約3.25:1である(表2, 3)。即ち、CASE-2の計算は、CASE-1よりも3.25倍高速化される筈である。しかし、表4でわかる様に実際には2.63倍しか速くなっていない。この原因を調べるために、球のときと同様に、CFD計算のみに要する時間、PE間データ転送に要する時間のいずれでもない時間を測定してみると、CASE-1では最長-CPU時間の20%、CASE-2では30%に達していることがわかった。球の計算では3%に過ぎなかったことを考えると、各PEの計算量が揃っていないときや、ブロックとPEが1:1対応していないときは並列計算のためのオーバーヘッドが増加してしまうものと思われる。並列化の台数効果をあげるには、各PEの計算量を揃えることと、PEとブロックの関係を1:1にすることが重要である。

## 3) ブロック内を更に並列化した場合(CASE-3)

上の2)で用いた方法では、並列化の効果を上げるためには分割するブロックの数を増やさなければならないが、当然のことながら、ブロック境界では計算精度が落ちることが予想されるので、あまり細かく分割することは好ましくない。また、格子生成作業との兼ね合いから、ブロック内のセル数をあまり揃えることができないこともありうる。そこで、ブロック内の計算に現れるDO-LOOP(例えばξ方向の対流項の計算の中のどのDO-LOOP)を一つ一つ並列化する方法を試みた(図9)。並列化の制御行(IXOCLで始まる行)については文献3)を参照されたい。尚、並列化し易くするためにηのDO-LOOPとどのDO-LOOPの入れ替えを行ったことにより計算の順序が変わっているところもあるが、理論上の精度には影響を与えない範囲に留めた。この方法では、ブロックの分割数を増やすときの様なブロック境界の計算精度への悪影響を避けることができる反面、ある方向に分割された配列の値を別の方向に分割された配列の領域に転送する処理(例えばη→ξ、図10)が頻繁に発生するため、使うPE台数の割りには計算は高速化されない。また、一種類の配列を二種類の添字で分割するため、CASE-1, 2の方法よりも約2倍の主記憶を要する。ここでは、CASE-1の計算格子の各ブロックの内部のDO-LOOPを、ηあるいはξの方向に6分割して並列計算してみた。使用したPEの台数は14x6=84台である。最長-CPU時間を表7に示す。CASE-1に比べて4.7倍速くなっている。6倍速くならないのは、PE間のデータ転送が増加したからである。

6. 計算結果の妥当性

CASB-1~3の計算結果についてその妥当性を確認した。繰り返し回数 25000回までの計算結果に基づく主翼表面のCp分布を図10に示す。S1、S2、S3断面の分布は三つの計算ともに、VP2600での計算結果<sup>2)</sup>と一致した。一方、翼端のS4断面では、かなり異なっている(図11)。翼端の流れは一般に剝離し易く不安定であり、定常計算と言えども解が完全に収束していないことが考えられる。更に繰り返し計算を進めたところ、どのCASBにおいても翼端のCp分布は一定の振幅で周期的に変動していることがわかった。途中の計算結果からCp分布を描いてみると、繰り返し計算の中のある時点では、CASB-2,3の計算においてもCASB-1と似た分布が出現することがわかった(図12)。CASB-1~CASB-3で、全機の空力係数の相違は約0.3%以内であった。

7. 結び

逐次処理計算機用のマルチブロックCFDコードをNALの並列ベクトル計算機NWT用に二つの方法で並列化し、計算時間が短縮されること、また、並列化が計算結果へ大きな影響を与えないことを確認した。それぞれの方法の長所・短所を挙げると以下の様になる。

① 単純にブロックをPEに対応させる方法

長所:

- ・コーディングが簡単で、改修がやり易い。
- ・主記憶の無駄が少ない。
- ・並列化の台数効果が高い。

短所:

- ・ブロックの切り方によっては解に悪影響を与えることがある。
- ・計算できる格子のセル数は各PE一台当たりの主記憶の量で決まる。

② ①に加え、ブロック内も並列化する方法

長所:

- ・ブロックの切り方をあまり工夫しなくても良い。
- ・解に悪影響を与えない。
- ・主記憶容量の不足に依り一つのPEで計算できないときはブロック内の並列度を上げれば良い。

短所:

- ・コーディングは①に比べて複雑で、改修が①に比べてやり難い。
- ・主記憶の無駄が多い。
- ・PE間のデータ転送が増えるため、並列化の台数効果は低い。

また、①、②の両方で言えることだが、ブロックとPEが1:1で対応していないときや各PEの受け持つ計算量が不均一なときは並列化のためのオーバーヘッドが増加してしまうことがわかった。更なる原因究明が必要と思われる。

参考文献

- 1) 橋、高梨: 複雑な形状の航空機まわりの流れの数値計算, NAL SP-10, 1989.
- 2) 高梨、伊藤、橋: ONBRA M5 全機形態まわりの流れ解析, NAL SP-20, 1993.
- 3) 吉田、中村、福田、岡田、中村: NWT向け並列Fortran プログラミングについて, NAL SP-19, 1992.

図1 CFDコードの流れ図

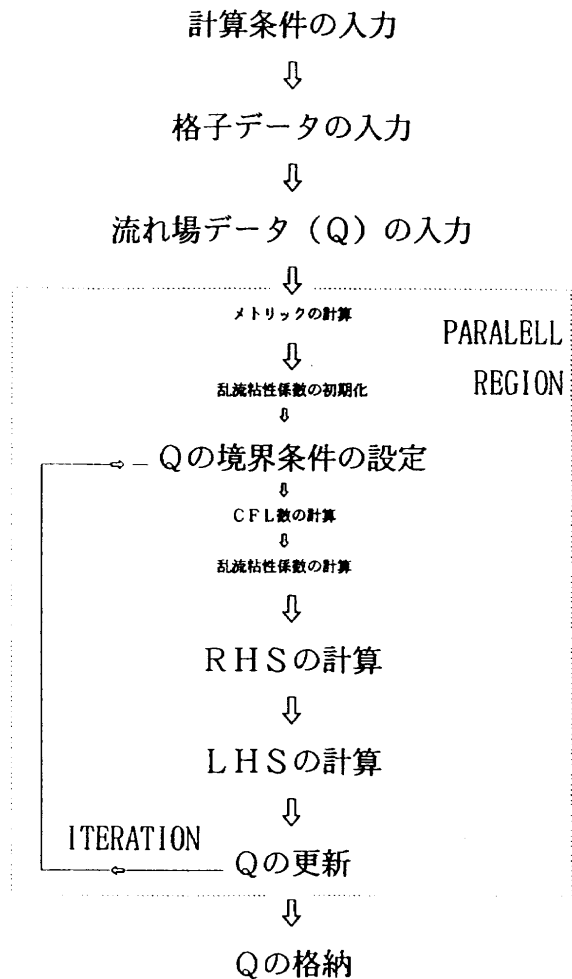
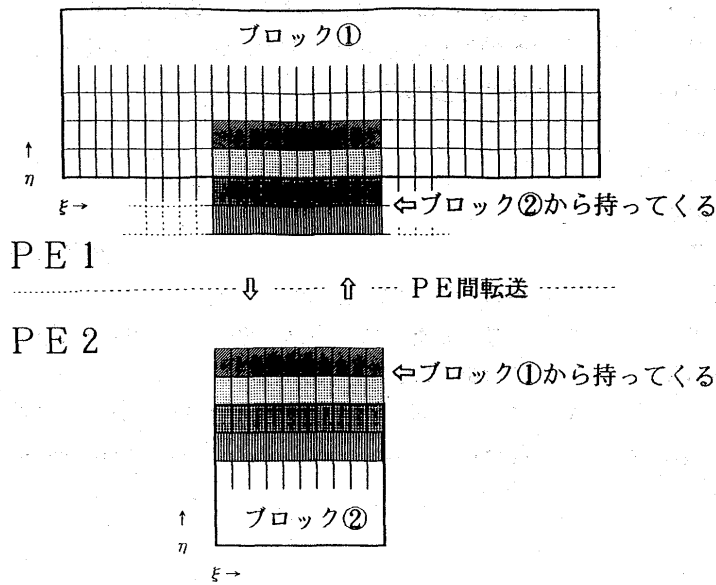


図2 PE間のデータ転送



(η = 一定の面を上から見たところ)

図3 球の表面格子とブロック番号

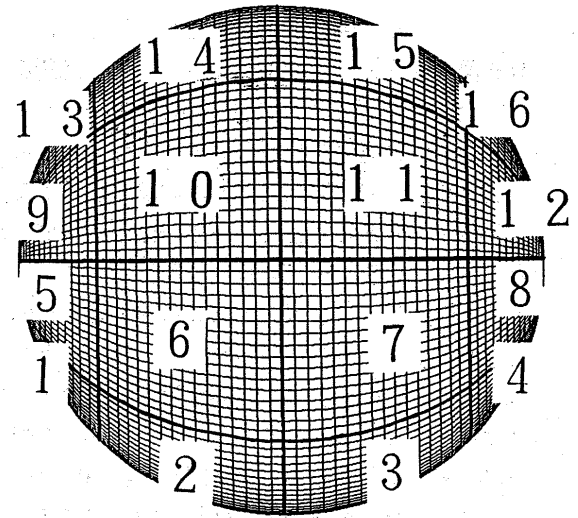
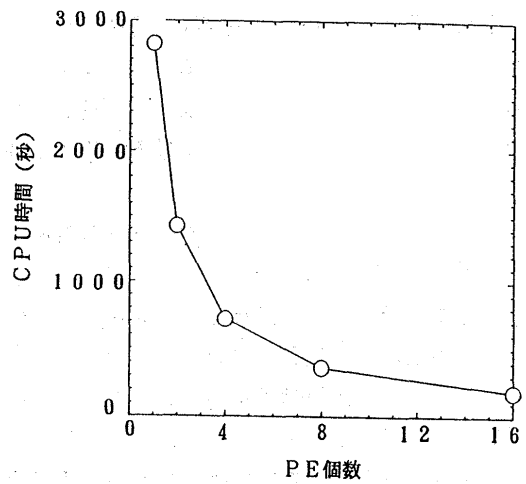


図4 PE個数とCPU時間 球



```

PROGRAM MAIN
  ファイル入力etc.
  .
  !XOCL PARALLEL REGION
  .
  メトリックの計算etc.
  .
  CALL CLOCKV(VPU1, CPU1, 2, 2)
  繰り返し計算の開始
  .
  .
  RHS, LHS の計算etc.
  .
  .
  繰り返し計算の終了
  CALL CLOCKV(VPU2, CPU2, 2, 2)
  .
  !XOCL END PARALLEL
  .
  ファイル出力etc.
  .
  STOP
  END
    
```

図5 繰り返し計算に要したCPU 時間の測定方法  
CPU 時間 = CPU2 - CPU1

```

SUBROUTINE SUB1
  !XOCL SPREAD DO /INDP
  .
  DO 1000 IB = 1, IBN
  .
  CALL CLOCKV(VPU1, CPU1, 2, 2)
  .
  計算
  .
  CALL CLOCKV(VPU2, CPU2, 2, 2)
  .
  1000 CONTINUE
  !XOCL END SPREAD
  .
  RETURN
  END
    
```

図6 各サブルーチンでの各ブロック毎のCPU 時間の測定方法  
CPU 時間 = CPU2 - CPU1

図7 ONERA-M5の表面格子 (wakeを含む)

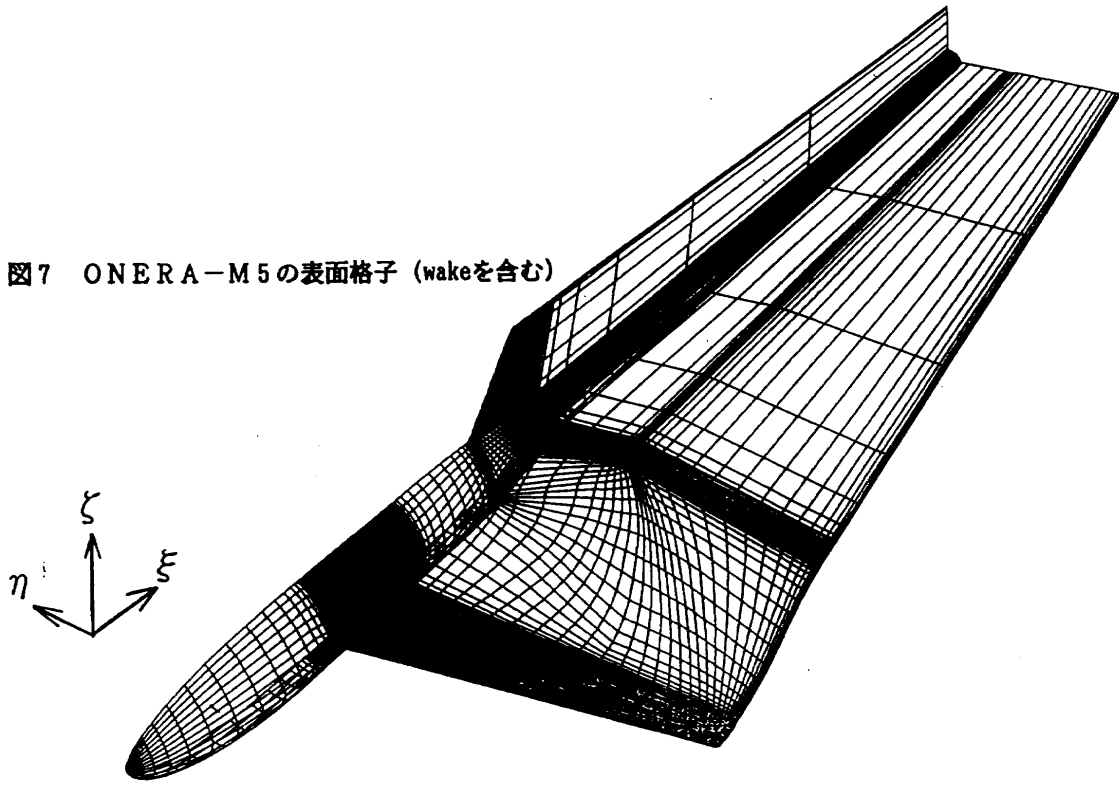
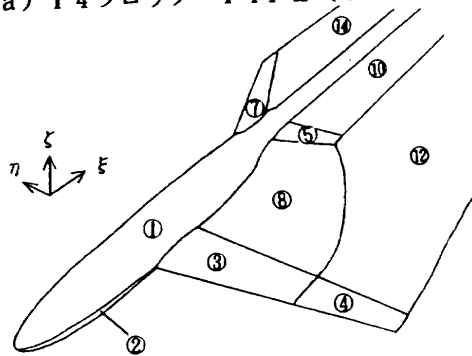
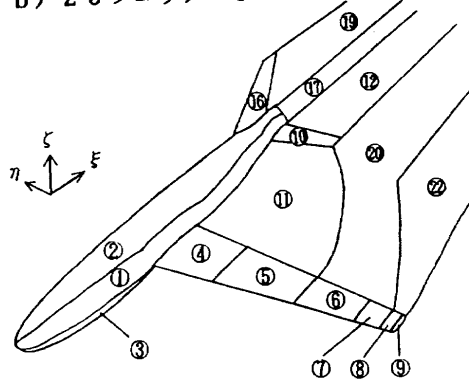


図8 ONERA-M5の格子のブロックの配置

a) 14ブロック-14PE (CASE-1)



b) 23ブロック-16PE (CASE-2)



```

SUBROUTINE SUB1
!XOCL SPREAD DO /INDP
DO 1000 IB = 1, IBN

!XOCL SPREAD DO /INDJ
DO 100 J = 1, JMAXB(IB)
DO 100 I = 1, IMAXB(IB)
DO 100 K = 1, KMAXB(IB)
.
.
計算
.
100 CONTINUE
!XOCL END SPREAD

1000 CONTINUE
!XOCL END SPREAD

RETURN
END
    
```

図9  
ブロック内のDO-LOOP を更に並列化する

```

SUBROUTINE QJTK
.
!XOCL SPREAD DO /INDP
DO 1000 IB = 1, IBN

!XOCL SPREAD NOBARRIER MOVE /INDJ
DO 100 J = -1, JMAXB(IB)+2
DO 100 N = 1, 5
DO 100 K = -1, KMAXB(IB)
DO 100 I = -1, IMAXB(IB)+2
.
.
QG(I, J, K, N, IB)=QJ(I, J, K, N, IB)
100 CONTINUE
!XOCL END SPREAD (1D)
!XOCL MOVEWAIT NOBARRIER (1D)

1000 CONTINUE
!XOCL END SPREAD

RETURN
END
    
```

図10  
Jで分割された配列QJから、Kで分割された配列QGへのデータ転送

図10 ONERA-M5主翼Cp分布 S1, S2, S3 断面

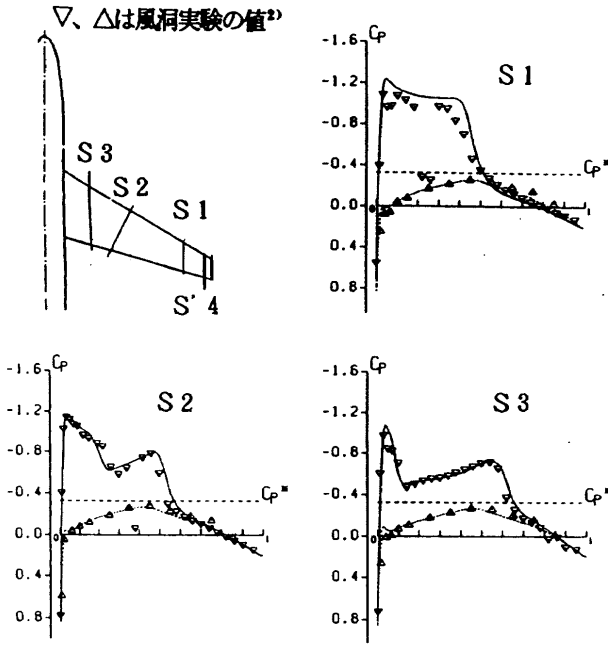


図11 ONERA-M5主翼Cp分布 S'4断面 CASB-1 CASB-2 CASB-3

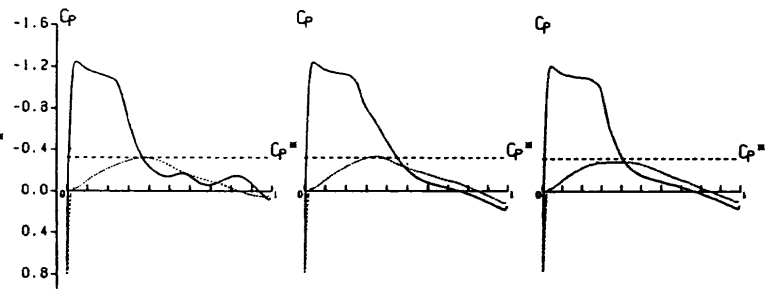


図12 ONERA-M5主翼Cp分布 S'4断面 CASB-2 (26600回) CASB-3 (26200回)

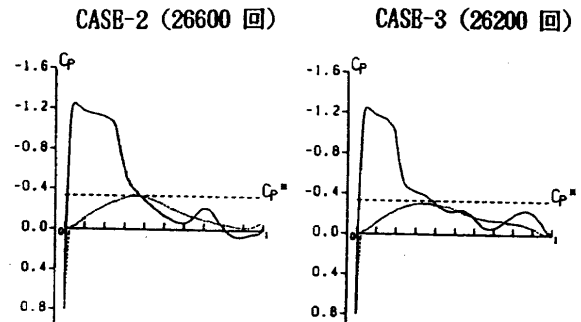


表1 PE台数とCPU時間：球の周りの流れの計算

PE台数	繰り返し計算(SBC)	PE間転送(SBC)	台数効果
1	2831.4	—	1.000
2	1429.0	1.858	0.991
4	718.7	3.703	0.985
8	362.5	2.752	0.976
16	184.2	2.495	0.961

表2 ONERA-M5のブロックとPEの対応関係 CASE-1

PE番号	ブロック番号	場所	ξ x η	セル数の比率 (%)
1	1	胴体上部(フィンガ)	160 x 10	13.9
2	2	胴体下部(フィンガ)	160 x 6	8.4
3	3	主翼(翼根側)	148 x 10	12.9
4	4	主翼(翼端側)	148 x 20	25.8
5	5	水平尾翼上面	26 x 10	2.3
6	6	水平尾翼下面	26 x 10	2.3
7	7	垂直尾翼	26 x 10	2.3
8	8*	主翼の後・内側・上	28 x 10	2.4
9	9*	主翼の後・内側・下	28 x 10	2.4
10	10*	水平尾翼の後・上	12 x 10	1.0
11	11*	水平尾翼の後・下	12 x 10	1.0
12	12*	主翼の後・外側・上	66 x 20	11.5
13	13*	主翼の後・外側・下	66 x 20	11.5
14	14*	垂直尾翼の後	26 x 10	2.3
*はwake上のブロック			11480	100.0

表3 ONERA-M5のブロックとPEの対応関係 CASE-2

PE番号	ブロック番号	場所	ξ x η	セル数の比率 (%)
1	1	胴体上部主翼側	152 x 5	6.6
2	2	胴体上部対称面側	152 x 5	6.6
3	3	胴体下部	152 x 6	7.9
4	4	主翼(翼根側)	148 x 5	6.4
5	5	主翼	148 x 5	6.4
6	6	主翼	148 x 5	6.4
7	7	主翼	148 x 5	6.4
8	8	主翼	148 x 5	6.4
9	9	主翼(翼端側)	148 x 5	6.4
10	10	水平尾翼の上面	26 x 10	5.7
11	11	水平尾翼の前・上部	28 x 10	
12	12	水平尾翼の後・上部	12 x 10	
13	13	水平尾翼の下面	26 x 10	5.7
14	14	水平尾翼の前・下部	28 x 10	
15	15	水平尾翼の後・下部	12 x 10	
16	16	垂直尾翼	26 x 10	5.6
17	17	ステイニング上部	8 x 10	
18	18	ステイニング下部	8 x 6	
19	19	垂直尾翼の後	26 x 10	5.7
20	20	主翼の後・内側・上	66 x 10	
21	21	主翼の後・内側・下	66 x 10	
22	22	主翼の後・外側・上	66 x 10	
23	23	主翼の後・外側・下	66 x 10	5.7
*はwake上のブロック			11480	100.0

表4 PE台数とCPU時間(秒)：ONERA-M5の周りの流れの計算

ブロック数-PE台数	繰り返し計算	PE間転送	計算・転送以外の時間
14 - 1	7718.5*	—	—
CASB-1 14 - 14	2249.3	6.6	441.1
CASB-2 23 - 16	856.4	6.9	275.9

\*推定値(表5の各PEのCPU時間の合計)

表5 各PEのCFD計算のみのCPU時間(秒)：ONERA-M5 CASB-1

PE番号	時間	比率	セル数の比率 (%)
1	998.2	12.9	13.9
2	611.6	7.9	8.4
3	924.0	12.0	12.9
4	1808.2	23.4	25.8
5	169.3	2.2	2.3
6	169.0	2.2	2.3
7	169.4	2.2	2.3
8	217.2	2.8	2.4
9	217.2	2.8	2.4
10	88.8	1.3	1.0
11	87.6	1.3	1.0
12	977.8	12.7	11.5
13	978.3	12.7	11.5
14	282.0	3.7	2.3
7718.5		100.0	100.0

表6 各PEのCFD計算のみのCPU時間(秒)：ONERA-M5 CASB-2

PE番号	時間	比率	セル数の比率 (%)
1	489.3	6.2	6.6
2	487.9	6.2	6.6
3	580.5	7.4	7.9
4	476.0	6.1	6.4
5	476.3	6.1	6.4
6	475.5	6.0	6.4
7	474.7	6.0	6.4
8	473.3	6.0	6.4
9	470.3	6.0	6.4
10	475.7	6.0	5.7
11	473.2	6.0	5.7
12	523.9	6.7	5.6
13	498.0	6.3	5.7
14	499.8	6.4	5.7
15	495.4	6.3	5.7
16	497.3	6.3	5.7
7867.0		100.0	100.0

表7 PE台数とCPU時間(秒)：ONERA-M5の周りの流れの計算 CASB-3

ブロック数-PE台数	繰り返し計算	PE間転送(A)	PE間転送(B)
14 - 84	476.5	3.7	約120

PE間転送(A): ブロック間の転送に起因するもの  
PE間転送(B): ブロック内の並列化に起因するもの

## 遷音速風洞内全機模型流れのベクトル・パラレル・シミュレーション

高倉葉子\* 小川 哲\*\*

Vector-Parallel Simulations of Transonic Wind Tunnel Flows  
about a Fully Configured Model of Aircraft

by

Yoko TAKAKURA

Tokyo Noko University

and

Satoru OGAWA

National Aerospace Laboratory

## ABSTRACT

It has been tried continuously to numerically analyze NAL transonic wind-tunnel flows about a fully configured model of aircraft, ONERA-M5, to investigate the reliability of numerical computations; in these trials a multi-domain technique is used to realize the computations of flows about a complicated configuration, and in each domain thin-layer Navier-Stokes equations are solved by the Chakravarthy-Osher TVD scheme. In this time the simple vector-parallel algorithm of this multi-domain technique on NAL's NWT system is presented and simulations have been performed. Consequently the computed pressure, lift and drag coefficients have agreed well with experimental ones. Regarding the parallel performance, the parallel-computing time has been reduced to the computing time on the domain with the largest number of grid points, and communication time between PEs can be negligible.

## 1. はじめに

筆者らは一連の研究 [1] [2] [3] において、全機模型まわりの流れ場を風洞ごと解くという試みを行い、通常の遠方一樣流境界条件を課した流れの数値解との比較により、工学的に有効な情報が得られることを指摘した。こういった数値計算は複合格子法の導入により格子形成に多大な手間をかけることなく実現が可能になっている。一方において計算機性能の向上はアーキテクチャーの改良に負う部分が多くなってきており、様々な並列計算機が世に出てきている。そうしたなかで出現した航空宇宙技術研究所の数値風洞 (NWT) は、ベクトル計算機を並列に連ねて超高速化を達成しようとするものである。ここでは航空宇宙技術研究所遷音速風洞内に ONERA-M5 全機模型を設置した時の流れ場の計算に対して、複合格子法の NWT 上での簡単な並列化手法を示し、複合格子法がより強力なツールとなることを示す。

## 2. 数値解析法

## 2.1. 複合格子法

複合格子法は、複数の領域で覆われている空間上の流れ場を解く方法 [4] であり、特に多連結領域の流れ場の

数値計算に威力を発揮する。ここで用いた複合格子法の詳細は文献 [3] に述べられており、その数値解析法の概要を図 1 に示す。各時間ステップにおいて各領域の流れを独立に解いた後、'部分領域' の '境界' の物理量は '主要領域' の値を用いて置換される。同時に '主要領域' においては、部分領域の '内部' と重なる点の物理量が置換される。この一連の手続きは、流れが定常解に収束するまで繰り返される。各領域の流れ場は 5 点 TVD スキームにより解かれるので、境界条件として 2 点上の値が与えられれば十分である。

ここでは、下記の 5 領域を用いる。

領域	領域格子の説明	格子点数
・ $D_1$ (主要領域);	風洞内格子	(121 × 35 × 45)
・ $D_2$ (部分主要領域);	胴体-ステイングまわりの格子	(131 × 69 × 37)
・ $D_3$ (部分領域);	主翼まわりの格子	(121 × 45 × 31)
・ $D_4$ (部分領域);	水平尾翼まわりの格子	(93 × 31 × 21)
・ $D_5$ (部分領域);	垂直尾翼まわりの格子	(61 × 35 × 21)
	(格子点数合計)	:約 80 万点

\*東京農工大学工学部

\*\*航空宇宙技術研究所

複合格子法を用いるねらいは、複雑なトポロジーを持つ空間を複数の単純な領域に分割して格子形成のタスクを軽減することにある。個々の領域における格子形成は、幾何学的諸量を用いて滑らかな曲面を生成しようとする代数的方法の改良版 [6] により行う。領域間の値のやりとりから生じる数値誤差の影響を小さくするために、翼胴干渉流れ場付近を領域の境界としないように、主翼、水平尾翼、垂直尾翼まわりの格子は各自の翼面上のみならず胴体表面にも適合させている。

支配方程式には薄層近似 Navier-Stokes 方程式を用いる。粘性項には中心差分近似を行い、非粘性項には Chakravarthy-Osher の TVD スキーム [7] を以下の様に改良した和田スキーム [8] を用いる。

- 1) flux ではなく特性変数が外挿される [9] ;
- 2) 空気力学行列の固有ベクトルは特性量が圧力の単位を持つように選ばれる ;
- 3) 極値をとる所であっても高精度を維持するべく flux limiter を改良する [10]。

更にメトリックの有限体積法的扱いと保存則を満たす壁面境界条件を課している。時間積分には局所タイムステップによる陽解法を用いる。乱流モデルには通常の Baldwin-Lomax モデル [11] を用いるが、壁が二個所ある場合には距離の近い方の壁の影響を受けるものとした。

## 2.2. 遷音速風洞多孔壁を通じての空気の流出入のモデル化 [2]

風洞内の流れ場を解こうとする試みは数値流体力学の初期の段階からなされており、遷音速風洞の多孔壁を通じての空気の流出入はモデル化され計算に組み込まれてきた。Baldwin [12] らはこの流出入効果を微小擾乱ポテンシャル理論により近似した。

本研究においては、この多孔壁を通じての空気の流出入は、孔による圧力損失が壁の内外での圧力差と釣り合うとしてモデル化され、数値計算に取り入れられる。多孔壁流出入モデルの詳細については、文献 [2] を参照のこと。

## 2.3. 並列化アルゴリズム

ここでは NWT 上の並列化アルゴリズムを示す。NWT は図 2 に示すように、分散メモリーを持つ並列計算機であり、140 台の計算機要素 (PE) がクロスバー・ネットワークにより結合されている。個々の PE はベクトル計算機である。

図 1 に示した複合格子法の並列化は比較的簡単に行える。図 3 に示すように毎時間ステップにおいて各領域 ( $D_1 - D_5$ ) 上の流れは独立に各 PE を用いて同時に計算される。各領域上の流れ場の計算はベクトル化されている。PE 間の値のやりとりは、物理量が領域間で交換される時のみ、クロスバー・ネットワークを通じて行われる。NWT-FORTRAN によるコーディング例を図 4 に示す。最初にプロセッサ宣言をし、時間を進めるイタレーション・ループ内で 5 領域の流れ計算を並列

に行う (step1 - step5)。その際バリアー・シンクロナイゼーション機能により、全領域上の計算が終了するまで待つてから、次の処理、すなわち '境界' の物理量の交換 (bc12 - bc25) へと進むことになる。この際領域間の交換値を求めるための補間計算を 2 領域ずつのペア毎に行い、このペア内で並列化を行う。以上の手続きを解が収束に達するまで行う。

## 3. 数値計算結果

### 3.1. 計算格子

ONERA-M5 全機模型上の表面格子を図 5 に示す。風洞内の流れを解く場合、迎角は模型の角度により設定されるので、各迎角毎に格子を形成しなくてはならない。ここでは迎角  $\alpha = -1^\circ$  の時の格子図を示す。計算対象領域は航空宇宙技術研究所遷音速風洞測定部と拡散筒部 (格子概観 : 図 6) とし、胴体近傍における格子の重なり具合を図 7 に示す。物体から垂直に出る方向の最小格子幅は [平均翼弦長]  $\times 10^{-4}$  にとる。

### 3.2. ケース : $M_\infty = 0.84$ , $Re = 10^6$ , $\alpha = -1^\circ$

胴体に対する迎角が  $-1^\circ$  の時、約  $4^\circ$  の取付角がついているため主翼に対する迎角は約  $3^\circ$  である。図 8 は全機モデル上の圧力分布を示しているが、主翼面上に三重衝撃波 (強い衝撃波、弱い衝撃波、合体衝撃波) が生じているのが観察される。

図 9 の (a)(b) はそれぞれ主翼面上の等  $C_p$  線と、各検査断面における  $C_p$  分布を示している。三重衝撃波は実験 [5] と非常に良く合っていることが分かる。

胴体とステイングの結合部付近の数値解を調べてみると、胴体の後縁において  $C_p$  値が負となり、ステイングの付け根においては  $C_p$  値は正となっている。これより、胴体後縁とステイングの接合部の段差により流れが剥離していることが予想される。この付近の現象は抵抗の計算に大きく影響するので、より信頼ある数値解を得るためには更に細かい格子上での計算が必要であろう。なお後述されるように、揚力・抵抗係数とも実験とよく合っている。

### 3.3. 一連の迎角に対するケース

$\alpha = -1^\circ, -2^\circ, -3^\circ$  に対して、揚力は  $\alpha = -3^\circ$  を除いて実験と良く合うのに対し、抵抗は全迎角に対して実験と良く一致している [5] ことは注目に値する。これは、胴体のステイング接合部における段差の形状を格子に正確に表したため、胴体背後の圧力が比較的正確に捕らえられたからと考えられる。

### 3.4. 計算時間と並列化性能

本計算は 5 領域の複合格子法なので、5 個の PE を用いた並列計算を行った。表 1 に 100 タイム・イタレーションあたりの計算時間 (CP Second) を示す。1 PE による計算では当然のことながら、格子点数の最も多い



領域 ( $D_2$ ) の計算時間の占める割合が最も多かった。5領域の流れ計算を並列に行う時の計算時間は、予想されるように、格子点数の最も多い領域 ( $D_2$ ) の計算時間に等しかった (194 CP Sec.)。領域間の値の交換のために費やされる計算時間は元々少ないが、2領域ずつ並列に行っているため、ほぼ半分 (7 CP Sec.  $\rightarrow$  4 CP Sec.) になっている。

以上の測定により、PE間の値の転送時間はほとんど無視しうると結論される。

#### 4. まとめ

真の数値風洞に至るための第一段階として、全機模型まわりの流れ場を遷音速風洞ごと解くことを試みてきた。風洞内の複雑形状物体まわりの流れを解くために複合格子法を用い、薄層近似 Navier-Stokes 方程式を支配方程式として、Chakravarthy-Osher TVD スキームにより全機模型まわりの流れを解いている。今回はその複合格子法の NWT 上での並列化アルゴリズムを示し、風洞内に設置した ONERA-M5 全機模型まわりの流れのベクトル・パラレル・シミュレーションを行った結果、圧力分布、揚力・抵抗係数とも実験と良く一致する数値解が得られた。

複合格子法のベクトル・パラレル・アルゴリズムは単純で、各領域上の流れの計算は各 PE に割り当てられ、物理量の領域間の交換は、クロスバー・ネットワークを通じて行う、というものである。NWT 上での計算性能は筆者らの予想どおりであった。即ち並列計算時間は最も格子点数の多い領域上での計算時間に減じられ、PE間の転送時間は無視できる。

更に数値計算の信頼性を追求するためには、より細かい格子を用いて剥離などの現象を捕らえること、計算対象とする風洞の領域を広げること、計算例を増やすことなどが必要であろう。これらをなす上で複合格子法の簡単な並列化は非常に有効である。様々な問題は残されているものの、数値計算と風洞実験のより適正な評価に向けて、風洞内流れのシミュレーションの試みは必要であろう。

これより、複合格子法は NWT 上で非常に強力なツールとなると考える。

#### 参考文献

- [1] 高倉葉子, 小川哲 : 遷音速風洞内全機模型流れの数値シミュレーション, 第 11 回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-22, 1994.
- [2] Takakura, Y., Ogawa, S. and Wada, Y., "Computations of Transonic Wind-Tunnel Flows about a Fully Configured Model of Aircraft Using A Multi-Domain Technique," AIAA Journal (to appear); also AIAA Paper 93-3022, 1993.
- [3] Takakura, Y., Ogawa, S. and Wada, Y., "Computations of Transonic Flows about a Fully Configured Model of An Aircraft Using A Multi-Domain Technique," Computers and Fluids (to appear); also A Collection of Technical Papers of 5th ISCFD, 1993.
- [4] Steger, J.L., Dougherty, F.C. and Benek, J.A., "A Chimera Grid Scheme," Advances in Grid Generation, Ghia, K.N. and Ghia, U. Eds., ASME FED-5, pp.59-69, 1983.
- [5] 中道二郎編集 : ONERA-M5 全機形態まわりの流れ解析, 第 10 回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-20, pp.57-108, 1993.
- [6] 高倉葉子, 小川哲 : 複雑形状物体まわりの超音速流のための簡単な格子形成法について, 第 9 回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-16, 1992.
- [7] Chakravarthy, S.R. and Osher, S., "A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," AIAA Paper 85-0363, 1985.
- [8] 和田安弘, 学位論文, 東京大学教養学部, 平成 4 年.
- [9] Takakura, Y., Ishiguro, T. and Ogawa, S., "On the Recent Difference Schemes for the Three-Dimensional Euler Equations," AIAA Paper 87-1151-CP, 1987.
- [10] Wada, Y., Kubota, H., Ogawa, S. and Ishiguro, T., "A Diagonalizing Formulation of General Real Gas-Dynamic Matrices with a New Class of TVD Schemes," AIAA Paper 88-3596CP, 1988.
- [11] Baldwin, B. and Lomax, H., "Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA Paper 78-247, 1978.
- [12] Baldwin, B.S., Turner, J.B. and Knechtel, E.D., "Wall Interference in Wind Tunnels with Slotted and Porous Boundaries at Subsonic Speeds," NACA TN3176, 1954.

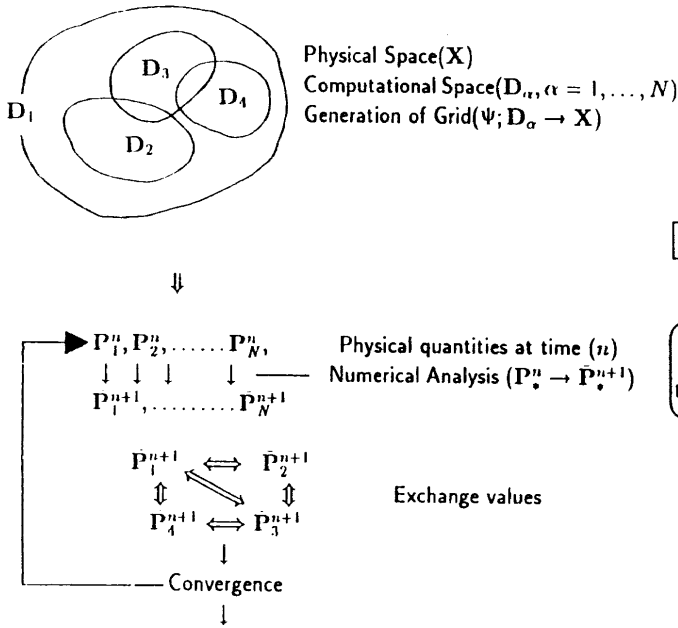


図1 複合格子法の概要

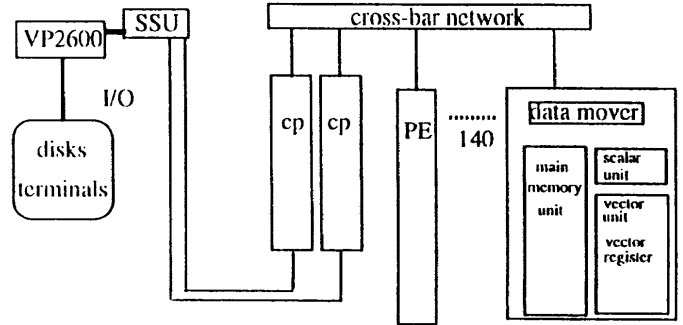


図2 NWTの構成

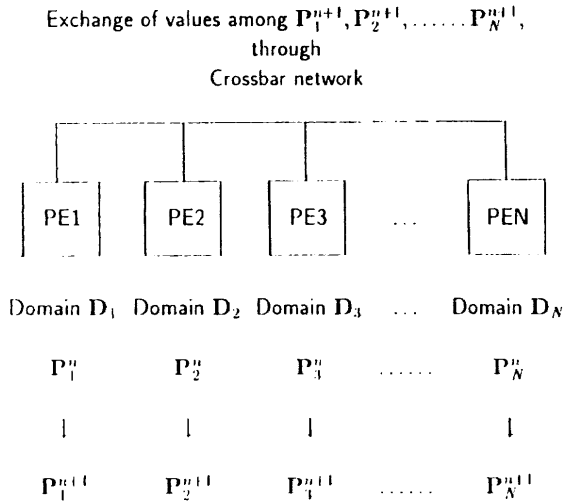


図3 複合格子法の並列化アルゴリズム

```

!xocl processor PE(5) ..... <<Processor Definition>>
!xocl proc alias PE1(1) =PE(1:1)
!xocl proc alias PE2(1) =PE(2:2)
!xocl proc alias PE3(1) =PE(3:3)
!xocl proc alias PE4(1) =PE(4:4)
!xocl proc alias PE5(1) =PE(5:5)

!xocl spread region /PE1 ..... <<Parallel Computation>>
  call step1 in Domain D_1
!xocl region /PE2
  call step2 in Domain D_2
!xocl region /PE3
  call step3 in Domain D_3
!xocl region /PE4
  call step4 in Domain D_1
!xocl region /PE5
  call step5 in Domain D_5
!xocl end spread ..... <<Barrier Synchronization>>

..... <<Exchange of Values>>
  call bc12 between D_1 and D_2
  call bc23 between D_2 and D_3
  call bc24 between D_2 and D_4
  call bc25 between D_2 and D_5
    
```

図4 並列化アルゴリズムのコーディング例

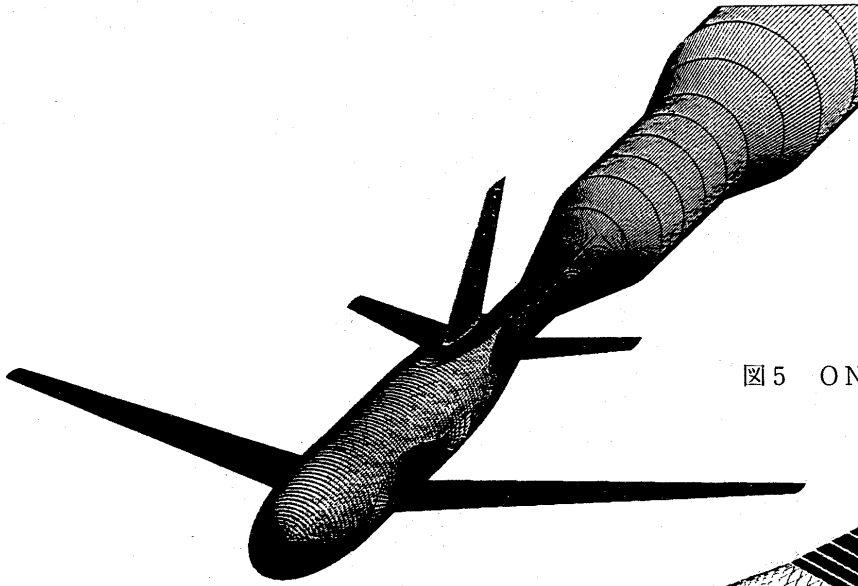


図5 ONERA-M5全機模型上の表面格子

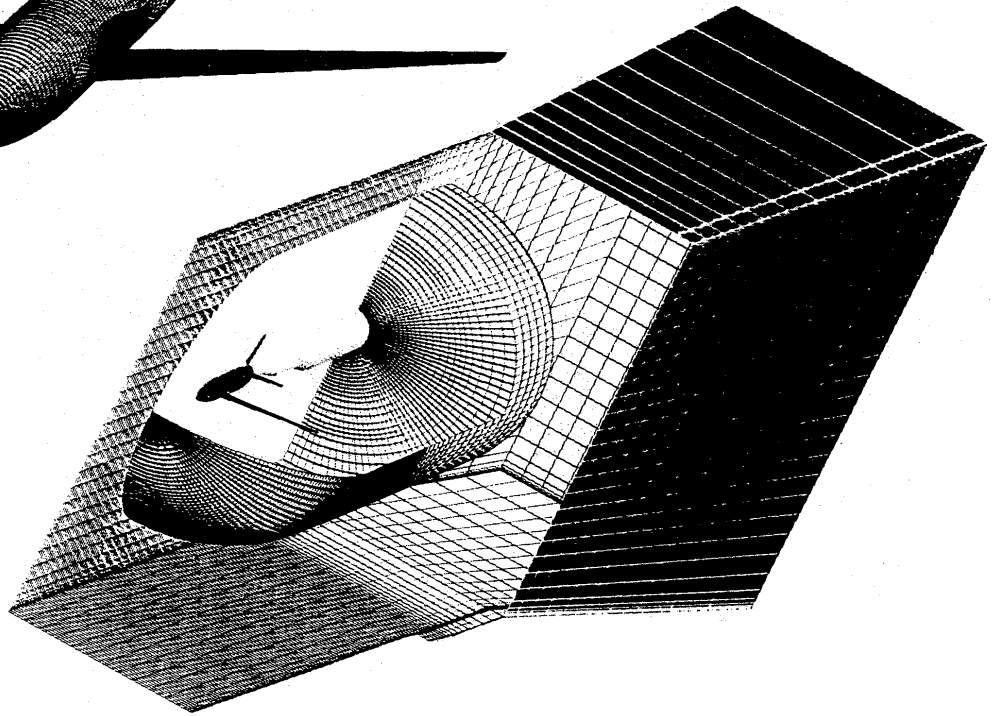


図6 複合格子の概観

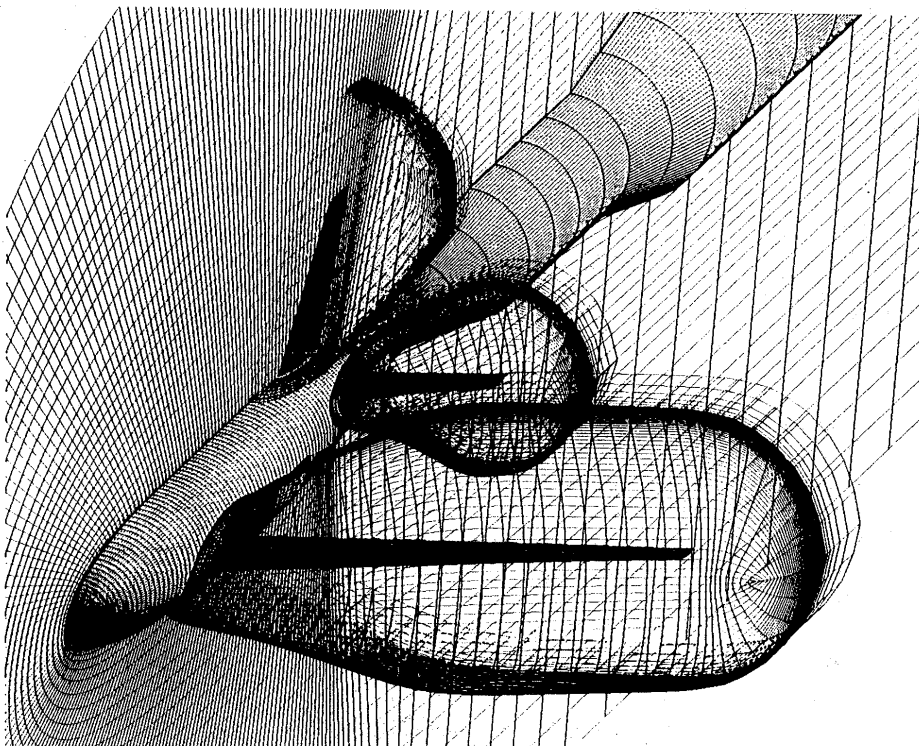


図7 胴体近傍格子図

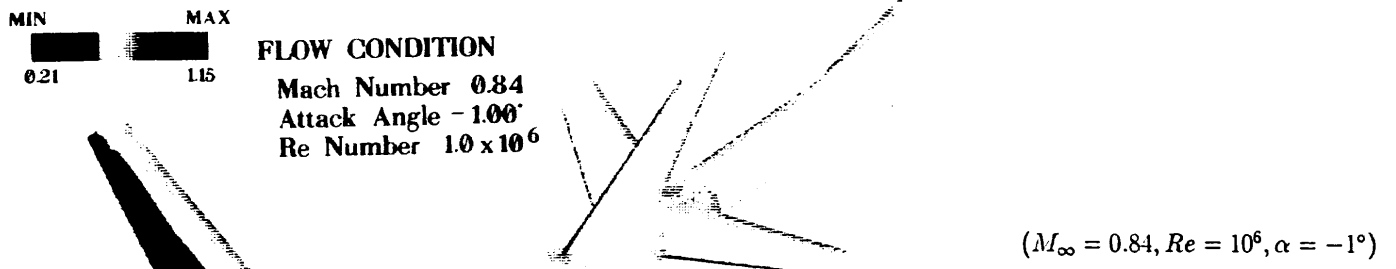
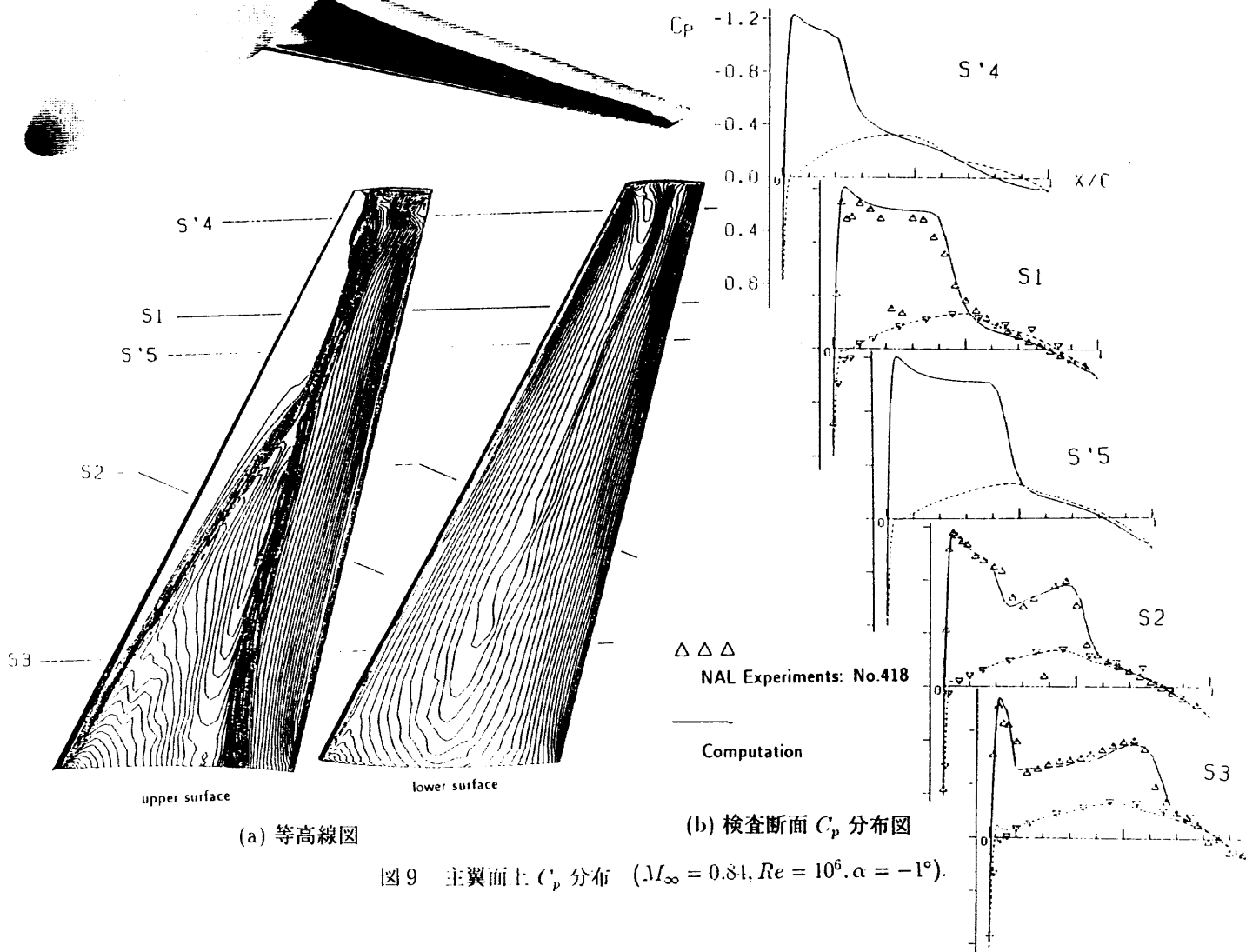


図8 OMEGA-M5全機模型上の圧力分布



(a) 等高線図

(b) 検査断面  $C_p$  分布図

図9 主翼面上  $C_p$  分布 ( $M_\infty = 0.84, Re = 10^6, \alpha = -1^\circ$ )

Item	Grid Points		Comput. on 1 PE		Comput. on 5 PEs	
	Number	Ratio	CP Sec.	Ratio	CP Sec.	Ratio
$D_1$	(121x35x45)	0.238	88	0.190	194	0.980
$D_2$	(131x69x37)	0.419	194	0.420		
$D_3$	(121x45x31)	0.211	103	0.223		
$D_4$	(93x31x21)	0.076	41	0.089		
$D_5$	(61x35x21)	0.056	29	0.063		
Exchange	—	—	7	0.015	4	0.020
Total	799191	1.000	462	1.000	198	1.000

表1 100タイム・イタレーションあたりの計算時間の内訳

## 並列化による大規模3次元Navier-Stokes解析の試み

岸本 琢司\*

A Large Scale 3D Navier-Stokes Analysis using NAL-NWT

by

Takuji Kishimoto  
Gifu Technical Institute,  
Kawasaki Heavy Industries, LTD.

## ABSTRACT

Parallelization of 3D Navier-Stokes analysis using a structured multi-block grid has been achieved by a domain decomposition method with message passing procedure. Modification of existent solver can be done easily, because added procedures for parallelization are only the domain decomposition routine and the interdomain communication of boundary conditions between each neighboring subdomains, that is message passing procedure, and there is no need to modify main routines.

NWT (Numerical Wind Tunnel) of National Aerospace Laboratory (NAL) was used in order to investigate the effect of parallelization.

A parallelized flow analysis around alone swept wing using about 1 million grid points and 4PE (Processor Element)s was accelerated about 3 times faster than using single PE. We also got the result that a larger scale flow analysis around complete configuration of ONERA-M5 model using over 5 million grid points and 16PEs was accelerated about 12 times faster than using FACOM VP-400.

## 1. はじめに

当社では、これまでにNAL-KHI共同研究の下で3次元Navier-Stokes解析システムを構築し、STOL実験機「飛鳥」<sup>1, 2)</sup>をはじめとして、宇宙往還機HOPE<sup>3)</sup>、次世代SST<sup>4)</sup>、超音速インターク<sup>5)</sup>等、実際の航空機の開発・設計の場においても多くの成果を上げてきた。

しかし、本解析システムではマルチブロック型の計算格子を採用しているため、複雑な形状に対する適合性にすぐれている反面、広く用いられているC、O型格子に比べて多くの格子点を必要とし、その結果多大な計算時間を要する場合が多い。また、解析の高精度

化への要求や化学反応、燃焼等の複雑な物理の導入などにより、解析の大規模化の傾向は今後一層拍車がかかるものと予想される。そのため、格子点数を多く必要とする我々の解析システムを実際の設計の場で有効に活用していくためには、計算効率の改善が非常に重要なポイントになってきている。そこで、我々はこれまでに、計算効率の改善のための1つのアプローチとして、本解析システムへのマルチグリッド法の適用を試み、一定の成果を得ることができた<sup>6)</sup>。

さらに本研究では、航空宇宙技術研究所へのNWT並列計算機導入を1つのきっかけとして、計算効率改善のもう1つのアプローチである解析システムの並列化を行なったので、以下その概略について報告する。

\* 川崎重工業(株) 岐阜技術研究所

2. NAL-NWT の概略<sup>7)</sup>

本研究では、並列計算機として航空宇宙技術研究所のNWT (Numerical Wind Tunnel) 並列計算機を利用させていただいた。そこで、ここではNAL-NWT の概略について紹介する。

NAL-NWT は、ベクトル計算機を 140台結合した分散主記憶型の並列計算機 (図1) で、その能力の概要は以下のとおりである。

- ・ 処理速度 : 1.7 GFLOPS/PE
- ・ 主記憶容量 : 256 MBytes/PE
- ・ PE結合方法 : クロスバー・ネットワーク  
(PE : Processor Element , 計算機要素)

このような能力を持つNWTの特色として、そのメモリー構造 (図2) が挙げられる。NWTは、分散主記憶型の並列計算機であるので、各PEごとにメモリーを持っているが、そのメモリーはローカルメモリーと名づけられ、他のPEから直接アクセスすることはできない。そこで、他のPEが持つデータを参照するためには、仮想的に作られたグローバルメモリーと呼ばれる領域を経由しなければならない。そして、グローバルメモリーへのアクセス速度は、各PE内部でのローカルメモリーへのアクセス速度に比べて遅い (図2) ため、並列化の効率について考える場合、グローバルメモリーへのアクセス方法に注意を払う必要がでてくる。

3. 解析手法の概要<sup>1-4)</sup>

ここでは、並列化のベースとなる解析システムの概要について説明する。

(1) 計算格子

我々が現在用いている計算格子は、Transfinite Interpolation を利用した代数的手法により生成されるマルチブロック型の構造格子である。この計算格子は、形状適合性が高いにもかかわらず、単一構造格子という非常にシンプルな形に帰着するため、ベクトル化はもちろんのこと、並列化についても比較的容易に行うことができる。

(2) ソルバー

- ・ 基礎方程式 : 薄層近似 Navier-Stokes方程式
- ・ 乱流モデル :  $q-\omega$  2 方程式モデル
- ・ 離散化 : 有限体積法にもとづく  
TVD風上差分法 (空間2次精度)
- ・ 数値流束 : Roe の近似 Riemann解法
- ・ 時間積分 : 平面对称Gauss-Seidel緩和法による陰的時間積分 (時間1次精度)

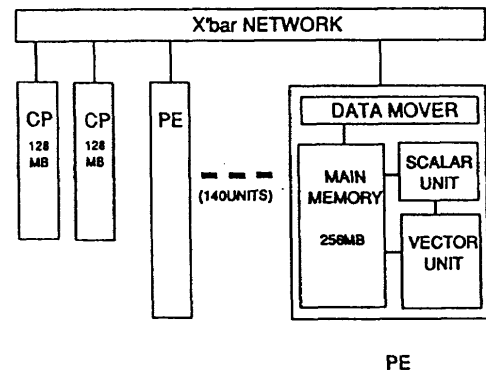


図1. NAL-NWT システム構成図

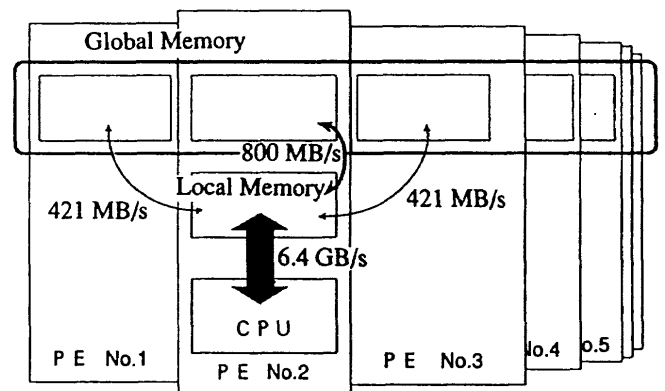


図2. NAL-NWT メモリー構成

4. 並列化手法

我々は、今回の解析システムの並列化にあたってプログラム修正の容易さ、他の並列計算機システムへの拡張性を考慮した結果、並列化手法として領域分割法 (Domain Decomposition Method) を採用した (図3)。これは、計算空間 (= 計算格子) を複数個の領域に分割し、分割されたそれぞれの領域の解析を各PEにより同時に行うものである。この時、各領域間に設けられたOverlap 部分において、Message Passing とよばれる境界条件の交換を行うことにより、分割された領域間のつながりを保証している。ただし、今回の並列化においては、領域分割は主流方向のみに対して行なっており、PEの2次元あるいは3次元割り当ては行っていない。

このような方針の下でNAL-NWT 上での解析の並列化を実現するためには、プログラムをNWT-FORTRAN という並列化用言語で記述しなければならない。最も普通にNWT-FORTRAN を用いて上に述べたような領域分割を表現するには、配列およびDO Loop の分割を行う必要がある。しかし、この方法にのっとり並列化を行うと、プログラム全体にわたって修正を施す必要がある

ため修正作業が煩雑になるうえ、他システムへの拡張性が損われるおそれがある。そこで我々は、領域分割部分および分割された領域間の境界条件の転送 (Message Passing) 部分を陽に書き表すこととした。その結果、各領域内での解析に関するプログラムの主要部分には、ほとんど修正を加えることなく並列化を行うことができた。また、他の並列計算機システムへの拡張性についても、これらの部分のみをそのシステムに対応した並列化用言語あるいはライブラリに合わせて修正するだけで対応することができる。さらに、このように書き加えられた領域分割の部分では、計算領域を自動的にほぼ等間隔に分割するようになっているので、各PEのLoad Balanceも良好である。

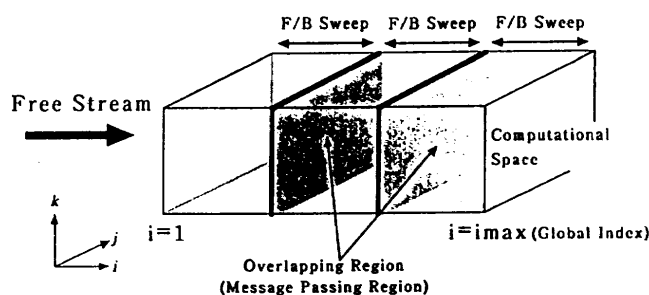


図3. 領域分割法概念図

5. 並列化の効果

本研究では、解析の並列化の効果を調べるために、3次元後退翼まわりの粘性流解析およびONERA-M5全機形態まわりの粘性流解析を行なった。

(1) 後退翼まわりの粘性流解析

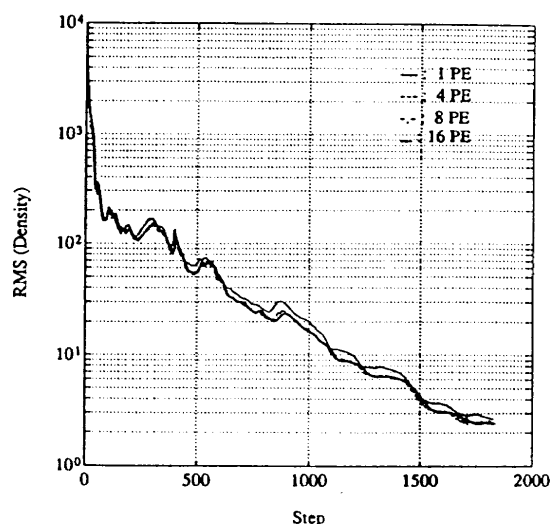
ここでは、ONERA-M5標準模型の主翼のみを取り出して、単独翼まわりの流れ解析を行なった。解析条件は以下のとおりである。

- ・格子点数：  $141 \times 81 \times 91 = 1,039,311$  点
- ・PE台数： 1, 4, 8, 16台の4ケース
- ・一様流条件  
マッハ数： 0.84  
迎角：  $-1^\circ$   
レイノルズ数：  $1.0 \times 10^6$

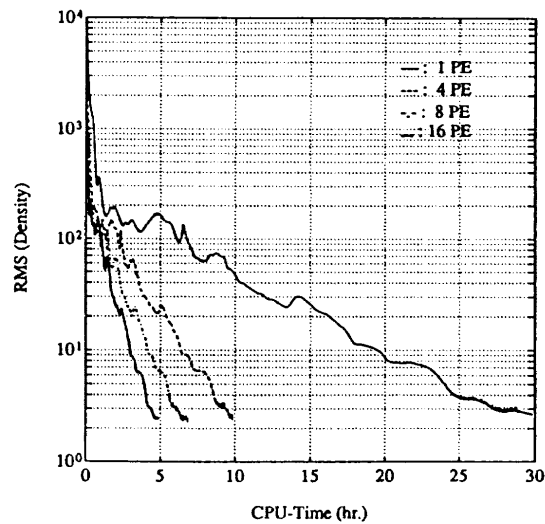
図4の収束履歴をみると、計算ステップに対する残差のふるまいは、1~16PEまでどれもほぼ同様であるのに対して、CPU-Timeに対する収束状況では各

PE台数に応じた違いが生じており、並列化の効果が明確に現れている。4PEでの解析では、1PEの場合に比べて3倍程度収束が加速されており、良好な並列化の効果が得られていると考えている。ただし、4PEからさらにPE台数を増やしていても、PE台数に比例して収束が加速されているわけではない。これは、PE台数が増えるにつれて、データの入出力、領域分割、Message Passing等データ転送速度の遅いグローバルメモリーへのアクセスをとまなう作業（これらは並列化の恩恵を受けない—Message Passingについては、現状の分割方法では各領域間でのデータ転送量はPE台数によらない）に要する時間が、解析作業全体の中で相対的に増加してくるためである。

なお得られた解析結果についても、当然のことながら、1PEでの解析と並列計算との間で、（特に分割された領域間の境界付近等において）大きな違いは生じていない（図5, 6）。



(1) Step~RMS



(2) CPU-Time~RMS

図4. 単独翼まわりの粘性流解析収束履歴

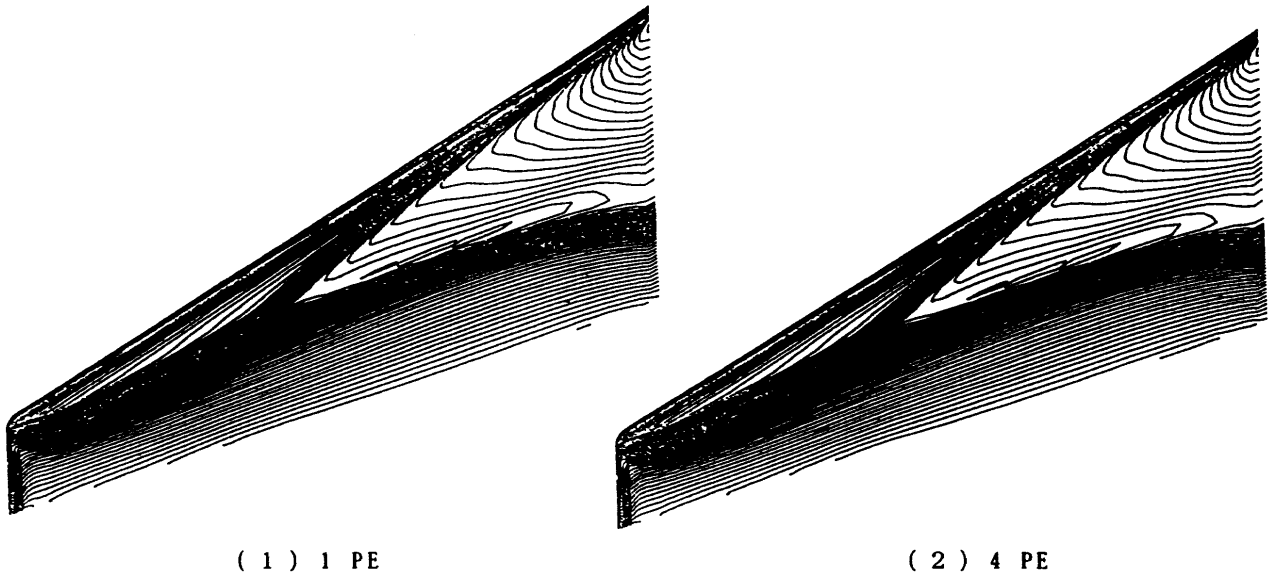


図5. 翼上面等圧線図 (単独翼解析結果)

## (2) ONERA-M5全機形態まわりの粘性流解析

ここでは、より大規模な並列計算の例として、ONERA-M5全機まわりの粘性流解析を紹介する。これは、第10回航空機計算空気力学シンポジウムの中のCFDワークショップにおいて、我々が当時のVP-400を用いて行なった解析<sup>9)</sup>と同一のものである。解析条件は、以下のとおりである。

- ・格子点数：  $256 \times 116 \times 176 = 5,226,496$  点
- ・PE台数： 16 台
- ・一様流条件
  - マッハ数： 0.84
  - 迎角：  $-1^\circ$
  - レイノルズ数：  $1.0 \times 10^6$

この解析は、主記憶容量として最低でも約1ギガバイト程度必要なので、1PEの解析との直接の比較はできないが、VP-400およびNWTのそれぞれにおいて1回のJOBで計算されるステップ数等から類推すると、解析の並列化により、その実行速度はVP-400に比べて約12倍程度高速化されたものと予想される。

並列計算により得られた結果についても、ONERA標準模型で特徴的な主翼上面での三重衝撃波も捕らえられており、並列化による解の精度の低下などは生じていないことが確認できた(図6, 7)。

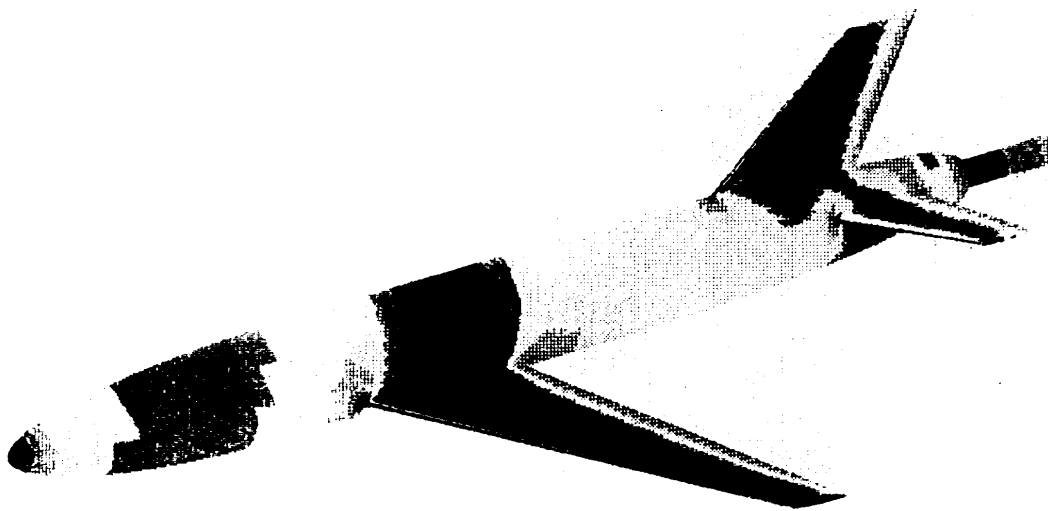


図6. ONERA-M5機体表面圧力分布



## 6. おわりに

これまでに述べてきたように、マルチブロック型構造格子を用いた3次元Navier-Stokes 解析システムを並列化することにより、計算効率の改善を図ることができた。今後さらにNAL-NWT 上で並列化の効率の向上を図っていくためには、データ入出力方法の改善、領域分割の多次元化等が必要となってくるものと思われる。また、並列化にともなう解析の大規模化に対応して、格子生成、作画等の解析の前後処理の方法についても検討していくことにより、より実用的な空力解析システムを構築することができるものと考えている。

なお、今回の並列化作業にあたって、多くの有益なアドバイスをいただいた航空宇宙技術研究所 数理解析部の方々に心から感謝の意を表します。

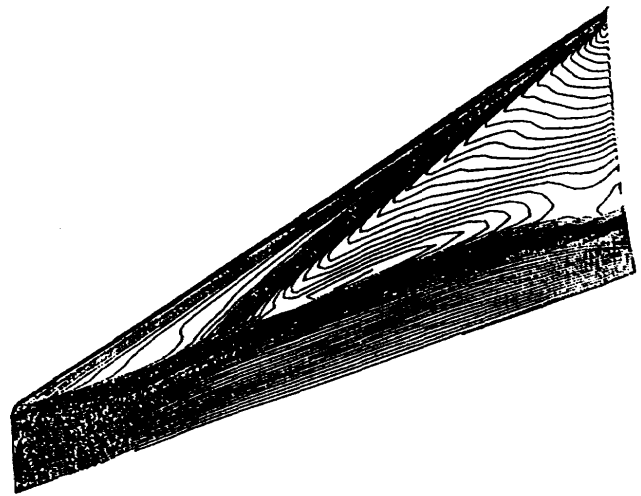


図7. 主翼上面等圧線図（全機形態解析結果）

## 参考文献

- 1) Sawada, K., and Takanashi, S., "A Numerical Investigation on Wing/Nacelle Interferences of USB Configuration", AIAA paper 87-0455, 1987.
- 2) 高梨進, 沢田恵介, "完全航空機形態に対するナビエ・ストークスシミュレーション", 第8回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-14, 1990.
- 3) 岸本琢司, 花光明, "設計における数値解析の活用について(その9) - 極超音速平衡流の解析 -", 第9回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-16, 1991.
- 4) Sawada, K., "Aerodynamics of Supersonic Transport - Navier-Stokes Simulation of SST Configuration", 第27回飛行機シンポジウム講演集, 1989.
- 5) Fujimoto, A., Niwa, N., and Sawada, K., "Numerical Investigation of Supersonic Inlet with Realistic Bleed and Bypass Systems", AIAA paper 91-0127, 1991.
- 6) 半田智宏, 嶋英志, "設計における数値解析の活用について(その11) - マルチグリッド法のマルチブロック法への適用の試み -", 第11回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-22, 1994.
- 7) 中村孝, 吉田正廣, 福田正大, 中村修一, 村瀬丈夫, 松崎達哉, "NWT 並列FORTRAN に基づく並列評価", 第10回航空機計算空気力学シンポジウム論文集, NAL SP-19, 1992.
- 8) 岸本琢司, "ONERA M5全機形態まわりの流れ解析", 第10回航空機計算空気力学シンポジウム論文集 特別企画/CFDワークショップ, NAL SP-20, 1993.



## 設計における数値解析の活用について (その12)

## — 一粒子的風上法とその検証 —

嶋 英志\*、城之内 忠正†

Role of Computational Fluid Dynamics in Aeronautical Engineering(No.12)

—Formulation and Verification of Uni-Particle Upwind Schemes for the Euler Equations—

by

Eiji Shima

Gifu Technical Institute, Kawasaki Heavy Industries LTD.

Tadamasa Jounouchi

National Institute for Fusion Science

## Abstract

A new approach to construct upwind schemes for the Euler equations is shown. This approach uses a simple flux splitting with the mass flux of some approximate Riemann solver. Two schemes based on this approach, which are SFS2(Simplified Flux Splitting 2) and SHUS(Simple High-resolution Upwind Scheme), are proposed and are verified by some tests. Both schemes are as simple, robust and accurate for discontinuities and boundary layers as any other existing scheme.

## 1 はじめに

圧縮性流体に対する風上法は人工粘性項の調整なしに衝撃波を振動なく鋭く捕える特長を有し遷音速、超音速域の計算法として成功を収め、TVDの概念と共に高解像度解法の基礎となっている。風上法としてOsher法[1]、Roe法[6]などのFDS(Flux Difference Splitting)法やSteger & Warming[7]、van Leer[4]やHänel[2]のFVS(Flux Vector Splitting)法が知られている。現在、Roe法が標準的に用いられているが、FDSは質量などの非負性が保てないため極超音速域で発散しやすい、極超音速の計算でカーブクル現象が発生するなど丈夫さの点で課題を残している。一方、FVSは丈夫さには優れるが過大な数値粘性のために境界層の精度が不十分で粘性計算には使いにくい欠点を有している。これらの問題を解決するために新しい風上法の研究が進められている。<sup>1</sup>

FDSやFVSは線形方程式に対する風上法の、Euler方程式への拡張して理解できる。これに対して、Liou &

Steffenが提案したAUSM (Advection Upstream Splitting Method) [5]は線形の風上法の拡張という観点から一歩はなれて移流項と圧力項をFVSと似た形式で分離することで簡単で有効なスキームが構築できることを示している。AUSMは簡単な形式にもかかわらず、非常に丈夫で、かつ境界層を精度よく捕える。しかしながら、衝撃波面で振動を生じ、未だ決定版とはいえない。

城之内ら[3]はHänelのFVSを改良したSFS (Simplified Flux Splitting)を開発し、簡単で、丈夫さと精度を兼ね備えた計算法が構築できる事を示した。SFSはAUSMと同様に境界層を精度良く捕え、更にAUSMの衝撃波での振動を取り除いている。結果的にSFSはAUSMの質量流束だけをFVSの改良型と入れ替えた形になっている。SFSが衝撃波で振動がないのは質量流束をFVSで求めることにより、圧力の質量流束への寄与をより正確に考慮していることによると予想される。SFSで示された一粒子的風上法の定式化は質量流束項の変更により種々のスキームが構成できることを示している。

Wada[8]はAUSMの改良として、FVSの要素を加えたAUSMV (AUSM with flux-Vector-splitting)を提案している。AUSMVもまた、AUSMの質量流束項を

\*川崎重工業(株)岐阜技術研究所

†文部省核融合科学研究所

<sup>1</sup>中心差分で必要な人工粘性は風上法の数値粘性より確実に大きくなる。また、方向によって粘性の形式を変更するなどの工夫をしなければ境界層は捕えられない等FVSと似た欠点を持っている。

改良したものと理解することができる。

本稿では一粒子的風上法を解説すると共に、2つの計算法を紹介し、いくつかの検証計算でその有効性を示す。

## 2 一粒子的風上法の定式化

2次元の一般曲線座標系の場合について示す。3次元の場合も容易に導くことができる。

2次元の Euler 方程式は次のように表わせる。

$$Q + E_x + F_y = 0 \quad (1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで  $\rho, u, v, e, p$  はそれぞれ、密度、 $x, y$  方向の速度、全エネルギー、圧力である。これは積分形で次のようにかける。

$$\int Q dv + \int \bar{F} ds = 0 \quad (3)$$

$$\bar{F} = m\Phi + pN, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ h \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_n \\ y_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$m = \rho V_n, \quad V_n = x_n u + y_n v \quad (5)$$

ここで  $h = (e+p)/\rho$  はトータルエンタルピー、 $x_n, y_n$  は境界面の法線ベクトルである。有限体積法を用いる場合、スキームの設計は  $\bar{F}$  をどう求めるかに帰着する。強保存形式の差分法の場合も同様である。更に、風上法では、セル境界での、跳びを含む左右の物理量からの、 $\bar{F}$  の計算法が問題になる。

城之内らは Hänel の FVS の改良版として SFS を開発する過程で、次のような一粒子的風上法の概念を導入した。即ち、Hänel の FVS では正負の方向に伝わる二粒子の合計で移流項を決定するのに対し、移流項を1つの流体粒子で代表される様に修正する。ただし圧力の分離の形式は継承する。一粒子的風上法では質量流束  $m$  を FDS または FVS を用いて求め、流束ベクトルを、 $m$  の符号に応じて風上側を決定されるように、

$$\bar{F} = \frac{m + |m|}{2} \Phi_+ + \frac{m - |m|}{2} \Phi_- + \bar{p}N \quad (6)$$

とする。ここで 下付き  $\pm$  は境界の左 (+) 右 (-) の量を示す。また  $\bar{p}$  は左右のマッハ数  $M_{\pm}$  を用いた圧力

の混合で

$$\bar{p} = \beta_+ p_+ + \beta_- p_-, \quad (7)$$

ここで

$$\begin{cases} \beta_{\pm} = \frac{1}{4}(2 \mp M_{\pm})(M_{\pm} \pm 1)^2 & \text{if } |M_{\pm}| \leq 1 \\ \beta_+ = 1, \beta_- = 0 & \text{if } M_{\pm} > 1 \\ \beta_+ = 0, \beta_- = 1 & \text{if } M_{\pm} < -1 \end{cases} \quad (8)$$

質量流束を様々な FVS や FDS で求めることで新しい安定なスキームが構成できる。例えば、Roe 法や Osher 法、Godnov 法の質量流束をそのまま使用することもできる。

AUSM と一粒子的風上法は、統一的に式 (6) で表わすことができる。一粒子的風上法の特徴は質量流束を Euler 方程式を反映して正確に求める点にある。

次節では、一粒子的風上法の定式化で計算時間、丈夫さ、精度の点で優れていると思われる方法を2種類示す。

## 3 一粒子的風上法の2例

### 3.1 SFS2(Simplified Flux Splitting 2)

城之内らの SFS は一粒子的風上法に、接触不連続をとらえる様に変更した van Leer の FVS の質量流束の改良版を用いたものである。オリジナルの SFS は音速点で不連続であったのをマッハ数の定義を工夫することで解消したのが SFS2 である。 $m$  は次のように分離される。

$$m = m_+ + m_- \quad (9)$$

ここで

$$\begin{cases} m_{\pm} = \pm \frac{\rho_{\pm} c_{\pm}^2}{4\bar{e}} (M_{\pm} \pm 1)^2 & \text{if } |M_{\pm}| \leq 1 \\ m_+ = (\rho V_n)_+, m_- = 0 & \text{if } M_{\pm} > 1 \\ m_+ = 0, m_- = (\rho V_n)_- & \text{if } M_{\pm} < -1 \end{cases} \quad (10)$$

その他の量は次のように定義される。

$$M_{\pm} = \frac{V_n}{\bar{c}_{\pm}}, \quad \bar{c}_{\pm} = \frac{c_{\pm}^2}{\bar{c}}, \quad c_{\pm}^2 = \gamma \frac{p_{\pm}}{\rho_{\pm}} \quad (11)$$

この  $M_{\pm}$  を  $\beta_{\pm}$  の計算にも用いる。 $\bar{c}$  は音速の平均値で、選び方に任意性がある。ここでは次のようにした。

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{c_+^2 + c_-^2}{2}} \quad (12)$$

SFS2 の質量流束は左右の音速の定義以外は van Leer や Hänel の FVS と同じである。

SFS2 の特徴は

<sup>2</sup>Wada [8] は、その他にも垂直方向の質量流束項の改良なども行っている。

1. 境界層や、定常な接触不連続を正確に捕らえる。
2. 深刻なカーバンクル現象を生じない。
3. 衝撃波や膨張について非常に丈夫。
4. 非定常な接触不連続の精度では後述の SHUS に劣る。

### 3.2 SHUS(Simple High-resolution Upwind Scheme)

一粒子的風上法で Roe 法の質量流束をそのまま用いることもできるが、Roe 法で想定している線形近似されたリーマン問題を解くわけではないから Roe 平均を用いる必要はない。Roe 法の質量流束において差分を保存変数から原始変数に変換する事により、より簡潔で見通しの良い表式を得ることができる。

$$m = \frac{1}{2} \{ (\rho V_n)_+ + (\rho V_n)_- - |\bar{V}_n| \Delta \rho - \frac{|\bar{M} + 1| - |\bar{M} - 1|}{2} \bar{\rho} \Delta V_n - \frac{|\bar{M} + 1| + |\bar{M} - 1| - 2|\bar{M}|}{2} \frac{\Delta p}{\bar{c}} \} \quad (13)$$

$$\bar{M} = \frac{\bar{V}_n}{\bar{c}} \quad (14)$$

ここで  $\Delta$  は左右の差分  $\Delta q = q_- - q_+$  である。超音速で完全に風上差分になるために、

$$\bar{V}_n = \frac{V_{n+} + V_{n-}}{2}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_+ + \rho_-}{2} \quad (15)$$

とする必要がある。 $\bar{c}$  は音速の平均値で、ここでは簡単に

$$\bar{c} = \sqrt{\gamma \frac{p_+ + p_-}{\rho_+ + \rho_-}} \quad (16)$$

とした。スキームは平均音速の選び方に鈍感で、遷亜音速の流れ場では、一様流の値に固定しても良い。 $\beta_{\pm}$  は  $\bar{c}$  を用いて、次のように表せる。

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{4} \left( 2 \mp \frac{V_{n\pm}}{\bar{c}} \right) \left( \frac{V_{n\pm}}{\bar{c}} \pm 1 \right)^2 \quad (17)$$

式 (13) からこの質量流束項の成り立ちが明らかである。1 行目は左右の平均、2 行目は移流速度による風上化、3 行目は圧力の寄与を表わしている。

SHUS の特徴は

1. 境界層や、定常非定常の接触不連続を正確に捕らえる。
2. 深刻なカーバンクル現象を生じない。
3. 衝撃波や対称な膨張について非常に丈夫。

4. Osher 法や Roe 法よりは丈夫だが非対称な強い膨張では発散することがある。
5. 式 (13) は一見複雑に見えるがマッハ数による if 分岐が不要で、音速の定義が1つで十分なので、実際には、今迄の風上法の中で、最も計算量が少ない。
6. 実在気体で圧力が内部エネルギーと密度の一般の関数で書かれる場合にも、圧力や音速の定義を変更するだけで、式 (13) や式 (6) は変更なしに使用できる。

## 4 計算例

### 4.1 衝撃波管

Roe 法, SFS2, SHUS, AUSM による Sod の標準問題 ( $\rho_L, u_L, p_L = (1, 0, 1)$ ,  $(\rho_R, u_R, p_R) = (1/8, 0, 1/10)$ ) の密度分布を図 1 に示す。空間精度は一次、時間積分は Euler 陽解法である。AUSM 以外は殆ど同じであることが分かる。

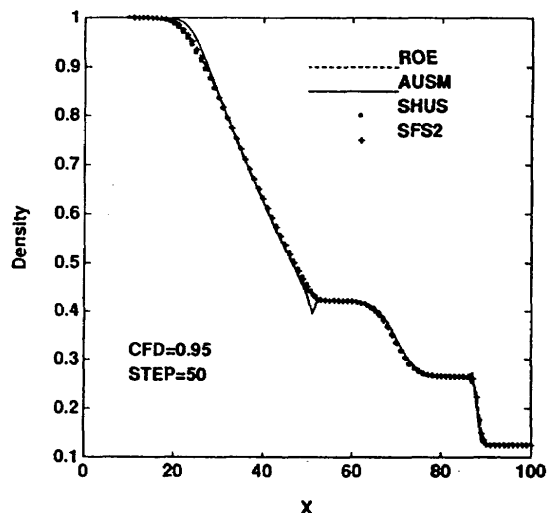


図 1: Sod の標準問題 密度分布

### 4.2 遷音速の翼周りの流れ

図 (2) に Roe 法、SFS2、SHUS による Mach 数 0.8 の NACA0012 の圧力分布を示す。どれも、殆ど同じであることがわかる。この例で示されるように、超音速以下の定常解では SFS2 や SHUS は Roe 法とほぼ同じ解を与える。

### 4.3 超音速境界層

マッハ数 3.5、レイノルズ数 3455 の超音速境界層での  $C_f$  及び  $C_h$  の各計算法による値を表 1 に示す。空間精度は MUSCL による二次精度、時間積分は 2 ステップ

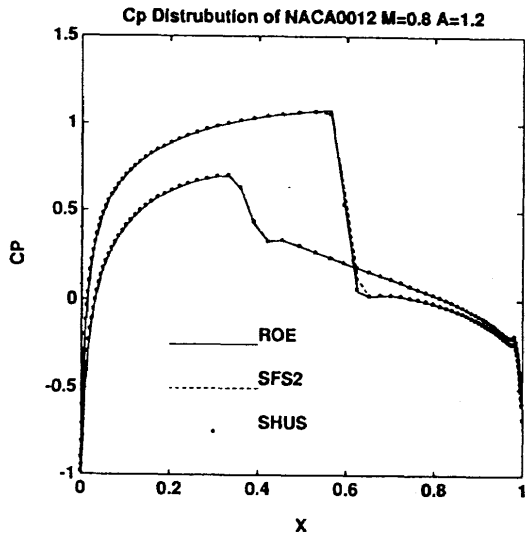


図 2: NACA0012 M=0.8 圧力係数

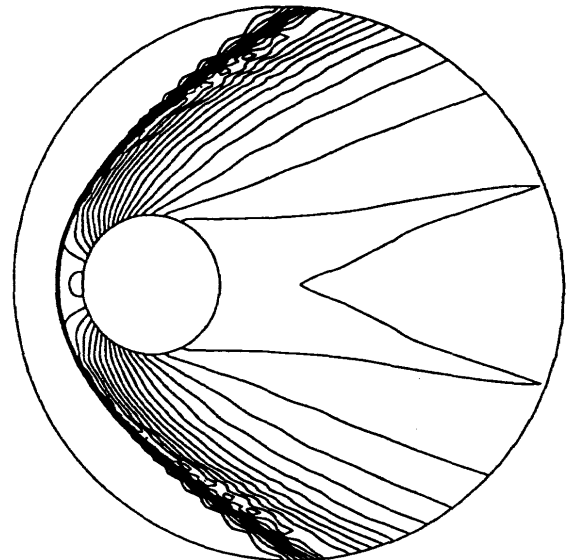


図 3: SHUSによる Mach50 の円柱の計算 密度分布

	Hänel	SFS2	SHUS	Roe	AUSM
$C_l/\sqrt{Re_x}$	0.319	0.695	0.696	0.695	0.695
$C_h/\sqrt{Re_x}$	0.222	0.301	0.301	0.301	0.301

表 1: 境界層特性

ブの陽解法である。Hänel [2] 以外は、ほぼ同じである。これは、Hänel の FVS では温度勾配がある場合に境界層を正しく捕えられないことによる。

#### 4.4 極超音速の円柱周りの流れ

風上法によって極超音速の強い衝撃波が簡単に扱えるようになったが、現実の応用計算においては屢々、計算の発散に遭遇する。風上法の種類によっては、極度に強い衝撃波が計算できないことも一つの理由である。しかし、より大きな原因は物体背面の強い膨張で圧力が負になるなどの非物理的な解を生じることにある。SFS2、SHUS とともにこのような膨張に対して丈夫である。

図 3 に SHUS によるマッハ数 50 の円柱回りの計算結果 (密度分布) を示す。計算は CFL 数 0.9、インパルススタートで行った。空間精度は  $(\rho, u, v, p)$  に微分可能リミターを適用した MUSCL による二次精度、時間積分は 2 ステップの陽解法である。同条件では Osher 法や Roe 法は発散した。

ただし、このような条件で安定に計算できるかどうかは計算格子にも依存し、背面側の格子間隔を小さくした場合には SFS2 や SHUS でも計算できなかった。今後の検討が必要である。

#### 4.5 カーバンクル現象

図 4 に Roe 法、AUSM、SFS2、SHUS によるマッハ数 6 の円柱前方の衝撃波計算の密度等高線を、図 5、

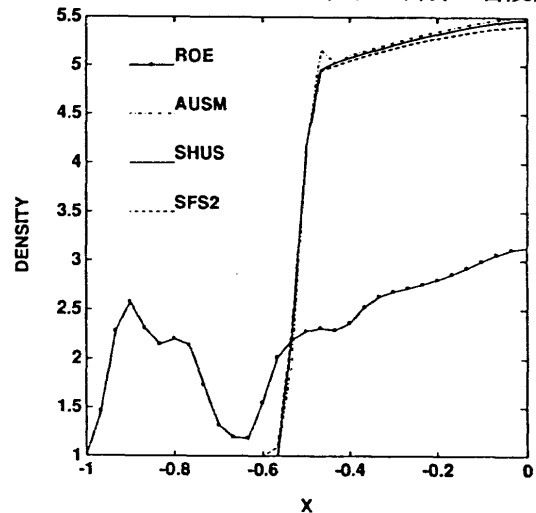


図 5: 各流束による対称面の密度分布

図 6 に対称面と壁面上の密度分布を示す。Roe 法はカーバンクル現象による非物理的な解を示している。その他の手法では顕著なカーバンクル現象は見られないが、AUSM ではショック面でのオーバーシュートが目立つ。SFS2、SHUS ではこのような問題は発生していない。計算は空間精度 1 次、Gauss-Seidel 法を用いた陰解法 (CFL 数=5) で行った。

カーバンクル現象は計算条件等に敏感で空間精度や時間積分法によっても答が変わってくる。この格子を用いた計算でも 2 次精度の Roe 法では顕著なカーバンクルは生じなかった。また SHUS で陽解法を用いた場合には若干の特異性を生じた。

#### 4.6 計算時間

表 2 に各風上法の計算時間の比較を示す。表に示されるように SFS2、SHUS は最も計算時間の短い部類に属する。

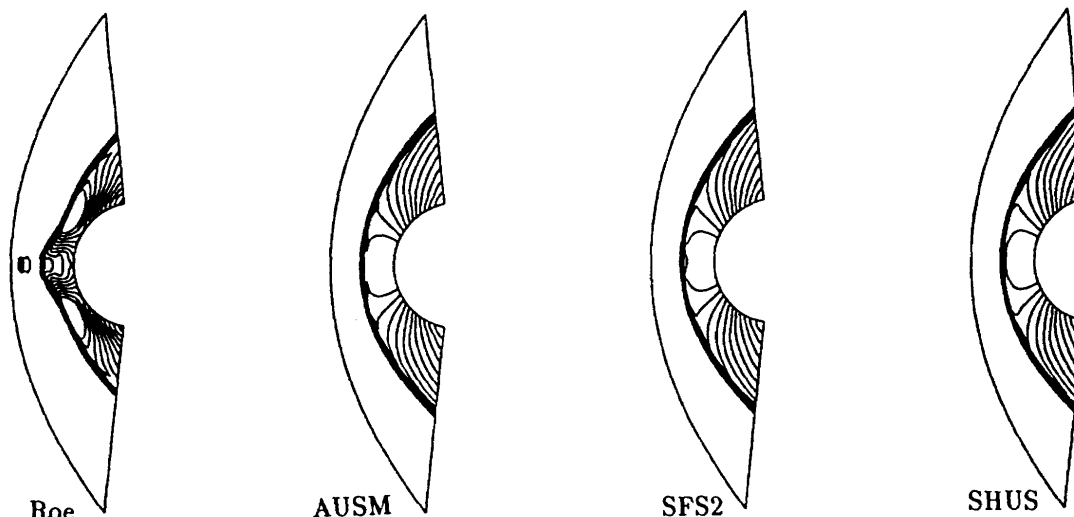


図 4: 各流束による密度の等高線

	Osher	Roe	van Leer	AUSM	Hänel	SFS2	SHUS
計算時間比率	2.588	1.000	0.724	0.530	0.516	0.478	0.390

表 2: 流束計算時間の比較

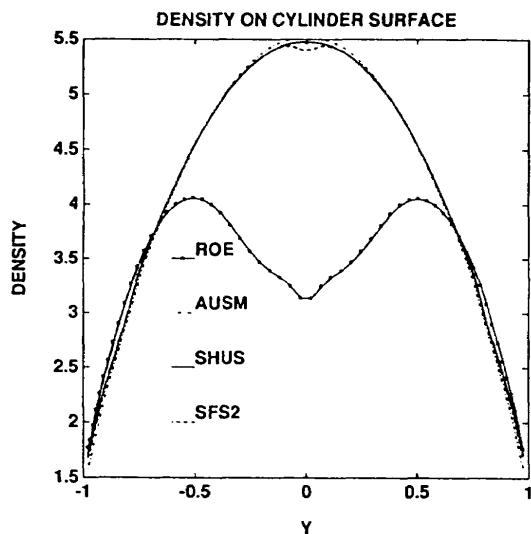


図 6: 各流束による物体表面上の密度分布

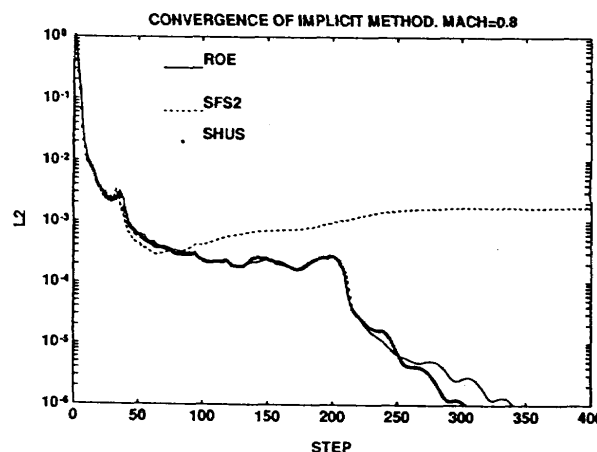


図 7: 収束履歴 NACA0012 M=0.8

### 4.7 収束特性

時間積分法に陰解法を用いる場合、L.H.S. の Jacobian と R.H.S. の流束項の組み合わせは収束特性に大きな影響を持つ。陰解法の Jacobian に Roe 法に用いるのと同じものを使用した場合の遷音速流れの収束履歴を図 (7) にしめす。SHUS は Roe 法とほとんど同じであるが、SFS2 は収束性が劣化している。SFS2 に対しては Jacobian を変更する必要がある。

## 5 SFS2, SHUS の補正

SFS2 や SHUS は上記のように多くの計算対象について十分な精度と丈夫さを持ち、多くの場合、従来の

風上法と入れ替えてそのまま使用できる。

Wada [8] は、風上法に対するいくつかのテスト問題を示している。それらのいくつかに対して SFS2 や SHUS は十分ではなかった。その、いくつかは、次のような修正を加えることで改善できた。

### 5.1 SFS2 の圧力補正

SFS2 や SHUS は極超音速の衝突ジェットの場合に非物理的な振動を生じる。このような振動は SFS2 の基礎となった FVS では発生しない。Wada [8] の AUSMV では垂直方向の運動量流束のみを FVS のものを用いることによって、境界層の精度を維持しつつ、極超音速衝突ジェット等の精度を向上できることを示している。これと効果は同等であるが次のようにすることで3次

元への拡張等が容易になる。

(7) 式の圧力を

$$p' = \bar{p} + p' \quad (18)$$

とし、SFS2の基礎となったFVSの垂直方向運動量流束との差を圧力の補正項とすると、次の式を得る。

$$p' = -\frac{1}{2}(m_+ - m_- - |m|)\Delta V_n \quad (19)$$

補正前後のマッハ15の衝突ジェットの温度分布を図8に示す。空間精度は一次、時間積分はEuler陽解法である。

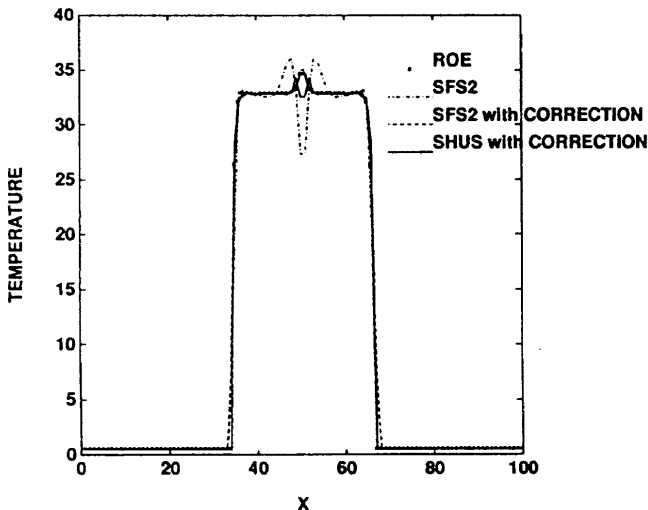


図8: Mach15の極超音速衝突ジェット 温度分布

## 5.2 SHUSの圧力補正

SFS2が基礎となったFVSの垂直方向の運動量流束を参考に圧力補正項を得たのと同様に、基礎となったRoe法の運動量流束を参考に次の式を得た。

$$p' = -\frac{1}{2}(\text{Min}(1, \bar{M}) - 1)^2 \bar{\rho} \bar{c} \text{Min}(\Delta V_n, 0) \quad (20)$$

## 5.3 CFL数制限に対する対処

(19)や(20)の様な補正を加えるとAUSMV [8]と同様に陽解法でCFL数の制限を受ける。これを回避するには、速度の差分を次のように修正する。

$$\Delta V'_n = \frac{(\Delta V_n)^3}{(\Delta V_n)^2 + \epsilon c^2}, \quad \epsilon \approx 0.01 \quad (21)$$

陰解法ではこの様な修正は必要ない。

## 6 結論と今後の課題

1. 一粒子的風上法の定式化で簡単に丈夫な計算法を幾つか構成し、検証計算でその有効性を示した。

2. 一粒子的風上法によってFVSやFDSとは異なる方法で種々の有用な計算法が構築できる。その意味で、計算法の1つの属を形成する様に思われる。
3. 一粒子的風上法の2例として構成したSFS2、SHUSは強い衝撃波に対し安定で、深刻なカーバクル現象を生じない。境界層の精度も良好である。また計算時間も既存の風上法中で最も短い部類である。
4. SHUSは陰解法の収束特性等も含めてRoe法の代替になりうる。
5. 今後、これらの計算法の限界を知るためにも、理論的な解析と多くの基本的な問題に対するアプリケーションが望まれる。

## 7 謝辞

風上法について有益な議論をして頂いた、航空宇宙技術研究所の和田博士に感謝します。

## 参考文献

- [1] Chakravarthy, S.R. and Osher, S., AIAA Paper 82-0975, 1982
- [2] Hänel, D. and Schwane, R., AIAA Paper 89-0274, 1989
- [3] 城之内、北川、坂下、保原、第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集、1993
- [4] van Leer, B., *Lecture Note in Physics.*, vol.170, 1982, pp.507-512
- [5] Liou, M.S. and Steffen, C.J., *J.Comp.Phys.* vol.107, 1993, pp.23-39
- [6] Roe, P.L., *J.Comp.Phys.*, Vol.43, 1981, pp.357-372.
- [7] Steger, J.L. and Warming, R.F., *J.Comp.Phys.* vol.40, 1981, pp.263-293
- [8] Wada, Y. and Liou, M.S., AIAA Paper 94-0083, 1994



## 超音速輸送機全機形状の数値解析

山崎 哲夫\* 内田 隆志\*\*

Numerical Analysis around the whole SST configuration

by

Tetsuo Yamazaki

Fuji Heavy Industries, LTD.

Takashi Uchida

Japan Aircraft Development Corporation

### ABSTRACT

In designing the Second Generation of Supersonic Transport, the improvement of the lift to drag ratio at cruise condition is one of the most important subjects. This ratio affects the economic viability of the next SST, but there are some phenomena which degrade it. One of these is the wing-nacelle interference. We have applied an Euler method to a SST configuration which have 4 nacelles located under the aft wing. In this result the whole configuration has a higher inviscid lift to drag ratio than the sum of the wing-body configuration and 4 times of only one nacelle. And the inflow Mach number just upstream of a nacelle is less than the free stream Mach number and the flow is inclined, owing to the wing surface pressure. Therefore it is necessary to investigate the wing-nacelle interference in more detail.

### 1. はじめに

近年、日米欧で研究されている第2世代超音速輸送機は乗客数300人、航続距離6000nmの機体として計画され、現在の遷音速輸送機の約半分の所要時間で目的地に到着することが可能となる。これらの要求は、現在就航中のコンコルドの3倍の乗客数と1.6倍の航続距離となるものである。このような機体を実現し、経済的にも成功をもたらすためには数々の問題点を克服しなければならない<sup>1)</sup>。空力設計面では、巡航揚抗比の向上、離着陸性能改善などが挙げられる。中でも巡航揚抗比の向上は長い航続距離の実現のために不可欠である。しかし、超音速輸送機の主翼は造波抵抗を低減するために大きな後退角を持ち、離陸性能を向上するために翼面積を大きくすることが要求されるため、主翼のアスペクト比は小さくなり、揚力依存抵抗は大きくなる。さらに、エンジンナセルとの空力的な干渉があり、巡航時の揚抗比に影響を与える要因が多く、NASAにおいても早期から研究されている<sup>2), 3)</sup>。そこで、今回はエンジンナセルとの干渉に着目し、超音速輸送機全機形状(ナセル付)、ナセルなし形状、ナセル単体についてオイラー解析を実施し、定量的に検討した。尚、この解析は通産省の委託調査の一環として実施

したものである。

### 2. 解析方法

巡航マッハ2.2の超音速輸送機形状について解析を実施した(図1参照)。この形状の主翼は内舷前後退角が約70°、外舷前縁後退角が約50°のクランクトアロー翼であり、主翼下面後方に4個の軸対称ナセルをマウントしている。インテークの設計マッハは2.2であり、主翼取り付けの際にはダイバータが必要となるが、今回は非粘性解析であるためダイバータは省略し、パイロンを装着している。また、ナセル出口では巡航時のジェット排気を模擬している。

解析に使用したオイラー解析コードは有限体積法を基礎とし、陽的に時間積分を行うものである。さらに、Van-Leer型の流束分離<sup>4)</sup>を用い、マルチブロック型構造格子に対応するものである。計算格子の生成には代数方程式を利用した対話型プログラムを使用している。今回の解析では、全機形状(ナセル付)で全280ブロック、約85万点の格子点数となった(図2参照)。

### 3. 解析結果

図3に全機形状(ナセル付)及びナセルなし形状

\* 富士重工業株式会社

\*\* 日本航空機開発協会

の代表的な表面圧力分布を示す。翼下面にナセルから発生した圧縮波の影響による圧力の高い部分が発生している。図4に全機形状のナセル及びナセル単体解析の表面圧力分布を示す。両者の圧力はかなり異なっており、特に全機形状ナセルの上面の圧力が高くなっていることがわかる。図5に全機形状及びナセルなし形状の主翼翼弦方向断面圧力分布を示す。上面の圧力分布はナセルの有無によって変化しないが、下面はナセルより発生する圧縮波のために後半部で圧力が高くなっている。この部分の圧力分布が階段状になっているのはナセルの形状に起因するもので、インテーク部からノズル部にかけてナセル直径が大きくなり、この部分で圧縮波が発生することによるものである。図6に全機形状のナセル部とナセル単体解析の断面圧力分布を示す。ナセル単体解析結果と比較すると、全機形状のナセル上面の圧力がかなり高くなっていることがわかる。特にパイロン内舷側の圧力が高くなるが、これは主翼下面との干渉及び外舷側への流れの偏向によるものである。この流れの偏向によってナセル側面の圧力分布も変化し、特に側面先端部において外舷側より内舷側の圧力が高くなっている。さらに、全機形状のナセルとナセルに挟まれる領域の圧力が高くなる傾向があり、2個のナセルと主翼によって作られるチャンネル部での干渉が大きいことを示している。図7にナセル中心線を含む水平面内の等圧線分布を示す。ナセルから発生した圧縮波と膨張波が複雑な干渉を引き起こしている。この断面内におけるナセル直前での流速と流入角度（速度ベクトルとナセル中心線のなす角）を表1に示す。流入マッハは一様流マッハよりも1~2%低い値で、流入角度は3°程度となっており、これらは主翼下面の圧力分布によるものである。図8に全機形状及びナセルなし形状の揚抗特性（摩擦抵抗なし）を示す。全機形状の揚抗特性はナセルなし形状のものと同様であることがわかる。全機形状の揚抗特性のうち、翼胴部分

の寄与分はナセルなし形状に比べて揚力が増加している。これは、ナセルとの干渉によって主翼下面後半に高い圧力がほぼ全スパンにわたって発生したためである。これに対し、全機形状のナセル部分は主翼との干渉による揚力減少と抵抗増加があるため、全機形状全体としてナセルなし形状と同等の揚抗特性（摩擦抵抗なし）になったものである。従って、全機形状揚抗特性は、ナセルなし形状とナセル単体解析結果の合計よりも小さくなっている。これは“favorable interference”の一例であると言えよう。しかし、今回は非粘性解析であり、境界層と圧縮波・膨張波の干渉を評価するためにも粘性を含めた解析が必要と考える。

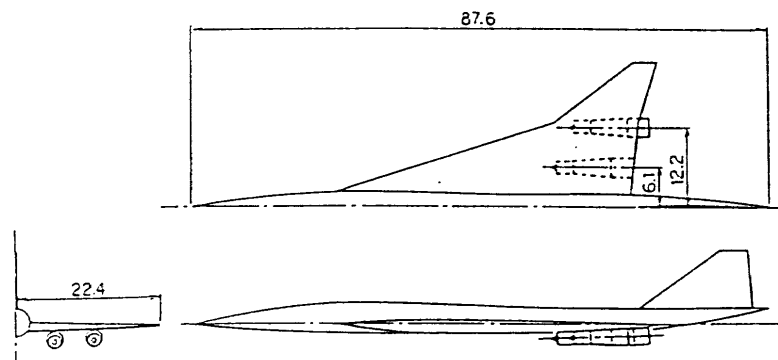
#### 4. まとめ

- 1) オイラー解析によって、ナセルとの干渉による圧力分布・揚抗特性の変化が把握できた。
- 2) 主翼の圧力分布の影響によってインテーク入口では外舷側への流れの偏向と流入マッハの低下が生じる。

今後、粘性を含めた解析や、ナセル形状等の検討を実施する必要がある。

#### 参考文献

- 1) Vachal, J.D. : High-Speed Civil Transport Research and Technology Needs SAE-901925 (1990)
- 2) Sigalla, A., and Hallstaff, T.H. : Aerodynamics of Powerplant Installation on Supersonic Aircraft J. of Aircraft Vol.4 No.4 pp.273-277 (1967)
- 3) Baals, D.D., Robins, A.W., and Harris Jr., R.V. : Aerodynamic Design Integration of Supersonic Aircraft J. of Aircraft Vol.7 No.5 pp.385-394 (1970)
- 4) Anderson, W.K., Thomas, J.L., and Van Leer, B. : Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations AIAA 85-0122 (1985)



巡航マッハ2.2  
実機スケール 単位 m

図1 超音速輸送機形状

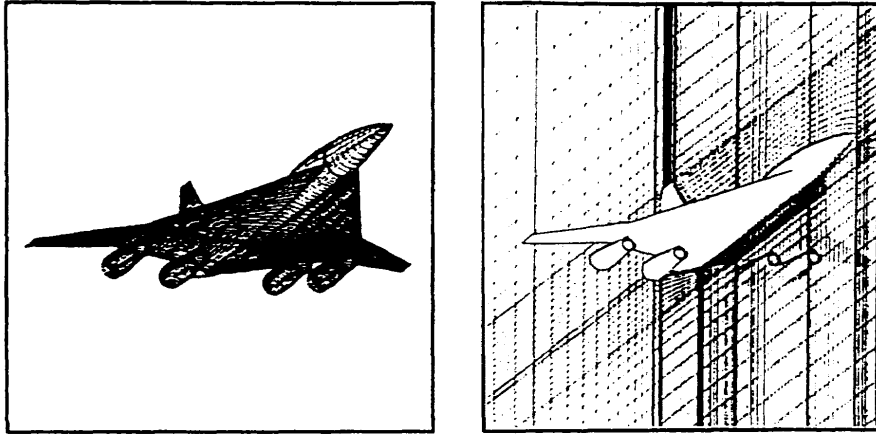
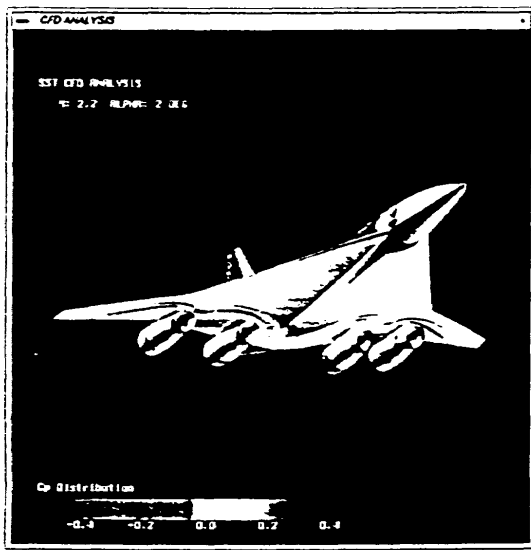
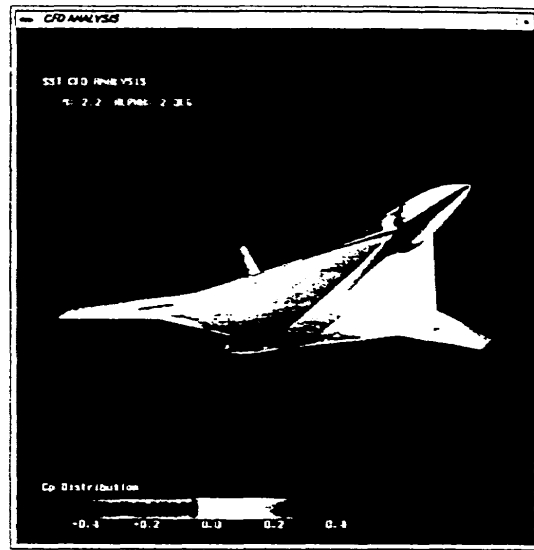


図2 計算格子概要  
左：機体表面  
右：対称面

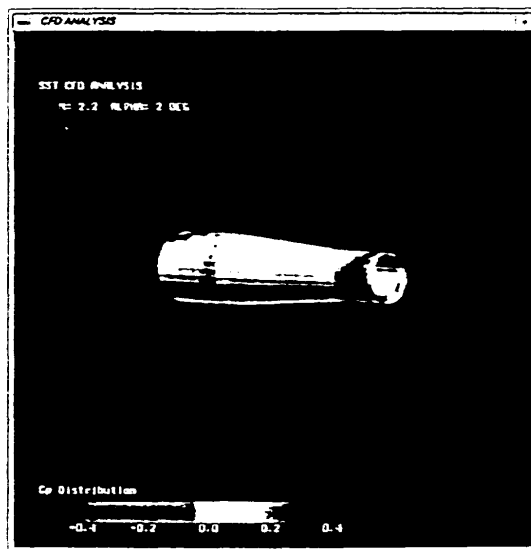


全機形状

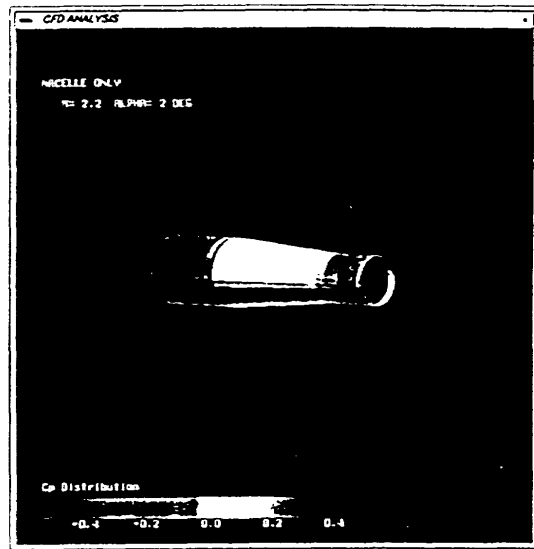


ナセルなし形状

図3 機体表面圧力分布 (M=2.2,  $\alpha=2\text{deg}$ )



全機形状外舷ナセル



ナセル単体

図4 ナセル表面圧力分布 (M=2.2,  $\alpha=2\text{deg}$ )

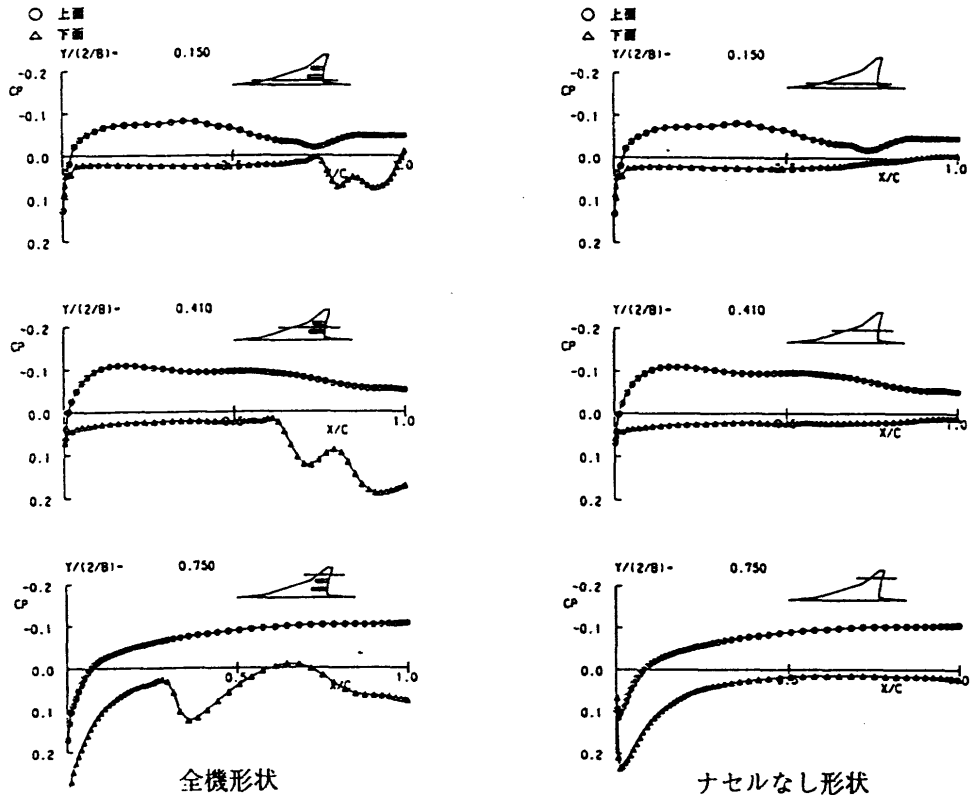


図5 主翼翼弦方向断面圧力分布 ( $M=2.2, \alpha=2\text{deg}$ )

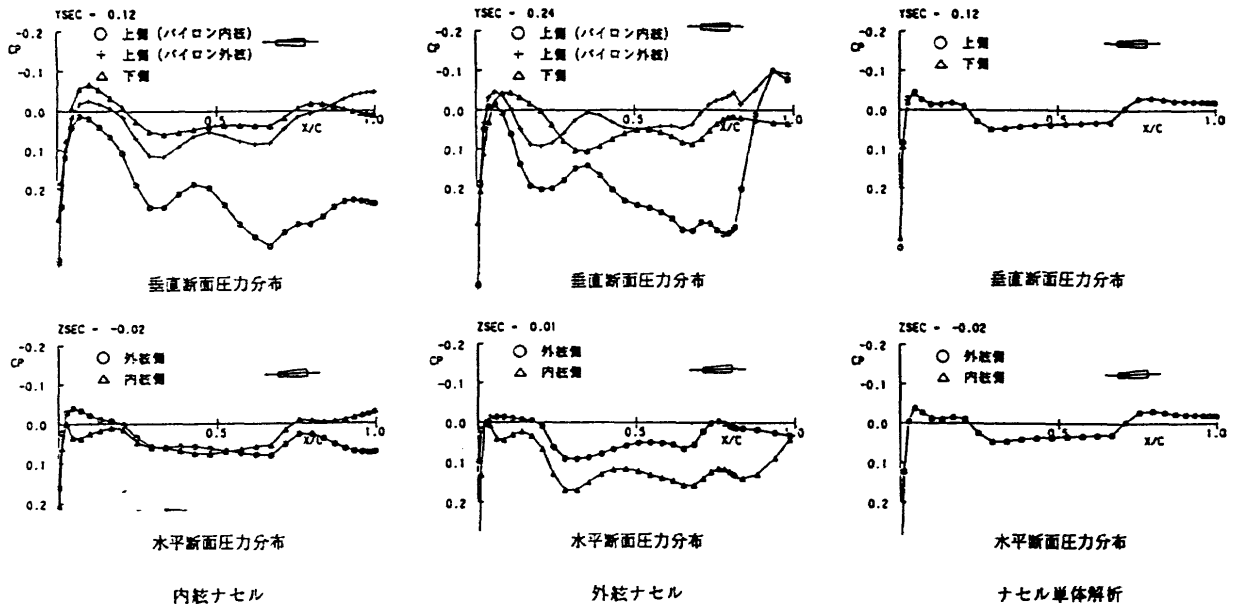


図6 ナセル断面圧力分布 ( $M=2.2, \alpha=2\text{deg}$ )

内舷ナセル			外舷ナセル		
$\alpha$ (deg)	流入マッハ	ナセル輪線と速度ベクトルのなす角度 (deg)	$\alpha$ (deg)	流入マッハ	ナセル輪線と速度ベクトルのなす角度 (deg)
2	2.18	3.04	2	2.19	2.65
3	2.17	3.02	3	2.17	3.35
4	2.15	3.06	4	2.16	4.12

表1 ナセル入口での流速及び流入角度



図7 ナセル中心線を含む水平面内の等圧線分布 ( $M=2.2$ ,  $\alpha=2$ deg)

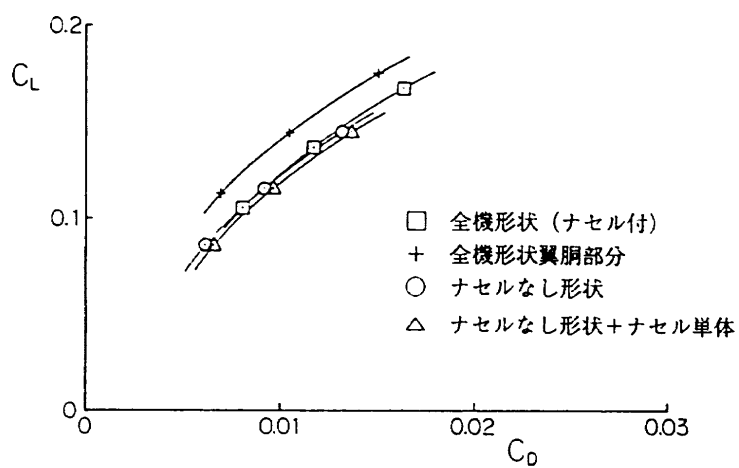


図8 揚抗特性 ( $M=2.2$ , 摩擦抵抗含まず)



# 極超音速飛行実験機空力設計におけるCFD技術の適用

山本 行光\* 渡辺 重哉\*\* 石黒 満津夫† 小笠原 宏†

Application of CFD Technique for HYFLEX Aerodynamic Design

by

Yukimitsu YAMAMOTO

National Aerospace Laboratory

Shigeya WATANABE

National Space Development Agency of Japan

Mitsuo ISHIGURO, Kou OGASAWARA

Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.

## ABSTRACT

An overview of the application of CFD technique for the HYFLEX (HYpersonic FLight EXperiment) aerodynamic design by using the numerical simulation codes in the supersonic and hypersonic speed ranges is presented. Roles of CFD required to make up for the short term of development and small amount of the wind tunnel test cases, application in the HYFLEX aerodynamic design and their application methods are described. The procedure of CFD code validation by the experimental data before design application is also presented. Finally, future view and subject of the CFD application for the development of hypersonic flight vehicle is shortly discussed.

### 1. はじめに

極超音速飛行実験機 (HYFLEX: HYpersonic FLight EXperiment) (図1) は、HOPEをはじめとする将来の宇宙往還機の開発に必要な極超音速機設計、製作、飛行技術の蓄積、設計手法の検証等を目的に計画された我が国初の極超音速機である。

この空力設計は、これまで実機設計の経験が殆どない、極超音速域を対象としており、風洞等の地上設備では飛行状態を完全には模擬できない飛行領域が存在するため、実機の空力特性を精度良く推定することが困難である。また、今回の設計では、開発期間が短期間であったこと、この基本設計期間が利用可能な国内極超音速風洞の改修期間と重なったために、限られた風洞試験データによって空力形状を設計することが要求されたことから、CFD技術は極めて有効な設計手段として、設計の主要ツールと位置づけられるキーテクノロジーとなった。

三菱重工は、この空力設計を担当し、NAL/NA SDA合同チームとの共同設計を進める過程で、主に航技研で開発されたCFDコードを実機空力設計へ適用している。

本稿では、平成4年度に実施されたHYFLEXの基本設計において実施したCFD技術の設計への適用過程及びその結果について報告し、今後のCFD技術の極超音速機設計への適用について展望する。

### 2. 設計におけるCFDの役割

HYFLEXは、再突入実験機(OREX)、自動着陸実験機(ALFLEX)とともに、今後計画されているHOPE開発に必要な技術開発を目的とした実験機として極超音速域でのデータを取得するため、平成8年2月の打ち上げを目指して開発計画が立てられている。図2に開発スケジュールの概要を示す。ここで空力設計のスケジュールに対して重要となる点は、打ち上げ時期から逆算していくと、C/C(カーボン・

\* 航空宇宙技術研究所

\*\* 宇宙開発事業団

† 三菱重工業(株)

### 3.3 耐熱構造設計への応用

極超音速域でのCFDの応用として最も重要となったのは、空力加熱に対する耐熱材料のEOP (End Of Parts) の設定である。

HYFL EXの耐熱材料は、空力加熱量によって、次の3つの材料を使用することとなっている。

- 1) C/C材
- 2) セラミック・タイル
- 3) 可とう断熱材

図6に当初計画での使用耐熱材の概要を示す。

耐熱構造設計ではこれらの材料の境(EOP)をどこに設定するかを決定することが重要な技術課題である。基本風洞試験においては、このEOPを設定するのに十分な加熱率の定量的分布データは得られていないため、CFDの分布データを設計に適用した。

設計に使用するデータの設定には、風洞試験データやCFDデータをそのまま使用するわけではなく、データの信頼性や精度、実機条件との相違等を評価したうえで安全率等のパラメータを考慮して設定する必要があり、実機設計の経験のない極超音速域においては、この設定手法を策定することが最大の技術課題であった。今回の設計において、限られたデータと少ない経験を用いて設計データを設定するために策定した手法の概要を図7に示す。ここでは、CFDから得られた空力加熱率を主体として、Fay & Riddell やDetra, Kemp & Riddellの淀み点推算式による解析的手法及び風洞試験データを統合することによって設計用データとしている。

図8に最終的に得られた設計用データの適用例を示す。CFDをもとに得られた設計用空力加熱率データと各々の耐熱材料の耐熱限界とを比較することによって、当初計画のEOPの妥当性を検討した結果、セラミック・タイルとC/C材の境において一部セラミック・タイルの耐熱限界を超える部分が存在することが明らかとなった。これに対処する方法を検討した結果、最終的にはHYFL EXの設計変更は行わず、飛行経路を修正することで対処することとなった。図9に最終的に決定した飛行経路と変更前の飛行経路を比較して示す。

### 3.4 形状変更効果の把握

基本設計では初期形状について、空力をはじめ構造、装備、制御、工作等あらゆる方面からの検討を行った。その結果、ノーズ部分においてC/C材の工作過程において表面曲率の反転が問題となる可能性が指摘され、形状の修正が行われた(図10)。これにより、CFDにはこの修正が空力特性に対して問題ないことを確認することが要求された。

図11に、CFDにより形状変更効果を推算した結果例を示す。飛行の制御において最も重要なパラメータの一つとなる $Cn\beta_{dyn}$ について、形状変更が安定側に働いたことが確認できた。

## 4. 超音速域でのCFDの適用

HYFL EXは、極超音速でのブラックアウト時のデータを機体内に記録し、ブラックアウト終了後に超音速に減速しながらデータを地上に送信する。従って超音速での飛行特性も極超音速同様重要となる。従ってHYFL EXの設計では超音速も設計の評定となっている。

### 4.1 使用ソフトウェア

超音速計算には、三菱重工が開発し、これまで民間機、戦闘機をはじめとして様々な機種種の開発に使用されてきた遷・超音速ナビア・ストークス・コード(JANET)を使用した。

### 4.2 計算条件

- 1) マッハ数: 1.6, 2.0
- 2) 迎角: 20°, 25°, 30°
- 3) 横滑り角: 0°, 5°

### 4.3 計算コードの検証

計算コードの検証用データは、今回の基本風洞試験で行われた超音速風洞試験(富士重工高速風洞)で取得されたデータを使用した。

図12に、今回の計算で使用した計算格子の概要図を示す。今回の評価パラメータとして、横方向特性が挙げられていたため、横3分力の推算精度を上げる目的から、機体後端のベース面を忠実に模擬したO-Oグリッドを使用している。

図13に今回の設計で重要な評価パラメータとなる、横方向の力特性について風洞試験結果との比較を示す。

風洞試験データとの一致は良好であり、設計データとして使用可能な精度を有していることが確認できた。

### 4.4 形状変更効果の把握

極超音速と同様に、超音速においても変更形状についての基本風洞試験は計画されていないため、初期形状からの形状変更効果をCFDにより把握することが要求された。

図14に、CFDにより形状変更効果を推算した結果例を示す。極超音速と同様に、 $Cn\beta_{dyn}$ について、形状変更が安定側に働いたことが確認できた。

## 5. CFD適用のまとめと今後の課題

今回の設計においてCFDによるデータは風洞試験データ以上に多くの目的に使用され、極超音速機設計においてはその設計ツールとしての地位を確立し、HYFL EX開発のひとつの目的であった設計手法を確立できたと考える。図15に今回の設計でのCFDの



で空力設計のスケジュールに対して重要となる点は、打ち上げ時期から逆算して、C/C（カーボン・カーボン）材を使用したノーズキャップの開発期間が制約となり、空力形状の確定が平成5年度初めに設定されているために、開発開始から空力形状確定までの期間が2～3ヶ月と非常に短いこと、形状確定までに実施できる風洞試験が限られており、特にこれまで実機開発の経験がなく今回の重要な技術課題となっている極超音速域での試験が、国内極超音速風洞（航技研）の改修期間と重なっている関係から40ラン（1ランは30秒～1分間）と非常に限られていることが挙げられる。また、極超音速での基本的な課題として、風洞等の地上設備では飛行条件を完全には模擬できない領域が存在することもあり、次の様な制約の基で設計することとなった。即ち、

- (1) 短期間での開発
- (2) 限られた風洞試験データ
- (3) 実機飛行状態の不確定要素の存在

以上の条件においては、設計検討に供する空力データの推定を行う際の有効となる手段としてCFDへは重要な役割が期待された。その主なものとして、下記3点が挙げられる。

- (1) 設計用空力データの取得。  
風洞試験ケース以外の点での力データの提供や、風洞試験では取得していない荷重分布、表面空力加熱率などの詳細な分布データの提供。
- (2) 形状修正による空力特性変化の把握。  
基本風洞試験は初期形状についてのみしか実施しないため、形状を修正した場合の修正形状の空力特性の確認。
- (3) 実機飛行条件での空力データの推算。

地上設備では完全に模擬できない飛行領域での空力データの提供。

これらの役割に対応するため、今回設計の評定とした極超音速及び超音速での飛行条件についてCFDを適用した。

### 3. 極超音速域でのCFDの適用

極超音速での空力特性の推算は、今回の設計作業での主な技術課題であり、空力加熱及び空力荷重等の重要な空力データの提供を行った。

#### 3.1 使用ソフトウェア

極超音速計算には、これまでのHOPE空力設計において使用され、大型衝撃風洞試験等で風洞試験との検証実績のある航技研極超音速完全気体計算ソフトウェア（山本コード）を使用した。

#### 3.2 計算条件

気流条件は、HYFLEXの飛行計画経路において、空力加熱の評定となる条件（マッハ数12.08）と風洞試験データとの検証を行うための風洞試験条件（マッハ数7.1）の2条件とした。また、極超音速でのヒンジ・モーメントの推算や舵面空力加熱率の推算のため、エレボン舵角をとった計算も行っている。即ち、

- 1) マッハ数：7.1, 12.08
- 2) 迎角：40°, 45°, 50°
- 3) 横滑り角：0°, 5°
- 4) エレボン舵角：0°, 10°, 20°

#### 3.3 計算コードの検証

計算コードの検証用データは、今回の基本風洞試験で唯一行われた極超音速風洞試験（航技研極超音速風洞）でのデータを使用した。この風洞試験では、次のデータを取得している。

- ・カロリメータ法による空力加熱率データ（機体表面20点）
- ・赤外線法による機体表面加熱率分布データ
- ・6分力データ

このうちカロリメータ法による加熱率データは、機体表面でのセンサを埋め込んだ20点での離散点のデータであり、赤外線法によるデータは、赤外線カメラで捉えた画面の画素データで、模型形状との厳密な位置の対応がとれていないため、主に定性的な分布のデータと考えられる。

##### (1) 空力加熱率

得られた空力加熱率についてカロリメータ法、赤外線法及びCFDの3者の比較を行ったところ、当初3者の一致は悪く、設計以前に検証用データの真値すら確定できない状況にあった。これは、極超音速域での実機開発の経験の未熟さから、これまで風洞試験データについて実機開発を念頭に置いた詳細な検討がなされていなかったことに起因するが、カロリメータ法のデータについては、センサの精度解析を行うことによって、赤外線法についてはデータの積分区間の厳密化や三菱名航CFDデータ処理システムを応用した模型形状と画素データとの対応によってデータに補正を加え、最終的には図3、4に示すように定量的（カロリメータ法）にも、定性的（赤外線法）にも良好な一致を得ることができた。

##### (2) 力

図5に揚力と抗力特性について風洞試験結果との比較を示す（この計算ではエレボンを含めていないため、ピッチングは正確な比較ができない）。

風洞試験データとの一致は良好であり、設計データとして使用可能な精度を有していることが確認できた。

適用をまとめる。

本設計の結果は、今後HYFLEXの飛行データによりその妥当性を確認し、HOPE等の空力設計へ適用していく計画である。

今回の設計を通じて判った、実機開発において今後のCFDに解決を期待される技術課題としては、次のものが挙げられる。

- 1) 信頼性の高い実在気体計算法の確立
- 2) 舵面やタイルギャップ等細部の計算法の確立
- 3) 境界層遷移の精度の高い推定モデルの開発及び

乱流境界層の高精度空力加熱率推算手法の確立

極超音速機の空力特性は、現象が複雑であるため、未だに技術課題が多く残されており、その解決手法としてのCFDに対する期待は非常に高い。また、スーパーコンピュータの速度もNWTの導入をはじめ並列化によって飛躍的に増加し、実在気体計算の設計への適用が現実的なものとなってきていることから、今後その重要性はさらに増加していくものと考えられる。

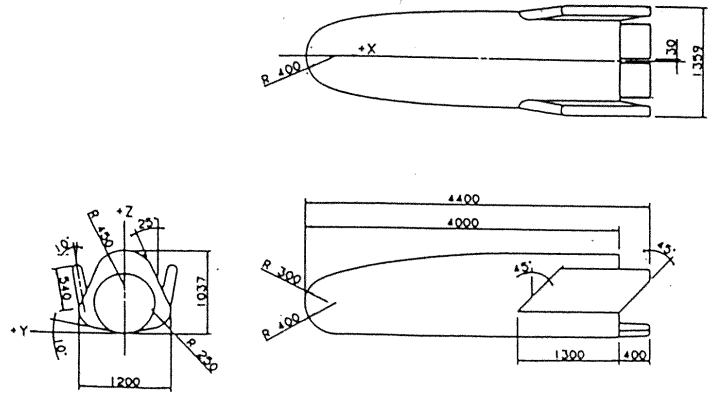


図1 HYFLEX三面図

	FY4		FY5				FY6				FY7			
	4/4	1/4	2/4	3/4	4/4	1/4	2/4	3/4	4/4	1/4	2/4	3/4	4/4	
マイルストーン	契約 ▽	空力形状確定 ▽										開発完了 ▽		打ち上げ ▽
設計フェーズ	予備設計	基本設計		詳細設計				維持設計						
風洞試験	基本風試 ・超音速風試 ・極超音速風試		詳細風試 ・超音速風試 ・超音速風試 ・極超音速風試				確認風試 ・極超音速風試							
熱構造開発試験	ノーズキャップ, エレボン開発試験													
実機製作	コンポーネント製作								組立, 積装, 機能試験					

図2 HYFLEX開発スケジュール

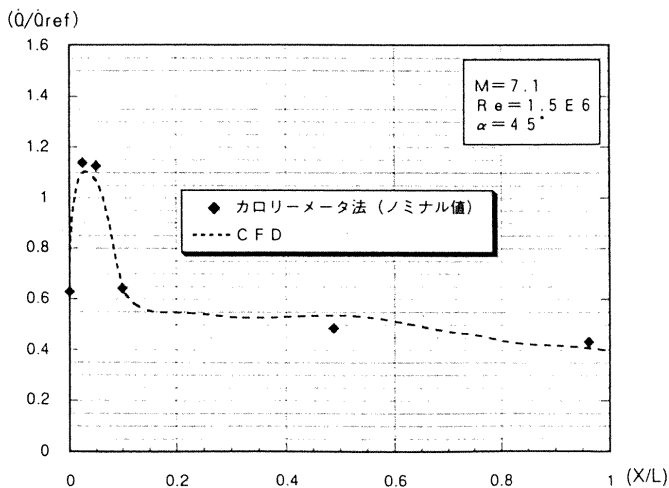
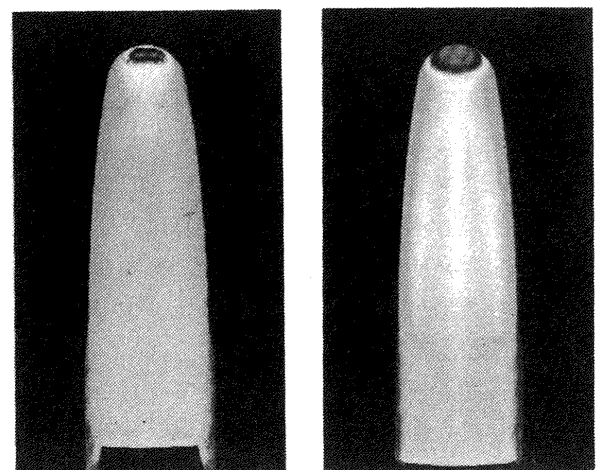


図3 空力加熱率のカロリメータ法との比較



(a) 赤外線法データ (b) CFD結果  
図4 空力加熱率の赤外線法との比較

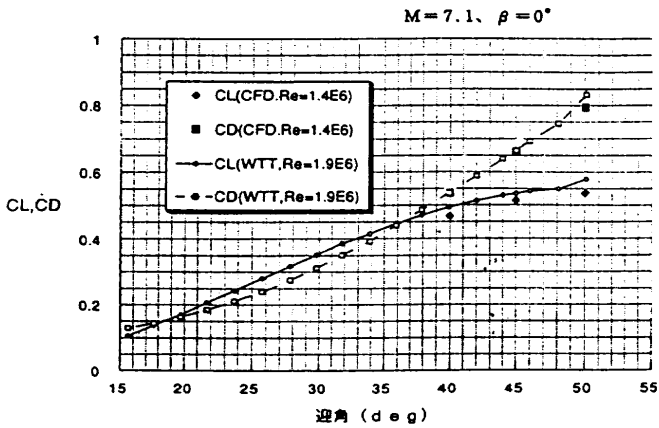


図5 極超音速での力データの比較

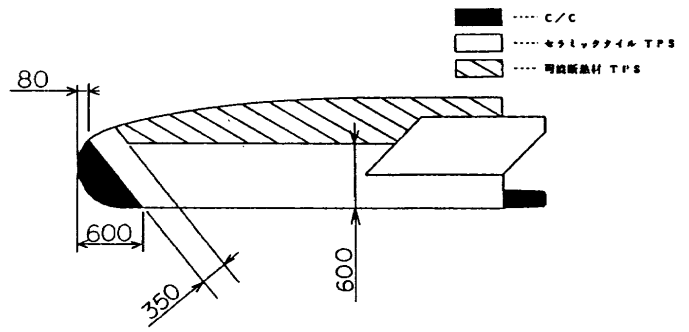


図6 耐熱材料のEOP

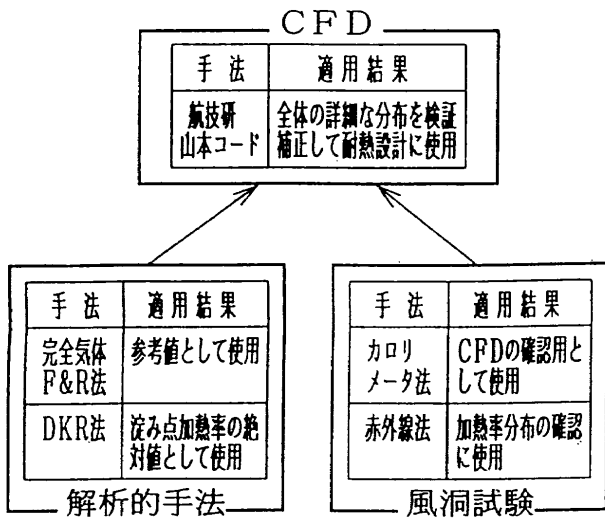


図7 設計データ設定手法概要

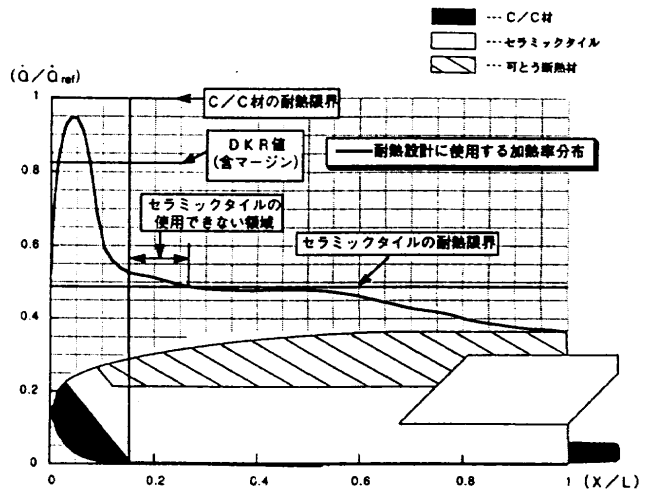


図8 空力加熱の設計への適用例

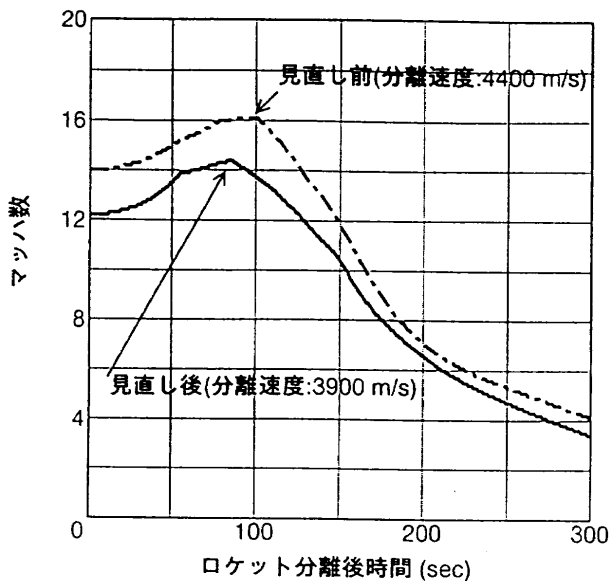


図9 HYFLEX飛行経路の変更

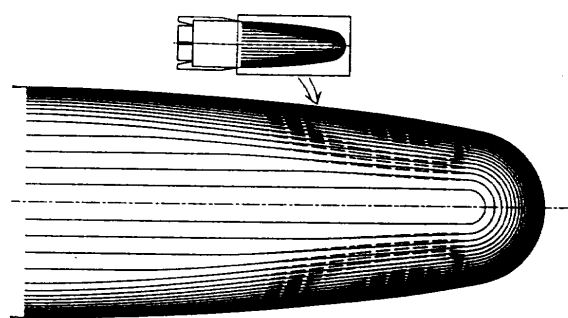


図10 形状の修正 (破線が変更前, 実線が変更後)

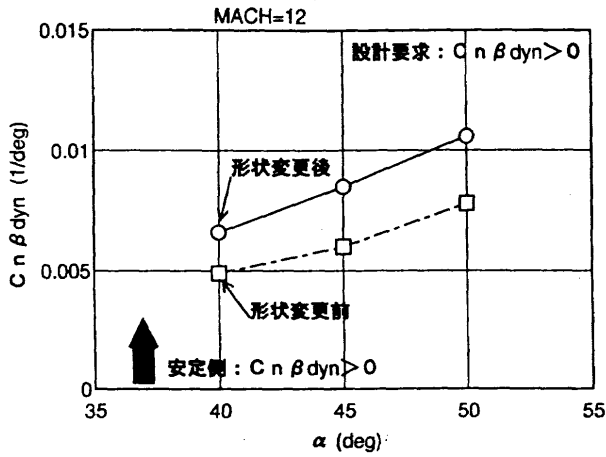


図11 形状変更効果 (極超音速)

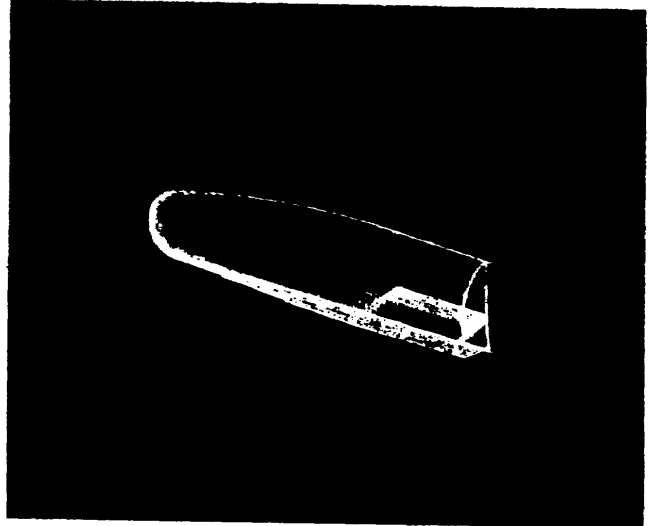


図12 超音速計算格子

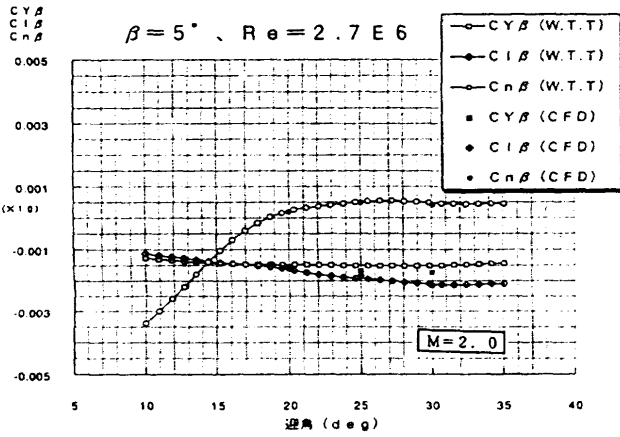


図13 横方向特性の比較

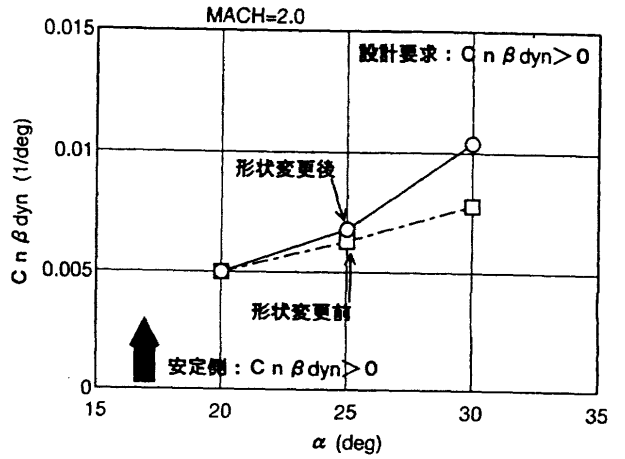


図14 形状変更効果 (超音速)

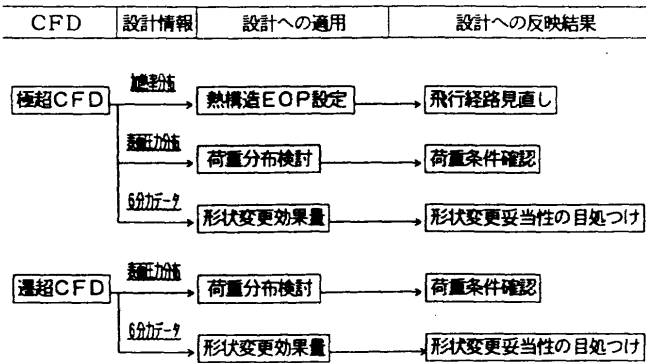


図15 CFDの適用まとめ

# 密度界面と衝撃波の干渉過程のシミュレーション

村田 喜昭 (埼玉大院)、小原 哲郎、大八木 重治 (埼玉大工)

## Numerical Simulation of Interaction Between Shock Wave and Density Interface

by

Yoshiaki MURATA, Tetsuro OBARA, and Shigeharu OHYAGI

Department of Mechanical Engineering, Saitama University  
Shimo-Ohkubo 255, Urawa, Saitama 338, Japan

### ABSTRACT

Interactions of the planar shock wave propagating along a backward-facing step region with a density interface are simulated numerically. The time-dependent solutions of the Euler equations were obtained by using an explicit predictor-corrector TVD scheme. A flow field consists of two regions, one is the backward-facing step region filled with gas-2, the other is the region filled with gas-1 above it. A planar shock propagating in gas-1 propagates along the backward-facing step and interacts with the interface separating these two gases with different densities. Two general cases of interface are considered, which are called as a slow/fast interface and a fast/slow interface. As parameters of calculations, a density ratio of two gases and a shock Mach number were selected. In the case of slow/fast interaction, a shock transmitted in a light gas propagates with higher propagation velocity and, behind the shock, a large vortex is created which mixes two gases. For the fast/slow interaction, a shock transmitted in a heavy gas forms an oblique shock wave whose angle is determined by the density ratio and the interface is more stable in comparison with slow/fast interaction.

#### 1. はじめに

密度の異なる異種気体界面における衝撃波と界面の挙動については、Richtmyer-Meshkov 不安定と呼ばれる流体力学的不安定現象の一つとして、実験的、理論的研究の対象となっている。Zabusky et al.<sup>1)</sup>は、平面衝撃波と衝撃波に対して角度 $\theta$ だけ傾いた密度界面との干渉過程を、slow/fast、fast/slow の場合についてそれぞれ数値的に明らかにした。Kuhl et al.<sup>2)</sup>は、shock tube の下壁に沿って分布した Freon-12 の層と、その上方に満たした空気中を伝ばしてきた衝撃波との干渉に対する実験と数値計算を行った。これらの研究においては、密度界面における密度勾配と衝撃波によってもたらされる圧力勾配とによる、いわゆる baroclinic effect によって生じる流れの不安定性と二流体の混合過程を明らかにすることを目的として

いる。

衝撃波と密度界面が干渉する場合の流れ場の物理的状态は、入射衝撃波の伝ばマッハ数  $M_s$ 、異種気体の密度比  $\eta$ 、及び密度界面の形状によって特徴づけられる。本研究では、界面の形状を Fig.1 のように設定し、後ろ向きステップを通過することによって回折した衝撃波と密度界面の干渉過程を数値的にシミュレートし、二流体の混合過程を明らかにすることを目的とする。計算のパラメータとして、入射衝撃波の伝ばマッハ数  $M_s$  と異種気体の密度比  $\eta$  を選んだ。

#### 2. 計算方法

##### 2.1 問題の定式化

Fig.1 に計算する流れ場の形状を示す。伝ばマッハ数  $M_s$  の衝撃波が gas-1 (密度  $\rho_1$ ) 中を左から右へ伝ば

していき、後ろ向きステップ領域に入射される。ステップ領域は gas-2(密度 $\rho_2$ )で満たされており、界面を衝撃波と垂直に設定する。界面には最初、無限に薄い隔膜が存在するものと仮定し、密度を不連続に変化させる。ここで、密度比 $\eta$ は $\eta = \rho_2/\rho_1$ によって与える。

気体は比熱一定の理想気体であると仮定し、かつ gas-1、gas-2 には比熱比の等しい( $\gamma = 1.4$ ) 仮想の気体を考える。支配方程式は二次元非定常オイラー方程式系であり、保存形で次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

ここで、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ m \\ n \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} c_1 m \\ c_2 m \\ p + m^2/\rho \\ mn/\rho \\ m(E+p)/\rho \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} c_1 n \\ c_2 n \\ mn/\rho \\ p + n^2/\rho \\ n(E+p)/\rho \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\rho$ : 総密度、 $u$ :  $x$ -方向速度成分、 $v$ :  $y$ -方向速度成分、 $p$ : 圧力、 $\rho_i$ :  $i$ 成分の密度、 $c_i$ :  $i$ 成分の質量分率、 $m = \rho u$ 、 $n = \rho v$ 。また、 $E$ は単位体積当たりの全エネルギーで、

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (3)$$

である。

実際の計算には、これらの式を衝撃波前方の gas-1 の物理量で無次元化した式を用いる。ここで、支配方程式中には特性長さが含まれていないので、シミュレーションの結果は物理的に scale free である。

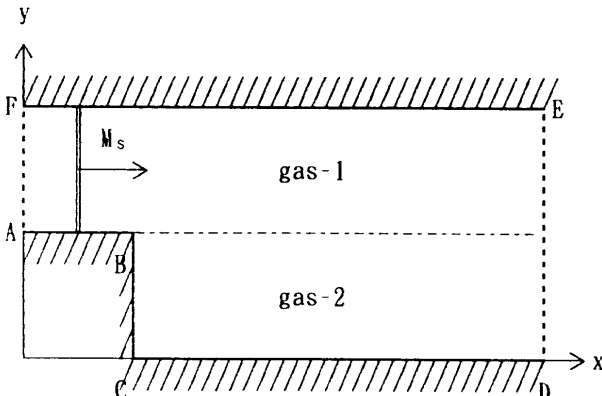


Fig.1 Schematic of the Computational Domain

## 2.2 数値解法

支配方程式の差分化には、Yeeによる陽的な Predictor Corrector TVD 法<sup>3)</sup>を用いた。以下に差分式を示す。

$$\mathbf{U}_{j,k}^{(1)} = \mathbf{U}_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{j,k}^n - \mathbf{F}_{j-1,k}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \mathbf{G}_{j,k+1}^n - \mathbf{G}_{j,k}^n \right) \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_{j,k}^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{U}_{j,k}^n + \mathbf{U}_{j,k}^{(1)} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left( \mathbf{F}_{j+1,k}^{(1)} - \mathbf{F}_{j,k}^{(1)} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left( \mathbf{G}_{j,k}^{(1)} - \mathbf{G}_{j,k-1}^{(1)} \right) \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_{j,k}^{n+1} = \mathbf{U}_{j,k}^{(2)} + \left( \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} \Phi_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} - \mathbf{R}_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} \Phi_{j-\frac{1}{2}}^{(2)} \right) + \left( \mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} \Phi_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} - \mathbf{R}_{k-\frac{1}{2}}^{(2)} \Phi_{k-\frac{1}{2}}^{(2)} \right) \quad (6)$$

ここで、 $\Phi_{j+\frac{1}{2}}$  は数値粘性項を表すベクトルであり、その  $l$  番目の要素  $\phi_{j+\frac{1}{2}}^l$  は次式のように表される。

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}^l = \frac{1}{2} [\psi(v_{j+\frac{1}{2}}^l) - (v_{j+\frac{1}{2}}^l)^2] (\alpha_{j+\frac{1}{2}}^l - \hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^l) \quad (7)$$

$$v_{j+\frac{1}{2}}^l = \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{j+\frac{1}{2}}^l \quad (8)$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^l = \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^{-1} \left( \mathbf{U}_{j+1,k} - \mathbf{U}_{j,k} \right) \quad (9)$$

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \delta \\ (z^2 + \delta^2)/2\delta & |z| < \delta \end{cases} \quad (10)$$

$$\delta = \epsilon (|u| + |v| + c)_{j+\frac{1}{2}} \quad (11)$$

(11) 式中の $\epsilon$ は経験的に決められる小さな正のパラメータで、一般的には  $0.01 \leq \epsilon \leq 0.2$  の範囲で選ばれる。本計算では、 $\epsilon = 0.1$  とした。また  $\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^l$  は制限関数であり、幾つか提案されているが、本計算では次のものを用いた。

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}^l = \min \text{mod} \left( \alpha_{j-\frac{1}{2}}^l, \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l \right) + \min \text{mod} \left( \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l, \alpha_{j+\frac{3}{2}}^l \right) - \alpha_{j+\frac{1}{2}}^l \quad (12)$$

また、TVDによる差分式の中に見られる  $j + \frac{1}{2}$  等の添字を持った物理量、つまりセル境界における物理量は Roe average によって与える。

計算格子は均一な正方格子で、格子サイズは  $\Delta x = \Delta y = 0.0025$  である。また、格子数はステップ内も含めて  $x$ -方向に 400 セル、 $y$ -方向に 200 セルである。ただし、実際の計算ではステップの内部は計算していない。

境界条件は、Fig.1 中の FA を流入境界、ED を流出境界とし、流入境界はランキン-ユゴニオの式から得られるマッハ数  $M_s$  の衝撃波背後の物理量で固定する。それ以外の境界はスリップ壁である。

2.3 計算条件

前述のように、本計算の本質的なパラメータは密度比 $\eta$ と入射衝撃波マッハ数  $M_s$  である。

入射衝撃波マッハ数については、Klein et al. の計算<sup>4)</sup> を参考にして設定した。90°コーナーにおける衝撃波の回折については、多くの研究者によって実験的、数値的に研究されてきた。この流れ場は、比熱比 $\gamma$ を一定とすると、主に衝撃波マッハ数  $M_s$  によって支配され、Klein et al.<sup>4)</sup> によれば、 $M_s$  の値によって Fig.2 のような三つの場合に分類することができる。ここで、 $\gamma = 1.4$  である。

$M_s$  が 1 より僅かに大きい (A) の場合、流れは全域で亜音速である。(B) の場合、流入してくる流れは亜音速であるが、ステップによる膨張等によって部分的に超音速の領域が存在する。この流れ場は、幾つかの二次衝撃波系の出現によって特徴づけられる。また、(C) の場合には入射衝撃波背後の流れが超音速となり、 $M_s$  を変化させても流れ場の形態はそれほど大きく変化しない。

本計算においても、 $M_s$  によって同様に流れ場が変化するものと考えられるため、上述の三つの場合について計算を行った。各々の  $M_s$  に対して slow/fast ( $\eta < 1$ ) と fast/slow ( $\eta > 1$ ) の場合をそれぞれ計算した。計算条件を表-1 にまとめる。

表-1 計算条件

$M_s$	$\eta$	
	slow/fast	fast/slow
1.2	0.25	5.0
1.4	0.25	5.0
1.6	0.1, 0.25	5.0, 10.0
2.0	0.25	5.0
4.0	0.1	5.0
6.0	0.1	5.0

3. 計算結果及び考察

まず結果を見ると、計算を安定化させるために導入されている数値粘性の影響によって、密度界面等の勾配の急な領域が数値的に弛緩し、厚みを有しているのがわかる。そのため、界面上に現れると思われる不安定性等の微細な構造については、あまり詳細には捉えていないと思われる。得られた範囲で結果をまとめると、次のようになる。

3.1 slow/fast の場合

Fig.3 は slow/fast の場合の等密度線図である。gas-2 の密度が小さいため、等密度線図上では gas-2 中へ入射した衝撃波面が表されていないが、音速の違いに比例した速さで先行している。

b.、c.、d.、e. の場合の流れ場は遷音速であり、ステップ背後の膨張によって slipstream に沿って超音速の領域が現れる。この場合の流れ場は、Fig.2-(B) の場合に相当する。入射衝撃波背後の界面は大きく湾曲し、上方から流入する gas-1 が gas-2 を巻き込むように大きな渦を形成して混合していく。形成される渦は、この範囲の  $M_s$  であれば  $M_s$  が大きいほど、また  $\eta$  が小さいほど規模が大きくなる。この渦とステップの間には圧縮波が形成され、渦によってステップの角の方へ押される気体を減速させている。Fig.4 を見ると、d. と e. の場合にはこの圧縮波の背後に超音速領域が存在するが、実際には、壁面のごく近傍では粘性の影響が大きいため、超音速領域の形状や大きさはこれとは異なったものになると思われる。e. の場合には、渦の周りの超音速流中に slipstream とある角度をなすようにして二次衝撃波が形成されている。また、d. と e. の場合に見られる湾曲した界面の直上に渦に沿って形成される衝撃波は、入射衝撃波が下壁で反射した際の反射波によるものである。

a. の場合流れは全域で亜音速であり、Fig.2-(A) の場合の流れ場に相当する。この場合には、ステップにより近い位置にステップに付着するようにして渦が形

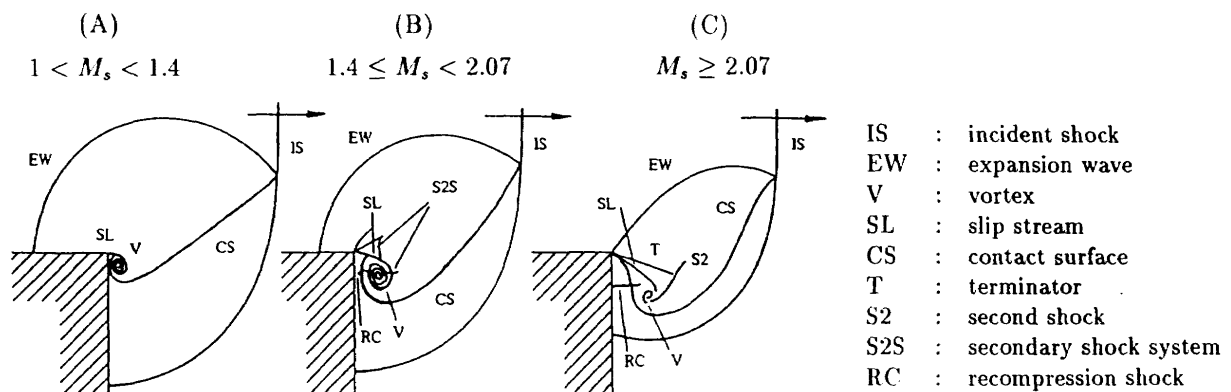
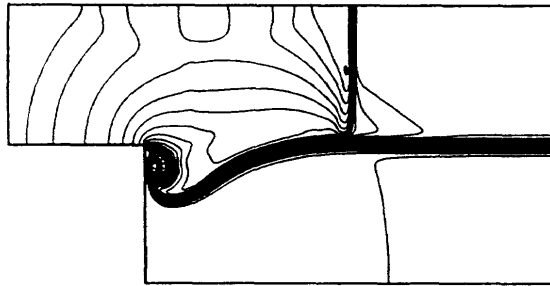


Fig.2 Classification of Shock Wave Diffraction by Klein et al.<sup>4)</sup>

成され、渦とステップの間に圧縮波は形成されていない。また、渦の成長は前述の遷音速の場合に比べて緩やかであり、時間が経過してもほぼ同じ位置に停滞している。

f.、g. の場合には入射衝撃波背後の流れが超音速であるため、ステップの角から発生する膨張波がステップの上流に伝わっていない。この場合の流れ場は

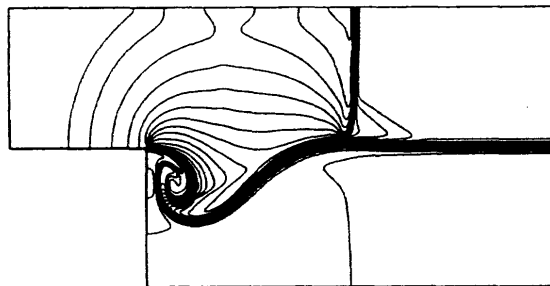
Fig.2-(C) の場合に相当する。亜音速の場合と遷音速の場合に形成されたような大規模な渦構造は形成されず、混合は主に界面が下壁に衝突した後に起こるものと思われる。また f. と g. を比較すると、二次衝撃波の形成される位置や湾曲した界面の形状等がほぼ一致しており、この場合の流れ場の形態は、 $M_s$  が変わってもほとんど変化しないと考えられる。



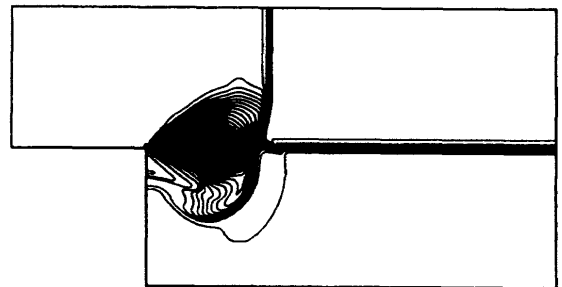
a.  $M_s=1.2, \eta=0.25, \bar{t}=0.342$



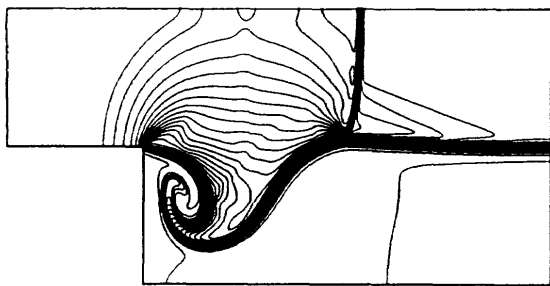
e.  $M_s=2.0, \eta=0.25, \bar{t}=0.240$



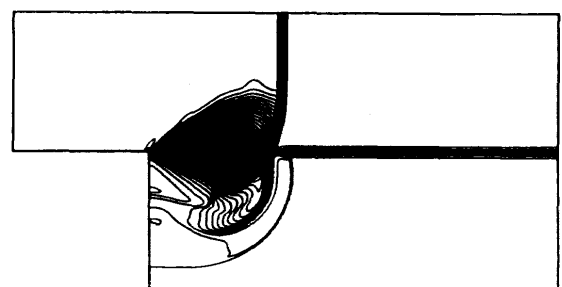
b.  $M_s=1.4, \eta=0.25, \bar{t}=0.294$



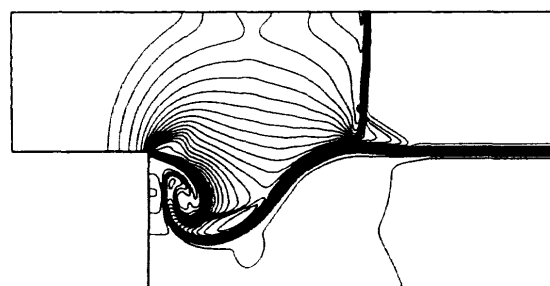
f.  $M_s=4.0, \eta=0.1, \bar{t}=0.0630$



c.  $M_s=1.6, \eta=0.1, \bar{t}=0.266$



g.  $M_s=6.0, \eta=0.1, \bar{t}=0.0459$



d.  $M_s=1.6, \eta=0.25, \bar{t}=0.269$

Fig.3 Density Contours for slow/fast Interactions



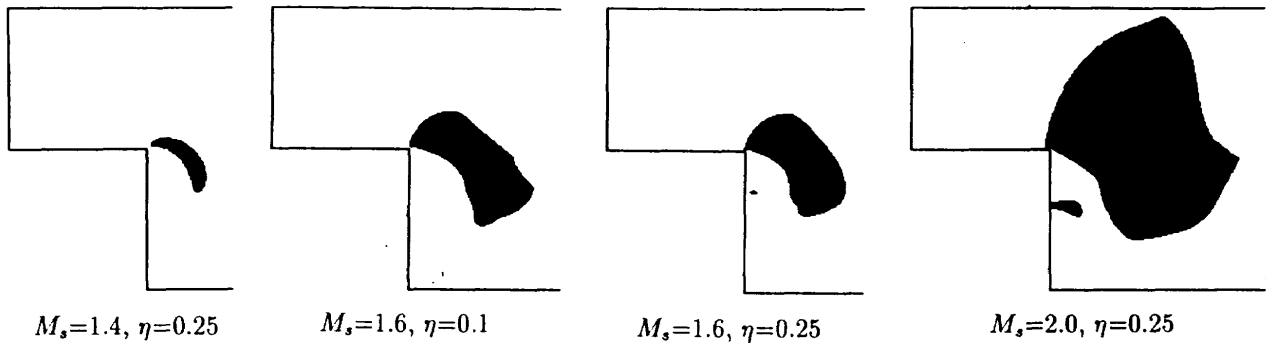


Fig.4 Supersonic Regions for slow/fast Interactions

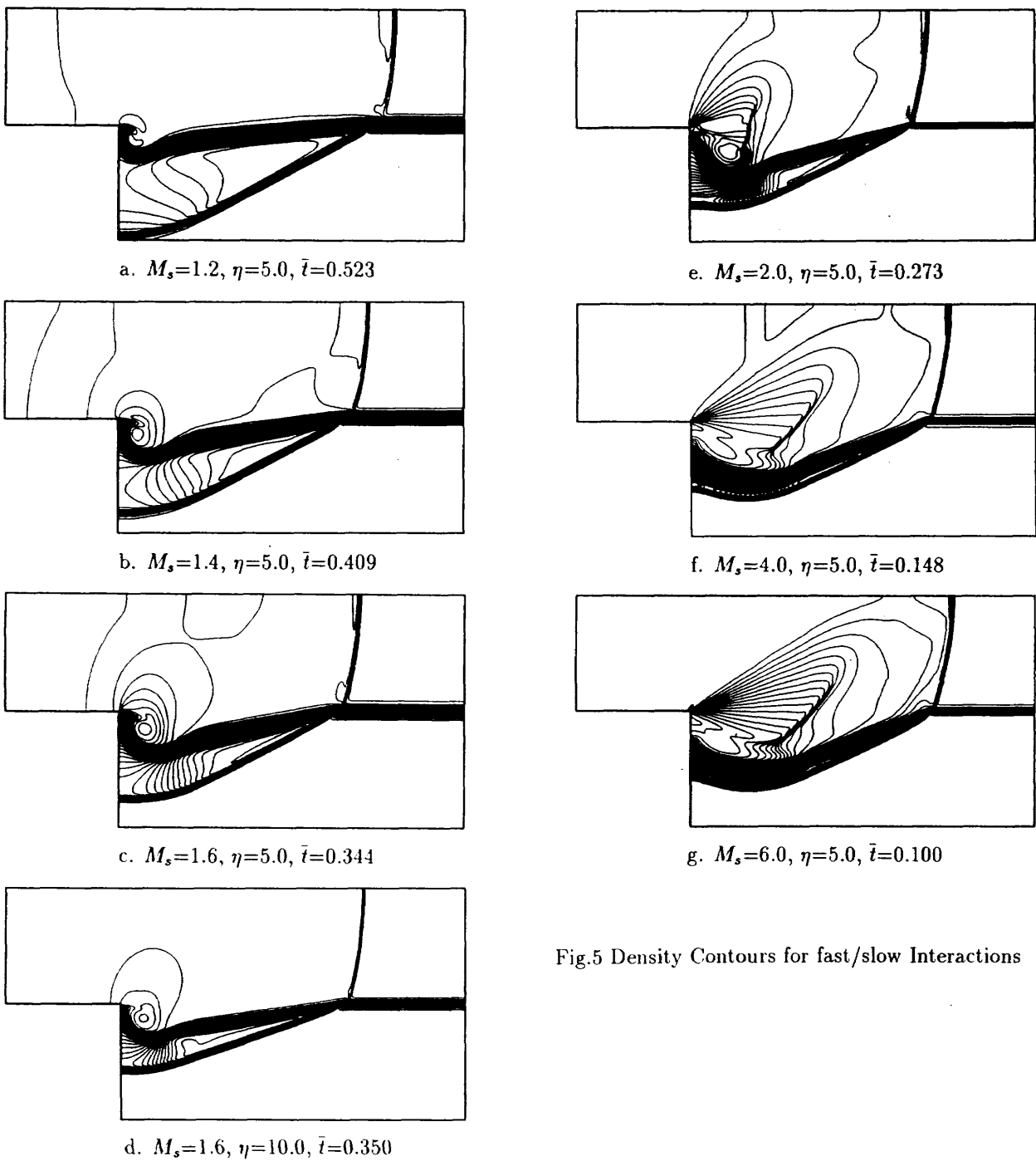


Fig.5 Density Contours for fast/slow Interactions

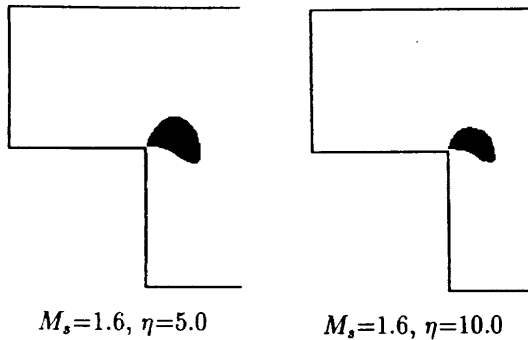


Fig.6 Supersonic Regions for fast/slow Interactions

### 3.2 fast/slow の場合

Fig.5は fast/slow の場合の等密度線図である。gas-2 の音速が gas-1 の音速よりも小さいため、gas-2 中に斜め衝撃波が形成される。

a. 及び b. の場合、流れは全域で亜音速であり、Fig.2-(A) の場合に相当する。ステップの角部に付着するようにして渦が形成され、この渦によって界面の一部が湾曲している。 $M_s=1.4$  の場合に注目すると、先の slow/fast の場合には流れ場は遷音速であり、ステップ背後に超音速領域が一部存在したが、fast/slow の場合には流れは全域で亜音速となっている。これは、slow/fast の場合に比べて fast/slow の場合は界面の湾曲が小さく、ステップ背後で気体が十分に膨張できないためであると考えられる。

c.、d.、e. の場合の流れ場は遷音速であり、Fig.6 に示すように、ステップの背後に形成される渦の上方で流れが超音速となっている。しかし、 $M_s=1.6$  の場合の流れ場と、全域亜音速である a. 及び b. の場合の流れ場との間には何ら明確な差異はなく、 $M_s=1.6$  の場合の流れ場は、むしろ亜音速の場合の流れ場に近い形態であるように思われる。一方  $M_s=2.0$  の場合には、渦に接するようにして二次衝撃波が形成されており、Fig.2-(B) の場合に相当する流れ場となっている。

f.、g. の場合は入射衝撃波背後の流れが超音速であり、Fig.2-(C) の場合の流れ場に相当する。先の slow/fast の場合と同様に、大規模な渦構造は形成されておらず、また f. と g. を比較すると、二次衝撃波

の形成される位置等、流れ場の形態がほぼ一致しているのがわかる。

fast/slow の場合、slow/fast の場合に比べてステップ角から発生する渦の成長が抑えられており、界面は slow/fast の場合ほど大きく湾曲できない。そのため、混合は主に衝撃波が下壁に反射した後、反射波によって引き起こされると考えられる。

### 4. まとめ

ステップを通過する衝撃波と密度界面の干渉過程を数値的にシミュレーションした。結果をまとめると次のようになる。

1. slow/fast の場合も fast/slow の場合も、流れ場は  $M_s$  の値によって三つの場合に分類することができる。
2. fast/slow の場合の密度界面の湾曲は slow/fast の場合に比べて小さい。
3. slow/fast の場合も fast/slow の場合も、流れ場が遷音速になる場合が最も混合に適している。

### 参考文献

- 1) Zabusky N.J., Samtaney R., Yang X., Chern I-L., "Vorticity in shock-accelerated density-stratified interfaces: Deposition and intermediate time evolution of coherent structures", Proc. 18th ISSW, 1992, Springer-Verlag, pp.19-28.
- 2) Kuhl A.L., Reichenbach H., Ferguson R.E., "Shock interactions with a dense-gas wall layer", Proc. 18th ISSW, 1992, Springer-Verlag, pp.159-166.
- 3) Yee H.C., "Upwind and symmetric shock-capturing schemes", NASA TM-89464, 1987.
- 4) Kleine H., Ritzerfeld E., Grönig H., "Shock wave diffraction at a 90° corner-Results of a combined numerical/experimental analysis", 平成5年度衝撃波シンポジウム講演論文集, 1994, pp.425-428.

松島 紀佐\* 高梨 進\*\*

## COMPUTATIONS OF LOW SPEED FLOW ABOUT A SPACE-PLANE

by

Kisa MATSUSHIMA

FUJITSU LTD.

Susumu TAKANASHI

National Aerospace Laboratory

## ABSTRACT

Parallel computation of flow fields around a Space-plane has been conducted on the NWT at the National Aerospace Laboratory, aiming to apply the compressible Navier-Stokes code we have simulated super/transonic flows with to solve low subsonic flow fields. Computational results show its sufficient reliability in terms of predicting aerodynamic forces. Thus, we have come to have a prospect to make the present code a robust flow solver covering from a low subsonic to a supersonic regime with modifications. To realize it, further more effort is needed to get convergence efficiency of computation and to analyze the mechanism of microscopic flow phenomena.

## 1. はじめに

スペースプレーンは有人宇宙往還機の一候補であり、航空宇宙技術研究所で研究が実施され、低速から極超音速の幅広い速度域に渡って風洞試験が既に行われている。今回、非圧縮流れに近いと思われる低速流れに対し、従来より筆者らが超音速/遷音速流れのシミュレーションに使用してきた圧縮性Navier-Stokesソルバーを適用し[1,2,3]、スペースプレーンの空力的な物理現象を把握するための数値計算を試みた。

## 2. 数値計算手法

図1に機体の形状と格子分布を示す。格子点は流れ方向( $\xi$ )機体周方向( $\eta$ )及び機体表面から遠方境界へ向かう方向( $\zeta$ )それぞれに $136 \times 202 \times 96$ 分布させている。格子分布の図は全空間の1/4部分を示している。遠方境界は、物体から基準長の8倍離れたところに位置している。基準長は主翼のハーフスパンとした。数値計算法はFlux difference Splitting Type TVD差分を取り入れたLU-ADI法[4]で、修正されたBaldwin-Lomaxの乱流モデル[5]を用いている。各々の計算条件に対して定常解を仮定して局所時間ステップ法で時間積分している。計算条件は実験に合わせて、マッハ数=0.14(風速40-50mに対応) Re数=720,000で迎角=0~20度のケースに対し計算を試みた。

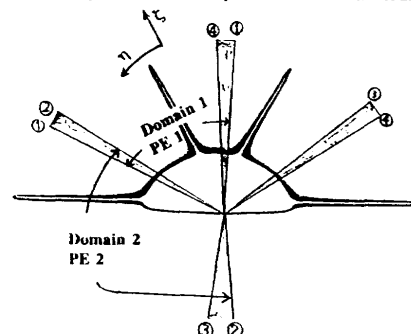
\* 富士通株式会社

\*\* 航空宇宙技術研究所

## 3. プログラムの並列化について

亜音速域の計算であることと、偏角を取る等、機体の姿勢を変化させるため、流れ場の対称性を仮定しないので、計算領域は広く、メモリーやCPU時間は大規模にならざるを得ない。そこで、シミュレーションは航技研のバカララコンピュータシステムNWTを用いることにより、並列計算で実行することとした。並列化の方針は簡易型領域分割法で、この方法は単一領域格子を対象に作成されたプログラムをコストをかけずに並列計算用に修正する簡便法であり、NWT-FORTRANの重複ローカル変数の考え方を利用している。使用するプロセッサの台数は、シミュレーションに必要な主記憶容量の得られる最小の数を使用することとした。各プロセッサ間のコミュニケーションの頻度を抑えるためである。現在の計算では4台のプロセッサを用いている。領域の分割は下図の様にを行った。

4 domains --  $52 \times 53 \times 53 \times 52$   
Overlapping region (Shadow) --- 3 points in the circumference direction



機体の周方向 ( $\eta$ ) を分割、各領域(Domain)を各プロセッサが担当して並列に計算を進めるわけである。収束計算の1反復ごとに、更新された値の情報交換を領域がoverlapする部分で行う。現在の流れ場を解く場合においては、1回の反復計算のCPU時間に対し情報交換の時間は1%以下である。全体としては、並列化による台数効果は90%以上で、4プロセッサを使用することにより1プロセッサで計算する場合の3.7倍のスピードを得た。

#### 4. 計算結果の検討

計算結果の空力係数(丸印)と実験値(点線)との比較を図2に示す。揚力係数、抗力係数とも計算により満足のいく精度が得られた。また、揚力係数- $M_\infty$ のカーブは本研究の目的の1つである、単一ソルバーによる広い速度域に渡っての空力係数の同定の一例である。

流れに垂直な断面内での機体表面 $C_p$ 分布と流れ場の密度分布を図3にプロットした。第1の断面はストレークの始めのあたりであり、第2は尾翼と主翼のついた機体後方の断面である。流れ場の条件は  $M_\infty=0.14$  迎角 $=20^\circ$  である。比較として遷音速( $M_\infty=0.9$ , 迎角 $=20^\circ$ )の結果を第3と第4図に示す。

$X/L=0.6$ の断面においては、下面の $C_p$ の値のレベルが低速と遷音速で大きく違っている。低速では独立した渦が3つ見られるが、遷音速のケースは2つで、その他に二次渦や渦同士の相互作用を示す密度分布が観察される。 $X/L=0.91$ の断面においては、低速・遷音速で $C_p$ 分布の様相はまったく違う。密度分布を観察すると、2つのケースの剥離の強度が違っていることが示唆されている。遷音速では、翼端剥離渦が翼の中央に存在し、その両側(胴体側と翼端側)に二次剥離渦が誘起されているのが解る。更に翼端側の二次剥離渦の外側に三次剥離渦の存在が認められる。低速の場合は、翼の中央の渦は確認できるが、2次渦の生成は明確に断言できない。

今後、剥離渦や剥離渦同士の相互干渉の物理を精度良く捕えることも設計上必要であるので、現象の非定常性、乱流モデルの効果、格子の細かさの効果などの考察をして行かなければならないと感じている。

#### 5. 偏角を持つ場合の計算結果

参考として、偏角をとって遷音速で飛行する場合の数値計算による流れ場の様子を図6に示す。飛行条件は、 $M_\infty=0.9$ 、迎角 $=10^\circ$ 、偏角 $=10^\circ$  である。図4は表面流線である。横風に対し風上側翼面に再付着、剥離、再付着の各線が見られるが、胴体上の剥離線は、

はっきりしない。風下側の翼後縁付近に、主流と垂直方向に走る剥離の様なものが見られている。興味深い結果だと思われるが、実際に存在する現象なのか、ウエークまたは乱流モデルの取扱で変わるのか、今後の課題である。横力の実験値[7]との比較を右上図にプロットした。計算は10%程度低め(横風に対する復元作用としては大きめ)に見積もっている。これは、計算モデルにおいて胴体が後流に継続して存在することが原因であろうと思われる。また、パーティクルを描くことによって、空間の流れの様子を可視化したものを示す。風上側と風下側のパーティクルの干渉の様子や、渦現象の非対称性がわかる。

#### 6. まとめ

低速・遷音速流れの大規模シミュレーションを、ソルバーを並列化することにより航技研のNWT上で実行し、空力係数の同定や流れ現象の可視化を行った。風洞実験の結果とも比較した。計算において、マクロな量やウエークの影響の少ないところについては信頼性のある結果が得られている。しかし、流れの情報の伝わる特性スピードが遅いことで収束に時間のかかること、ミクロに流れ場を理解するためには十分に解を収束させる必要があること、迎角をとった場合、解が非定常性をもちやすいことから、時間積分に対する考察や改良が今後の計算を進める上での課題として認識された。また、モデル形状の近似度や空間の渦現象の解像度を上げるためより細かい格子での計算も必要であると考えている。

#### 参考文献

- [1] Matsushima, K., Takanashi, S. and Fujii, K., AIAA Paper 89-3402 CP., 1989.
- [2] Takanashi, S., Fluid Dynamics of High Angle of Attack, Springer-Verlag, 1992.
- [3] Matsushima, K., Takanashi, S., AIAA Paper 94-1864 CP., 1994.
- [4] Fujii, K. and Obayashi, S., Journal of Aircraft, Vol. 26, No. 12, pp. 1123-1129, 1989
- [5] Degani, D and Schiff, L. B., AIAA Paper 83-0034, 1983.
- [6] Miyamoto, Y. et. al., SAE-911981, 1991.
- [7] 佐藤他, 「宇宙往還機の遷・超音速風洞試験」, 航空宇宙学会第19期年会, 1988.

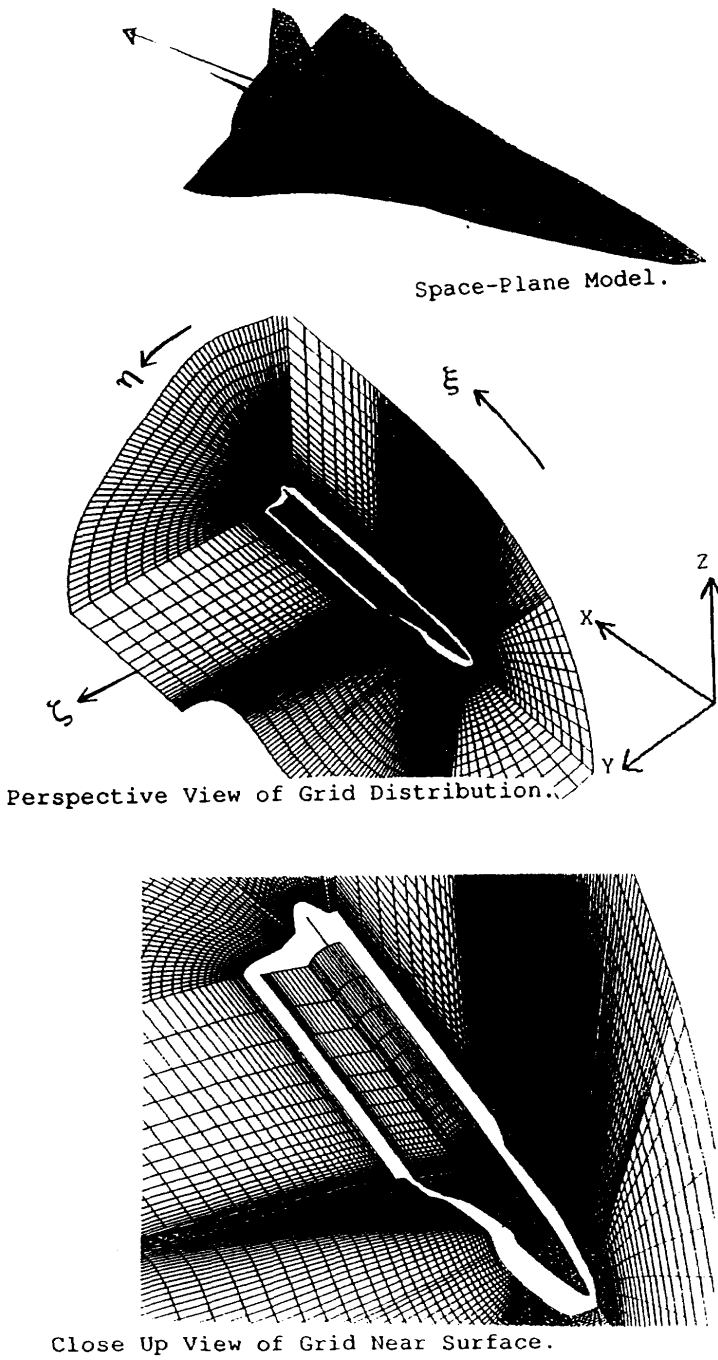


図1 スペースプレーンの機体形状と格子分布

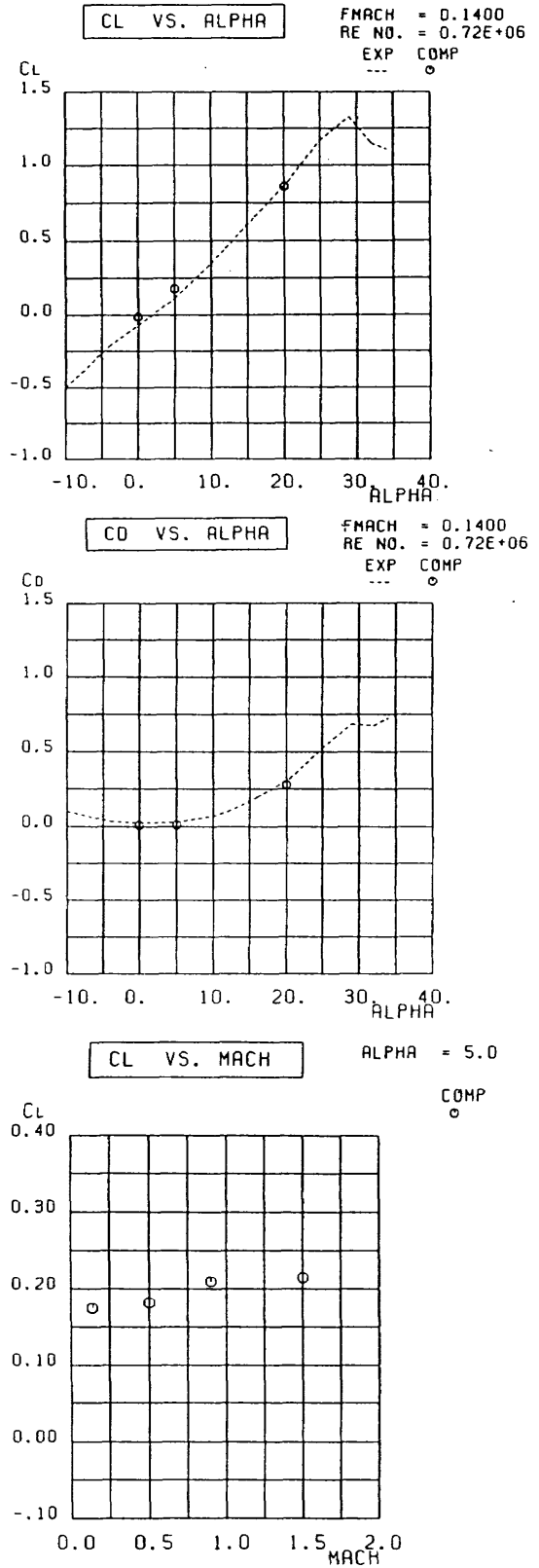


図2 空力係数  
—実験と計算(○)の比較—

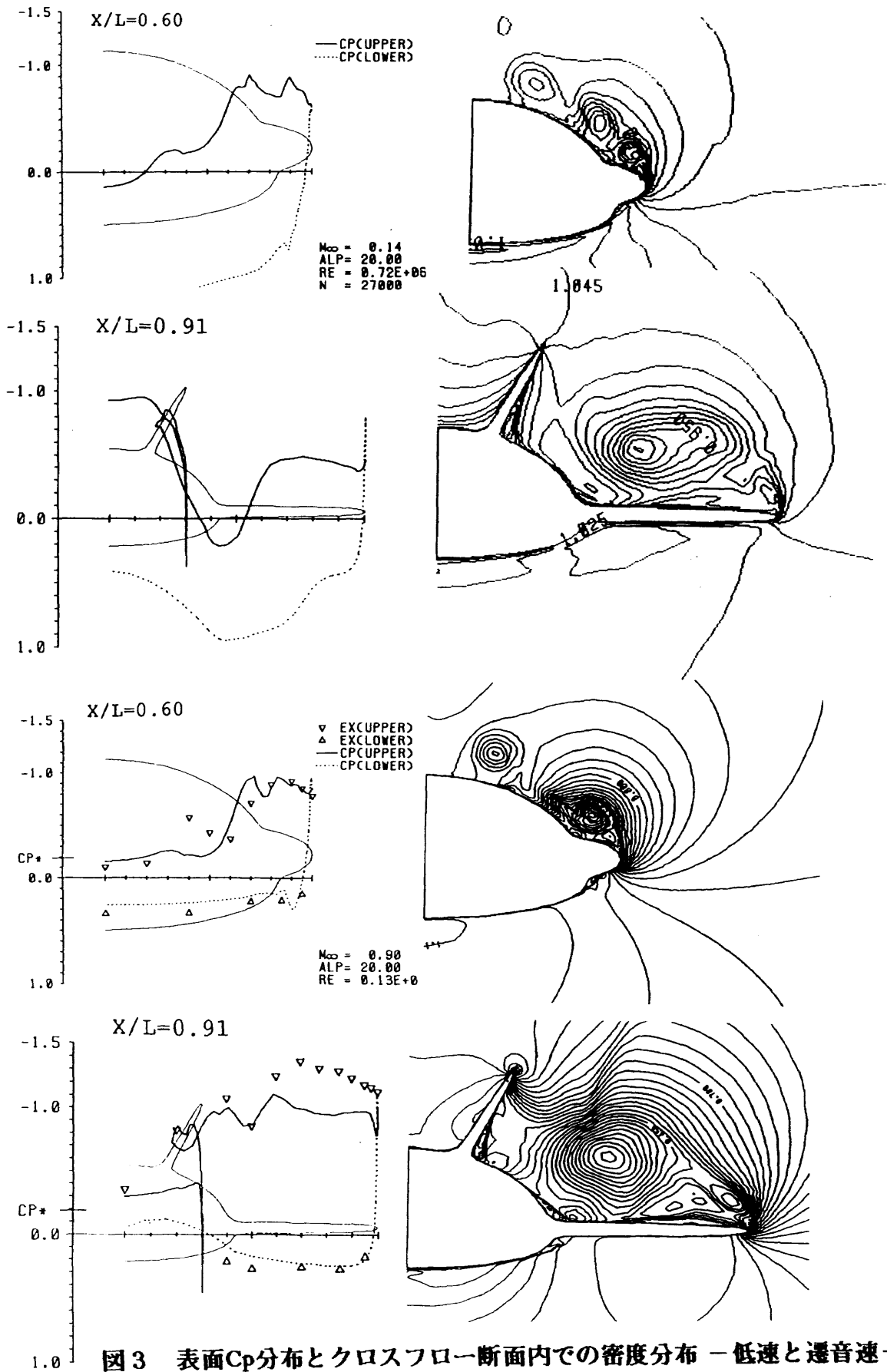


図3 表面Cp分布とクロスフロー断面内の密度分布 - 低速と遷音速 -  
 $M_{\infty}=0.14, \alpha=20^{\circ}$  (上から1, 2番目)  
 $M_{\infty}=0.90, \alpha=20^{\circ}$  (上から3, 4番目)

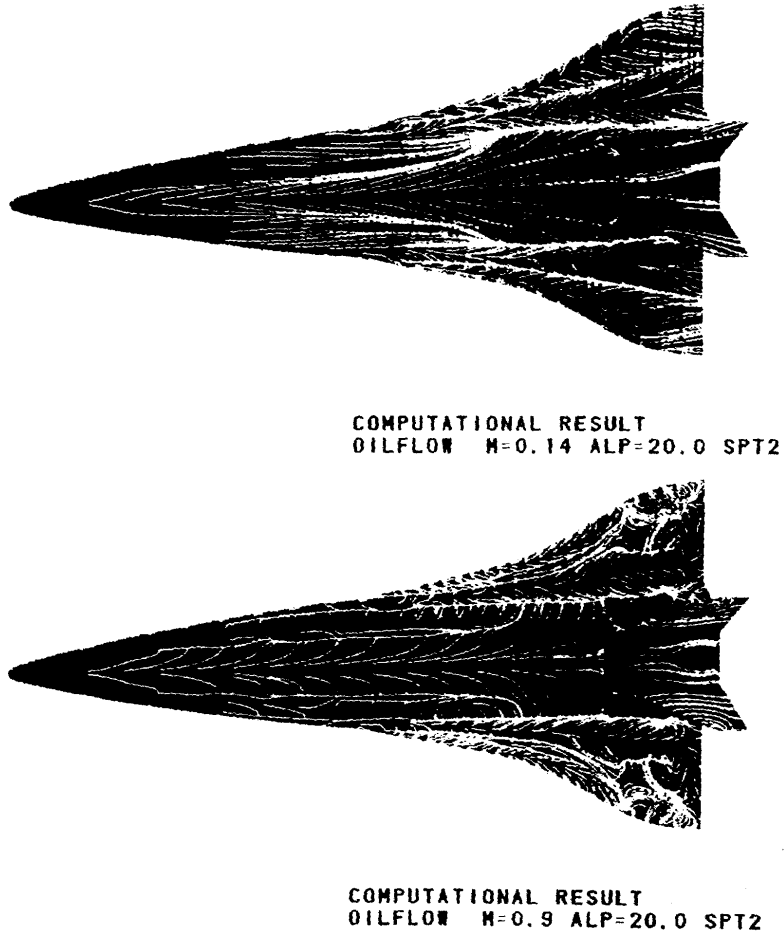


図4 表面流線 - 低速と遷音速の違い -  
 $M_\infty = 0.14, \alpha = 20^\circ$  (上)  
 $M_\infty = 0.90, \alpha = 20^\circ$  (下)

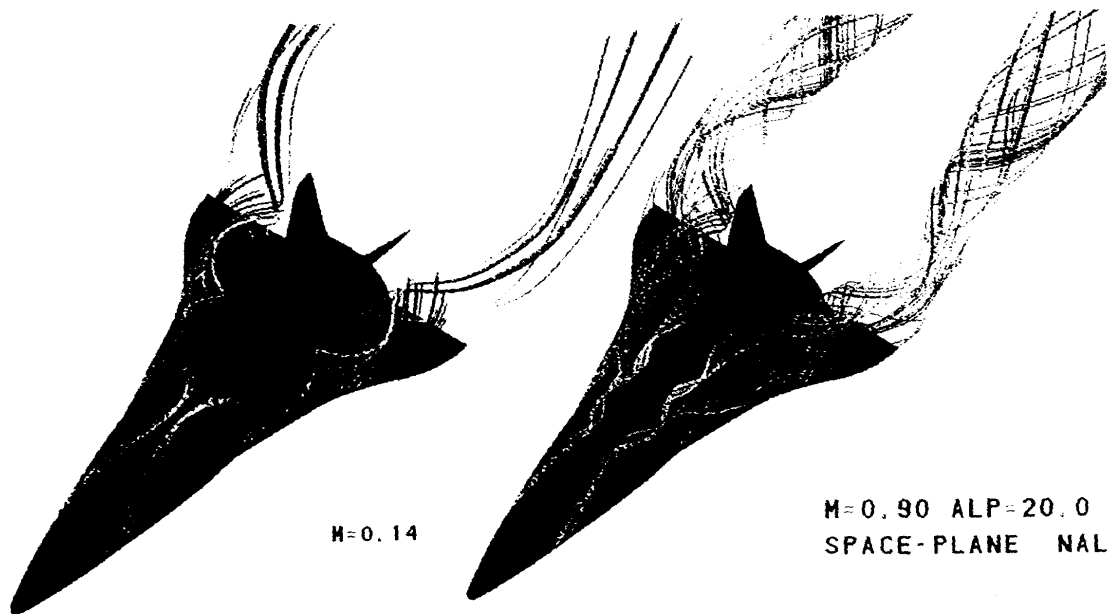
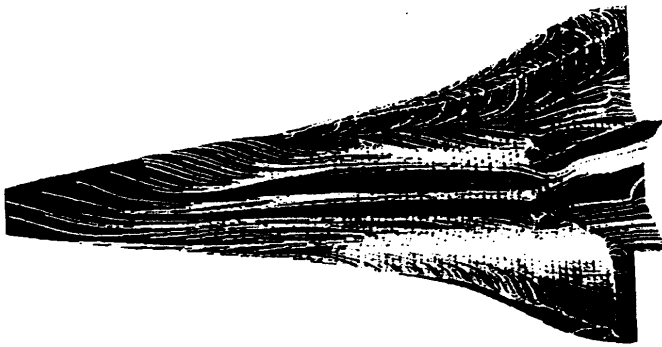
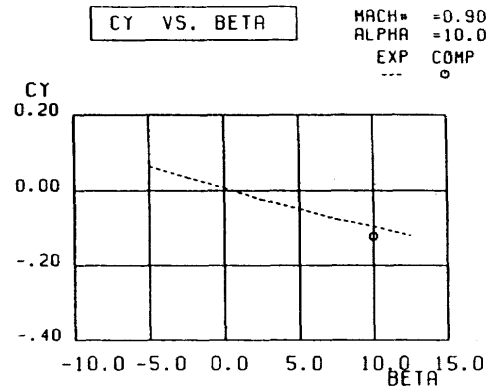


図5 パーティクルパス - 低速と遷音速の違い -  
 $M_\infty = 0.14, \alpha = 20^\circ$  (右)  
 $M_\infty = 0.90, \alpha = 20^\circ$  (左)

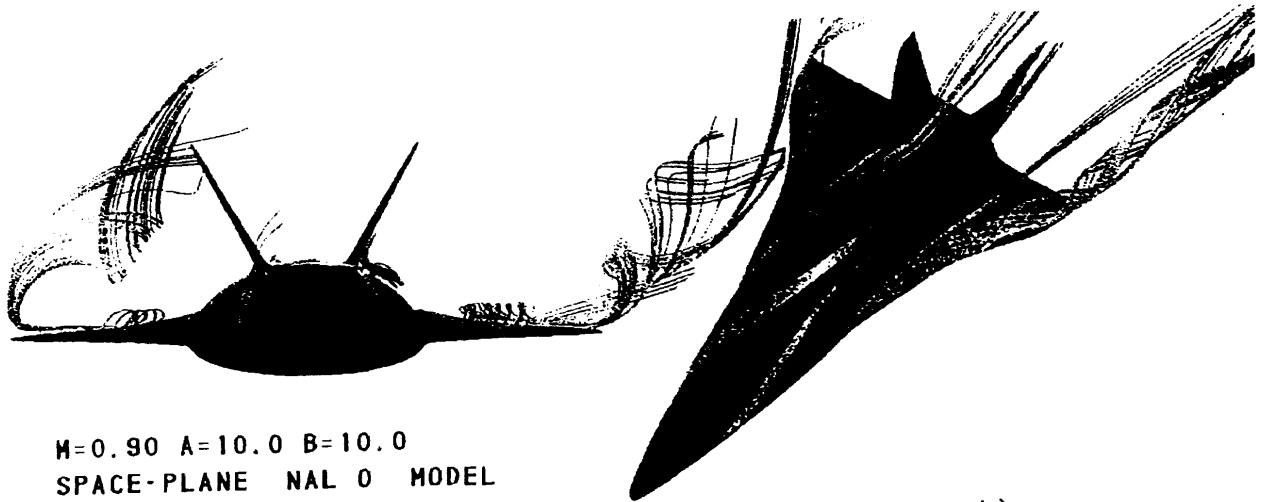


COMPUTATIONAL RESULT  
OILFLOW M=0.9 A=10.0 B=10.0

偏角をとった場合の表面流線



横力 vs. 偏角



M=0.90 A=10.0 B=10.0  
SPACE-PLANE NAL 0 MODEL

偏角のある場合の流の様子 (Particle Path)

図6 偏角のある場合の流の様子  
 $M_\infty = 0.90, \alpha = 10^\circ, \beta = 10^\circ$



## 回転する曲管内の流れと熱伝達

石垣 博\*

### Flow and Heat Transfer in Rotating Curved Pipes

Hiroshi ISHIGAKI

When a coiled pipe rotates about the coil axis, the effect of rotation interacts with centrifugal and viscous effects to complicate the flow characteristics beyond those seen in stationary curved pipes. Following a previous paper on the flow characteristics, fundamental characteristics of convective heat transfer are studied for fully developed laminar flows through similarity arguments and computational studies. The variation of temperature contours with body force ratio and Prandtl number are shown for two Dean numbers. Empirical formulae for average heat transfer rate are given for wide range of Prandtl number.

#### 1. 緒言

回転体内部に流路を設け、流体を流して冷却する回転機械の冷却問題では次の3つのモードが基本的に重要である。(I) 直流路が回転軸と平行な場合(平行回転)、(II) 直流路が回転軸に直交している場合(直交回転)、(III) 曲流路が曲率中心のまわりに回転している場合(回転曲管)。著者らはこれらすべてのモードについて、相似性の考察と数値解析により流れと熱伝達の特性をしらべている。本報告はモード(III)の熱伝達についてのものであり、流れ特性については既に報告している<sup>(1)</sup>。

曲管がその曲率中心軸のまわりに一定角速度で回転するとき、管内を流れる流体には回転によるコリオリ力と管の曲率による遠心力の二つの体積力が同時に作用し、流動伝熱特性は直管が回転している場合よりもさらに複雑になる。このような回転曲管内の流れは、ターボ機械の回転子冷却などに関連して実用的に重要である。

回転曲管内流れは流れ系が回転しているために実験測定が難しく、管摩擦係数以外の測定は行われていない。この流れについての既存の研究については文献(1)で詳しく述べたので、ここでは省略する。冷却設計で重要な熱伝達に関しては、ごく初期のMiyazaki<sup>(2),(3)</sup>による摂動解析がある。これは曲管流の境界層近似解に回転の影響が微弱であるとして摂動をくわえ、級数解を求めたものであるが、これらの解析解はその性質上コリオリ力がきわめて弱い場合にしか適用できず、実用的に使用できるものではない。

ところで回転曲管内流れの二つの極限を考えると、回転効果のない静止曲管と曲率効果のない直交回転直管の二種の管内流に帰着する。著者はこの二つの流れの定量的相似性(アナロジー)に着目し、曲管流の曲率

パラメータ $\lambda$ と直交回転管内流のロスビー数 $Ro$ がともに大きいときに、これらの流れあるいは熱伝達特性のあいだにアナロジーが成立することを層流<sup>(4),(5),(6)</sup>と乱流<sup>(7)</sup>の完全発達流について示した。

また回転曲管内流れについての文献(1)では、上記アナロジーで用いた著者の相似理論を適用して支配無次元数を決定し、流れ特性を解析した。その結果として、(i)流れ特性は一般に $K_{LC}$ ,  $B_{CR}$ ,  $\lambda$ ,  $Ro$ の四つのパラメータにより支配されること、(ii) $\lambda$ と $Ro$ がともに大きい場合には流れ特性はディーン数 $K_{LC}$ と体積力比 $B_{CR}$ の二つのパラメータによって決定されること、(iii)アナロジーを用いて導いた二つの極限流に共通な管摩擦公式に変換 $K_L$ (後述の式(12))をほどこせば、回転曲管の場合にも使用できること、(iv)変換 $K_L$ は回転曲管流の流れ特性を表示するときに便宜的な支配無次元数として使用できること、などを示した。

本報告では流れ特性につづいて、温度場におよぼすプラントル数の影響など、回転曲管内層流の重要な熱伝達特性を明確にする。また文献(1)で与えた $K_L$ を用いれば、二つの極限流の熱伝達アナロジー<sup>(6)</sup>において提案した平均ヌッセルト数公式がそのまま回転曲管流に対しても使用できることを示す。ここであつかう管の熱的境界条件は軸方向に熱流束一定、周方向に壁温一定である。

#### 2. 主な記号

$B_{CR}$	: 体積力比	$= \lambda/Ro$
$K_{LC}$	: 静止曲管の層流特性数, ディーン数	$= Re/\sqrt{\lambda}$
$K_{LR}$	: 直交回転直管の層流特性数	$= Re/\sqrt{ Ro }$
$K_L$	: 回転曲管の(近似)層流特性数, 式(12)	
$K_P$	: 熱伝達パラメータ	$= K_L\sqrt{Pr}$
$Nu_{UH}$	: 周平均ヌッセルト数	$= q_w d / [(T_w - T_b)k]$
$Pr$	: プラントル数	$= \nu/\alpha$
$q_w$	: 壁熱流束	
$Re$	: レイノルズ数	$= w_m d / \nu$
$Ro$	: ロスビー数	$= w_m / \Omega d$

\*正員, 科学技術庁航空宇宙技術研究所角田宇宙推進技術  
研究センター(〒981-15 角田市君萱字小金沢1)。

- $T_b$  : 混合平均温度
- $T_w$  : 壁面温度
- $w_m$  : 管内平均流速
- $\lambda$  : 曲管の曲率パラメータ =  $R/d$
- $\Omega$  : 曲管の回転角速度

3. 基礎方程式と数値解法

図1に示すように、曲率中心まわりに回転する曲管に固定して円環座標  $(r, \theta, \phi)$  をとる。曲管は  $0'-y'$  軸のまわりに一定の角速度  $\Omega$  で回転するものとし、回転方向が流れ方向と同じ場合 ( $\Omega > 0$ ) を正回転、逆の場合 ( $\Omega < 0$ ) を逆回転と呼ぶ。 $(r, \theta, \phi)$  方向の速度成分を  $(u, v, w)$  とし、流れは定常、非圧縮性の層流で速度場、温度場ともに完全発達しているものとする。 $z = R\phi$  とおき、曲円管の形状については  $\lambda$  が十分に大きいと仮定して、流れ特性が  $\lambda$  の影響をうけない場合を取扱う。

このとき流れと熱伝達を記述する式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{w^2 \cos \theta}{R} + 2\Omega w \cos \theta + \nu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} - \frac{w^2 \sin \theta}{R} - 2\Omega w \sin \theta + \nu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} - 2\Omega(u \cos \theta - v \sin \theta) + \nu \nabla^2 w \dots\dots\dots (4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \dots\dots\dots (5)$$

ここに  $T$  は温度、 $\nu$  は動粘性係数、 $\alpha$  は温度伝導率であり、ラプラシアンは次式で与えられる。

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

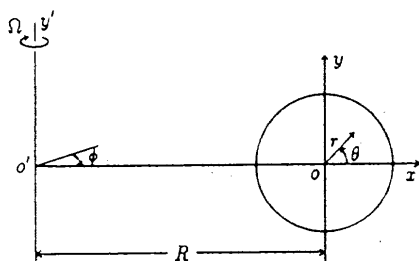


図1 回転曲管の座標系

また  $p^*$  は実際の圧力  $p$  から遠心力場の作用による平衡圧力を引いた換算圧力である。

$$p^* = p - \frac{1}{2} \rho \Omega^2 (R + r \cos \theta)^2 \dots\dots\dots (6)$$

完全発達領域では  $u, v, w$  は  $z$  に無関係になるので、 $\partial p^* / \partial z$  は一定になる。また軸方向熱流束一定の熱的完全発達領域では

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_b}{dz} = \frac{4q_w}{\rho c_p w_m d} \dots\dots\dots (7)$$

の関係が成立する。式(2)-(4)で  $R$  を含む項が遠心力項、 $\Omega$  を含む項がコリオリ力の項である。本報告では  $Ro$  が大きいとして、 $Ro > 8$  の条件を与えて計算を行なった。これは前述の二つの極限流のアナロジーが成立する条件であり、このとき式(4)において右辺第2項のコリオリ力項が無視できるほど小さくなる。

数値計算プログラムは Patankar<sup>(8)</sup> の著書を参考にして作成したもので、二次流れをとともなう管内流についての著者らの一連の研究に用いているものである。式(1)-(5)を有限体積法で離散化し、スタガード格子、ベキ乗スキーム、SIMPLE法を用いている。

計算は  $x$  軸に関する流れの対称性を仮定して、半断面について行なった。格子点は  $r$  方向42点(壁近傍で密な不等間隔)、 $\theta$  方向37点(ほぼ等間隔)をとり、反復計算では  $T$  も含めた全従属変数の無次元残差の最大値が  $10^{-6}$  以下になったときを収束条件とした。

4. 相似性の考察

$\lambda, Ro > 8$  のときには流れ場は  $K_{LC}$  と  $B_{CR}$  の二つのパラメータにより支配され、温度場の支配パラメータにはさらにプラントル数  $Pr$  が加わる。この流れでは遠心力とコリオリ力により発生した二次流れが熱伝達を増加させるが、熱伝達増加の程度は  $Pr$  によって大きく異なる。温度場の  $Pr$  依存性を著者の相似理論により考察すると、次のような推論が成立する。

温度場は  $K_{LC}$ 、 $Pr$  および速度場を通して  $B_{CR}$  の三つのパラメータにより支配される。無次元式をしらべると、 $Pr$  が非常に小さいときには二次流れによる熱輸送が無視できて、管曲率も回転もない静止直円管の式に類似の極限式が求まる。したがってこのときには温度場は  $Pr$  にも  $K_L$  にも依存しない熱伝導形の同心円分布に近いものになるであろう。

他方  $Pr$  がきわめて大きいときには断面内の二次流れによる熱輸送が支配的になり、軸方向の熱輸送は無視できる。この式は二次流れをあらわす式と相似になるから、壁のごく近傍の温度境界層を除けば、等温線は二次流れの流線に類似するであろう。また  $Pr$  が1に近い場合にはエネルギー式は軸速度  $w$  の式と類似になるので、 $K_{LC}$  の値にかかわらず温度場は軸速度場と相似になると推定される。

5. 温度場の構造

全体的な様相を把握するために、曲管条件  $K_{LC}$ ,  $\lambda$  を一定にとり、回転条件  $B_{CR}$  を順次変化させたときに、 $Pr$  の異なる温度場が速度場の変化に対応してどのような変化をするか示し、流動伝熱場の構造の変化を説明する。 $B_{CR} = -1$  近辺では遠心力とコリオリ力が拮抗して逆方向に作用するから、とくに複雑なパターンを形成する。

図2は  $K_{LC}$  が中程度の  $K_{LC} = 100$ ,  $\lambda = 50$  に保ちながら  $B_{CR}$  を変化させたときの軸速度、二次流線と温度場のパターンを4種の  $Pr$  について示したものである。正回転 ( $B_{CR} > 0$ ) では遠心力とコリオリ力が同方向に作用し、二種の二次流れは重ね合されて、速度場は  $K_{LC}$  がより大きい場合の静止曲管のパターンと相似になる。

逆回転の場合には二つの力は逆方向にはたらく。 $B_{CR} = -1.10$  では(遠心力による二次流れとは逆向きのコリオリ力による二次流れが曲りの内側近くから管壁に沿って発達して、遠心力による二次流れの効果を打消すようにはたらく。 $B_{CR} = -1.20, -1.25$  では強さがほぼ等しい逆向き2対の二次流れ渦が断面内に共存し、 $w$  の等高線は見かけ上、体積力が作用しないポアズユ分布の様相を呈する。 $B_{CR} = -1.30, -1.35$  では遠心力によ

る二次流れはしだいに弱くなりながら  $x$  軸の負方向に移動し、やがて消滅してコリオリ力による二次流れのみとなる ( $B_{CR} \leq -2.0$ )。

このような速度場の変化に対し、温度場の対応は  $Pr$  によって大きく異なる。まず  $Pr$  が1に近い0.7の場合について軸速度と温度パターンを比較して見ると、両者は  $B_{CR}$  のすべての値で相似になっていることがわかる。また  $Pr$  が小さい0.1の場合の温度場は同心円状に近く、二次流れの影響をわずかにうけるだけである。本報告では省略した  $Pr = 0.01$  の等温線図は  $B_{CR}$  全域でほぼ同心円で、静止直円管内温度場にきわめて近いものになっている。

他方  $Pr = 70$  の場合には等温線は  $w$  とは全く異なり、二次流線  $\psi$  に類似したパターンになっている。すなわち図両端の  $B_{CR} = 1$  と  $-2$  では断面で  $\psi$  とほぼ同じ位置に二つの極大値をもち、 $-1.10 < B_{CR} < -1.35$  では二個の二次流れの挙動に対応したパターンを示している。 $Pr$  が大きいほど、管中央コア部での二次流れによる温度混合効果が大きいから最大温度差は小さく、等温線は中心部で疎、壁近傍で密になっている。また  $Pr = 7.0$  のパターンは  $Pr = 0.7$  と  $70$  との中間状態として把握できる。

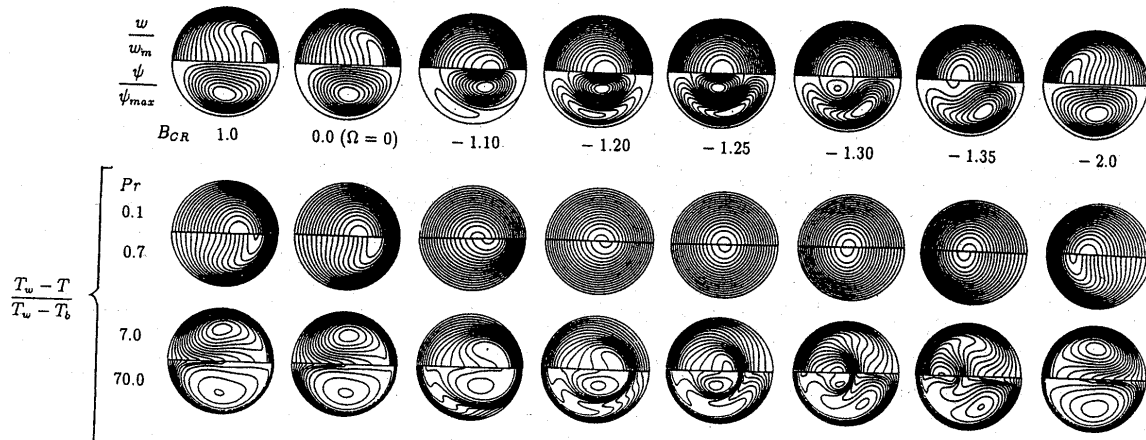


図2 軸速度、二次流線と温度場の変化 ( $K_{LC} = 100, \lambda = 50$ )

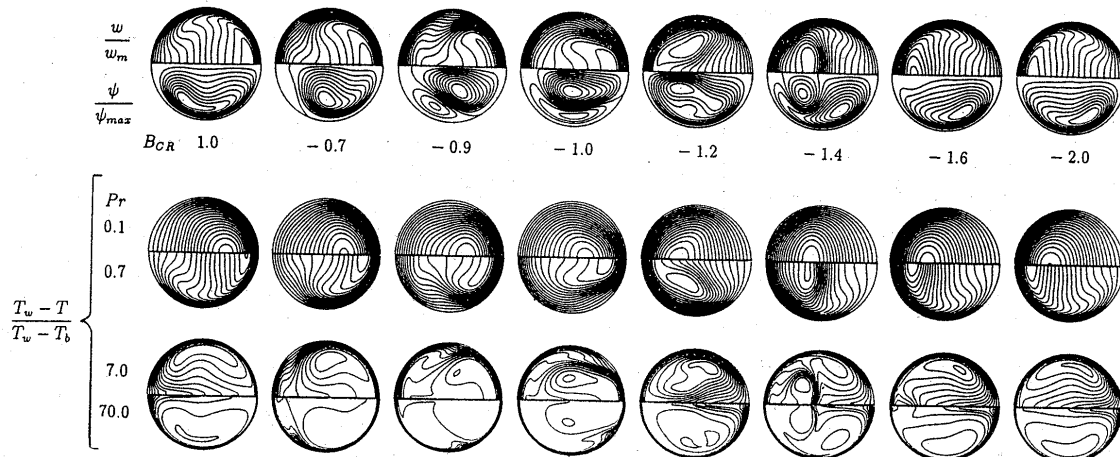


図3 軸速度、二次流線と温度場の変化 ( $K_{LC} = 500, \lambda = 50$ )

$K_{LC}$ がある臨界値 ( $K_{LC} = 130 \sim 150$ と推定) をこえ  
ると、 $B_{CR} \cong -1$ の領域で遠心力あるいはコリオリ力に  
よる流体力学的不安定が発生し、流れパターンはさら  
に複雑になる。図3は  $K_{LC} = 500$ 、 $\lambda = 50$  の場合のパタ  
ーンを示したものである。遠心力不安定が  $B_{CR} = -1.2$   
で発生していて、 $\theta = 0^\circ$ の壁面上を起点として $x$ 軸上を  
負方向に流れ、 $w$ の最大位置を $\theta = 180^\circ$ 近くに押し流し  
て二つに分断している。 $K_{LC} = 500$ の場合も各  $Pr$ の温  
度場の応答は図2と基本的に同じであり、前節の推論の  
ようになっていることがわかる。

以上図2、3および本報告では省略した  $K_{LC} = 30$  の同  
様の図、 $Pr = 0.01$  のパターンなどの計算結果から、前  
節での熱的相似性の考察から得た推論を立証した。

6. 平均ヌッセルト数

はじめに前節の温度パターンの変化に対応して平均  
ヌッセルト数  $Nu$  がどのような変化をするかを見るため  
に、 $Pr = 0.7$  と  $7.0$  の  $Nu_H$  を  $B_{CR}$  を横軸にとり図4に示  
す。図からわかるように  $Nu_H$  は  $B_{CR} = -1$  の近傍で極小  
値をとるが、この近傍ではきわめて複雑微妙な流れに  
なっていて、 $K_{LC} = 500$  の場合には  $B_{CR}$  のある範囲(線  
が切れている部分)では解が振動して定常解は得られ  
なかった。 $Nu_H$  の極小領域は特異領域であり、回転機械  
の冷却設計でこの領域を採用することはないので、こ  
の領域を除外して実用式を検討する。

さて静止曲管と直交回転管内層流のアナロジーにも  
とづき文献(5)では両者に共通する層流管摩擦公式を提  
案した。また文献(1)では次に示す変換(12)を適用すれ  
ば、回転曲管流の管摩擦係数の計算結果と伊藤らの実  
験データ(9),(10)がこの共通管摩擦公式でよく表わされる  
ことを示した。

$$\left. \begin{aligned} B_{CR} > -0.80 \text{ のとき, } K_L &= K_{LC} \sqrt{B_{CR} + 1} \\ B_{CR} < -1.30 \text{ のとき, } K_L &= K_{LC} \sqrt{|B_{CR}| - 1} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

さらに文献(6)では熱伝達についての二つの流れのア

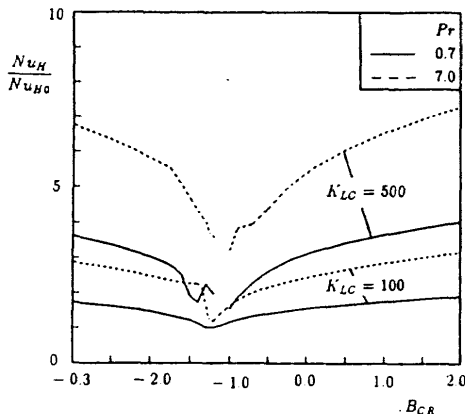


図4 体積力比による平均ヌッセルト数比の変化  
( $Nu_{H0} = 4.36$  は非回転直円管流の値)

ナロジーにもとづき、 $0.7 < Pr < 1000$  の範囲について  
 $Nu_H$  の共通公式を与えた。本報告では文献(1)の管摩  
擦係数での方法にならって、これら  $Nu_H$  の実用式に式  
(12)の変換を適用したときに、回転曲管の熱伝達結果  
がよく表せるかどうかを検討する。

6.1 壁熱流束一定の場合 文献(6)ではこの熱的  
条件に対し、次のような平均ヌッセルト数実用式を提案  
した。 $K_P = K_L \sqrt{Pr}$  (ただし  $K_L$  は曲管では  $K_{LC}$ 、直交  
回転管では  $K_{LR}$  にとった) として、 $0.7 < Pr < 10$  につ  
いては

$$\left( \frac{Nu_H}{Nu_{H0}} \right)_I = 0.145 \sqrt{K_P} (1 + 7.15 K_P^{-0.827}) \dots (13a)$$

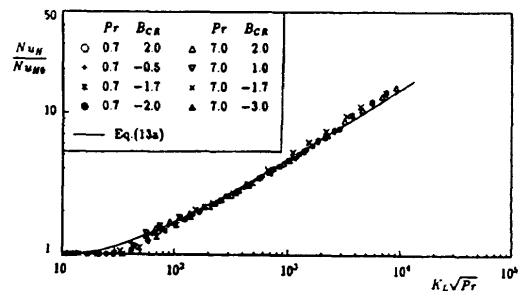
$10 < Pr < 100$  については

$$\left( \frac{Nu_H}{Nu_{H0}} \right)_{II} = \left( \frac{Nu_H}{Nu_{H0}} \right)_I (1 + 0.003 K_P^{0.45}) \dots (13b)$$

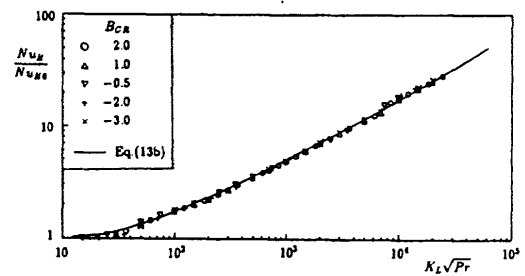
$100 < Pr < 1000$  については  $K_P$  の二つの領域に分割し、  
 $K_P < 4 \times 10^2$  では (13a)、 $K_P > 4 \times 10^2$  では次式を与  
えた。

$$\left( \frac{Nu_H}{Nu_{H0}} \right)_{III} = \left( \frac{Nu_H}{Nu_{H0}} \right)_I (1 + 0.075 K_P^{0.20}) \dots (13c)$$

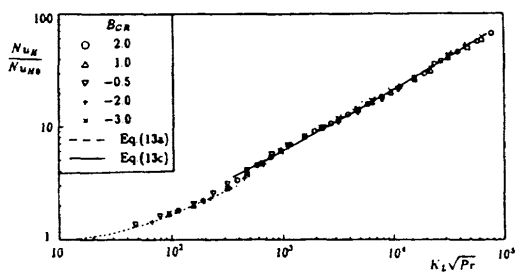
ここで  $Nu_{H0} = 48/11$  は静止直管での値を示し、式



(a)  $Pr = 0.7$  と  $7.0$



(b)  $Pr = 50$



(c)  $Pr = 500$

図5 平均ヌッセルト数のアナロジー式と計算結果  
の比較(壁熱流束一定)

(13a,b,c) で  $Nu_H/Nu_{H0} < 1.0$  となったときには 1.0 でおきかえる。

以下代表的な  $Pr$  について  $K_{LC}$  と  $B_{CR}$  を変えて行なった回転曲管流の計算結果を上式と比較する。図 5(a), (b), (c) は  $Pr = 0.7, 7, 50, 500$  の計算結果に式 (12) の変換をほどこし、 $K_P$  を横軸にとって式 (13a,b,c) と比較したものである。これらの図から熱伝達アナロジー式 (13a,b,c) は回転曲管の計算結果とよく一致していることがわかる。

7. 温度場の特性

温度場の変化を示す特性量として無次元温度  $(T_w - T)_{max}/(q_w d/k)$  の最大値を考え、この量が(近似)層流特性数  $K_L$  によりどのように変化するかを  $Pr = 0.7$  と  $7.0$  について図 6(a), (b) に示す。図中の実線と破線は文献 (6) に示した曲管と直交回管の結果を再録したものであり、両者はほとんど一致している。図 2、3 の温度パターンからわかるように最大値の位置は  $Pr$  により異なり、 $Pr = 0.7$  では  $x$  軸上、 $Pr = 7.0$  では  $y$  軸上に存在する。 $Pr = 7$  の場合は  $Pr = 0.7$  の場合よりも二次流れによる混合が大きいため、温度差はより小さくなる。

図 6(a), (b) および本報告では省略した  $Pr = 50, 500$  の同様の図から、各  $Pr$  の値について回転曲管流の  $K_{LC}$  と  $B_{CR}$  の種々の値に対する計算結果はほとんど重なり、さらに二つの極限流の曲線に  $K_L$  の全域で一致することがわかる。なお前節で用いた  $K_P$  を用いて種々の  $Pr$  の計算結果を整理すると、 $K_P < 100$  では大略一致するが、 $K_P$  の大きな値ではそれぞれに分岐して一つの曲線にはまとまらない。

8. 結言

先に著者が明らかにした曲管と直交回管管内流のアナロジーを基礎として、流れ特性を論じた文献 (1) にひきつづき、遠心力とコリオリ力が同時に作用する回転曲管内層流の熱伝達特性を相似性の考察と数値計算結果により明らかにした。とくに熱伝達特性におよぼす  $Pr$  の影響を速度場、温度場の構造と関係づけながら明確にした。

引用文献

- (1) 石垣, 機論, 58-561-B, (1993), 1494.
- (2) Miyazaki, H., Int. J. Heat Mass Transfer, 14(1971), 1295.
- (3) Miyazaki, H., Trans. ASME, J. Heat Transfer, 95 (1973), 64.
- (4) 石垣, 機論, 58-550-B, (1992), 1661.
- (5) Ishigaki, H., J. Fluid Mech. 268(1994) 133.
- (6) 石垣, 機論, (1994), 投稿中.
- (7) 石垣, 機論, 60-576-B, (1994),
- (8) Patanker, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, (1980), Hemisphere.
- (9) 伊藤・小牧ほか, 速研報告, 58(1987), 1.
- (10) 伊藤・秋田ほか, 速研報告, 59(1988), 1.

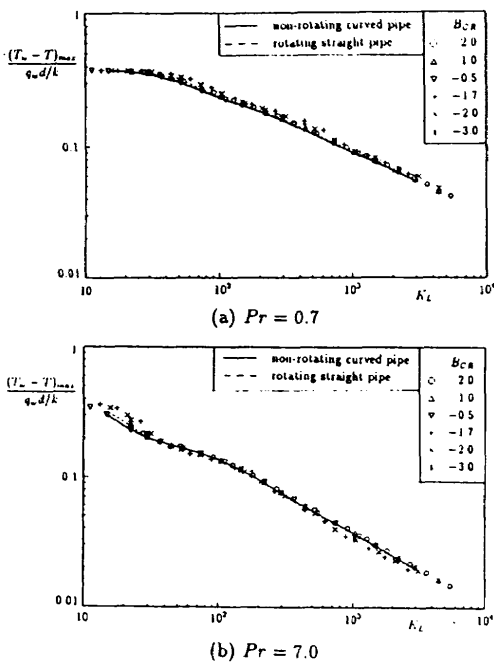


図 6  $K_L$  による最大温度差の変化 (壁熱流束一定)



# 低速流におけるダイナミックストール現象の数値計算

麻生 茂(九大・工・航空)、隈本 雄一(九大・工・院)

## Numerical Simulations of Dynamic Stall Phenomena in Low Speed Flows

Shigeru ASO(Dept.Aero.& Astro.Kyushu Univ) and Yuichi KUMAMOTO(Dept.Aero.& Astro.Kyushu Univ)

In order to reveal the flow structure and mechanism of dynamic stall around airfoils, these phenomena have been investigated numerically by solving incompressible Navier-Stokes equations with third-order upwind scheme. In this paper, we have calculated separated flows around oscillating airfoils in pitch by moving mesh system. The airfoil used for calculations is NACA0012 and numerical simulations have conducted under  $Re=1.0 \times 10^3$  and  $3.5 \times 10^4$ . In case of  $Re=1.0 \times 10^3$ , we have investigated the influence of time divisions and densities of grids upon aerodynamic characteristics. Time divisions have few influences upon the tendency of hysteresis of  $C_L$ , but if the number of grid points increases, vibrations of the curves of  $C_L$  at pitching down process become large. Further, comparisons between numerical simulations and experiments with a wind tunnel. Quite significant flow patterns due to dynamic stall are revealed.

### 1 序論

自然に存在する物体の周りに存在する流れのほとんどが剥離を伴う流れである。今回、剥離流れの中でも動的な剥離現象であるダイナミックストール現象を扱う。ダイナミックストール現象は航空機の急激な運動(急な引き上げなど)やヘリコプターのブレードの様な振動する翼まわりの流れなどに見られる。飛行物以外でも発電機のタービンの疲労にも密接に関係している。これらの設計をする上で

剥離を伴う流れを解明するには剥離剪断層の性質を正確に把握することが必要不可欠である。その中で近年注目されているのがダイナミックストール現象である。これは翼が静的失速を越えてピッチング運動をする際に揚力履歴を生じる現象のことである。ダイナミックストールは航空機の空力特性に大きな影響を及ぼすので非常に重要である。

今回、ダイナミックストール現象を定性的に把握するために流れ場の可視化実験及び数値シミュレーションを行った。数値解析は2次元非圧縮 Navier Stokes 方程式を直接、圧力  $p$ 、速度  $(u, v)$  について差分化することにより数値解析を行った。同時に計算結果との比較のために流れ場の可視化はスモークワイヤ法により可視化実験を行った。

本論文ではピッチ方向に正弦振動する翼(NACA0012)まわりの流れをシミュレートした。その中で低レイノルズ数( $Re = 1000$ )におけるダイナミックストール現象をシミュレートすることでこのスキームの信頼性を検証した。また中レイノルズ数( $Re = 3.5 \times 10^4$ )の流れを実験結果と比較検討した。特に、平均迎角の効果と無次元振動周波数の効果について述べる。

### 2 数値解析法

支配方程式は、以下に示す無次元化された2次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式と連続の式である。

連続の式:

$$\text{div } V = 0 \quad (1)$$

非圧縮正 Navier-Stokes 方程式:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\text{grad } p + \frac{1}{Re} \Delta V \quad (2)$$

但し、ここで述べる  $V$  は速度ベクトル、 $p$  は圧力、 $Re$  はレイノルズ数である。

次に、MAC 法<sup>1)</sup>に従い式(1)の発散をとり、圧力の Poisson 方程式を導く。

$$\Delta p = -\text{div}(V \cdot \nabla)V + R \quad (3)$$

ここで、 $R$ は、

$$R = -\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{Re} \Delta D, \quad D = \text{div } V \quad (4)$$

式(1)より式(4)は0であるが、数値誤差の矯正項として残しておく。計算は式(2)、(3)を差分化して行う。時間積分には前進差分、空間差分は対流項を3次の風上差分、それ以外を中心差分で行う。なお詳細は文献2に譲る。

次に格子生成であるが、Steger と Sorenson<sup>3)</sup>の方法を用いた。格子はOグリッドで生成し物体近傍が密になるように配置した。ピッチ振動する翼型を扱うために、時間変数を含めた一般座標変換を導入する。このことにより、各 time step での迎角の変化に伴って移動する物体表面に適合した Moving grid での計算が可能になる。Moving grid を用いた計算は多いが本研究では Nakamachi<sup>4)</sup>を参考に計算を行った。この方法によると計算格子は、物体近傍の幾何学的な変形を伴わない部分と回転による変形が加わる外部境界側の2つの

部分からなる。物体表面近傍の格子は変形を伴わずに物体表面と共に移動するために歪みが少なく格子点の移動量は外部境界に向かって徐々に減少し外部境界では0になるため、計算領域が変化せず、外部の境界条件の取り扱いが容易になると同時に各 time step における計算時間も短くなるという利点がある。

計算に用いた境界条件は以下のとおりである。物体表面に対して速度の滑りはなく、圧力は物体表面に対して垂直方向の勾配は0とする。流入境界は速度および圧力は一様流条件。流出境界は速度については一様流条件、圧力は外挿により求める。

### 3 計算結果と考察

#### 3.1 低レイノルズ数におけるダイナミックストール現象のシミュレーション

正弦振動する2次元翼型(NACA0012)のまわりの流れについて数値シミュレーションを行った。

まず、 $Re = 1000$  の比較的低レイノルズ数でシミュレートした。翼型は1/4コード長を中心にピッチ方向に迎角変化 $\alpha = 10.0^\circ + 5.0^\circ \sin \omega t$  で無次元角振動周波数 $k = 0.2$  で振動させる。この計算による各空力係数の迎角変化に対する履歴を図1に示す。図中の $C_L, C_D, C_M$ の履歴は3周期目と4周期目を重ねたものであるがほとんど重なっており再現性が高い。グラフの中で $C_L, C_D$ の時間変化は時計回り、 $C_M$ は反時計回りに対応し、揚力係数の履歴を見るとピッチアップ過程では迎角が増加するに従い揚力が増し同迎角ではピッチダウン過程より高い値を示している。これは同じ迎角でもピッチアップ時とピッチダウン時では翼上面での静圧分布が異なっているからである。図2に $10.0^\circ$ のピッチアップ時とピッチダウン時の翼上面の圧力分布を示したが、ピッチアップ時の圧力分布の方がピッチダウン時より閉曲線の面積が大きいことがわかる。

次に計算は格子数、時間分割がどの程度流れ場に影響を与えるかを調査するために以下のような条件で計算を行った。レイノルズ数、振動は前述の条件と同じで、格子数は $85 \times 61$ を基本として、 $\xi$ 方向に2倍( $171 \times 61$ )、時間分割は1周期の分割数が20,000( $dt = 1.57 \times 10^{-3}$ )と100,000( $dt = 3.14 \times 10^{-4}$ )である。その結果を図3に示す。この図は $C_L$ の履歴である。

$dt = 1.57 \times 10^{-3}$ 、格子数 $85 \times 61$ 基本条件にしてそれぞれを比較する。 $\xi$ 方向(翼面に沿った方向)の格子数が基本条件の2倍になったものと基本条件ではほとんどその傾向に違いはないが、基本条件の時間分割が5倍になったもの( $dt = 3.14 \times 10^{-4}$ )は揚力履歴が全体的に正方向に移動する。特にピッチダウン時にその傾向が顕著に見られ、揚力係数の履歴の振動も大きくなる。しかし、ほとんどその振動も3周期目と4周期目では一致する。

#### 3.2 中レイノルズ数におけるダイナミックストール現象のシミュレーション

数値解析と同時にやっている風洞実験の実験条件と同じ条件で正弦振動する2次元翼型(NACA0012)のまわりの流れについて数値解析し、その結果を風洞試験の可視化写真と比較した。

計算条件は $Re = 3.5 \times 10^4$ で以下の3つの条件で数値解析、風洞実験ともに行った。

$$(1) \alpha = 10.0^\circ + 5.0^\circ \sin \omega t, k = 0.2$$

$$(2) \alpha = 10.0^\circ + 5.0^\circ \sin \omega t, k = 0.2$$

$$(3) \alpha = 15.0^\circ + 5.0^\circ \sin \omega t, k = 0.2$$

その計算結果を図4,5,6に示す。これらはスモークワイヤ法を数値的にシミュレートしたものと比較のために風洞実験のスモークワイヤ法による可視化写真を示したものである。

図4( $\alpha = 10.0^\circ + 5.0^\circ \sin \omega t, k = 0.2$ )の数値解析の結果を見ると迎角増加に従い前縁から剥離渦が発生し、最大迎角付近から迎角減少時にかけて剥離渦に誘起され後縁から渦が発生する過程が見られる。これを風洞実験の結果前縁の剥離領域や後流の巻きあがった渦の構造など良く一致している。

図5( $\alpha = 10.0^\circ + 5.0^\circ \sin \omega t, k = 1.0$ )は図4と迎角変化が同じで無次元角振動周波数が5倍になった条件である。風洞試験の写真を見ると、図4と比較して剥離領域が非常に小さくなっているが、計算結果同士を比較すると風洞試験の結果ほど顕著ではないが剥離領域が小さくなっているのがわかる。

図4の条件より平均迎角が大きな場合を図6( $\alpha = 15.0^\circ + 5.0^\circ \sin \omega t, k = 0.2$ )に示す。これは計算結果も風洞試験の結果と同様に図4の結果より剥離の構造が大きくなっているのがわかる。

### 4 結論

本研究では数値解析によってダイナミックストール現象を捕らえた。一連の数値解析によって以下の結論を得た。

1)  $Re = 1000, \alpha = 10.0^\circ + 5.0^\circ \sin \omega t, k = 0.2$ で計算条件を時間分割、格子数を変化させて比較したところ、時間分割を大きくしても揚力係数の履歴に顕著な変化はなかったが、 $\xi$ 方向の格子点数を増やした場合ではピッチダウン時の揚力係数の履歴の振動が大きくなった。

2)  $Re = 3.5 \times 10^4$ で平均迎角、無次元角振動周波数を変化させた時の流れ場の変化を、同様に条件を変化させた場合の風洞試験の結果と比較した。平均迎角が増加するに従い前縁からの剥離渦の構造が大きくなるという傾向は計算結果にも現れていたが、無次元角振動周波数が増加するに従い翼上面から剥離しにくくなるという現象は計算結果ではその傾向は見られるが風洞試験の結果ほど顕著には見られなかった。



参考文献

- 1) Harlow, F. H. and Welch, J. E.: Phys. Fluid, 8 (1965). Phys. Fluid, 8 (1965).
- 2) Kawamura, T. and Kuwahara, K.: AIAA paper 84-0340 (1984).
- 3) Steger, J. L. and Sorenson, R. L.: J. Comp. Phys., 33 (1979), pp.405-410.
- 4) Nakamichi, J.: AIAA paper 87-1158 (1987).

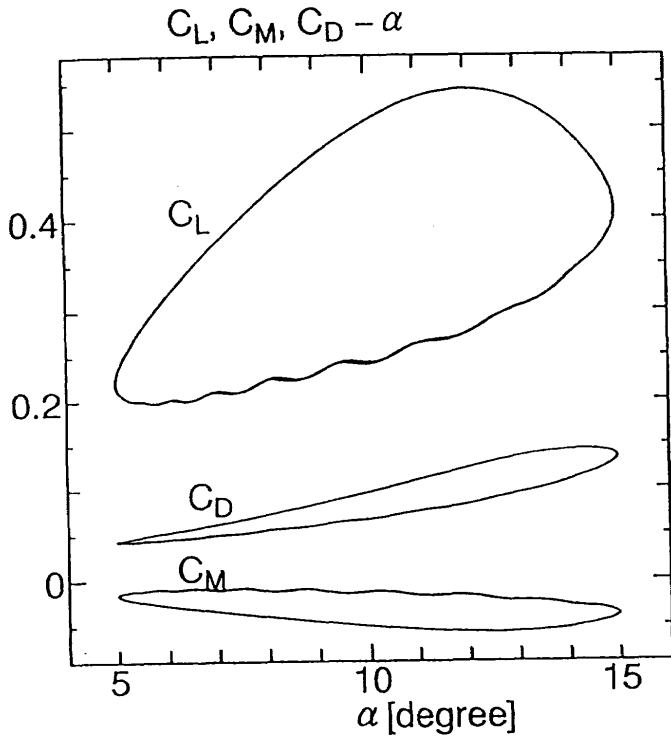


図1：振動翼における各空力係数の迎角変化に対する履歴：  
 $Re=1,000, \alpha=10.0^\circ+5.0^\circ \sin\omega t, k=0.2$

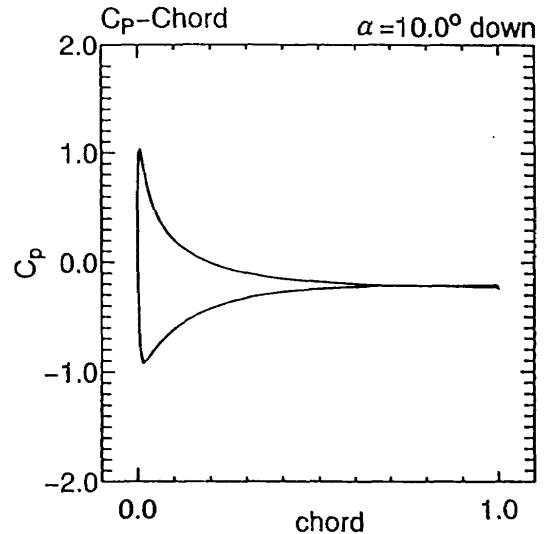
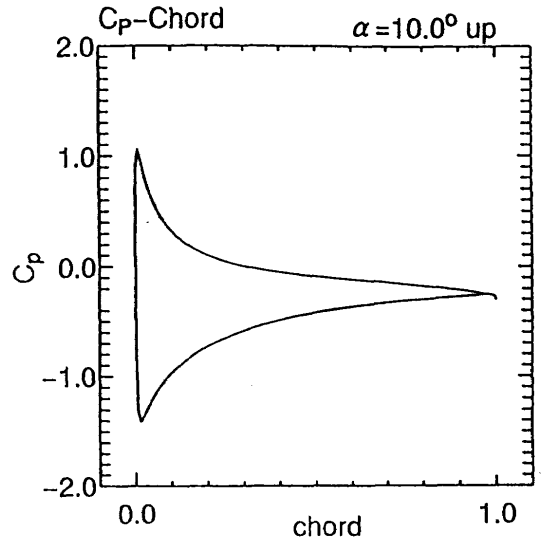


図2：翼面上の静圧分布：  
 $Re=1,000, \alpha=10.0^\circ+5.0^\circ \sin\omega t, k=0.2$

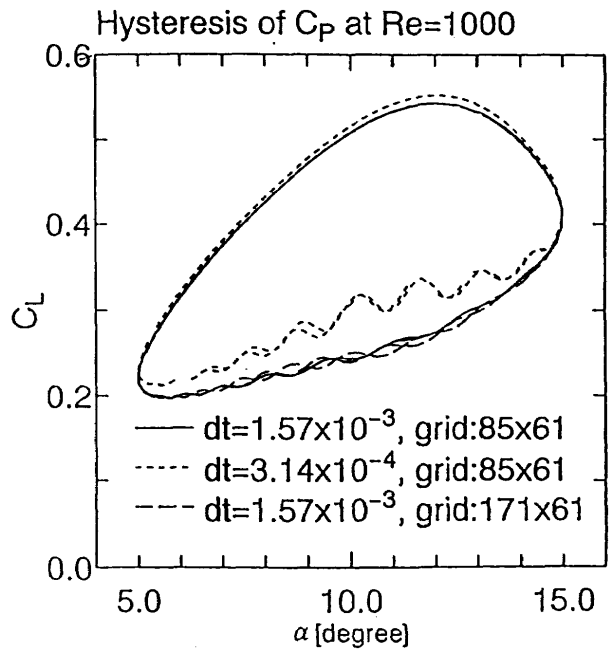


図3：計算条件を変化させた場合の揚力係数の履歴の比較：  
 $Re=1,000, \alpha=10.0^\circ+5.0^\circ \sin\omega t, k=0.2$

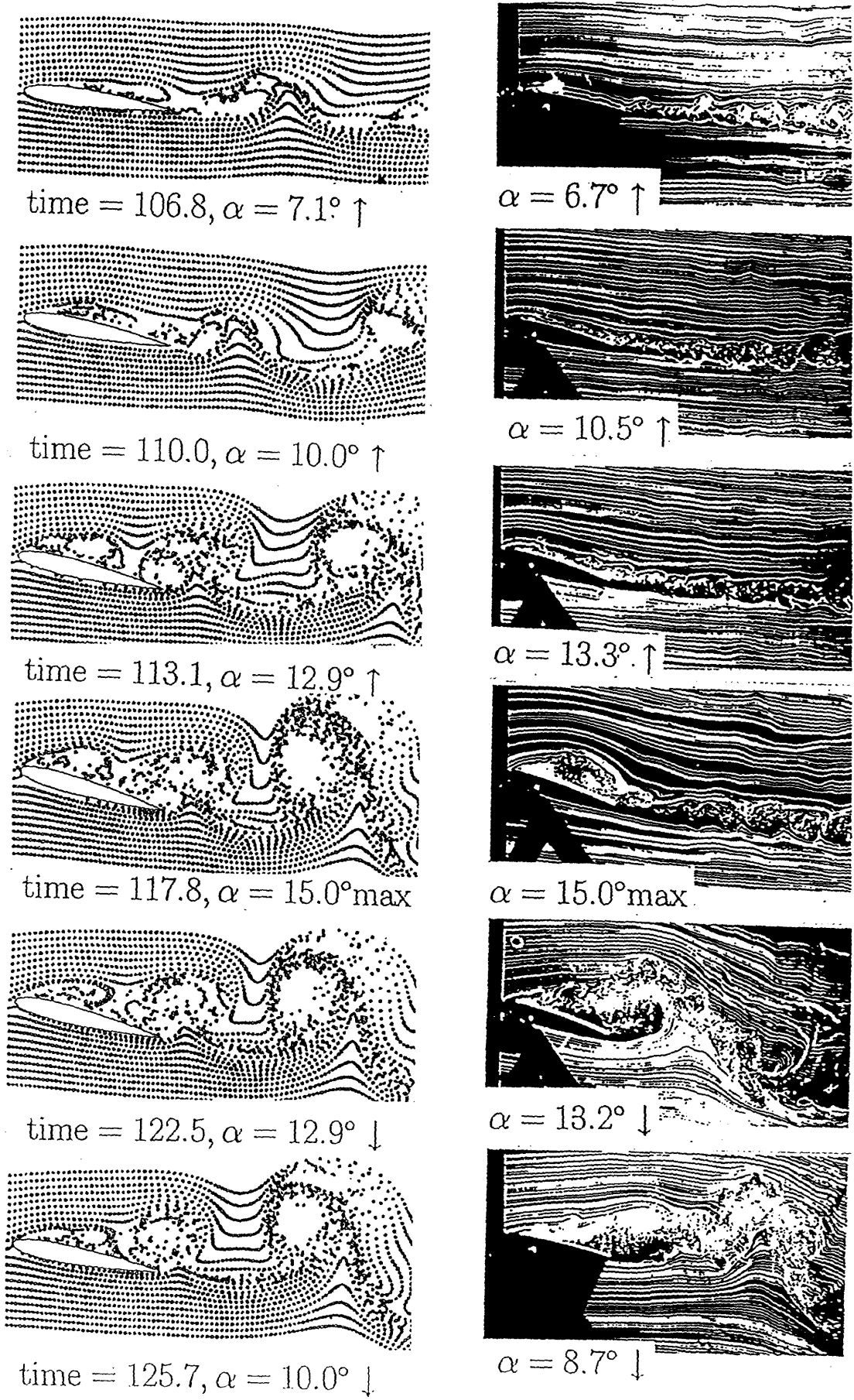


図4: 振動翼まわりの流れの計算結果と風洞実験との比較  
 $Re=3.5 \times 10^4$ ,  $\alpha=10.0^\circ+5.0^\circ \sin \omega t$ ,  $k=0.2$

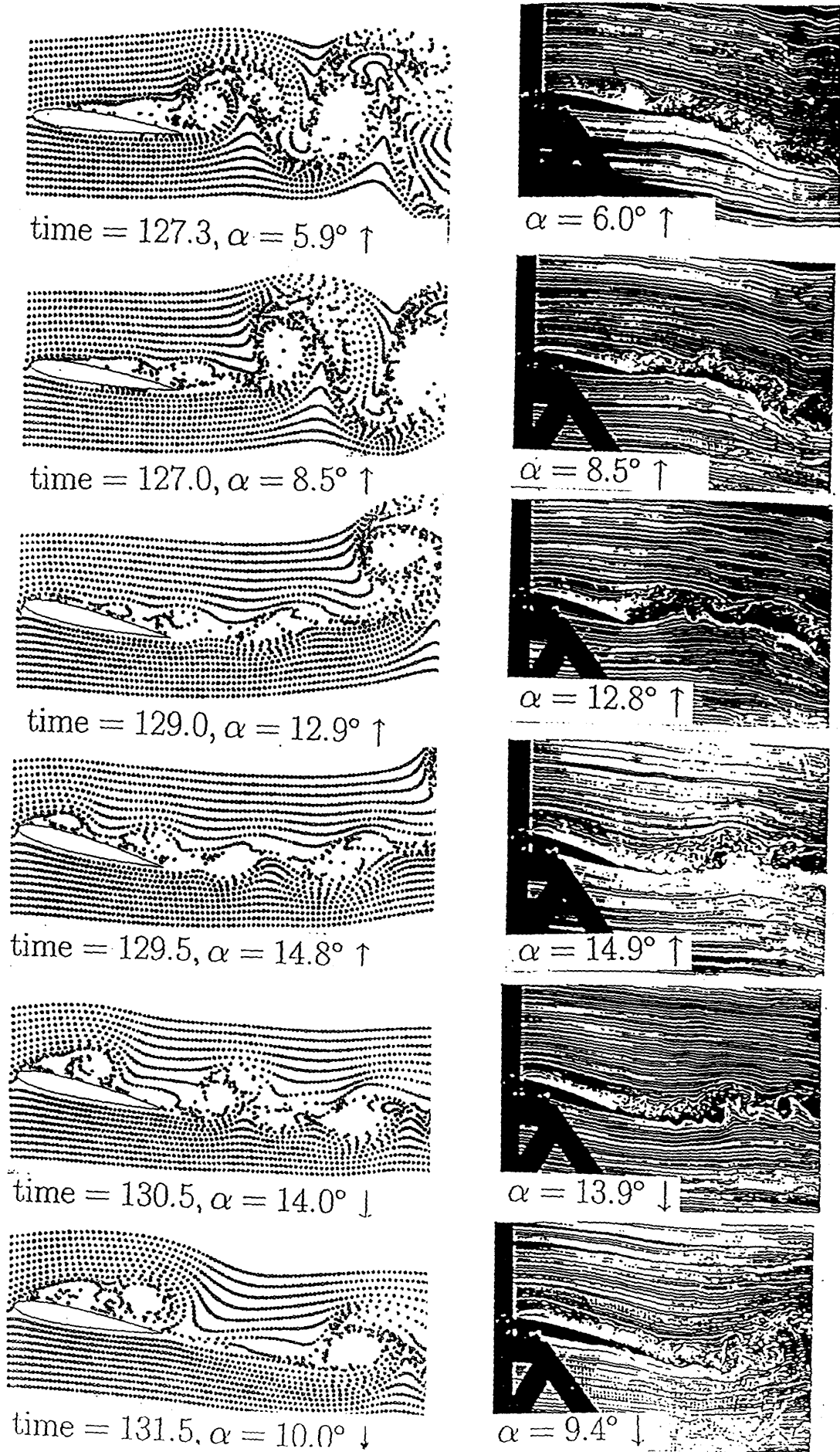


図5: 振動翼まわりの流れの計算結果と風洞実験との比較:  
 $Re=3.5 \times 10^4$ ,  $\alpha=10.0^\circ+5.0^\circ \sin \omega t$ ,  $k=1.0$

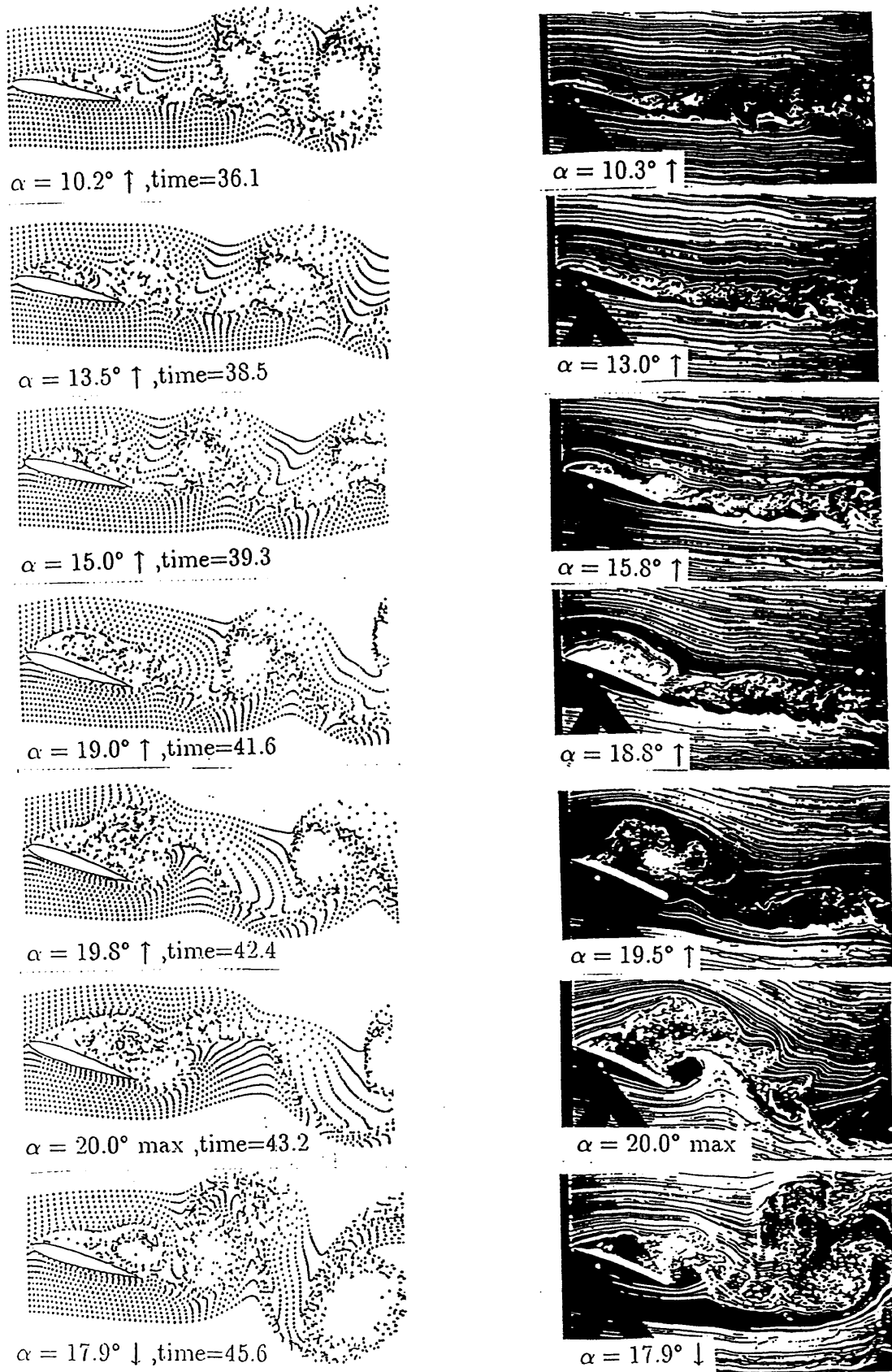


図6: 振動翼まわりの流れの計算結果と風洞実験との比較:  
 $Re=3.5 \times 10^4, \alpha=15.0^\circ+5.0^\circ \sin \omega t, k=0.2$

## 振動するスポイラを持つ2次元翼まわりの流れの 数値シミュレーション

磯貝 紘二\* 吉田正廣\*\*

Numerical Simulation of Unsteady Viscous Flow  
around an Airfoil with Oscillating Spoiler

Koji Isogai

Department of Aeronautics and Astronautics, Kyushu University

Masahiro Yoshida

Computational Sciences Division, National Aerospace Laboratory

### ABSTRACT

Numerical simulations of unsteady viscous flows around an airfoil with oscillating spoiler have been performed using the compressible Navier-Stokes equations. The Yee-Harten Total Variation Diminishing (TVD) scheme and the Baldwin-Lomax algebraic turbulence model are employed. The unsteady pressure distributions on the 16 percent thick supercritical airfoil with oscillating spoiler in low subsonic and transonic Mach numbers have been calculated, being compared with the existing experimental data.

### 1. 序論

航空機の翼のフラッタ制御や突風制御には前/後縁舵面の他に、スポイラが用いられることがある。このためのスポイラの制御則の設計には、振動するスポイラによる非定常空気を予測することが不可欠である。これまでに提案された手法としては、Tou & Hancock<sup>1)</sup>によるパネル法(不連続流れを含むポテンシャル理論)、Giroudroux-Lavigne & Le Balleur<sup>2)</sup>による粘性-非粘性流干渉法がある。スポイラによる流れは本質的に剥離流であるため、ナビエ・ストークス方程式を用いた数値シミュレーションはこれらより一般性のある手法と思われる。Barth, Pulliam & Buning等<sup>3)</sup>は、固定されたスポイラを持つ2次元翼周りの非定常流れをナビエ・ストークス方程式を用いてシミュレーションを行っている。しかしながら、振動するスポイラを持つ翼まわりの非定常流れのナビエ・ストークス方程式によるシミュレーションを行った例は、筆者が知る限りでは、まだ報告されていない。

本報告では、振動するスポイラを持つ2次元翼まわりの非定常粘性流を、圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いて計算する手法を提案する。また、計算結果を、既存の実験データと比較し、計算手法や計算コードの妥当性等の評価を行う。

### 2. 計算法

用いた基礎方程式は、時間平均圧縮性ナビエ・ストークス方程式である<sup>4)</sup>。差分スキームとしては Yee-Harten<sup>5)</sup>の TVD (Total Variation Diminishing) スキームを用いている。また、乱流モデルとしては、Baldwin & Lomax<sup>6)</sup>の代数モデルを用いている。翼にスポイラが付いた場合の計算格子は、スポイラ無しのクリーンな翼の場合のように単一領域の格子を形成するのが非常に困難なので、図1に示すように、計算領域をスポイラの後流を含む領域IIと、その他の領域Iに分けて、それぞれの領域ごとに別々に計算格子を生成する。

物理空間における領域Iと領域IIはそれぞれ計算空間の矩形領域に射像される。計算空間には等間隔格子が張られる。計算空間と物理空間の射像は、各時間ステップごとに、代数的な射像関数を用いて行われる。流れ場の計算は、各々の計算空間  $(\xi, \eta)$  に変換された圧縮性ナビエ・ストークス方程式を、それぞれ与えられた境界条件のもとに、各時間ステップごとに、解いて行く。(解法は時間精度の陰解法である。) 流れの諸量の境界値としては、領域Iでは、FGで主流の条件、AFとEGでは内点からの外挿値、ABとDEでは、領域Iの内点からの外挿値と領域IIの(ABとDEに於ける)内点からの外挿値との平均値をそれぞれ与える。また、翼面BCおよびスポイラ上面CDでは、no slip条件<sup>7)</sup>を与える。同様に、領域IIでは、AEでは内点

\* 九州大学 工学部

\*\* 航空宇宙技術研究所

からの外挿値、BA と DE では領域 I の内点からの外挿値と領域 II の内点からの外挿値との平均値を与える。翼面 BC およびスポイラ下面 CD では no slip 条件を与える。また、射像関数の Jacobian が singular になる CC 上の値には、内点からの外挿値を与えている。今回の計算に用いた格子数は領域 I に対して 240x50, 領域 II に対して 73x14 ~ 73x20 である。

3. 計算結果

振動するスポイラによる非定常空気力を実験的に測定した例はきわめて少なく、筆者が調査した限りでは、Consigny 等<sup>8)</sup>と Costes 等<sup>9)</sup>による測定値が公表されているにすぎない。ここでは、Consigny 等による実験データとの比較を試みる。彼等が用いた翼は 16% 厚の超臨界翼で、その上面の 52% 翼弦点にヒンジを持つスポイラ (15% 翼弦長) が付いている。スポイラの取り付け角  $\delta_{sp}$  は自由に変えられるようになっているが、今回の計算との比較の対象としたのは、 $\delta_{sp}=10^\circ$  と  $\delta_{sp}=20^\circ$  の場合である。また、スポイラの振動振幅は  $1^\circ$  である。

図2には、 $M=0.30, \alpha=0^\circ, \delta_{sp}=20^\circ$  における定常流のフローパターン (等密度線図) を示す。図3には、この場合の定常の (翼上下面、スポイラ部分はスポイラ上面) 圧力分布の計算値と実験値を示している。定量的には若干の差異はあるものの、スポイラ上面およびスポイラ下流における翼上面圧力などは良い一致を示している。この場合、スポイラ下流の流れの翼面上での再付着は起こっておらず、圧力はほぼ一定となっている。

図4に、スポイラが  $M=0.30$ , 無次元振動数  $k=0.15$  で振動している場合の翼上面の非定常圧力変動の振幅および位相の実験値および計算値を示す。定量的にはまだかなりの差異があるが、定性的にはほぼ満足すべき一致を示している。

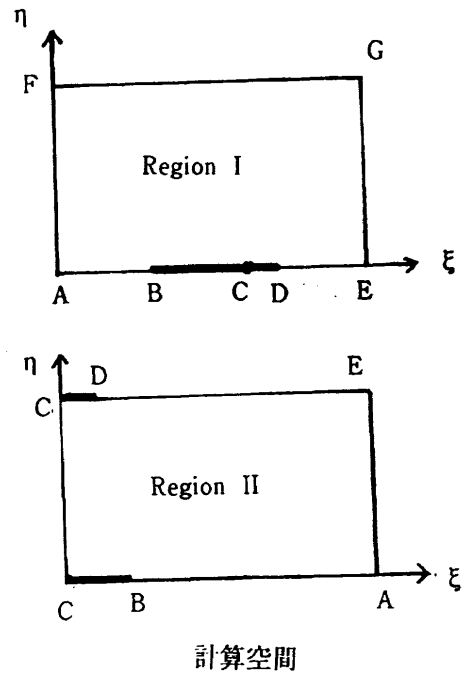
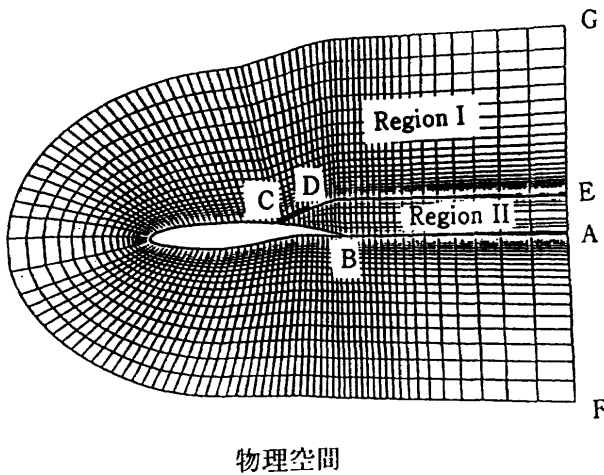


図1 格子生成

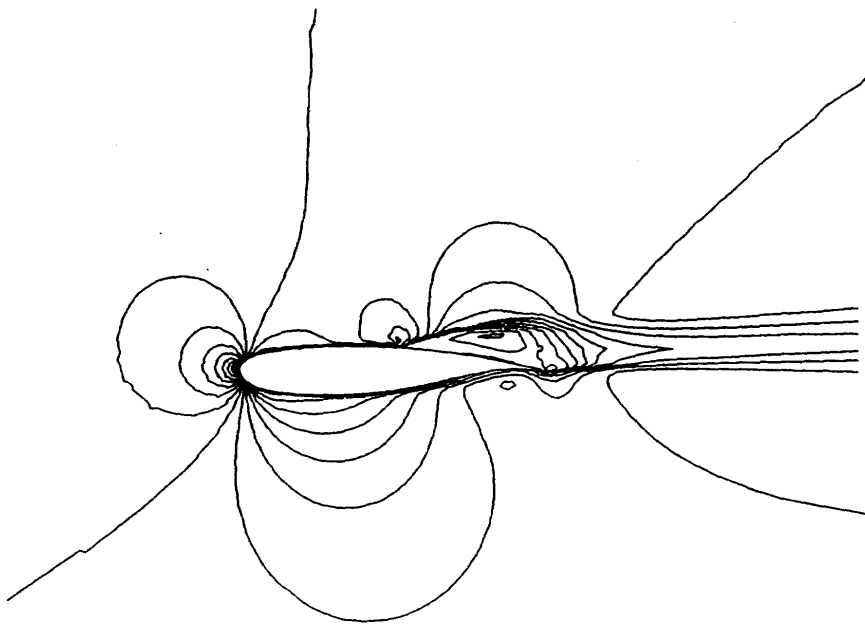


図2 等密度線図  
( $M=0.30, \alpha=0^\circ, \delta_{sp}=20^\circ$ )

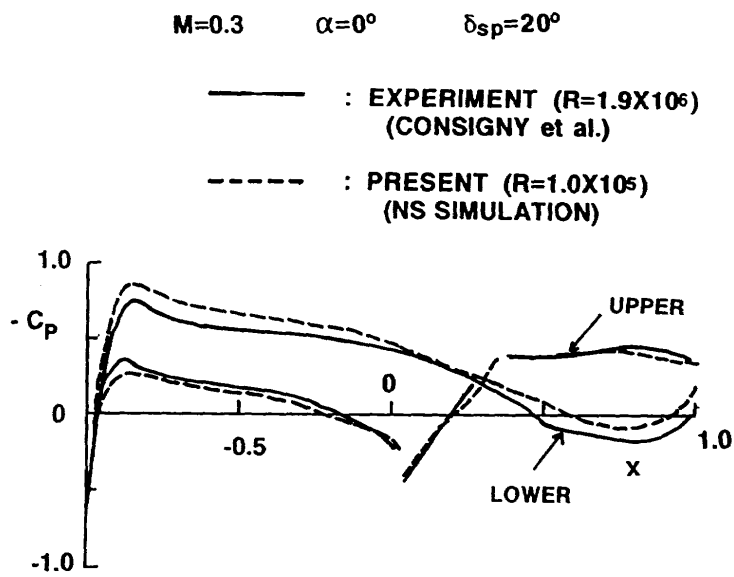


図3 定常圧力分布

$M=0.30 \quad \alpha=0^\circ \quad k=0.15 \quad \delta_{sp}=20^\circ + 1^\circ \sin kt$

---□--- : EXPERIMENT ( $R=1.9 \times 10^6$ )  
(CONSIGNY et al.)

———— : PRESENT ( $R=1.0 \times 10^5$ )

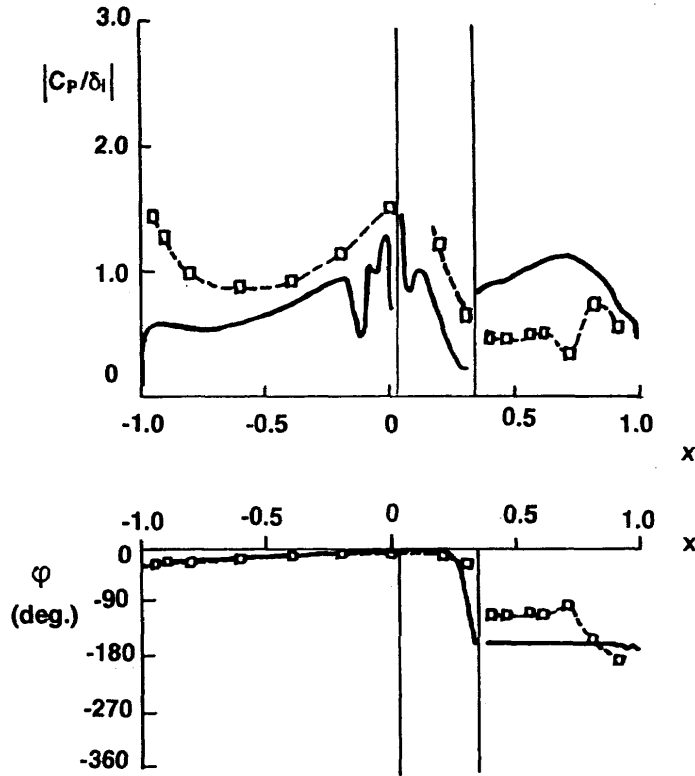


図4 非定常圧力分布

図5に  $M=0.73, \alpha=0^\circ, \delta_{sp}=10^\circ$  の場合の定常流のフローパターン（等密度線図）を示す。この場合、上面には衝撃波は生じておらず、下面に弱い衝撃波が生じていることがわかる。また、この場合も、計算、実験いずれにおいても、スポイラ下流における流れの翼面上での再付着は起こっていない。図6に、この場合の定常の圧力分布の計算値と実験値を示す。上面の圧力の一致は良いが、下面に関しては、計算は負圧を若干過大に予測している。図7に、 $M=0.73, k=0.30$  における翼上面の非定常圧力変動振幅および位相角の実験値および計算値を示す。両者は比較的良好一致を示している。



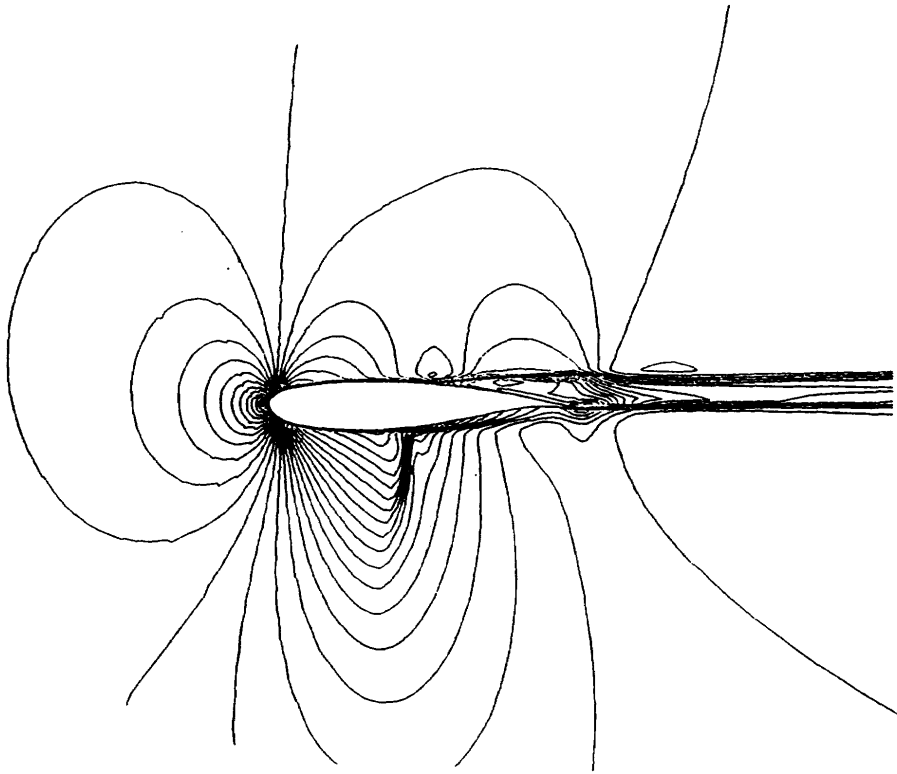


図5 等密度線図  
( $M=0.73, \alpha=0^\circ, \delta_{sp}=10^\circ$ )

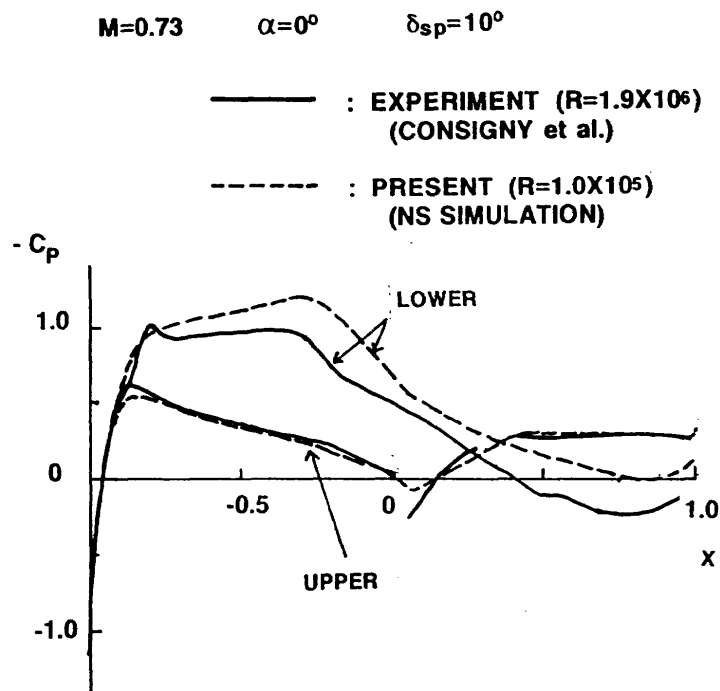


図6 定常圧力分布

$$M=0.73 \quad \alpha=0^\circ \quad k=0.30 \quad \delta_{sp}=10^\circ + 1^\circ \sin kt$$

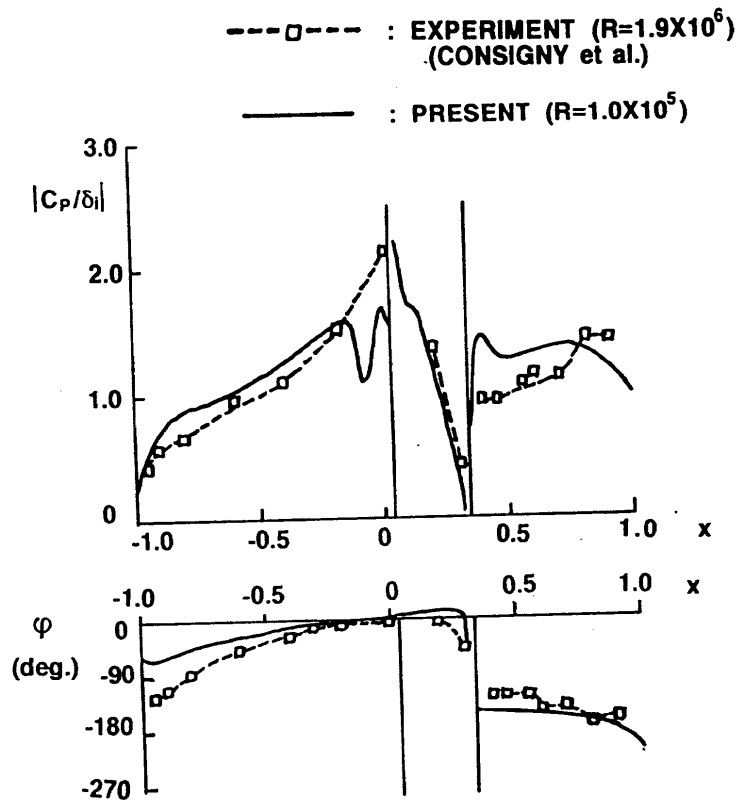


図7 非定常圧力分布

#### 4. 結語

振動するスポイラを持つ2次元翼まわりの、非定常粘性流を圧縮性ナビエ・ストークス方程式を用いて解き、既存の実験値との比較を試みた。今回の手法が、振動するスポイラによる非定常空気力の予測に有望であることが示されたが、定量的な信頼性については、今後さらに多くのケースについての計算、実験との比較による評価を行っていく必要がある。

#### 謝辞

今回の計算の対象とした16%厚の超臨界翼(RA16SC)の翼型データを提供していただいたConsigny氏(ONERA)に感謝申し上げます。

#### 文献

1. Tou, B.H. and Hancock, G.J., "Inviscid Theory of Two-Dimensional Aerofoil/Spoiler Configurations at Low Speed Part IV: Oscillatory Aerofoil/Spoiler Characteristics," *Aeronautical Journal*, Vol. 91 November 1987, pp. 410-428.
2. Girodroux-Lavigne, P. and Le Balleur, J.C., "Calcul D'écoulements Instationnaires Transsoniques avec Decollements par Interaction Visqueux-Non-Visqueux," AGARD-CP-374, 1984, pp. 7-17-18.
3. Bath, T.J., Pulliam, T.H. and Buning, P.G., "Navier-Stokes Computations for Exotic Airfoils", AIAA-85-0109, AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, Jan. 14-17, 1985/Reno, Nevada.
4. Vinokur, M., "Conservation Equations of Gas Dynamic Equations in Curvilinear Coordinate Systems," *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, Feb. 1974, pp. 105-125.
5. Yee, H.C. and Harten, A., "Implicit Scheme for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates," AIAA Paper 85-1513, 1985.
6. Baldwin B.S. and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA Paper 78-257, 1978.
7. Steger, J.L., "Implicit Finite-Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries," *AIAA Journal* Vol. 16, No. 7, July 1978, pp. 679-685.
8. Consigny, H., Gravelle, A. and Morinaro, R., "Aerodynamic Characteristics of a Two-Dimensional Moving Spoiler in Subsonic and Transonic Flow," *Journal of Aircraft*, Vol. 21, No. 9, Sep. 1984, pp. 687-693.
9. Costes, M., Gravelle, A. and J.J. Philippe, Vogel, S., and Triebstein, H., "Investigation of Unsteady Subsonic Spoiler and Flap Aerodynamics," *Journal of Aircraft*, Vol. 24, No. 9, Sep. 1987, pp. 629-637.

## 2次元PAR-WIGの数値シミュレーション

平田 信行 (船舶技術研究所)

## Numerical Simulation of Two-Dimensional PAR-WIG

by

Nobuyuki Hirata  
Ship Research Institute

## ABSTRACT

In the recent trend of super high-speed ships, a PAR-WIG has been paid attention to again. A Power-Augmented Ram Wing In Ground effect (= PAR-WIG) is a wing in ground effect, whose lift is enhanced by using the airflow of a thruster, which is placed in the upstream of the wing, so as to create a high ram pressure region under the wing. The PAR effect enables this vehicle to take off and land on at lower speed and supplies that structural weight and engine power can be reduced compared with the conventional WIGs.

To understand the aerodynamic characteristics of a PAR-WIG, a two-dimensional NS solver for incompressible flow is developed. The solver is based on a finite-volume method whose algorithm is a fractional step method. Through the solver, relations among strength of thrust, high ram pressure region under the wing and aerodynamic forces are considered.

## 1 緒言

近年の超高速船ブームで、WIGが再び注目を浴びてきている。WIGの特徴は、翼下部において流れが堰止められることにより高い圧力領域が形成され、揚力が増大することである。PAR-WIGは、このWIGの特徴をより一層生かすため、上流から翼下部に大量の空気を流し込みさらに高い圧力領域(高揚力)を生み出している。この効果により、離着水を低速で行うことを可能にし、従来のWIGに比べて構造重量、搭載パワーを小さくすることができる[1]。

PAR効果に関しては、実験的な手法や運動量理論を用いた研究が古くから行われてきており[2]、ここ数年日本でも、PAR効果のメカニズムを把握するために、実験的[3,4]及びCFDの手法[5]による基礎的な研究がなされている。

本研究では、PAR効果が地面効果を有する翼まわりの流れ場に与える影響を数値計算により考察する。PAR-WIGで用いられる翼は、航空機の翼に比べてアスペクト比が小さいため翼端渦等の3次元影響が大きいが、翼下部で高い圧力領域が形成される本質は、2次元でも説明することができ、今回は2次元翼まわりの流れ場を考えた。また、PAR-WIGの飛行する速度は低Mach数で流れを非圧縮性であると仮定した。計算手法としては、Fractional Step法のアルゴリズムで、有限体積法に基づいて離散化した2次元のNSソルバーを適用した。この手法を用いて、PARの推力強さ、翼下部の高い圧力領

域と空気力との関係を考察する。

## 2 計算手法

## 2.1 支配方程式と離散化

本研究では、Mach数の低い速度領域で、空気中における2次元翼まわりの流れ場を考え、圧縮性は考慮しない。支配方程式は、有限体積法に基づき定式化するため積分形の連続の条件と2次元非圧縮性のNavier-Stokes方程式であり、境界が $l$ であるコントロールボリューム $S$ に対して以下のように表すことができる。

$$\oint_l \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{u} dS - \int_S \mathbf{X} dS + \oint_l \mathbf{T} d\mathbf{l} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ は流体速度、 $\mathbf{X}$ は体積力、 $\mathbf{T}$ は以下で定義される応力テンソルである。

$$\mathbf{T} = \mathbf{u}\mathbf{u} + p\mathbf{I} - \left(\frac{1}{Re} + \nu_t\right) (\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) \quad (3)$$

$p$ は圧力、 $\mathbf{I}$ は単位テンソル、 $Re$ はレイノルズ数、 $\nu_t$ は乱流動粘性係数を表す。

計算格子は任意形状の物体に適合させるために、 $\mathbf{r} = (r_x, r_y)$ のデカルト座標系に対して一般曲線座標系を導入する。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta); \quad t = \tau \quad (4)$$

幾何的パラメータは Rosenfeld[6] に従い、Fig.1 に示す境界ベクトル及び面積を次式のように求める。

$$l^k = \left( \frac{\partial r_y}{\partial \eta}, -\frac{\partial r_x}{\partial \eta} \right); \quad l^n = \left( -\frac{\partial r_y}{\partial \xi}, \frac{\partial r_x}{\partial \xi} \right) \quad (5)$$

$$S_{i,j} = \frac{1}{2} (l^k_{i-\frac{1}{2},j} + l^n_{i,j-\frac{1}{2}}) \cdot (r_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) \quad (6)$$

流体変数の配置は Cell-Centered、すなわちセルの中心  $(i, j)$  に速度、圧力、乱流動粘性係数を定義し、計算格子の座標はセルの頂点  $(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$  で定義される。

## 2.2 運動方程式の解法

速度場が連続の条件を満足するように運動方程式 (2) 式を、次の2段階に分けて離散化を行う。

第1段階は、

$$\frac{(Su^*)_{i,j} - (Su^n)_{i,j}}{\Delta t} = (SX)_{i,j} - \left( [l^k T^*]_{i-\frac{1}{2},j}^{i+\frac{1}{2},j} + [l^n T^*]_{i,j-\frac{1}{2}}^{i,j+\frac{1}{2}} \right) \quad (7)$$

$$T^* = u^* u^* + p^n I - \left( \frac{1}{Re} + \nu_t \right) (\nabla u^* + (\nabla u^*)^T) \quad (8)$$

となる。 $n$  は時間ステップを表す。 $u^*$  は中間速度で、連続の条件 (1) 式を必ずしも満足していない。

(8) 式の応力テンソル  $T^*$  において、対流項は Quick 法に基づき、以下のように求める。

$$l^{\alpha}_{m+\frac{1}{2}} (u^* u^*)_{m+\frac{1}{2}} = U^{\alpha}_{m+\frac{1}{2}} \frac{-u^*_{m+2} + 9u^*_{m+1} + 9u^*_m - u^*_{m-1}}{16} + |U^{\alpha}_{m+\frac{1}{2}}| \frac{u^*_{m+2} - 3u^*_{m+1} + 3u^*_m - u^*_{m-1}}{16} \quad (9)$$

$$U^{\alpha}_{m+\frac{1}{2}} = l^{\alpha}_{m+\frac{1}{2}} \cdot u^*_{m+\frac{1}{2}} \quad (10)$$

ここで、 $\alpha$  は  $\xi, \eta$  に、 $m$  は  $i, j$  に各々対応している。

粘性項の  $\nabla u^*$  はガウスの積分定理から導出する。例えば、 $\nabla u^*_{i+\frac{1}{2},j}$  は、次式のようになる。

$$\nabla u^*_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{S_{i+\frac{1}{2},j}} \left( [l^k u^*]_{i,j}^{i+\frac{1}{2},j} + [l^n u^*]_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \quad (11)$$

第2段階は、 $u^{n+1}$  が連続の条件 (1) 式を満足するように圧力を修正し、それに伴う速度の補正を行う。

$$\frac{(Su^{n+1})_{i,j} - (Su^*)_{i,j}}{\Delta t} = - \left( [l^k \Delta p]_{i-\frac{1}{2},j}^{i+\frac{1}{2},j} + [l^n \Delta p]_{i,j-\frac{1}{2}}^{i,j+\frac{1}{2}} \right) \quad (12)$$

$$\Delta p \equiv p^{n+1} - p^n \quad (13)$$

$\Delta p$  の具体的な解法は 2.4 節で行う。

## 2.3 近似因数分解法

第1段階の (7) 式を近似因数分解法による Euler Implicit Scheme で解くことにより、時間刻みに関する CFL 条件を緩和し、大きな時間ステップを採り効率化を図った [7]。まず、速度の変化  $\Delta u$  を次式のように定める。

$$\Delta u \equiv u^* - u^n \quad (14)$$

次に、セル境界における  $\xi, \eta$  方向の運動量 flux  $E, F$  は次式で表される。

$$E_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \equiv (l^k T^*)_{i+\frac{1}{2},j}, \quad F_{i+\frac{1}{2},j} \equiv (l^n T^*)_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (15)$$

このときに (7) 式は、以下のような Semi-discrete form で表される。

$$\begin{aligned} S \Delta u + \Delta t (\partial_{\xi} (A^c \Delta u) + \partial_{\eta} (B^c \Delta u)) \\ + \partial_{\xi} (\partial_{\xi} (A^v \Delta u)) + \partial_{\eta} (\partial_{\eta} (B^v \Delta u)) \\ = \Delta t S X - \Delta t (\partial_{\xi} E^n + \partial_{\eta} F^n) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $A, B$  は、運動量 flux  $E, F$  の Jacobian Matrix で、上付き添え字の  $c, v$  は各々対流 flux、粘性 flux に対応するものである。

(16) 式は中間変数  $\Delta \tilde{u}$  を用いることにより、次に示す 2 つの Sweep に分けることができる。

$\eta$ -sweep ;

$$S \Delta \tilde{u} + \Delta t (\partial_{\eta} (B^c \Delta \tilde{u}) + \partial_{\eta} (\partial_{\eta} (B^v \Delta \tilde{u}))) = [rhs. of (16)] \quad (17)$$

$\xi$ -sweep ;

$$S \Delta u + \Delta t (\partial_{\xi} (A^c \Delta u) + \partial_{\xi} (\partial_{\xi} (A^v \Delta u))) = S \Delta \tilde{u} \quad (18)$$

(17), (18) 式を Sweep して、中間速度  $u^*$  を求める。

## 2.4 圧力場の解法

圧力場は、連続の条件 (1) 式を満足するように計算を行う。連続の条件 (1) 式は、離散系では次式のようになる。

$$\left( [l^k \cdot u^{n+1}]_{i-\frac{1}{2},j}^{i+\frac{1}{2},j} + [l^n \cdot u^{n+1}]_{i,j-\frac{1}{2}}^{i,j+\frac{1}{2}} \right) = 0 \quad (19)$$

(19) 式に、第2段階 (12) 式を代入すると、圧力の変化量  $\Delta p$  を未知数とした連続の条件が次式のように Semi-discrete form で表される。

$$\begin{aligned} \partial_{\xi} \left( \frac{l^k}{S} (\partial_{\xi} (l^k \Delta p) + \partial_{\eta} (l^n \Delta p)) \right) \\ + \partial_{\eta} \left( \frac{l^n}{S} (\partial_{\xi} (l^k \Delta p) + \partial_{\eta} (l^n \Delta p)) \right) \\ = \frac{1}{\Delta t} (\partial_{\xi} (l^k u^*) + \partial_{\eta} (l^n u^*)) \end{aligned} \quad (20)$$

(20) 式を高速に解くために、4 段階、V-Cycle の Correction Scheme を使い、各段階に関しては  $\Lambda$ DI 法による反復解法で解いた。求めた  $\Delta p$  から、(13) 式で圧力  $p^{n+1}$  を、(12) 式で速度  $u^{n+1}$  を更新する。

## 2.5 境界条件及び乱流モデル

境界条件を、Table 1 に示す。

PAR の推力を一樣な強さの分布で、複数の格子セルにわたり配置した。また、1つの格子セル内に働く力をそのセル中心に集めて、外力(体積力)として扱うことにした。但し、この手法では、推力を配置する格子近傍をかなり細かくきらない限り、推力を与える線の前後に生じる圧力ジャンプがなまる可能性を持つ。

高レイノルズ数流れを解くために、乱流モデルが必要となる。ここでは Baldwin-Lomax が提唱した代数モデル [8] を用いた。

## 2.6 計算の進行

はじめに、PAR 効果無しでの計算を行う。初期状態は静止状態とし、流入速度が一樣流と等しくなるまで主流方向に一定な加速度を外力として与えた。各時間ステップでの計算は、2.2-2.4 節に示すように IAF 法で第 1 段階の運動方程式を解き次に連続の条件が満足するまで圧力修正を行い収束すれば、次の時間ステップへ進む。この進行を全体の流れ場が収束するまで繰り返す。

次に、PAR 効果無しで収束した計算結果を初期状態とし、推力を加速して与え、設定推力に等しくなった時点で、推力を一定にして全体の流れ場が収束するまで計算を繰り返す。

## 3 対象翼及び計算条件

対象翼は、NACA6409 を用いた。迎角を  $2^\circ$ 、地面から翼後縁までの高度を翼弦長の  $\frac{1}{10}$ 、レイノルズ数を、 $4.0 \times 10^5$  とした。座標系を Fig. 2 に示す。

計算格子は、Fig. 3 に示すような II-グリッドを用いた。格子領域は、翼から Inflow、Outflow、Side Boundary まで、各々翼弦長の 10 倍の距離をとり、格子点数は、主流方向に 137 点、反主流方向には地面までは 41 点、Side Boundary までは 33 点とし、最小格子間隔を、一樣流に基づくレイノルズ数の要請から  $8 \times 10^{-5}$  とした。格子生成には、反復型の幾何学的な方法 [9] を用いた。

推力を配置する位置、角度及び一樣に分布させる強さの総和は、Table 2 の通りである。

## 4 計算結果及び考察

速度ベクトル図を Fig. 4 に示す。Case1 は通常の地面効果であり、翼下部の流れが堰止められて減速している様子がわかる。Case2 ~ 4 は、PAR 効果を与えたもので、点線で囲まれた領域は、推進器で加速された空気流が通過する path であり、これが翼と地面に対してどのような位置関係を持つかは大変重要である。どの場合でも Case1 (off PAR) の時に比べて点線で囲まれた領域で速度の増大がみられる。PAR の配置した位置及び角度は全て同じではあるが、空気流の通過する path は

一樣流と空気流の速度とのベクトル和で決まるため、当然推力が大きいくほど初期の推力の角度に近づき下を向く。しかし、Case4 に関しては、翼の上流で地面に反射しており、翼を通過する時点では、Case3 に比べて上方に path ができている。これらの分布の中では、Case3 の PAR の与え方が最も良いと思われる。また、推力が大きい Case3,4 では、翼の上流、地面近傍で逆流が生じており、推力の損失がみられる。

次に、Fig. 4 に対応する圧力等高線図を Fig. 5 に示す。但し、圧力等高線の間隔は全て異なる。Case1 では、地面と翼下面による閉塞影響で、翼下部の圧力が高くなっている様子がわかる。Case2 ~ 4 において、計算格子が粗いために少しなまっているが推進器の位置に大きな圧力変化がみられる。Case4 では、翼上流、地面近傍において地面と衝突後に逆流している様子がみられ、Fig. 4 の速度ベクトル図と対応がとれている。

翼面上の圧力分布を Fig. 6 に示す。 $C_p$  が 1.0 を越えているのは、推進器が流体に仕事をしているためである。推力を与えると、翼下面は、加速した空気流により堰止め効果を促進し、圧力がさらに増大する。また、翼上面においては、空気流の加速及び翼下部の堰止めによる空気流の上部へのまわりこみにより圧力が低下し、全体として揚力が増大する方向にむかう。

地面上の圧力分布を Fig. 7 に示す。Case4 では  $x/c = -1.0$  近傍で大きな勾配を持っているが、これはこの位置に推進器があるためで、推力が小さくなるにつれて、その傾向が弱まっていくことがわかる。 $x/c = 0.0 \sim 1.0$  の圧力分布は、Fig. 6 の face 面の圧力分布と対応がとれており、PAR の評価に用いることができる。

推力ベースの揚力変化及び翼前縁まわりのピッチングモーメントを Fig. 8, 9 に示す。推力が増えるにつれて、揚力が急激に増加し、モーメントは低下、すなわち頭下げ傾向となり、不安定な方向にむかう。これは、松原 [3]、永松 [4] らの実験結果と同じ傾向を持ち、安定性に関して検討する必要がある。

## 5 結言

本研究では、有限体積法により定式化された NS ソルバーを用いて、翼まわりの流れ場に及ぼす PAR 効果の寄与を検討した。その結果、PAR 効果が速度場、圧力場に与える影響を把握することができ、また、揚力は単純に動圧増加に比例せず、PAR の配置する位置、角度、強さと地面、翼との位置関係により変化するため、空気流の与え方には十分な吟味が必要であることがわかった。

今後の課題としては、Case4 でみられるような地面との衝突噴流は、Baldwin-Lomax の代数モデルでは表現することができない。よって、噴流等に対応できる乱流モデルを組み込む必要がある。また、アスペクト比が小さい WIG まわりの流れ場をシミュレートするには、翼端渦等の 3 次元性を考慮することは不可欠である。今後、3 次元翼まわりの流れ場を考えていきたい。

参考文献

- [1] 安東 茂典, "米国 DTNSRDC の PAR-WIG 設計上の基本思想", 日本航空宇宙学会誌 39 巻 448 号, (1991).
- [2] R.W.Gallington, "Power Augmentation of Wing in Ground Effect Craft", *Proceedings of Intersociety Highperformance Marine Vehicle Conference and Exhibit*, (1992).
- [3] 松原 武徳 他, "地面効果翼の高揚力化の研究 (第2報, 動力増強形地面効果翼 PAR モデル風洞試験)", 日本機械学会論文集 (B 編) 58 巻 552 号, (1992).
- [4] 永松 哲郎, 呉 文雄, "PAR-WIG の空力特性に関する実験的研究", 関西造船協会誌 222 号, (1994).
- [5] 平田 信行, "2次元 PAR-WIG まわりの粘性流計算", 日本造船学会論文集 174 号, (1994).
- [6] M.Rosenfeld, D.Kwak and M.Vinkour, "A Fractional Step Solution Method for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinates Systems", *J. Comput. Phy.*, 94, (1991).
- [7] T.Hino, "A Finite-Volume Method for Unsteady Viscous Free Surface Flows", *Proceedings of Second Osaka International Colloquium on Viscous Fluid Dynamics in Ship and Ocean Technology*, (1992).
- [8] B.Baldwin and H.Lomax, "Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows", *AIAA paper*, 78-257, (1978).
- [9] 兎玉 良明, "Implicit Geometrical Method による実用船型まわりの格子生成", 日本造船学会論文集 169 号, (1991).

Table 1 Boundary Conditions.

	Velocity	Pressure
Inflow	$u = 1, v = 0$	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$
Outflow	$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0$	$p = 0$
Side Boundary	$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0$	$p = 0$
On Ground	$u = 1, v = 0$	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$
On Body	$u = 0, v = 0$	$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

$n$  is the outward normal vector of each boundary.

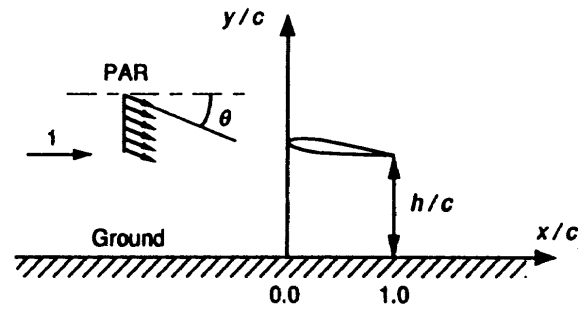


Fig.2 Coordinate System.

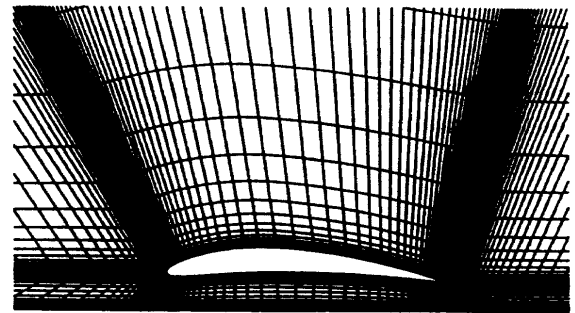


Fig.3 Computational Grid.

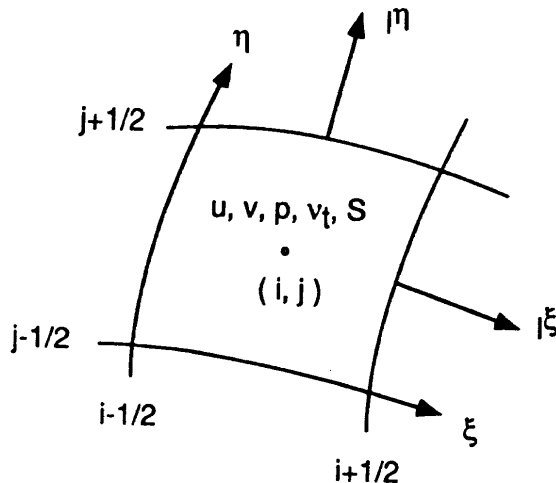


Fig.1 Layout of Geometric Parameters and Primitive Variables.

Table 2 Position and Strength of PAR Thruster.

	$\alpha(deg.)$	$h/c$	$C_T$	$\theta(deg.)$	$x/c$	$y/c$
Case 1	2	0.1	0	17	-1.0	0.125 ~ 0.425
Case 2	2	0.1	2	17	-1.0	0.125 ~ 0.425
Case 3	2	0.1	4	17	-1.0	0.125 ~ 0.425
Case 4	2	0.1	6	17	-1.0	0.125 ~ 0.425

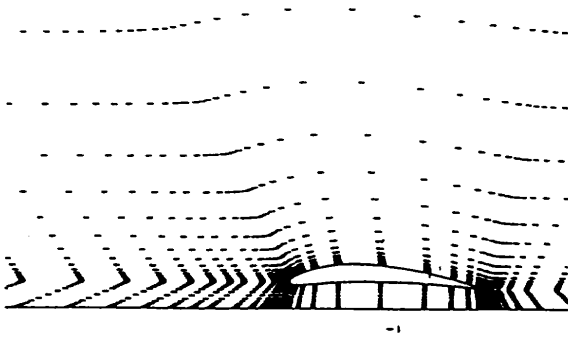


Fig.4(a) Computed Velocity Vector Map (Case1).

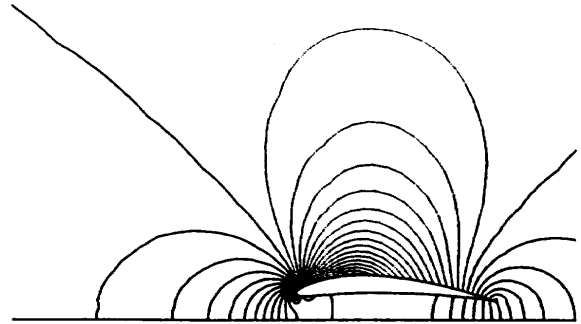


Fig.5(a) Computed Pressure Contour Map (Case1)  
 $(C_p = 0.05 \times \frac{1}{2}\rho V^2)$ .

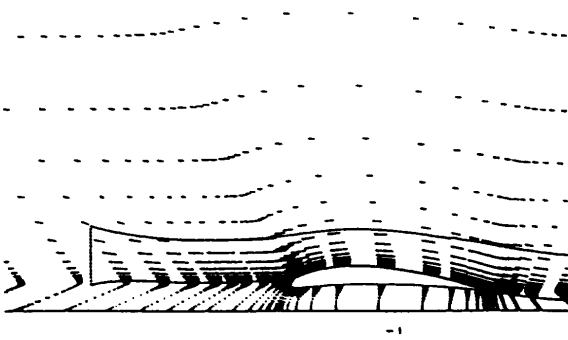


Fig.4(b) Computed Velocity Vector Map (Case2).

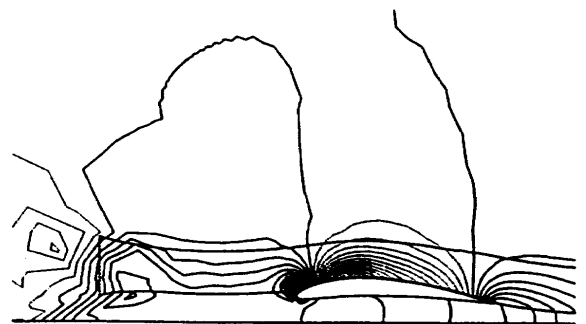


Fig.5(b) Computed Pressure Contour Map (Case2)  
 $(C_p = 0.2 \times \frac{1}{2}\rho V^2)$ .

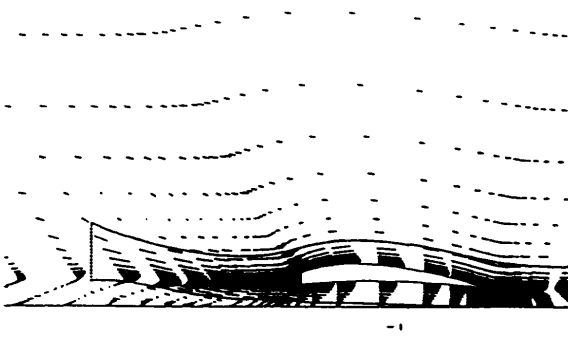


Fig.4(c) Computed Velocity Vector Map (Case3).

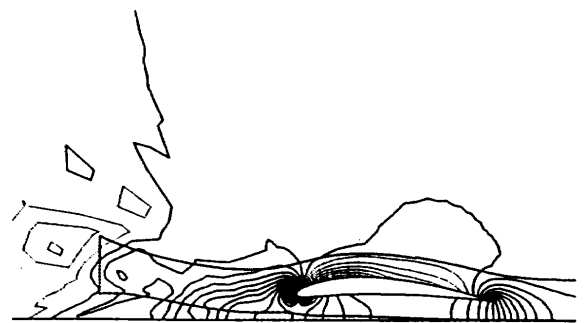


Fig.5(c) Computed Pressure Contour Map (Case3)  
 $(C_p = 0.5 \times \frac{1}{2}\rho V^2)$ .

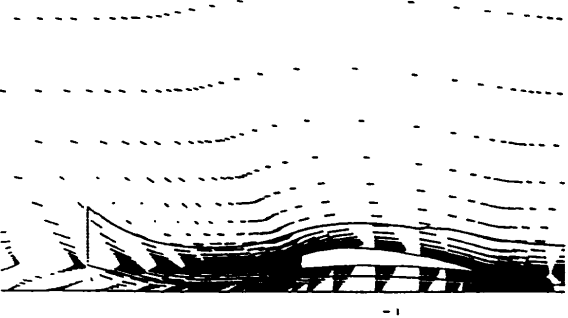


Fig.4(d) Computed Velocity Vector Map (Case4).

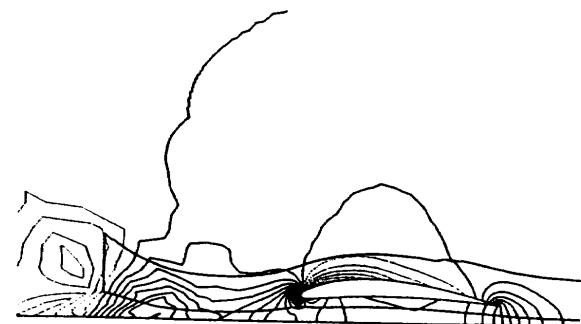


Fig.5(d) Computed Pressure Contour Map (Case4)  
 $(C_p = 1.0 \times \frac{1}{2}\rho V^2)$ .

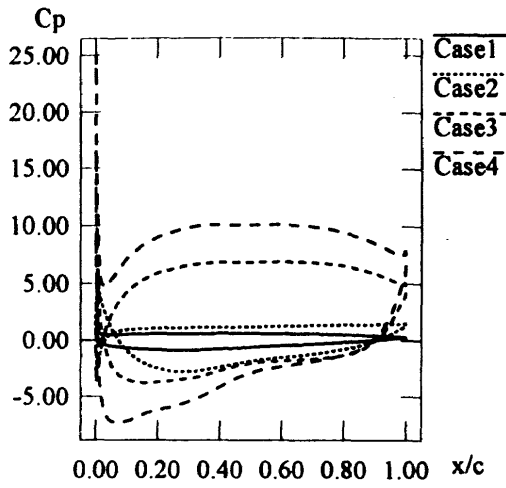


Fig.6 Effect of PAR Thrust on Computed Pressure Distribution on Wing.

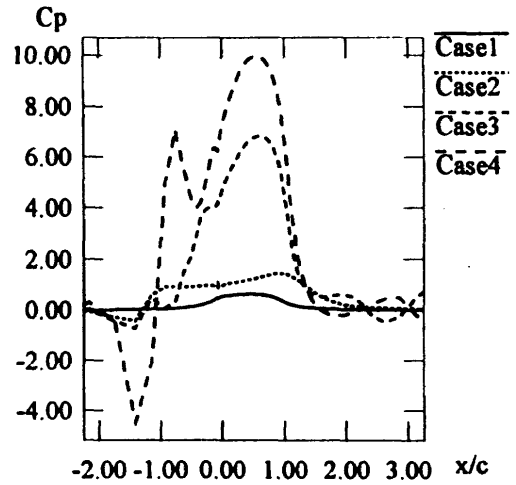


Fig.7 Effect of PAR Thrust on Computed Pressure Distribution on Ground.

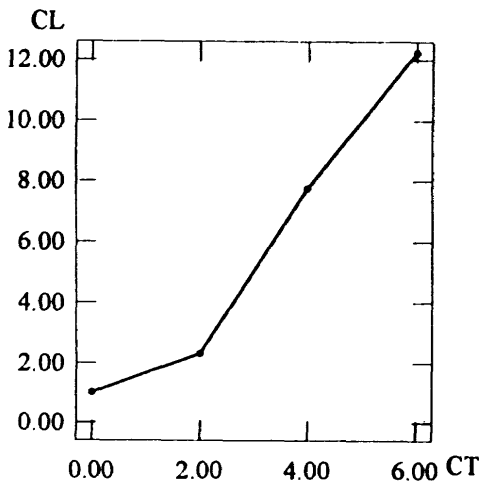


Fig.8 Effect of PAR Thrust on Lift.

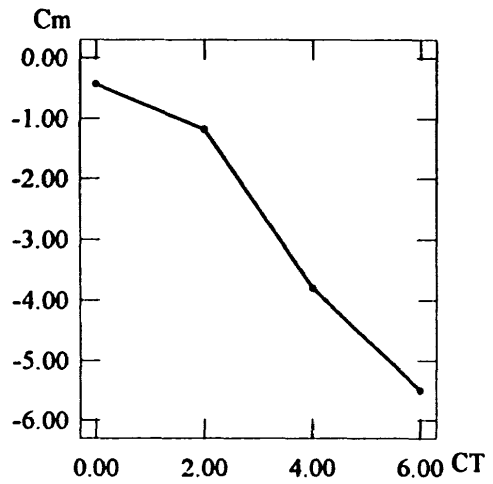


Fig.9 Effect of PAR Thrust on Pitching Moment around Leading Edge.



## 遷音速ロータ騒音のCFDによる直接解析

青山 剛史\*、 齊藤 茂\*

## Direct Analysis of Transonic Rotor Noise with CFD Technique

by

Takashi AOYAMA and Shigeru SAITO

National Aerospace Laboratory

## ABSTRACT

Three-dimensional Euler equations are directly solved to analyze the High-Speed Impulsive (HSI) noise of a helicopter rotor by using CFD technique. The HSI noise is one of the most important sources of a helicopter noise. It is generated on the advancing side of a helicopter caused by the shock wave on a blade surface. Although the method which solves the Ffowcs-Williams and Hawkings equation has been often used to analyze the subsonic rotor noise, it doesn't success to predict the transonic rotor noise such as the HSI noise. With the advance of CFD technique, the calculation of the HSI noise is recently performed by the combined method of CFD with the Kirchhoff's equation or by the direct simulation using CFD technique. The latter has not been studied enough because huge number of grids are needed to capture the propagation of sound from a blade to an observer located in a far field. So, the powerful supercomputer of NAL, Numerical Wind Tunnel (NWT) is employed to calculate the HSI noise of a non-lifting hovering rotor directly by using the method. The numerical method to solve the governing equation is an implicit finite-difference scheme which utilize a higher-order upwind scheme based on TVD. As a result, it is observed that the calculated wave form is in very good agreement with an experimental data at sonic cylinder. The agreement is not very good at about three rotor radii, but is reasonable at about two rotor radii.

## 1. はじめに

わが国におけるヘリコプタの重要性を端的に示す例としてよく引合いに出されるのが、民間航空機に占めるヘリコプタの割合である。この値は世界平均ではほぼ3~5%であるところ、わが国においては約50%という驚異的な値になり、実に空を飛んでいる民間機の2機に1機はヘリコプタということになる。そして、最近出された国際ヘリコプタ協会(HAI)の提言[1]にもある通り、アメリカにおいては統合輸送システムの中でのヘリコプタの役割が注目されている。この統合輸送システムとは、提言の中の言葉を借りれば、例えば鉄道の駅にバスが乗入れ、その屋上でヘリコプタやティルトロータ機が発着するといったもので、このシステムを目指して既にアトランタ、ダラス、グランド・ラピッド及びセントルイスなどアメリカの数都市で計画が進んでいる。一方、我が国においてもコンピュータ・ヘリコプタの重要性が認識されてきており、3月に通

産省と郵政省の外郭団体である基盤技術研究センタの出資によって(株)コンピュータ・ヘリコプタ先進技術研究所が発足し、今後7年間で総額90億円をコンピュータ・ヘリコプタの研究に費やすことになる。

では、ヘリコプタが人工の密集する都市でコンピュータ機として使用される場合何が問題となるか。それはもちろん安全性と騒音である。後者に着目すれば、ヘリコプタの騒音は主に以下の3つに分けられる。

- 1) 高速衝撃音 (HSI Noise : High-Speed Impulsive Noise)
- 2) ブレード渦干渉音 (BVI Noise : Blade-Vortex Interaction Noise)
- 3) 広帯域音 (Broadband Noise)

1) はヘリコプタが高速前進飛行する際に、前進側のブレード上に発生する衝撃波に起因するもので、一度これが発生すると他のあらゆる騒音に卓越し、人はこれ

\*航空宇宙技術研究所

を極めて耳障りな音として感じる。これを解析する方法としては主に以下の3つが挙げられる。

- a) Ffowcs-Williams and Hawkings(FW-H)の波動方程式を用いる方法 [2][3]
- b) Kirchhoffの波動方程式を用いる方法 [4][5][6]
- c) CFDを用いる方法 [7][8]

まず a) は、音源をその指向性によって単極子(monopole)、双極子(dipole)、4極子(quadrupole)の3つに分けて考えることができるので、騒音に対する音源の寄与が見通しよく与えられるという利点がある。しかし、衝撃波などの非線形現象に起因する騒音が属する4極子の項を精度よく見積ることが困難なため、今のところ高速衝撃音の予測には成功していない。

次に b) は、衝撃波などの非線形現象をCFDでとらえ、その解をもとに波動方程式を積分するので、高速衝撃音の解析に適しておりその予測にもほぼ成功している。しかし、音源を囲むKirchhoff面と呼ばれる閉曲面の取り方に任意性があるという欠点を持つ。また、Kirchhoffの波動方程式自体は古典的な波動方程式にgeneralized function theory[9]を適用して不連続な関数も扱えるように変形しただけなので、この範疇を出るものではない。従って、高速衝撃音をうまく予測できるかは、ほとんどCFDの結果のみに依存することになる。

そして c) は、数値流体力学の発展に伴ってこれを計算空力音響学(CAA: Computational Aeroacoustics)にも適用しようという試みから出発したものであり、最も仮定が少ないという点で今後その発展が期待されている。従来空力音は、流れによって引き起こされ音速で圧縮性流体中を伝播する微弱な波として扱われてきた。古典的な波動方程式もこの考え方に基づいて導かれており、また特別の場合を除いて空力音が流れに及ぼす影響が小さいことから、空力音の発生源である流れの影響は波動方程式の音源項(右辺)に現れる強制力として理解されてきた。このように空力音と流れを原因と結果として見る見方はLighthillの音響アナロジーによって発展し、FW-Hの波動方程式に受け継がれている。しかし、直接CFDで音場を解析する場合には当然空力音と流れの相互干渉も許すため、この点で従来の見方と大きく異なることになる。遷音速流れでは、空力音と流れを因果関係で見える見方にそぐわない現象も起こるので、特にこのような現象の解析にはCFDを用いる方法が力を発揮するであろう。ただしこの方法においては、音源から観測者まで解像度のよい格子を用意する必要があるため、遠距離場の計算

を行うのに膨大な格子点と計算時間を必要とする欠点がある。このためBaeder[7]が初めて解析を行い、その後ONERAとの共同研究に発展している以外ほとんど手がつけられていない状況である。そこで、最近航技研に導入された並列計算機を利用して、この方法の有効性を検討した。

## 2. 計算法

回転座標系で記述されたオイラー方程式を差分法で解く方法[10]で、微弱な音圧を遠距離場まで捕捉し続けるために、線形特性曲線の周辺に格子を集中させる工夫がなされている。具体的には図1のようにブレード延長上の格子が密集する部分を、音波が伝播する曲線に添って曲げるわけであるが、その曲げ具合は図2(b)の角度 $\theta$ に従う。図2(a)は、ブレード先端の速度ベクトルが、ロータの回転中心から $r$ だけ離れたところに位置する観測者の方向に向いた瞬間で、この時発せられた音が観測者にとどいた瞬間を表すのが図2(b)である。この間、時刻は $\sqrt{r^2 - R^2}/c[s]$ だけ経過しているので、ブレードは $(\omega/c)\sqrt{r^2 - R^2}[\text{rad}]$ だけ回転することになる。従って、ブレードから見たとき音は図中の特性曲線のように後方に曲がりながら遠方へ伝播していくことになる。ここで $R$ はブレード半径、 $c$ は音速、 $\omega$ は回転角速度である

元来、音波は微弱な波であるため、通常の流体計算に用いられるスキームではそれを精度よくとらえることは不可能であると考えられるが、ここでは対象としている高速衝撃音が比較的大きな音圧変動を伴う現象であるため、従来のCFDをそのまま適用できるであろうという考え方が基礎となっている。

計算はロータ半径が1.045[m]、アスペクト比が13.71、ブレード枚数が4枚、翼型がNACA0012の振り下げを持たないUH-1Hの1/7モデルロータに対して行った。計算条件は、翼端マッハ数 $M_T = 0.9$ で無揚力のホバリング状態である。これは図3(b)に示す非局所化と呼ばれる現象が起こる条件である。この現象は、ブレードに乗った座標系で見たとき外側に現れる超音速領域とブレード上の超音速領域がつながる状態を意味し、この現象が起こるとブレード上の衝撃波によって生じた強い擾乱が遠方まで達し、観測者の感じる騒音の波形は左右対称のものから鋸の歯のような非対称なものに変わり、音圧の負のピーク値も急激にその絶対値が大きくなる。この不連続な現象に関しては、理論的に以下のように説明されている。即ち、亜音速領域では支配方程式は楕円型であるが、超音速領域では波動の伝播を表す双曲型になるため、超音速領域がつながることによって擾乱が遠方まで伝播することになる[3]。

### 3. 計算結果

図4に計算結果を示す。図で横軸は時間、縦軸は音圧であり、ブレードの回転中心から測った観測者の位置は(a)(b)(c)の順にそれぞれ $1.11R$ 、 $2.18R$ 、 $3.09R$ である。また実験結果はPurcellら[5]によって得られたものである。(a)の観測者位置は図3に示した亜音速領域と超音速領域の境界、即ちSonic Cylinderの位置である。この位置では計算結果と実験値の一致は極めて良好で、計算結果は波形をよく予測している。(b)の位置でも両者はかなりよく一致し、計算結果は波形をよく予測している。ただし、負のピークの後の圧力回復を過大評価しているが、この部分は実験によってかなりばらつきがあるので、必ずしも計算結果を悲観する必要はないと思われる。しかし、(c)の位置での一致は悪く、計算結果は波形をうまく予測していない。これらの結果は格子点数を増やしても改善されなかった。従って、今のところこの方法が使えるのはほぼ $2R$ までである。

高速衝撃音の予測には、ブレード外に伸びた擾乱の曲率を精度よくとらえることも重要であると指摘されている[11]。図5は本方法でとらえた擾乱の曲率を他の方法で得られたものと比較した結果である。図より本方法の与える曲率は、ONERAの比較で最も優れていると判断されたEulerのそれと極めて近いことがわかる。

ここでの計算は、従来の流れ場を求めるCFDの手法をそのまま騒音の計算に適用しただけなので、空間精度の改善などいろいろな課題は残るが、これらが克服されたとしても、またNWTを凌ぐ計算機が現れたとしても、依然として実際に興味の対象となるブレード半径の何十倍何百倍も離れた位置にいる観測者の感じる音をCFDでとらえようとするのは困難であろう。従って今後も当分、先に述べた3つの計算法がそれぞれの得意とする部分を生かしながらかつて使われることが望ましい。そして先にも述べた通り、Kirchhoffの波動方程式を用いる方法はその予測精度がほぼCFDの結果のみに依存するので、通常Kirchhoff面が設定されるSonic Cylinderの周辺で実験値を極めてよく予測する本方法は、Kirchhoffの波動方程式を用いる方法と組み合わせた場合、非常によい結果が得られると考えられる。確かに以前われわれがKirchhoffの波動方程式を用いて行った計算結果(図6の実線)は、FW-IIを用いた他の方法に比べて特に非局所化が起こる条件(図6の(b))で顕著な改善を見せており、上述したことが示されたと言える。

### 4. 結論

- (1) 本方法は、Sonic Cylinderの位置で極めてよく音圧波形を予測し、約 $2R$ の位置までは波形をうまくとらえられる。また、ブレード外に伸びた擾乱の曲率もよくとらえている。
- (2) 従って、Kirchhoffの波動方程式を用いる方法と組み合わせるのに適している。
- (3) 高速衝撃音を解析する3つの方法は、それぞれが利点を生かしてともに発展することが望ましい。

### 参考文献

- [1] コミュニタ・ビジネス研究(No.31)、地域航空総合研究所、1994年5月
- [2] Boxwell, D.A. et al., Hovering Impulsive Noise : Some Measured and Calculated Results, Vertica, 1979.
- [3] Schmitz, F.H. et al., Transonic Rotor Noise - Theoretical and Experimental Comparisons, Vertica, 1981.
- [4] Isom, M. et al., Geometrical Acoustics and Transonic Helicopter Sound, AIAA Paper 87-2748, 1987.
- [5] Purcell, T.W., CFD and Transonic Helicopter Sound, 14th ERF, 1988.
- [6] Aoyama, T. et al., Unsteady Analysis of Transonic Helicopter Rotor Noise, 19th ERF, 1993.
- [7] Baeder, J.D., Euler Solution to Nonlinear Acoustics of Non-Lifting Hovering Rotor Blades, 16th ERF, 1990.
- [8] Prieur, J. et al., Aerodynamic and Acoustic Calculations of Transonic Nonlifting Hovering Rotors, AHS Meeting, 1991.
- [9] Farassat, F. et al., Extension of Kirchhoff's Formula to Radiation from Moving Surfaces, J. Sound Vib., 1988.
- [10] Aoyama, T. et al., Unsteady Calculation for Flowfield of Helicopter Rotor with Various Tip Shapes, 18th ERF, 1990.
- [11] Prieur, J., Importance of an Accurate Prediction of Shock Curvature for High-Speed Rotor Noise, J. of AHS, 1992.

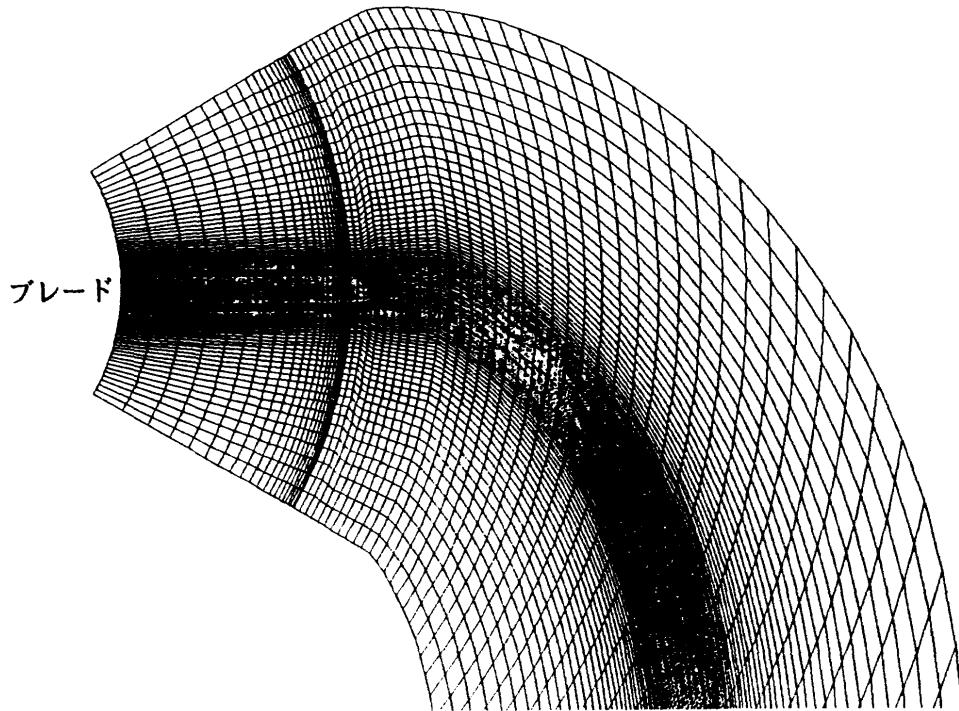


図1 計算格子

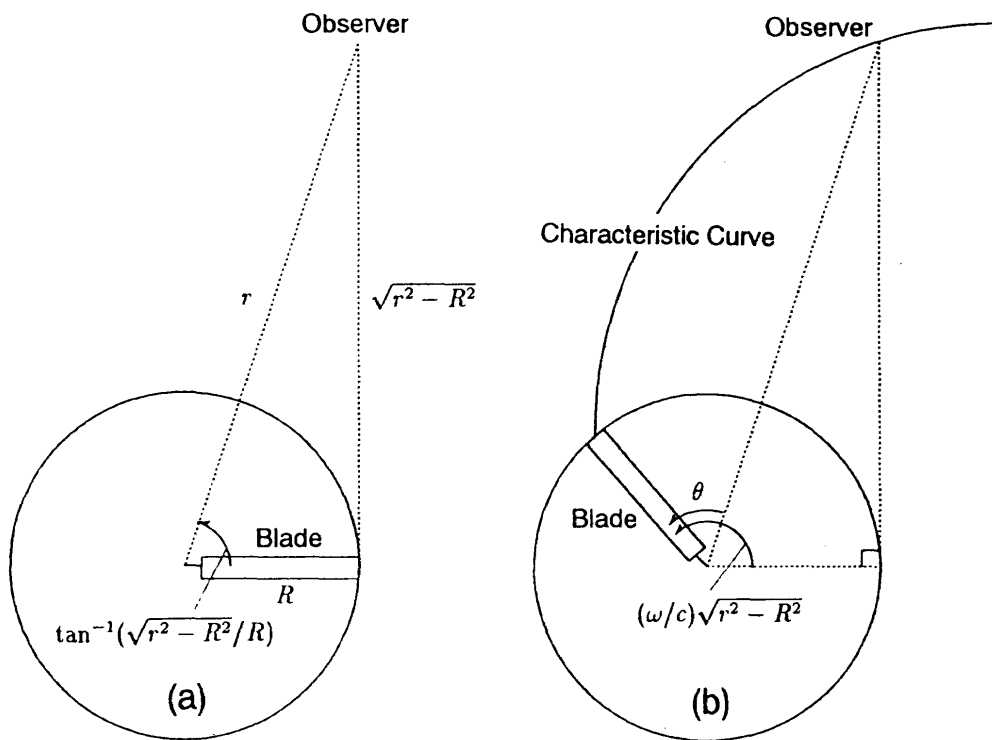


図2 特性曲線

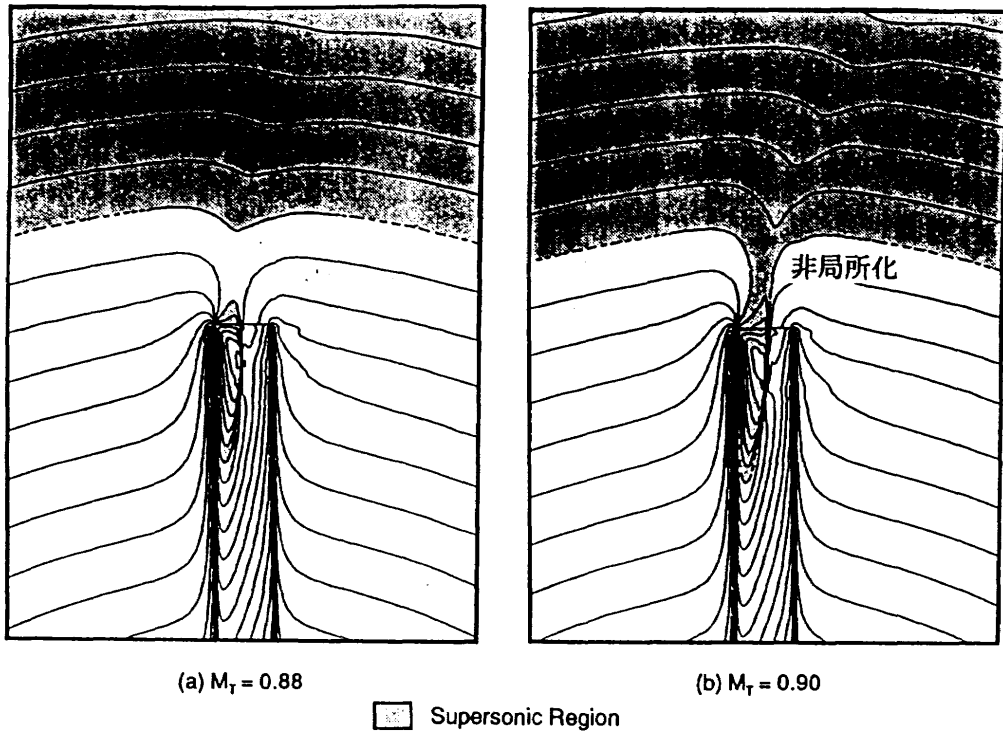


図3 ブレード翼端周辺の等マッハ線図

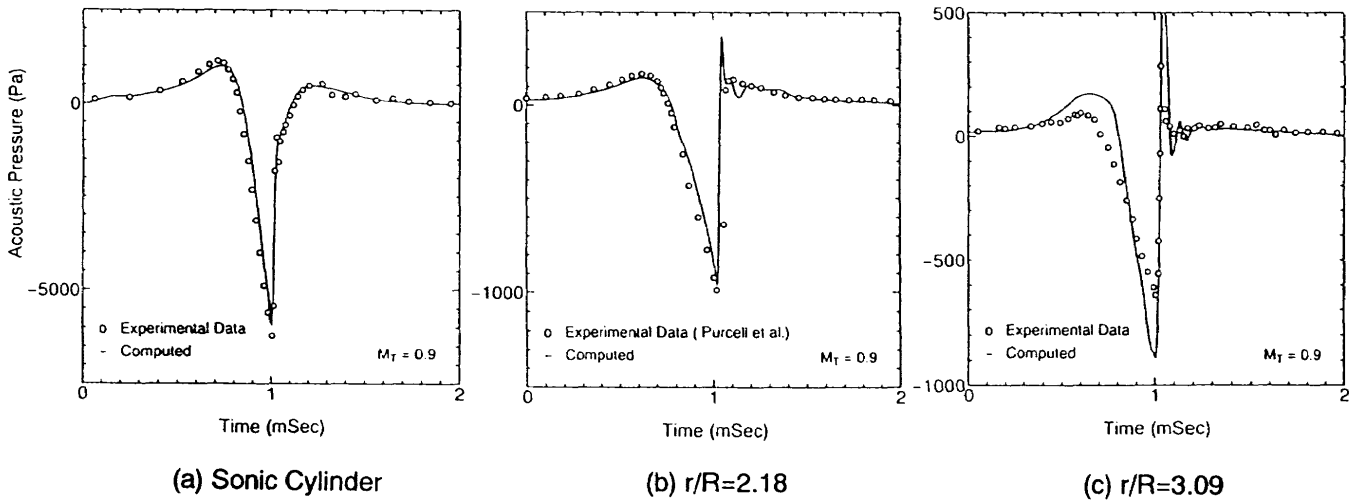


図4 音圧波形の実験値とCFDの結果との比較

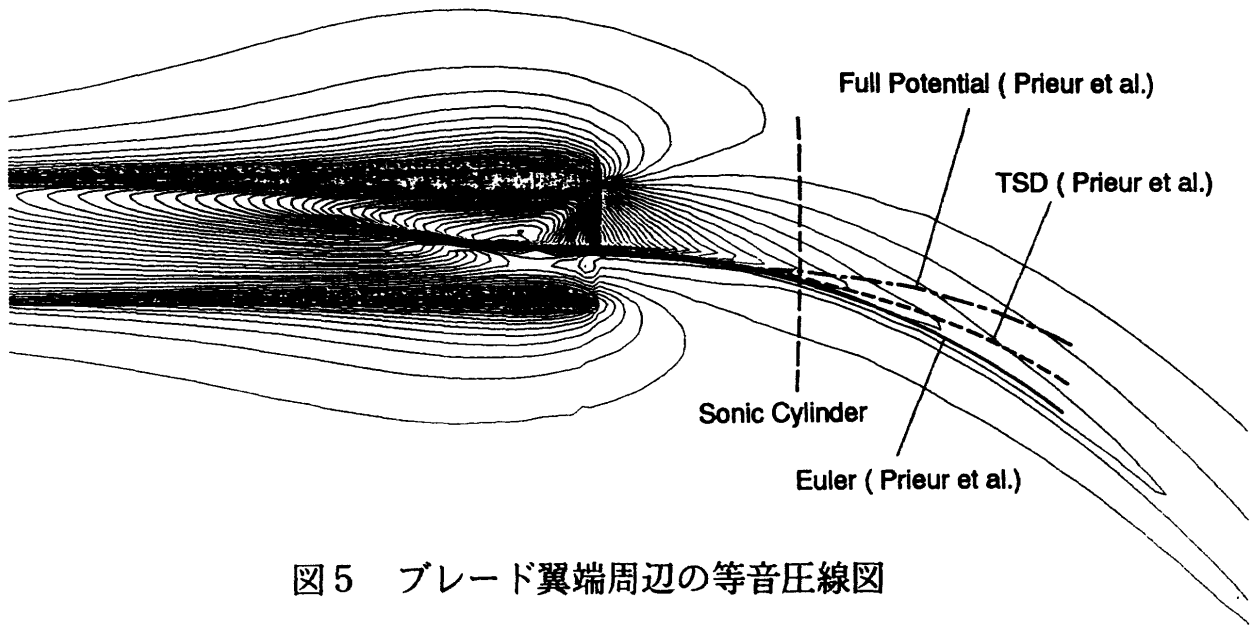


図5 ブレード翼端周辺の等音圧線図

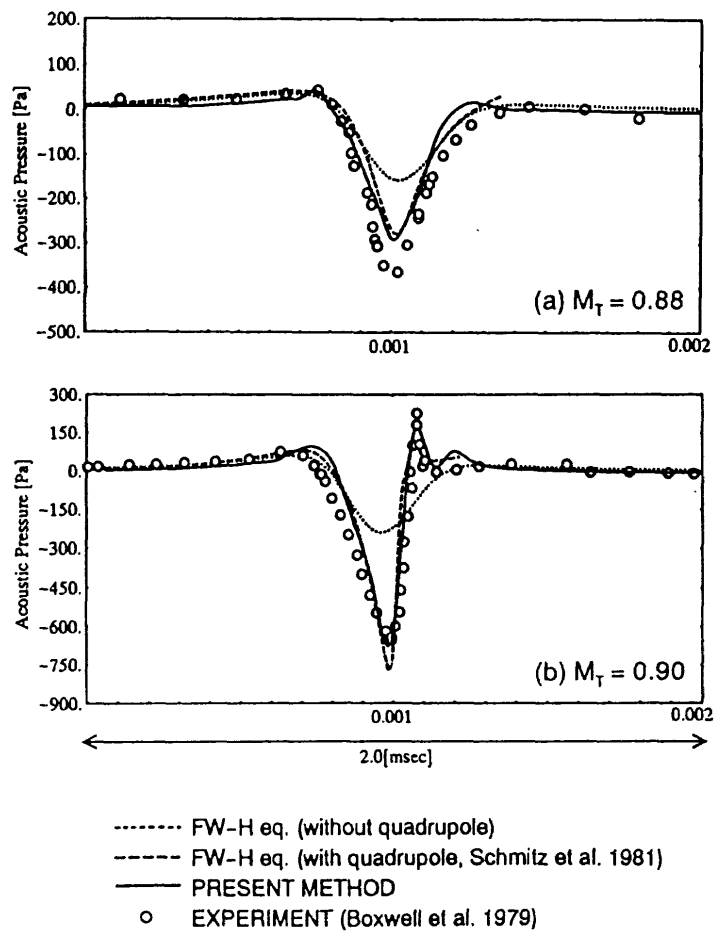


図6 音圧波形の実験値と計算結果の比較

## 境界層流れの計算格子に対する依存性

野村聡幸\*

### Dependency of a Boundary Layer Flow on Computational Grids

by

Toshiyuki NOMURA  
National Aerospace Laboratory

#### ABSTRACT

The first step to numerically predict laminar-turbulent transition is taken by the linear stability analysis on a laminar boundary layer. Presently the improvements of high-accuracy schemes as well as computers have enabled Navier-Stokes code to calculate the boundary layer instead of a boundary layer code. It is therefore significant to verify the accuracy of the boundary layer calculated by Navier-Stokes code. By simulating a supersonic flow around an infinite swept cylinder with three kinds of grids which differ in density, it is investigated how many cells are needed in the boundary layer to obtain the accurate velocity and temperature profiles independent of grid density.

#### 1. はじめに

物体表面上の境界層が層流から乱流へ遷移を開始する位置を計算で予測するには、層流境界層を線形安定解析にかけて微小擾乱の空間増幅率を算出するとともに、微小擾乱の進行する方向を特定する。そして空間増幅率を擾乱の進行経路に沿って積分した値が $e^N$  ( $N$ は対応する実験より定まる整数) になったとき、そこを遷移の開始位置と定める。

従来は線形安定解析に用いる層流境界層を、ポテンシャル・コードと境界層コードで、またはEulerコードと境界層コードで求めることが主流であった。しかし今では、Navier-Stokesコードの高精度化および計算機の高速化と大容量化で、上記のコードに代わってNavier-Stokesコードが多く用いられるようになってい

る<sup>1,2,3)</sup>。

遷移の開始位置を予測することからさらに進んで、遷移の開始から完全に乱流になるまでの流れをモデル化する試みが、NASA Langleyを中心として進められている<sup>4)</sup>。このモデルが完成すれば、実験で観察される層流、遷移流、乱流の全ての過程がNavier-Stokesコードで扱えるようになり、実験と比較し得る高精度のデータが得られるようになると期待される。

線形安定解析で妥当な結果を得るためにも、またモデル化の必要な遷移流や乱流に上流から影響を及ぼすことから、まずは層流がNavier-Stokesコードで正確に得られることを確認する必要がある。本研究では、超音速輸送機の翼の前縁をモデル化した無限後退円柱まわりの流れを一般的なNavier-Stokesコードで数値シミュレーションし、正確な層流境界層を得るにはどの程度の格子密度が必要とされるかを調べた。

\* 航空宇宙技術研究所

2. 計算法

Navier-Stokes方程式を有限体積法で数値的に解く。時間進行は陰解法で行う。

2.1 基礎方程式

保存型で表された薄層近似Navier-Stokes方程式を基礎方程式とする。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \zeta} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \eta}$$

2.2 数値流束

非粘性流束をChakravarthy-OsherのTVDスキーム<sup>9)</sup>で求める。セル中間面  $j+1/2$  での一次精度の流束を以下に示す。

$$\begin{aligned} \hat{E}_{j+1/2} &= \frac{1}{2} (\hat{E}_j + \hat{E}_{j+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} T_{\xi, j+1/2} (\Lambda_{\xi, j+1/2}^+ - \Lambda_{\xi, j+1/2}^-) T_{\xi, j+1/2}^{-1} (Q_{j+1} - Q_j) \\ \hat{A} &= \frac{\partial \hat{E}}{\partial Q} = T_{\xi} \Lambda_{\xi} T_{\xi}^{-1} \\ \lambda_{\xi}^{\pm} &= \frac{1}{2} (\lambda_{\xi} \pm |\lambda_{\xi}|) \end{aligned}$$

$\Lambda_{\xi}$  はヤコビ行列 $\hat{A}$ の固有値 $\lambda_{\xi}$ からなる対角行列であり、 $T_{\xi}$ は $\hat{A}$ の固有ベクトルからなる相似変換行列である。 $\Lambda_{\xi}^+$ は $\Lambda_{\xi}$ の $\lambda_{\xi}$ を $\lambda_{\xi}^+$ に換えたものであり、 $\Lambda_{\xi}^-$ は $\lambda_{\xi}$ に換えたものである。なお、セル中間面での物理量はRoeの近似Riemann解法で求める。上記の一次精度の流束にminmod関数を含む補正項を加えることで、衝撃波捕獲性を失うことなく、精度を三次に上げることができる。

粘性流束はGaussの定理に基づく中心差分に相当する方法で求める。

2.3 時間進行法

陰解法ながら1ステップの時間進行にかかるCPUタイムが少ない対角化ADI法<sup>9)</sup>を、ローカル・タイムステップと併せて用いる。

$$\begin{aligned} T_{\xi} (I + \frac{\Delta t}{V} D_{\xi} \Lambda_{\xi}) T_{\xi}^{-1} T_{\eta} (I + \frac{\Delta t}{V} D_{\eta} \Lambda_{\eta}) T_{\eta}^{-1} \\ T_{\zeta} (I + \frac{\Delta t}{V} D_{\zeta} \Lambda_{\zeta}) T_{\zeta}^{-1} \Delta Q = - \frac{\Delta t}{V} \hat{R} \\ \hat{R} = D_{\xi} \hat{E} + D_{\eta} \hat{F} + D_{\zeta} \hat{G} - \frac{1}{Re} D_{\eta} \hat{F}_v \end{aligned}$$

$D_{\xi}$ は $\xi$ 方向の差分オペレータである。ここで左辺の差分を一次風上差分として、対角優位による安定化を図っている。

2.4 計算格子

超音速流中に置かれた後退角60度の無限円柱(図1)に対し、主流に平行な断面上で、密度の違う三種類のC型格子(表1、図2)がTakanashiの方法<sup>7)</sup>に基づくコードで生成された。主流のマッハ数 $M_{\infty}$ は3.5、レイノルズ数 $R_{\infty, D}$ は $1.05 \times 10^6$ である。数値シミュレーションに用いる三次元格子は、C型格子をスパン方向の9箇所に等間隔に置くことにより生成される。

収束解は4000~6000ステップの時間進行で得られた。ちなみに、格子Bでの2000ステップの時間進行に要するCPUタイムは、NWTのプロセッサを4台(1台のピーク演算速度は1.7GFLOPS)使って並列ベクトル演算を行い、約8分である。

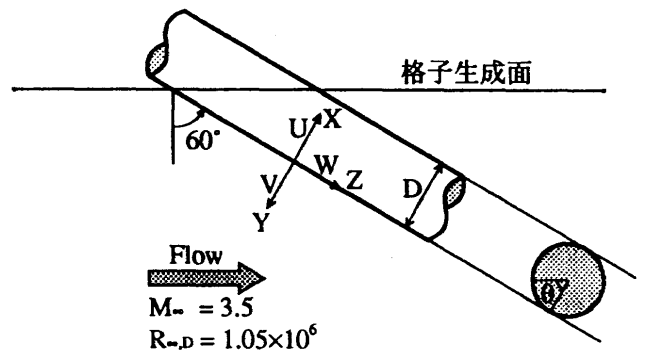


図1 無限後退円柱

	点数( $\xi \times \eta$ )	最小格子間隔( $y^*$ )	クーラン数
格子A	112x 46	1.658471	1
格子B	224x 91	0.4233750	2
格子C	448x181	0.1064922	8

表1 計算格子



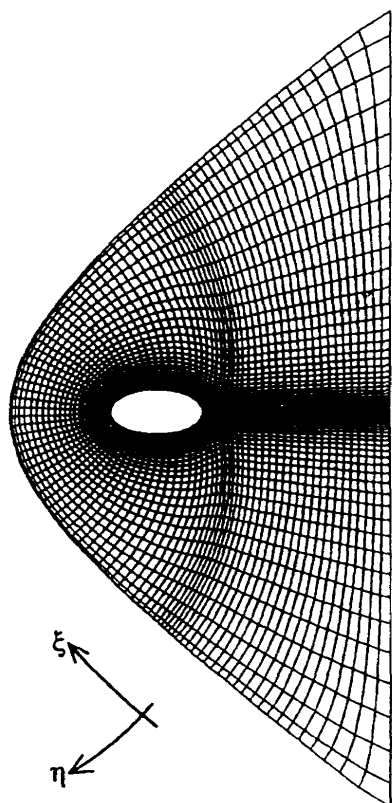


図2 格子A

### 3. 境界層中の分布の比較

$\theta = 0^\circ$  (付着線)での速度分布(円柱の周方向の速度 $U$ 、スパン方向の速度 $W$ )および温度分布を比較する(図3)。格子Aは境界層中に8個のセルを、格子Bは14個のセルを、格子Cは28個のセルを含む。物理量の定義点を線分で結んでいるため、格子Aの分布は粗さが目立つが、円柱表面(断熱壁)で温度がやや高いことを除けば、定義点での値は他の分布と一致している。また、格子Bの分布と格子Cの分布は完全に一致している。

$\theta = 30^\circ$ での速度分布および温度分布を比較する(図4)。格子Aは境界層中に7個のセルを、格子Bは13個のセルを、格子Cは26個のセルを含む。 $\theta = 0^\circ$ での分布と同様、格子Aの円柱表面での温度がやや高いことを除けば、速度分布も温度分布も一致は良好である。

$\theta = 60^\circ$ での速度分布および温度分布を比較する(図5)。格子Aは境界層中に7個のセルを、格子Bは13

個のセルを、格子Cは26個のセルを含む。やはりここでも $\theta = 0^\circ$ での分布と同様、円柱表面での温度が格子Aでやや高く、それ以外は分布間に何の差異も認められない。

$\theta = 90^\circ$  (50%コード)での速度分布および温度分布を比較する(図6)。格子Aは境界層中に9個のセルを、格子Bは17個のセルを、格子Cは32個のセルを含む。格子Bの分布と格子Cの分布は速度、温度ともに完全に一致しているものの、格子Aの $W$ の分布に僅かなずれが認められる。またここでも円柱表面の温度が格子Aでやや高くなっている。

### 4. まとめ

超音速流中に置かれた無限後退円柱のまわりに密度の違う三種類の格子を生成し、それぞれの格子を用いてNavier-Stokesコードで数値シミュレーションを行った。各格子で得られた層流境界層中の速度分布および温度分布を円柱表面上の複数位置で比較することにより、境界層を10個程度のセルで分解すれば、格子密度に依存しない層流解が得られることがわかった。

計算格子の生成にあたり、高梨進室長と武元雅美女史に御協力いただきました。心より感謝いたします。

### 参考文献

- 1) Woan, C. J., Gingrich, P. B. and George, M. W., "CFD Validation of a Supersonic Laminar Flow Control Concept," AIAA Paper 91-0188, January 1991.
- 2) Fenno, C. C., Jr., Streett, C. L. and Hassan, H. A., "Use of Finite Volume Schemes for Transition Simulation," AIAA Paper 91-0743, January 1991.
- 3) 野村聡幸, "圧縮性境界層に対する線形安定解析システム," 第25回流体力学講演会講演集, pp. 203-206, 1993.
- 4) Chang, C. -L., et al., "Transition Region Modeling for Compressible Flow," AIAA Paper 92-5066, December

- 1992.
- 5) Chakravarthy, S. R., "Development of Upwind Schemes for the Euler Equations," NASA CR 4043, 1987.
- 6) Pulliam, T. H. and Chaussee, D. S., "A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm," J. Comp. Phys., Vol. 39, pp. 347-363, 1981.
- 7) Takanashi, S. and Takemoto, M., "A Method of Generating Structured-Grids for Complex Geometries and Its Application to the Navier-Stokes Simulation," CFD J., Vol. 2, No. 2, pp. 209-218, 1993.

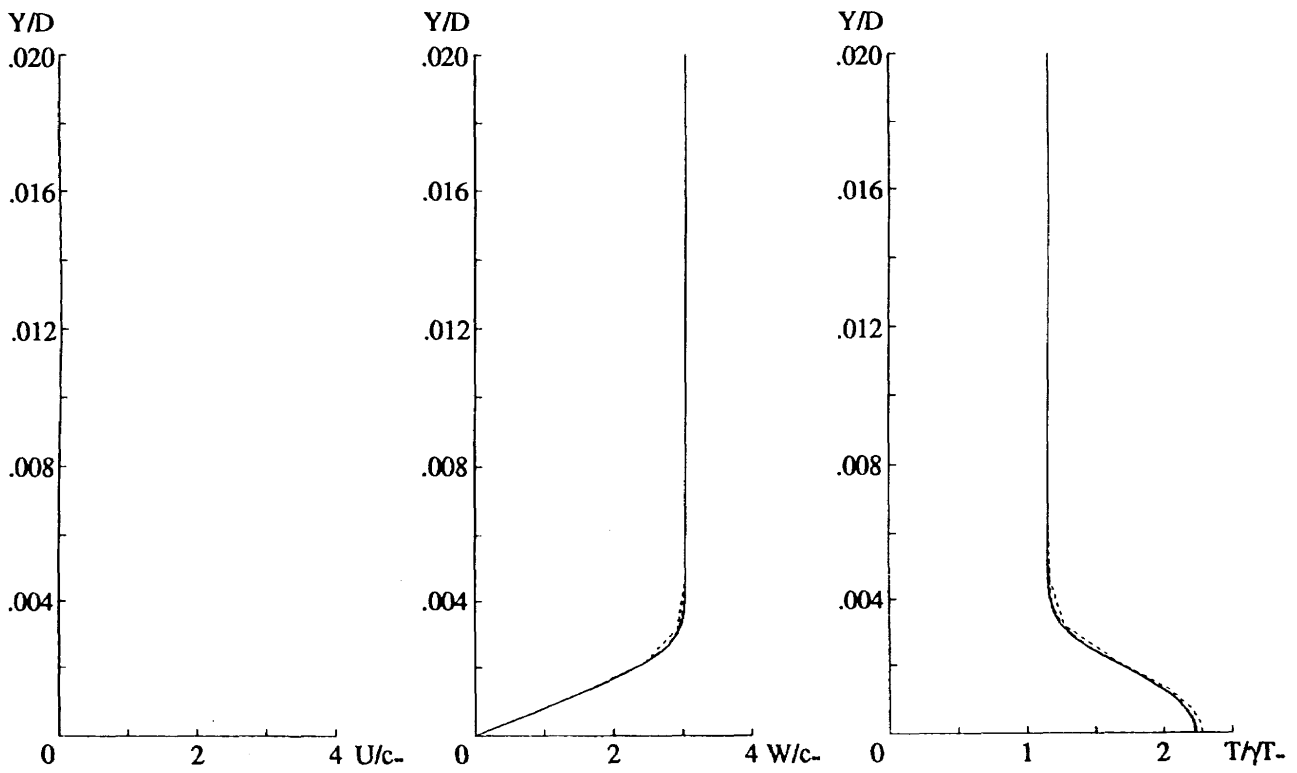


図3 速度分布と温度分布 ( $\theta = 0^\circ$ )

.....: 格子A, - · - · -: 格子B, —: 格子C

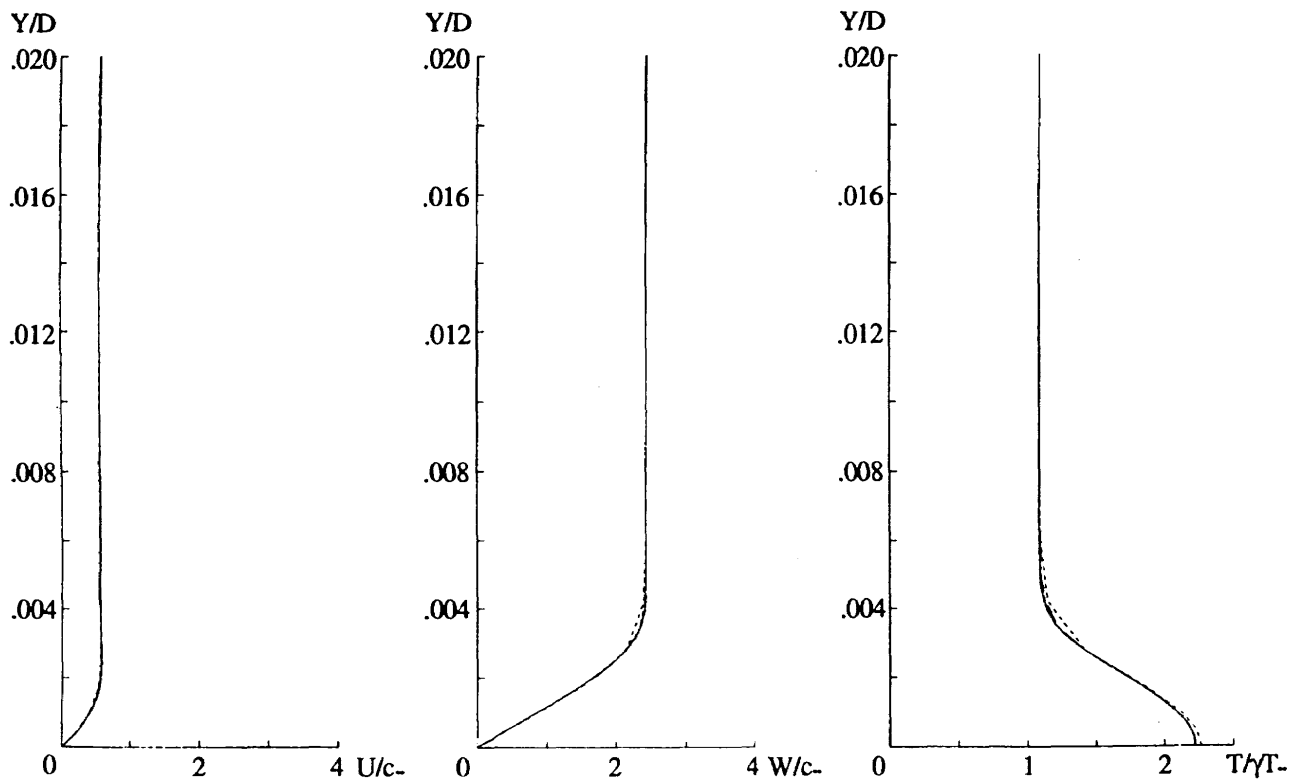


図4 速度分布と温度分布 ( $\theta = 30^\circ$ )

.....: 格子A, - · - · -: 格子B, —: 格子C

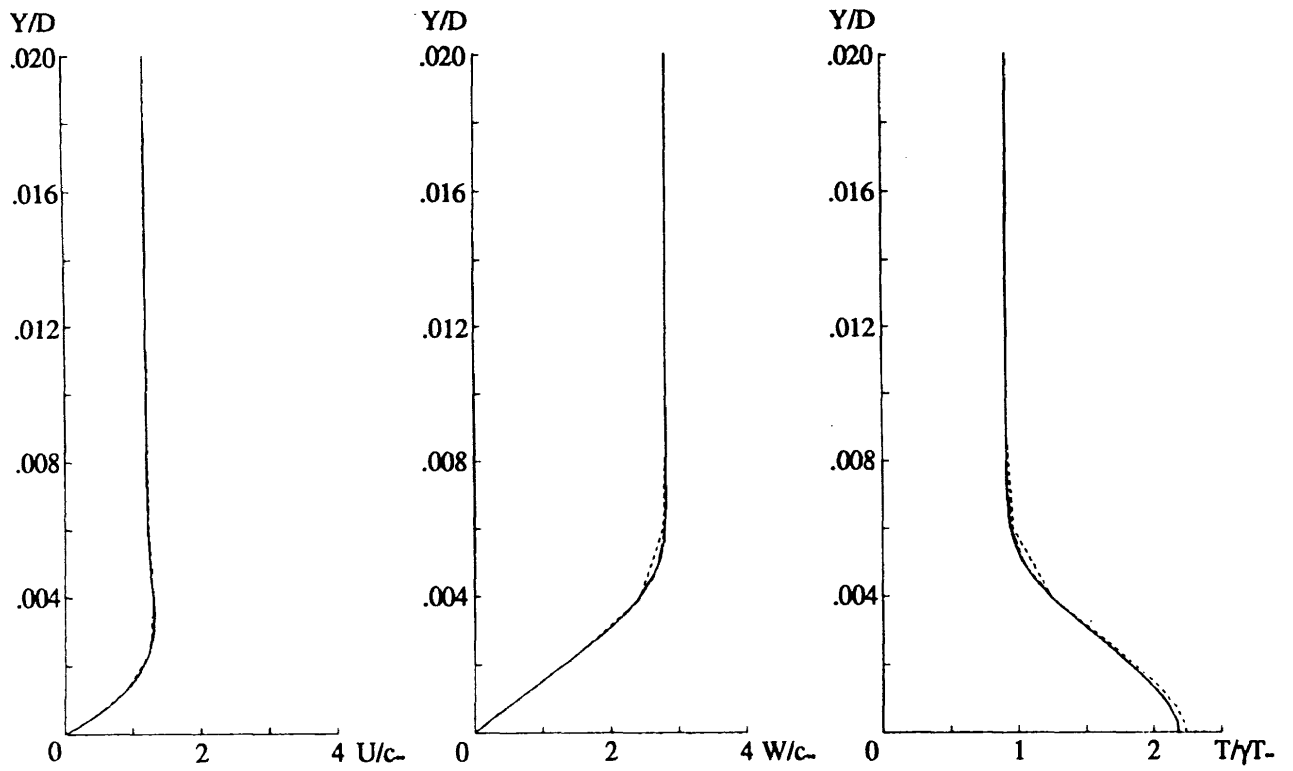


図5 速度分布と温度分布 ( $\theta = 60^\circ$ )

-----: 格子A, - - - - -: 格子B, ——: 格子C

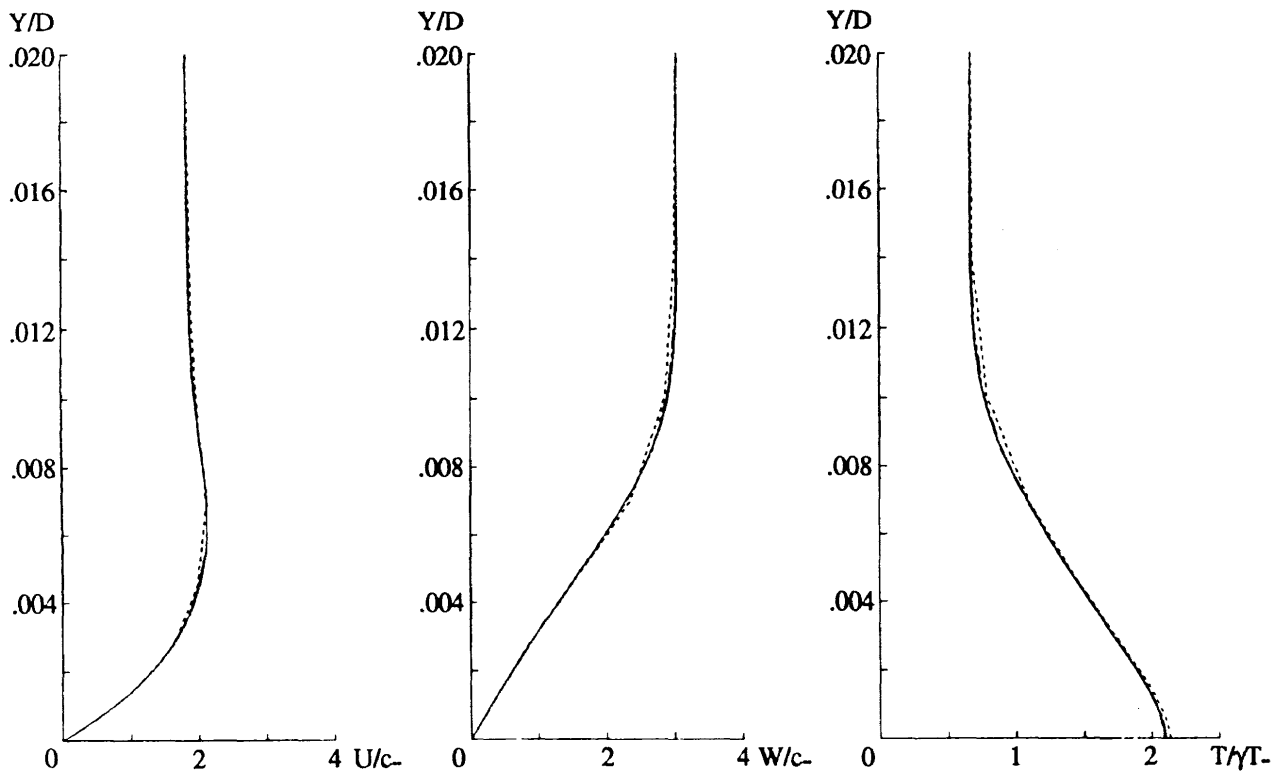


図6 速度分布と温度分布 ( $\theta = 90^\circ$ )

-----: 格子A, - - - - -: 格子B, ——: 格子C

## 振り子運動する物体の空気力による減衰過程のシミュレーション

カスマラ<sup>1</sup>, 中村 佳朗<sup>1</sup>A Simulation of Damping Process of Pendulum Motion  
due to Aerodynamic Forces

by

Casmara and Yoshiaki NAKAMURA

Dept. of Aeronautical Engineering  
Nagoya University, Nagoya 464-01

## Abstract

A numerical simulation is presented for the flow around a circular cylinder in a free-pendulum motion. In this motion, the aerodynamic forces are exerted on the body and affect the body motion. In this case, the motion will damp out due to its forces. For this problem, the Navier-Stokes equations are solved by a finite difference - finite volume method, where the u-v-p formulation is employed. A multi-grid technique is also employed to solve the pressure Poisson equation. The results are well compared with potential flow solutions.

## 1 まえがき

数値流体力学による円柱まわりの流れに関する研究は数多くされているがそのほとんどは一樣流中に静止している場合である。本論文では自由振り子運動する円柱まわりの流れの解析を行う。自由振り子の場合、円柱に働く空気力によって減衰運動する。再突入物体は、地上付近で速度を落とすためにパラシュートを使用する。そのとき、物体は振り子のような運動をする。任意に運動する物体に作用する空気力の問題を考えるとき、簡単なケースは振り子運動する物体にかかる空気力と物体まわりの流れを解析することである。ここでは下方から一樣流が当たる場合と当たらない場合を計算した。また、レイノルズ数は 100 として、ポテンシャル流の解析解と比較する。

$$\bar{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} U \\ uU + \xi_x p \\ vU + \xi_y p \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} V \\ uV + \eta_x p \\ vV + \eta_y p \end{bmatrix}$$

$$\bar{R} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 u_\xi + g_2 u_\eta \\ g_1 v_\xi + g_2 v_\eta \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 v_\xi + g_3 v_\eta \\ g_2 v_\xi + g_3 v_\eta \end{bmatrix}$$

ここで、 $U$ ,  $V$  は反変速度成分で、以下のように定義される。

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \quad (2)$$

$g_1, g_2, g_3$  は座標変換のメトリックである。

$$g_1 = \xi_x^2 + \xi_y^2, \quad g_2 = \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y, \quad g_3 = \eta_x^2 + \eta_y^2 \quad (3)$$

## 2 支配方程式

基礎方程式として 2 次元非圧縮性 N-S 方程式を用いる。一般座標での基礎方程式は次のように書き表せる。

$$\bar{q}_t + \bar{E}_\xi + \bar{F}_\eta = \frac{1}{Re} (\bar{R}_\xi + \bar{S}_\eta) \quad (1)$$

$$\bar{q} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

## 3 数値計算法

本研究で用いる数値計算法は空間に関する離散化に構造格子による有限体積法が用いられる。しかし、局所的に諸量の空間微分を差分法により近似することもある。時間積分にはオイラーの陽解法を用い、圧力のポアソン方程式を解くのに、多重格子法を適用した。慣性項はレイノルズ数が高くなると不安定になるので、Quick

法による3次精度の上流補間を施して安定化を図った。具体的には本研究室で開発された一般座標に拡張した Generalized-QUICK 法 [1,2] が適用された。

### 4 グリッド

物体が剛体運動する場合の一般座標  $(\xi, t)$  において、物体の位置を表すのに、物体に固定したデカルト座標系  $(\bar{x}, \tau)$  を導入すると便利である [3,4]。これにより、物体の運動は、 $(\bar{x}, \tau)$  系の、座標原点周りの回転運動と座標原点の並進運動により表される。例えば、2次元の場合 (第1図) は

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) & 0 \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_m(t) \\ y-y_m(t) \\ t \end{bmatrix} \quad (4)$$

である。ここで、 $\bar{x}_i \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ 。又、 $(x_m(t), y_m(t))$  と  $\theta(t)$  は、それぞれ  $(\bar{x}_i, \tau)$  系での並進運動と回転運動を表している。 $(\xi_i, \tau)$  系と  $(\bar{x}_i, \tau)$  系の関係は以下になる。

$$\xi_i = \xi_i(\bar{x}_i) \quad (5)$$

運動する一般座標  $\xi_i$  の静止デカルト座標  $x_j$  に対する微分は以下のように計算される。

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j} \quad (6)$$

又、反変速度  $U_i$  は

$$U_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial \bar{x}_k} \left( \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j} \right) \quad (7)$$

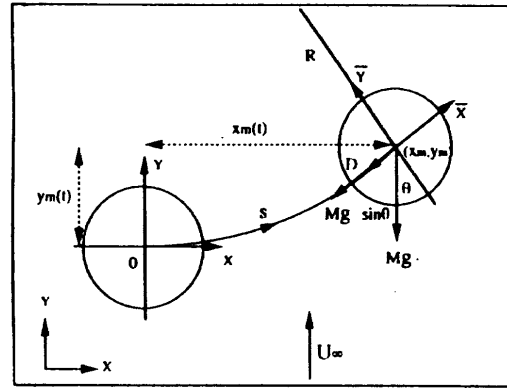
となる。ここで、 $\partial \xi_i / \partial \bar{x}_k$  は時間的に一定で、かつ、 $\partial \bar{x}_k / \partial x_j$  は簡単に計算できる。これが  $(\bar{x}_i, \tau)$  系を導入する最大のメリットである。2次元の場合、 $\partial \bar{x}_k / \partial x_j$  は具体的に

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_x & \bar{y}_x & \tau_x \\ \bar{x}_y & \bar{y}_y & \tau_y \\ \bar{x}_t & \bar{y}_t & \tau_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ \dot{y}_0 - \dot{x}_m \cos\theta - \dot{y}_m \sin\theta & -\dot{x}_0 + \dot{x}_m \sin\theta - \dot{y}_m \cos\theta & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。ここで、 $(\cdot)$  は時間  $t$  に関する微分を表す。

自由振子運動する円柱自身の運動方程式は次のように書くことができる。

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = -Mg_0 \sin\theta(t) + D \quad (9)$$



第1図 静止デカルト座標系  $(x, t)$  と物体と共に運動する座標系  $(\bar{x}, \tau)$

ここで、 $M$  は円柱の質量、 $s$  は運動する円柱の軌跡上の長さ、 $g_0$  は重力加速度、 $D$  は円柱に働いている抗力である。 $s=R\theta(t)$ 、ここで  $R$  は運動の半径である。よって式 (9) は

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -(g_0/R)\sin\theta(t) - \frac{D}{MR} \quad (10)$$

となる。式 (10) をルンゲ・クッタ法により解き、回転角  $\theta$  を求める。運動する円柱の位置は

$$\begin{aligned} x_m(t) &= R\sin\theta(t) \\ y_m(t) &= R[1 - \cos\theta(t)] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。以上の式より、反変速度  $U_i$  (式 (7)) が求められる。

### 5 境界条件

物体表面の反変速度に対し、渦りなしの境界条件が課される。

$$U_i = 0 \quad (12)$$

$u, v$  の境界条件として、物体表面の流速は物体の速度と同じになるので

$$u(t) = R\dot{\theta}\cos\theta, \quad v(t) = R\dot{\theta}\sin\theta \quad (13)$$

ここで、 $\dot{\theta}$  は  $\theta$  の時間微分を表す。

次に、圧力の境界条件は物体表面に垂直方向の運動方程式から導かれる。 $U_i = 0$  から慣性項が 0 となり、又、粘性項を無視すると

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \xi_\nu (J^{-1}u)_r - \xi_r (J^{-1}v)_r \quad (14)$$

になる。ただし、 $\xi$  は物体表面に沿う方向、 $\eta$  はそれに垂直な方向であり、下付添字は微分を表す。

物体から十分離れた外側境界では

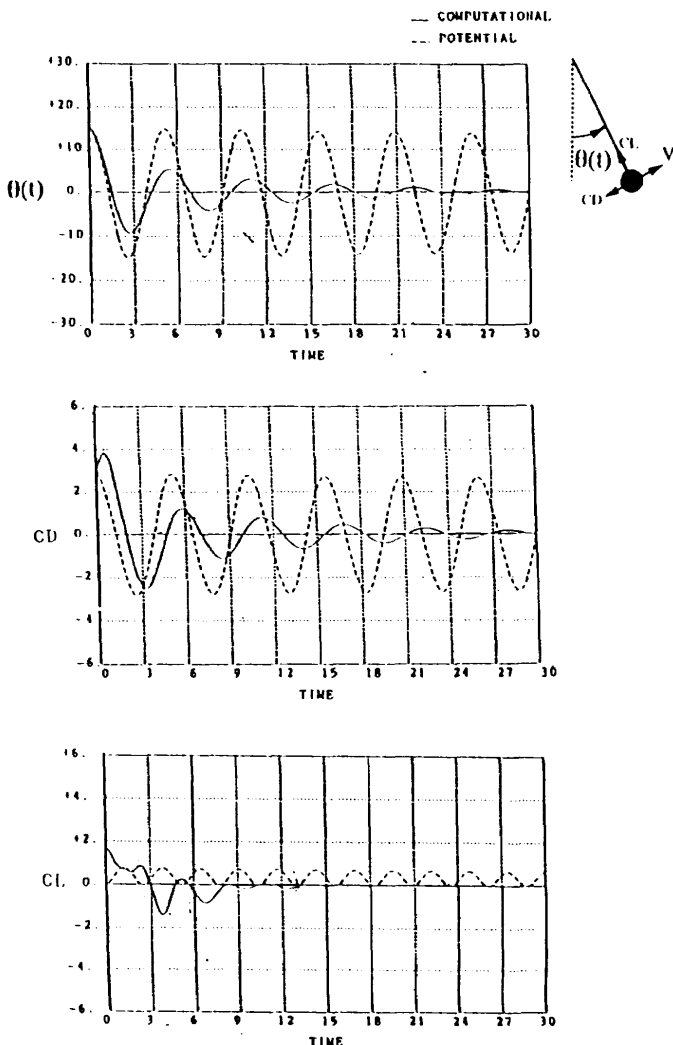
$$u_i = U_{\infty i}, \quad p_i = 0 \quad (15)$$

とする。 $U_{\infty i}$  は一様流の速度成分である。

## 6 計算結果

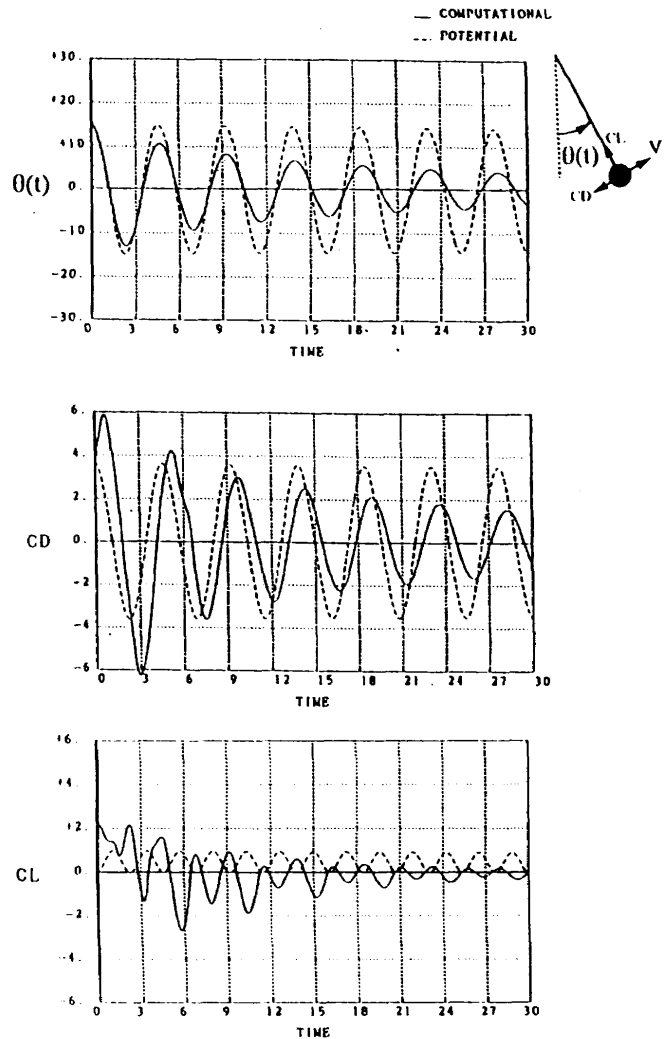
ここでは2つのケースを計算した。ひとつは、自由振り子運動する円柱周りの流れ、もうひとつは、下方から一様流が当たる場合である。

第2図は下方からの流れがない場合で、 $M=2$ 、 $Re=100$ としたときの自由振り子運動する円柱の $\theta(t)$ と空力係数の時間変化をポテンシャル流の解析解と比較して示す。抗力と揚力方向はそれぞれ円柱の運動方向とそれに垂直な方向である。式(10)より $M=2$ では右辺第2項の減衰項が大きくなって、 $\theta$ は早く減衰する。しかし、ポテンシャル流の $\theta$ は減衰しない。同様に抗力係数も時間とともに減衰する。粘性流では、 $T=30$ で $\theta$ はかなり小さくなり、そのとき、揚力はほぼ0である。



第2図 自由振り子運動する円柱周りの $\theta(t)$ と空力係数( $C_d$ ,  $C_l$ )の時間変化：粘性流とポテンシャル流との比較 ( $M=2$ ,  $Re=100$ )。

第3図に、質量を10に増やしたときの、自由振り子運動する円柱の $\theta(t)$ と空力係数の時間変化をポテンシャル流の解析解と比較して表す。この図より $M=10$ の

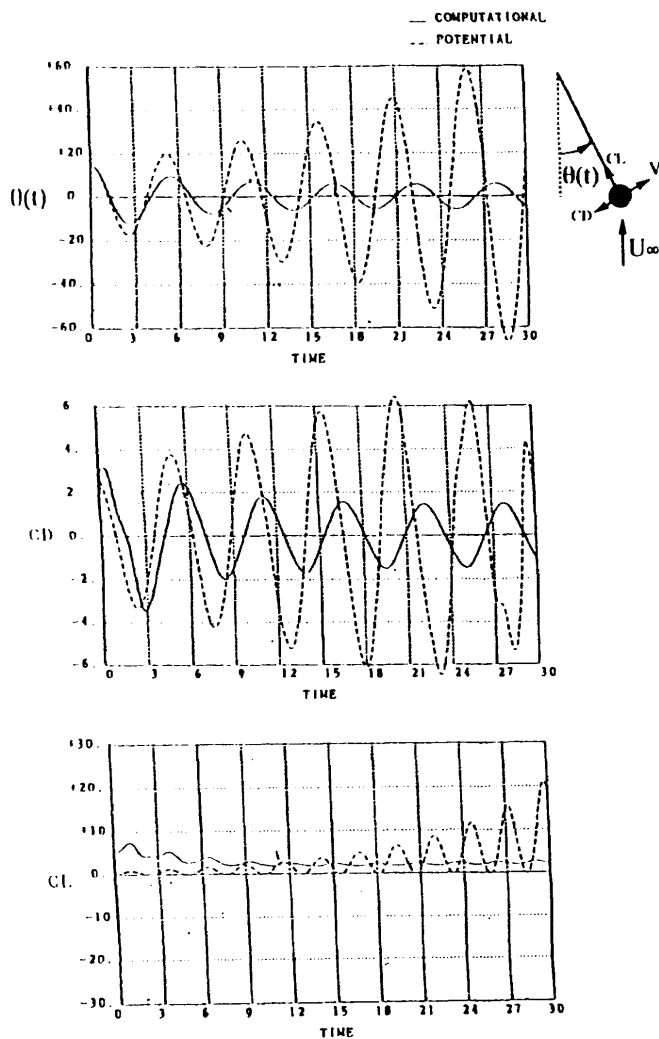


第3図 自由振り子運動する円柱周りの $\theta(t)$ と空力係数( $C_d$ ,  $C_l$ )の時間変化：粘性流とポテンシャル流との比較 ( $M=10$ ,  $Re=100$ )。

$\theta$ の時間変化は $M=2$ のときより減衰が遅いことがわかる。その理由は式(10)より理解することができる。一方、ポテンシャルの場合、 $\theta(t)$ と空力係数は減衰しない。第2図と3図を比較すると、 $M$ を大きくすると $\theta$ の変化の周波数は高くなることがわかる。減衰率が小さいので、粘性流の揚力は $T=30$ でもゼロにならない。

次に、第4、5図に一様流を下方から当てた場合の結果を示す。第4図は $M=2$ 、 $Re=100$ の場合である。粘性流では一様流の影響により、 $\theta(t)$ と抗力の振幅は一様流が無い場合より増大して、減衰が非常に遅れる。揚力係数は正の方向に移動する。一方、ポテンシャル流の場合では $\theta(t)$ と空力係数は時間共に増大する。特に、揚力係数は $T=30$ では一様流が無い時より20倍大きく、不安定な状態になる。

第5図に $M=10$ 、 $Re=100$ の結果を示す。粘性流の結果は $M=2$ のケースに比べると減衰が小さい。 $M$ が大きいため、第3図の一様流が無い場合と比較すると、

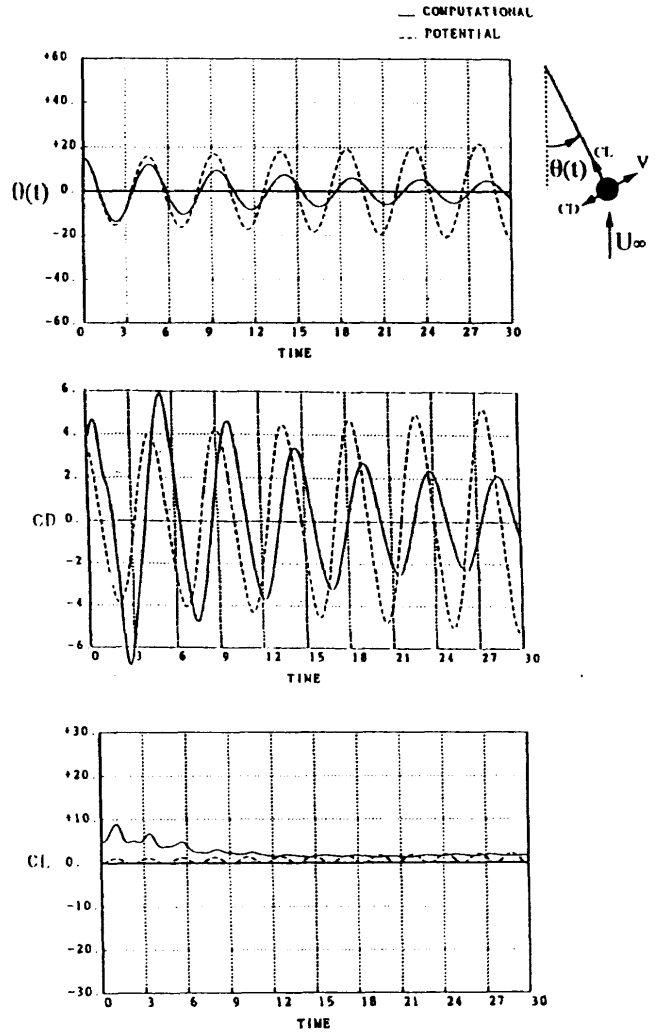


第4図 一様流中を自由振子運動する円柱周りの  $\theta(t)$  と空力係数 ( $C_d, C_l$ ) の時間変化：粘性流とポテンシャル流との比較 ( $M=2, Re=100$ )。

一様流の影響はあまり見られない。しかし、ポテンシャル流の結果は質量の影響を受けている。第4図と5図を比較すると、質量が増加することによってポテンシャル流の不安定性が減少している。

第6図に  $M=2, Re=100$  で一様流がある場合の1周期の円柱まわりの圧力の等高線の時間変化をポテンシャル流の解析解と比較して示す。この図中の  $\theta(t)$  は粘性流のものである。

- $T=11.00$  ( $\theta=+6.76$ ) では、円柱が左側から来て、瞬間的に止まり、左上に渦が現れる。抗力は最大になる（ポテンシャル流の場合では、2倍の抗力係数になる）。
- $T=12.44$  ( $\theta=0.0$ ) では、円柱は左に最大速度で動く。左下で圧力は増大するが、抗力は小さくなる。ポテンシャル流の場合では右側で圧力は強くなるので、負の抗力になる。
- $T=13.83$  ( $\theta=-6.21$ ) では、円柱が右側から来て左端で瞬間的に止まり、円柱右下の圧力が増大



第5図 一様流中を自由振子運動する円柱周りの  $\theta(t)$  と空力係数 ( $C_d, C_l$ ) の時間変化：粘性流とポテンシャル流との比較 ( $M=10, Re=100$ )。

する。渦が右側へ動く。ポテンシャル流では圧力が強くなり、不安定な状態が現れる。

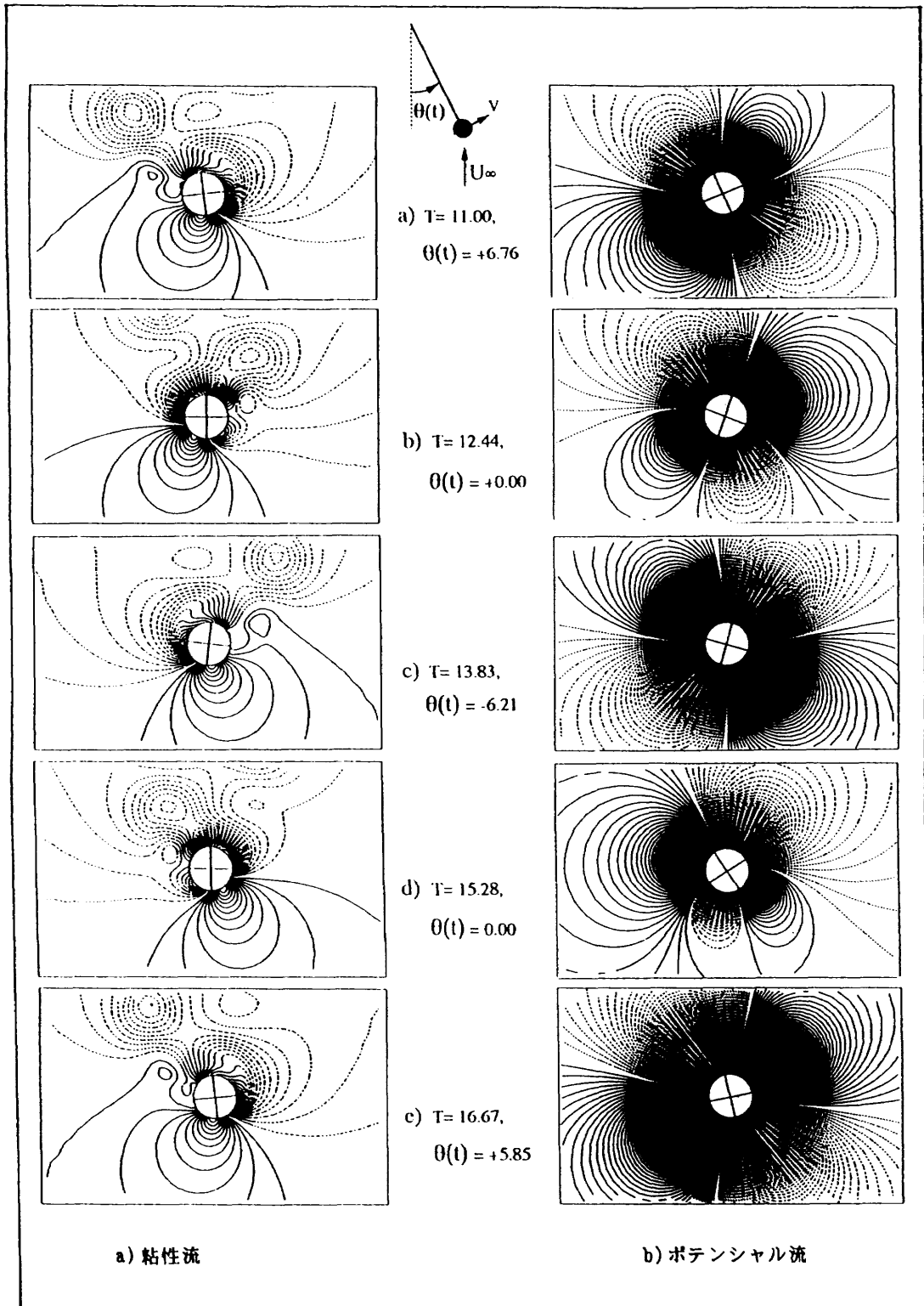
- $T=15.28$  ( $\theta=0.0$ ) では、円柱が最大速度で右側に動く。
- $T=16.67$  ( $\theta=+5.85$ ) では、右端で円柱が瞬間的に止まる。ポテンシャル流の圧力はだんだん強くなり、大きな抗力が生じる。

第7図に種々の質量に対する自由振子運動する円柱の減衰率を示す。一様流が無い場合、小さい質量では減衰係数が大きく、早く減衰する。質量を大きくすると減衰係数が減少する。一様流が当たる場合、円柱の質量の小さいところで減衰率がかなり減少する。

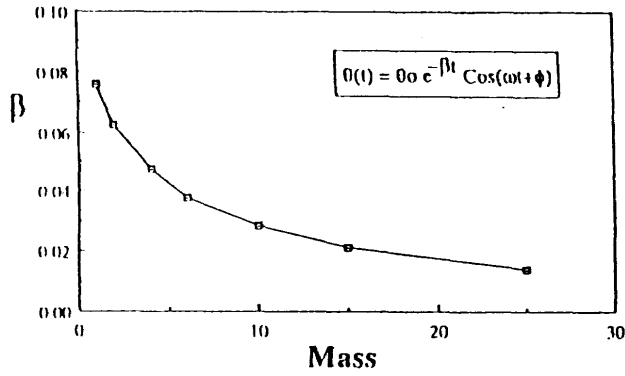
## 7 まとめ

本研究では、自由振子運動する円柱周りの流れの数値シミュレーションを行った。下方から一様流が当た

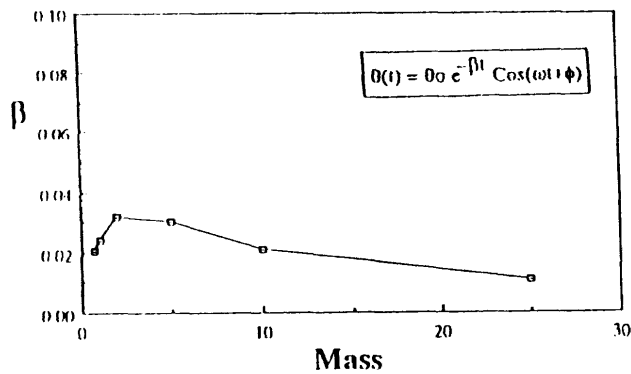




第6図 一様流中を自由振り子運動する円柱周りの圧力分布の時間変化：  
粘性流とポテンシャル流との比較 ( $M=2$ ,  $Re=100$ ).



(a) 一様流がない場合



(b) 一様流が下方から当たる場合

第7図 種々の円柱の質量に対する自由振り子運動する円柱の減衰率

る場合と当たらない場合について数値計算した。結果をまとめると、

- 自由振り子運動をする円柱では粘性の効果は振り子の運動の減衰として現れる。しかし、ポテンシャル流では減衰しない。
- 自由振り子運動をする円柱に下方から一様流が当たる場合には抗力係数の減衰率は一様流が当たらない場合より減小する。揚力係数は正の方向に平行移動する。ポテンシャル流の場合の抗力と揚力係数は一様流により増加し、特に小さい円柱の質量では不安定な状態を示す。
- 自由振り子運動する円柱の減衰率は円柱の質量に依存する。下方から一様流が当たる場合、質量が小さいところで減衰率がかなり減小する。

## 参考文献

- [1] Nakamura, Y. and Y. Takemoto, "Solution of Incompressible Flows using a Generalized Quick Method," Proc. of the International Symposium of Computational Fluid Dynamics, Tokyo, K. Oshima ed., 2, 1986, pp 285-296.
- [2] 買為, "有限体積・差分法による非圧縮性流の計算法に関する研究," 博士論文, 名古屋大学, 1991.
- [3] 水野大介, "任意に運動する物体周りの流れの数値解析," 名古屋大学工学研究科修士論文, 1990.
- [4] 中村佳朗, 買為, 水野大介, "任意に運動する物体周りの非圧縮性流れの計算法," 日本航空宇宙学会誌, 41, 469, 1993, pp. 40-47.

## 境界要素法を用いた2次元フラップ付き翼周りの計算格子の生成

岩佐 正道\* 柳澤 三憲\*

Grid Generation around Airfoil with a Flap  
Using Boundary Element Method

by

Masamichi Iwasa  
Mitsunori Yanagizawa  
Science University of Tokyo

## Abstract

In many cases, it is very difficult to generate uni-grid around complicated configurations. It has been used that the method for generation of the grid by simulating electric line of force and equipotential surface. But it is difficult to apply to dents in a body. This paper describes a method for generating uni-grid around a airfoil with a flap, having a exceeding dent, by simulating electric line of force and equipotential surface using boundary element method. The grid is mainly generated by dividing panels of wing into rather small panels.

## 1 はじめに

複雑形状物体周りに計算格子を張る場合、現在ではマルチブロック法などの格子生成法が研究されている。しかし流れ場の計算には単一格子を生成するのが最も便利であるため、単一格子の生成を行なった。この格子生成法は境界要素法を用いており、Laplace 方程式を解析的に解くことによって得られた解によって電気力線と等ポテンシャル面をシミュレーションしていることになる。

一般に電気力線と等ポテンシャル面を用いると、直交性の良い grid が生成できる反面、凹領域を有する物体に対しては、電気力線が物体内部に入り込んでしまうということが知られている。本研究において、翼とフラップの隙間のような、かなりの凹領域を有する物体について grid 生成を試みたので報告する。

## 2 格子生成法

ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

が基礎方程式となり、その基本解

$$\phi^* = -\frac{1}{2\pi} \int \ln r \, ds \quad (2)$$

を用いる。

## 2.1 計算法

物体表面（内部領域）及び外部領域をパネルに分割し、次の境界条件を与える。

$$\begin{aligned} \text{内部境界} \quad \phi &= \phi_B \\ \text{外部境界} \quad \phi &= \phi_\infty \end{aligned} \quad (3)$$

各パネル面に強さ  $\sigma$  の湧き出しを分布させ、任意の点のポテンシャルを  $\phi$  とすれば、 $\phi$  は

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \int \sigma \ln r \, ds \quad (4)$$

と表すことができる。(4) 式を離散化すると

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \sum_k \sigma_k \int \ln r \, ds \quad (5)$$

$$= -\sum_k B_{hk} \sigma_k \quad (6)$$

となる。

ここで、 $B_{hk}$  は空力的影響係数と呼ばれ、湧き出し

\*東京理科大学

が距離  $r$  離れた場所にある Control Point に及ぼす影響を表す量で、次のように表すことができる。

$$B_{hk} = \frac{1}{2\pi} \int \ln r \, ds \quad (7)$$

以上より、次のような  $\sigma_k$  を未知数とする連立一次方程式が得られる。

$$[ B_{hk} ] \{ \sigma_k \} = \{ \phi_B, \phi_\infty \}^T \quad (8)$$

(8) 式を解いて  $\sigma_k$  を求める。この求められた  $\sigma_k$  から任意の空間における速度（電界の強さ）を求めるには次式を用いる。

$$\nabla \phi = - \sum_k \nabla B_{hk} \sigma_k \quad (9)$$

速度（電界の強さ） $E$  は、二次元で考えれば

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ E_y &= - \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (10)$$

ポテンシャルの差  $d\phi$  の  $E$  方向の距離  $ds$  は、

$$ds = - \frac{d\phi}{E} \quad (11)$$

と表すことができ、さらに2方向の成分で表せば、

$$\begin{aligned} dx &= \frac{E_x}{E} ds \\ dy &= \frac{E_y}{E} ds \end{aligned} \quad (12)$$

となる。従って、(11) 式を (12) 式に代入すると

$$\begin{aligned} dx &= - \frac{E_x}{E^2} d\phi \\ dy &= - \frac{E_y}{E^2} d\phi \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。この式は、ポテンシャルの差  $d\phi$  の面を表しており、次の様な連立常微分方程式の初期値問題を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\phi} &= f(\phi, x, y) \\ \frac{dy}{d\phi} &= f(\phi, x, y) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで関数  $f$  は例えば  $x$  方向について書くと

$$f(\phi, x, y) = - \frac{E_x}{E^2} \quad (15)$$

であり、さらに (9) 式が代入される。上式の解  $x = x(\phi)$  を初期条件  $x_0 = x(\phi_0)$  のもとで求めることになるが、このとき  $f$  は  $y$  によらない。同様に  $y$  についても初期条件のもとで解く。この  $x, y$  を用いてつぎの等ポテンシャル面に到達する。

上記の理論に対し空力的影響係数及び速度は解析的計算によって求める。

## 2.2 解析的計算

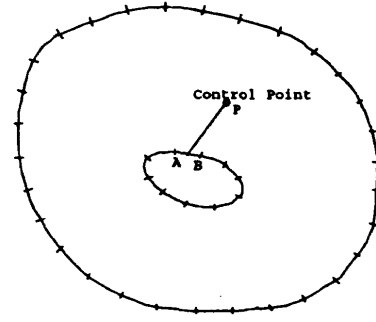


図 1:

解析的計算は Control Point の座標  $P(X_1, Y_1)$ 、パネルの左端の座標  $A(X_2, Y_2)$ 、パネルの右端の座標  $B(X_3, Y_3)$  として進めた (図 1)。Normal Vector の向きに注意し、常に領域を左側に見る方向に積分しなければならない。すなわち、座標  $A(X_2, Y_2)$  から座標  $B(X_3, Y_3)$  へ向かって積分する。従って変数変換を行なう際のパラメーター  $t$  もその方向に沿って設定する必要がある[2]。

ここで

$$I = \int_{AB} \ln r \, ds \quad (16)$$

なる線積分を考える。

ここで  $r$  は、Control Point と積分するパネル上の微小線素  $ds$  との距離である。

特異点を含まない場合、 $x, y$  をそれぞれ

$$\begin{aligned} x &= (x_3 - x_2)t + x_2 \\ y &= (y_3 - y_2)t + y_2 \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (17)$$

と表すことにする。つまり上式の変換を行うことによって区間  $[A, B]$  を  $[0, 1]$  に移すことができる。

微小線素  $ds$  との距離  $r$  は、

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \quad (18)$$

で与えられる。

特異点を含む場合は、 $x, y$  を

$$\begin{aligned} x &= \left( \frac{x_3 - x_2}{2} \right) t + \frac{x_3 + x_2}{2} \\ y &= \left( \frac{y_3 - y_2}{2} \right) t + \frac{y_3 + y_2}{2} \end{aligned} \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (19)$$

と表す。但し、特異点は  $t = 0$  に存在するものとする。パネル上の微小線素  $ds$  までの距離  $r$  は、

$$r = \sqrt{\left( \frac{x_3 - x_2}{2} - x \right)^2 + \left( \frac{y_3 - y_2}{2} - y \right)^2} \quad (20)$$

次に微小線素  $ds$  を考える。

特異点を含まない場合  $ds$  は、

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned} \quad (21)$$

(17) 式を代入すれば、

$$ds = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} dt \quad (22)$$

となる。

結局、解くべき方程式 I は、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ &\times \int_0^1 \ln \left\{ (x_1 - (x_3 - x_2)t - x_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + (y_1 - (y_3 - y_2)t - y_2)^2 \right\} dt \end{aligned} \quad (23)$$

ということになる。

特異点を含む場合、微小線素  $ds$  は

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned} \quad (24)$$

(19) 式を代入すれば、

$$ds = \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2} dt \quad (25)$$

となる。従って解くべき積分 I は、積分区間を分割して、

$$\begin{aligned} I &= 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2} \\ &\times \left[ \int_0^\epsilon \ln \left\{ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)t - \frac{x_3 + x_2}{2}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)t - \frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 \right\} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_\epsilon^1 \ln \left\{ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)t - \frac{x_3 + x_2}{2}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)t - \frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 \right\} dt \right] \end{aligned} \quad (26)$$

となる。

(23) 式を計算した結果、空力的影響係数  $B_{hk}$  は、

$$B_{hk} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{R_0}$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \ln R_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{S_0}{R_0} \ln \frac{R_1}{R_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_1}{R_0} \ln \frac{R_2}{R_0} - 2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{S_2}{R_0} \left( \tan^{-1} \frac{S_0}{S_2} - \tan^{-1} \frac{S_1}{S_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

のように求めることができる。

ここで、 $R_0, R_1, R_2, S_0, S_1, S_2$  は、それぞれ

$$R_0 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \quad (28)$$

$$R_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (29)$$

$$R_2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \quad (30)$$

$$S_0 = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1) \quad (31)$$

$$S_1 = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_3 - y_1) \quad (32)$$

$$S_2 = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1) \quad (33)$$

である。

特異点においては、(26) 式を解く。0 から  $\epsilon$  までの積分は、

$$\begin{aligned} &\int_0^\epsilon \ln \left\{ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)t - \frac{x_3 + x_2}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)t - \frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 \right\} dt \\ &= 2\epsilon(\ln \epsilon - 1) + \epsilon \ln \left\{ \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2 \right\} \\ &= 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (34)$$

又、 $\epsilon$  から 1 までの積分は、

$$\begin{aligned} &\int_\epsilon^1 \ln \left\{ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)t - \frac{x_3 + x_2}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)t - \frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 \right\} dt \\ &= 2\epsilon(1 - \ln \epsilon) - 2 \\ &\quad + (1 - \epsilon) \ln \left\{ \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2 \right\} \\ &= \ln \left\{ \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2 \right\} - 2 \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (35)$$

従って空力的影響係数  $B_{hk}$  は、(34) 式と (35) 式より

$$\begin{aligned} B_{hk} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2} \\ &\times \left[ \ln \left\{ \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2 \right\} - 2 \right] \end{aligned} \quad (36)$$

(28)式を使えば

$$B_{hk} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{R_0} \left( 2 \ln \frac{1}{2} + \ln R_0 - 2 \right) \quad (37)$$

となる。ここで特異積分には pf 積分を用いている。また連立常微分方程式には Runge-Kutta-Fehlberg 法<sup>[3]</sup>を適用している。

解析的に求めた速度  $E_x, E_y$  を示す。

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi} \sqrt{R_0} \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{x_3 - x_2}{R_0} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{S_0}{R_0} \frac{2(x_2 - x_1)}{R_1} \\ & - \frac{x_3 - x_2}{R_0} \ln \frac{R_2}{R_0} - \frac{S_1}{R_0} \frac{2(x_3 - x_1)}{R_2} \\ & - 2 \frac{y_3 - y_2}{R_0} \left( \tan^{-1} \frac{S_0}{S_2} - \tan^{-1} \frac{S_1}{S_2} \right) \\ & + 2 \frac{S_2}{R_0} \left( \frac{(x_3 - x_2)S_2 + S_0(y_3 - y_2)}{(S_2 + S_0)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(x_3 - x_2)S_2 + S_1(y_3 - y_2)}{(S_2 + S_1)^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$E_y = \frac{\sigma}{4\pi} \sqrt{R_0} \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{y_3 - y_2}{R_0} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{S_0}{R_0} \frac{2(y_2 - y_1)}{R_1} \\ & - \frac{y_3 - y_2}{R_0} \ln \frac{R_2}{R_0} - \frac{S_1}{R_0} \frac{2(y_3 - y_1)}{R_2} \\ & + 2 \frac{x_3 - x_2}{R_0} \left( \tan^{-1} \frac{S_0}{S_2} - \tan^{-1} \frac{S_1}{S_2} \right) \\ & + 2 \frac{S_2}{R_0} \left( \frac{(y_3 - y_2)S_2 - S_0(x_3 - x_2)}{(S_2 + S_0)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(y_3 - y_2)S_2 - S_1(x_3 - x_2)}{(S_2 + S_1)^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

### 3 結果

#### 3.1 予備段階としての grid 生成

翼の grid 生成の予備段階として対称物体の凹領域に grid を生成した。物体はひょうたん型のような物である。段々と凹領域が深くなっていき、最後には電気力線が物体内部に入り込んでしまい、grid は生成されていない。図2にその様子を示す。この深い溝の部分に grid を生成しようとするときかなりパネルを細かくしなければならない。ポテンシャルが急激に変化するためである。図3は、図2の最後で grid が生成できなかった部分の拡大図である。きれいに grid が生成されている。パネル数は493枚である。

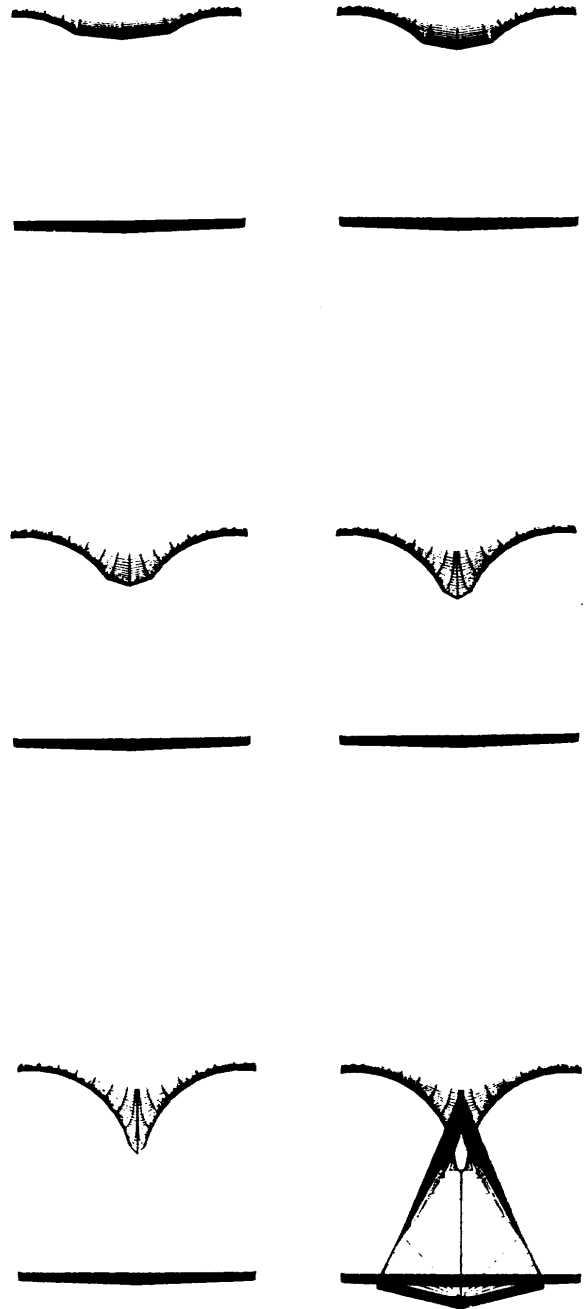


図2: 凹領域の変化

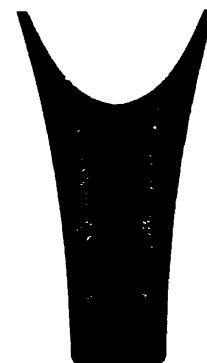


図3: 凹領域の拡大図

### 3.2 フラップ付き翼周りの grid

次に翼についての結果を示す。図4は通常の一枚翼についての $56 \times 14$ の計算格子である。図5から7がフラップ付き翼周りの計算格子である。ひょうたん型と比べてかなり凹領域が激しくなっているがgridを張る難しさはさほど変わらない。翼とフラップは結合して一つの物体としている。ここでもポテンシャルの急激な変化が良くわかる。パネルと同様にポテンシャルの刻み幅も相当に細かくする必要がある。フラップ付き翼については、 $503 \times 55$ の計算格子である。

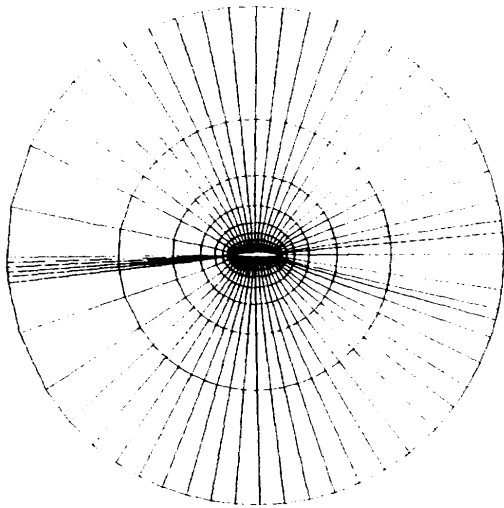


図 4: 一枚翼

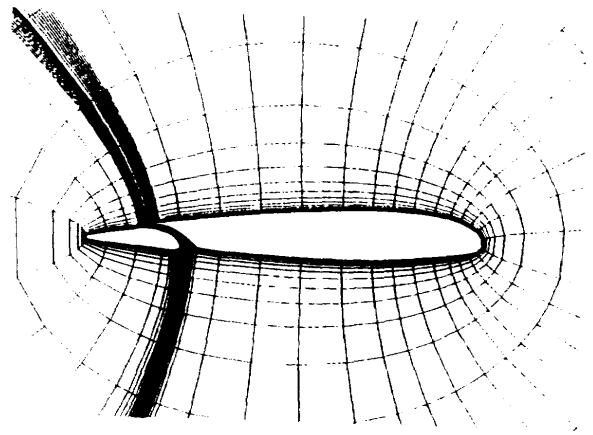


図 6: フラップ付き翼 (2)

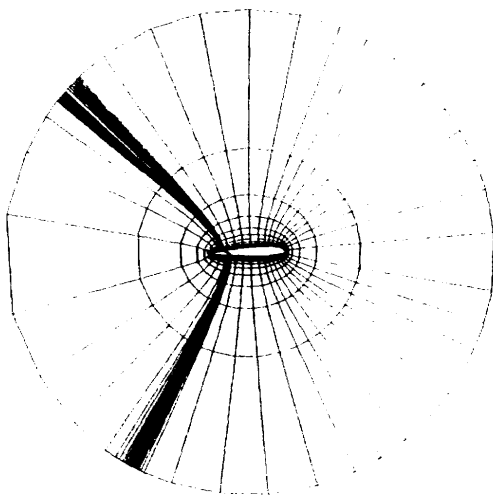


図 5: フラップ付き翼 (1)

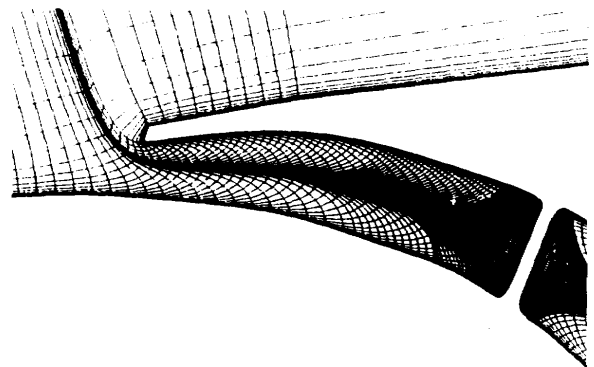


図 7: フラップ付き翼 (3) - 結合部付近

#### 4 まとめと今後の課題

二次元フラップ付き翼周りの計算格子の生成を試みた。その結果、翼とフラップが共有するかなりの凹領域の部分についても grid の生成が可能であることがわかった。但し、パネル、ポテンシャルの刻み幅は共にかなりの細かさを要求され、効率の良いパネルの切り方をする必要がある。むだなパネルの増加は無駄な計算時間の増加を招くだけであると言える。

今後の課題としては、これをさらに複雑な形状物体周りの計算格子の生成に結び付けること、この grid を用いての差分計算を行なうことがあげられる。

#### 参考文献

- [1] M. Yanagizawa, M. Nakada, Y. Koshika and A. Inoue "Generation of 3-D Grid Using Boundary Element Method," *Special Publication of National Aerospace Laboratory*, vol. SP-10, No. 34, pp. 201-207, Nov. 1989.
- [2] 岩佐 正道, "二次元翼の計算格子の生成," 東京理科大学 柳沢研究室卒論, 1992.
- [3] Tim Hopkins and Chris Phillips "NUMERICAL METHODS IN PRACTICE Using the NAG Library," *International Computer Science Series*, Addison-Wesley Publishing Company.



# 星間分子雲における高密度コアの形成

木村俊哉 (航空宇宙技術研究所)

Formation of High Density Cores in a Molecular Cloud

by

KIMURA Toshiya (National Aerospace Laboratory)

## Abstract

This paper presents results of 3D hydrodynamical simulations on formation of high density cores in a molecular cloud.

A cubic region of the side of 1pc is considered. Inside the region, the gas is initially uniform and a random velocity field is imposed. The physical properties appropriate to the internal condition of molecular clouds are given. The evolution is numerically followed with special attention to formation of high density cores in the turbulent medium. The effects of the thermal nature of gas and the self-gravity are also examined.

The results show that dense and compact cores are formed in a highly disturbed medium. Their physical properties such as size, mass, mass spectrum, etc. are similar to dense cores observed in molecular clouds.

## 1 はじめに

分子雲は星間物質の様々な存在形態の中の一つで、非常に低温で密度の高い領域である。このような状態では分子雲を構成するガスは大部分分子状態となっており、また自分自身の重力と内圧、そして外圧と平衡状態にあって、いわゆる雲のような塊として存在している。

分子雲に対してはこれまで電波による様々な観測が成されているが、サイズが数pc<sup>†</sup>程度のものから、巨大分子雲と呼ばれる約50pc、質量は $10^6 M_{\odot}$ <sup>††</sup>に達するものが存在する。また、内部構造についても近年の観測技術の発達によってしだいに明らかになりつつあるが、分子雲内部は乱流的な状態になっていると考えられている。すなわち、密度や速度場が非常に乱れて、クランピイな構造を呈している。

分子雲は単に星間物質の存在形態の一つであるだけでなく、星の形成の場として重要である。星は、星間ガスから生まれるが、特に密度の高い分子雲内部で主に誕生すると考えられている。星には $0.1 M_{\odot}$ ぐらいから $50 M_{\odot}$ 程度までの質量範囲があるが、冪分布で表される質量スペクトルが存在する。星の質量スペクトル(初期質量関数 IMFとも呼ばれる)は銀河全体の進化とも関わる重要な量であるが、なぜこのような分布が現れるかはよく分かっていない。

分子雲内部は、強い不均一構造が存在するがその中でも

特に密度が高くて( $n \sim 10^4 - 10^5 \text{cm}^{-3}$ )コンパクト( $\sim 0.1 \text{pc}$ )な塊が存在していて、それらは高密度コア(分子雲コア)などと呼ばれている。このようなコアが星の主な誕生場所となっていることが観測から分かっている(例えば、Myers et al.1988)。また、コアの質量分布には、指数は異なるが星のような冪分布が存在することが分かっている(例えば、Myers & Benson 1983, Tatematsu et al.1993)。

したがって、分子雲に存在する高密度コアは星の母胎であると考えられ、コアの物理的諸性質は星の形成機構と深く結びついていると考えられる。コアの形成の仕組みや、観測されているコアの物理状態を何が決めているのかを調べることは、星の形成の問題とも関連する重要な問題である。

そこで、本論文においては、分子雲に観測されるような物理量を持った高密度コアの形成が、3次元の流体数値シミュレーションによって再現可能かどうかを試みる。そして、コアの形成や物理的性質に対して、分子ガスの熱的な性質や自己重力がどのような影響を与えるかを調べる。そして、計算と実際に観測されている量との比較を行う。

## 2 モデル

今回の計算では、一辺当たりのグリッド数が100程度であることと、実際に観測されるコアの平均的サイズが

<sup>†</sup>1pc= $3 \times 10^{18}$ cm

<sup>††</sup> $M_{\odot}$ :太陽質量( $\approx 2 \times 10^{33}$ g)

0.1pc 程度であることから、1 グリッド当たり 0.01pc 程度とすると 100 グリッドで 1pc となる。そこで、分子雲内部のモデルとして一辺が 1pc の立法体の空間を考える。

分子雲内部は乱流状態であると考えられているが、乱流の起源やその構造についてはよく分かっていない。そこで、人工的に乱流的な状態を作り出すために、初期に一様な媒質中にランダムな速度場を与えておいてその後の時間的な進化を数値的に追いかけて、その過程におけるコアの形成を調べることにする。

初期の密度は  $5000\text{cm}^{-3}$ 、温度は 10K と仮定する。立方体内に小さなセルをランダムに配置して、各セル内には一様な速度を与える。その方向については各セルごとにランダムに与える。分子雲内部の速度場の揺らぎの大きさは、分子雲や分子雲内の領域で異なるが数  $\text{km sec}^{-1}$  であるので、与える速度の大きさは今回のモデルでは  $5\text{--}7\text{km sec}^{-1}$  とした。

空間内で、ある一定以上の密度を持つ領域をそれぞれコアとみなして、それらのサイズや内部に含まれるガスの密度、質量、速度、等を調べる。

今考えているような密度の範囲においては、分子ガスは放射による冷却が効率的に働くので等温近似が成り立つと考えられる。そこで、ガスは等温ガスを仮定するが、ガスの熱的な影響を調べるために、比較として反対照的な極端な場合として断熱ガスの場合の計算も行った。また、ガス自身の重力の効果を調べるために自己重力を考慮した計算も行う。それぞれの場合において、初期の速度場の与え方を変えて計算を行った。

以下のような 3 通りのモデルについて計算を行った。

- 自己重力を含まない
  - 等温ガスモデル 6 cases
  - 断熱ガスモデル 6 cases
- 自己重力を含む
  - 等温ガスモデル 3 cases

### 3 数値計算

#### 3.1 基本方程式

星間ガスの運動は一般のオイラー方程式によって記述される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla P - \rho \nabla \phi \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \nabla \phi \quad (3)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (4)$$

$$E = \frac{\rho}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \quad (5)$$

$$P = \rho c^2 \quad (6)$$

ここで、 $\phi$  は重力ポテンシャルを表し、式 (4) によって計算される。等温ガスの場合、圧力は密度に比例し、式 (6) によって与えられるのでこの場合エネルギー方程式 (3) は解かない。

#### 3.2 計算法

計算スキームは FCT-SHASTA (Boris & Book, 1973; 1976; Book, Boris, & Hain 1975) を用いた。境界条件は、すべての面について周期境界条件を与えている。計算グリッドについては、重力を含まない場合、 $128 \times 128 \times 128$ 、重力を含む場合、 $106 \times 106 \times 106$  である。

### 4 計算結果

第 2 節で述べた初期条件のもとで、式 (1)–(6) を解くことによって、分子雲内部の構造の時間進化の様子を追いかける。

重力を含まないモデルについては 100 万年、重力を考慮したモデルについては 50 万年の時間経過を追いかけて途中経過についても調べた。

分子ガスの温度は非常に低い ( $T \sim 10\text{K}$ ) ので、与えられた速度は超音速となる。そのため分子ガスはランダムな速度場によって乱流的な状態になるとともに、強く圧縮され複雑な密度構造を呈する。

特に、等温ガスの場合、圧縮性が高いためガスは密度の高い領域と低い領域のコントラストが非常に大きくなりクランプ状の構造を示し、そのような構造が長く保たれる。断熱ガスの場合、圧力が効くためにあまり大きな密度コントラストにはならず全体的に早く一様になるうとする。

図 1 は、等温ガスで重力を含まないモデルの一つで、初期状態より約 20 万年経過した時点での、中心を通る各断面における等密度図である。

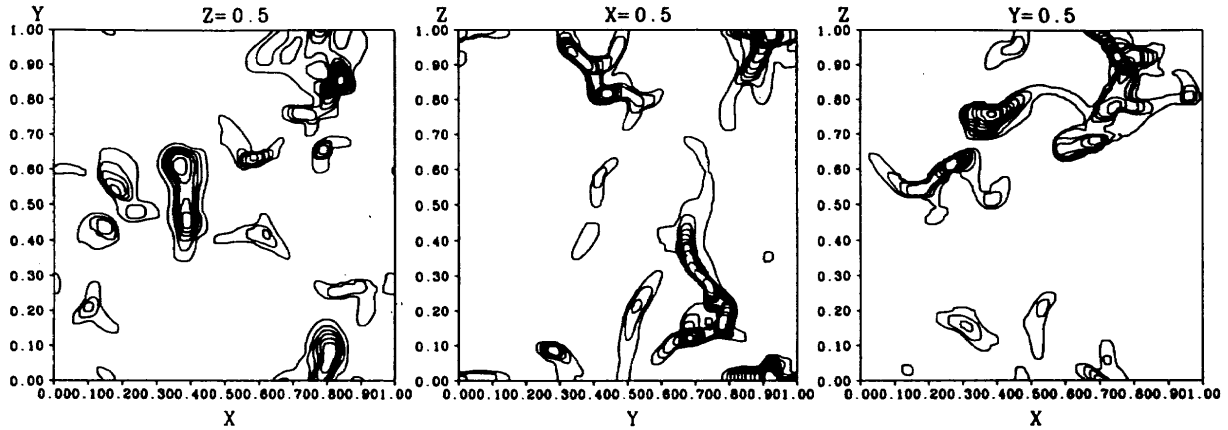


図 1

図から分かるようにガスは強く圧縮され部分的に密度の非常に高いクランプ状の構造に集中している。等温ガスの場合、ガスの圧縮性が高いためにこのような高密度でコンパクトなコアが形成しやすい。

このようなクランプ状の構造はそれぞれランダムに動き回り、お互いに衝突し、分裂や融合をしながら変化する。断熱ガスの場合は、圧力の効果で比較的早く全体が均されて行くが、

等温ガスの場合は 100 万年の間でも強い密度コントラストの状態を保っている。

このような媒質中で、ある一定以上の密度を持つ領域を取り出してそれらをコアとみなし、それぞれのコアについてのサイズ、質量、速度などを調べた。コアを取り出す密度の閾値は平均密度の数倍とした。各モデルとも初期のランダムな速度場を変えることによって 3-6 通りの計算を行っているの、それら総てについてコアを取り出しそれらの結果をまとめた。また、それぞれのモデルについて一定の時間間隔でコアを取り出して時間的な進化についても調べた。

以下にコアの各諸量についてまとめる。この際、ある程度独立した塊としてコアを同定するために、コアの質量が  $1M_{\odot}$  を越えるものについて対象としている。

#### 4.1 コアのサイズ・密度・質量

コアの平均的なサイズは、 $0.1\text{pc}$  の数倍程度であり、いずれのモデルにおいても  $0.1\text{pc}$  程度のコアが形成することが分かった。各コア内部に含まれるガスの平均密度は、等温ガスで自己重力のないモデルでは約  $9 \times 10^4 \text{cm}^{-3}$ 、等温ガスで自己重力を含むモデルでは、約  $3 \times 10^5 \text{cm}^{-3}$ 、また断熱ガスで自己重力のないモデルでは、約  $2 \times 10^4 \text{cm}^{-3}$  である。

等温ガスの場合は、 $10^5 \text{cm}^{-3}$  のオーダーの高密度なコアが形成することが分かる。自己重力を考慮した場合、

重力の効き始めているコアでは自分自身の収縮によってより密度が上がっているため平均密度が高くなっていると考えられる。

それぞれのモデルについてのコアの平均質量と最大の質量は、等温ガスで場合重力が無い場合では、平均質量が約  $6M_{\odot}$ 、最大質量が約  $50M_{\odot}$ 、重力の有る場合は、約  $9M_{\odot}$ 、約  $80M_{\odot}$  となる。また、断熱ガスでは約  $5M_{\odot}$ 、約  $29M_{\odot}$  である。

いずれの場合も、数  $M_{\odot}$  から数  $10M_{\odot}$  のコアが形成し、自己重力の効果でより重いコアが出来ることが分かる。

以上のように、計算においても  $0.1\text{pc}$  程度のサイズのコアが形成することが分かった。等温ガスの場合は  $10^5 \text{cm}^{-3}$  のオーダーの密度で質量が数  $10M_{\odot}$  に達するものが出来る。また、自己重力がある場合にはより高密度で重いものが形成する。一方、断熱ガスの場合には、等温ガスの場合に比べてコアの密度は小さく比較的軽いものしかできない。

#### 4.2 コアの質量分布

各モデルにおいて、単位対数質量当たりのコアの個数の分布を対数スケールで表す。図 2a は等温ガス重力無し、図 2b は等温ガスで重力有り、そして図 2c は断熱ガスのモデルの場合である。

各図において、白抜きの記号は計算結果を表す。図 2a において黒丸はオリオン分子雲での観測によって得られたデータ (Tatematsu et al. 1993) をもとにしたものを比較のために描いてある。

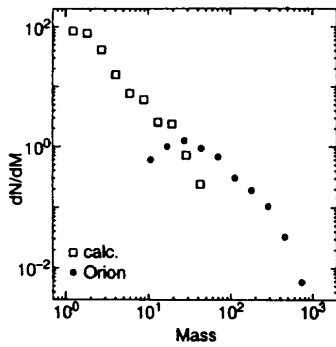


図 2a

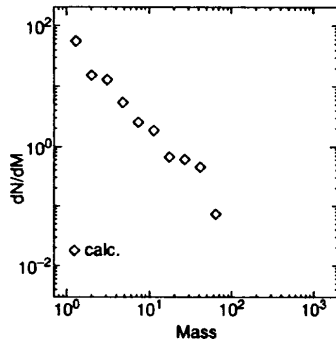


図 2b

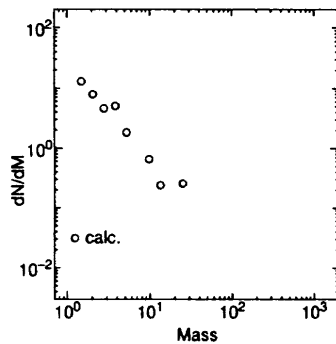


図 2c

特徴的なのは、いずれのモデルの場合も直線的な分布、すなわち質量に対する冪分布を示すことである。このような分布は観測でも得られており、図2のオリオン分子雲の結果においても質量が小さいところを除いてほぼ直線的な分布、すなわち冪分布を示している。さらに、これらの分布の傾きを調べると、等温ガス重力無しのモデルで $\sim -1.86$ 、等温重力有りのモデルで $\sim -1.66$ 、そして断熱ガスのモデルで $\sim -1.69$ となり、大体同様な傾きを示し、図から分かるようにオリオンにおけるコアの分布の傾きともほぼ一致する<sup>1</sup>。

### 4.3 コアの数速度幅

各コアに観測される分子輝線スペクトルにはある程度速度幅が見られる、これはコア内部のガスが観測される程度の速度を持っていることを示している。この速度はコアが重力的に平衡である場合にはコア内部の乱流速度とも考えられる。

そこで計算においても各コアの内部のガスの持つ速度の内ある一方向における広がり(速度幅)を、それぞれの質量に対してプロットしたものが図3である。

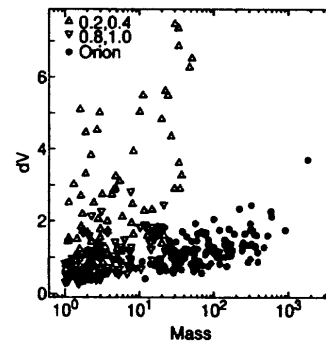


図 3a

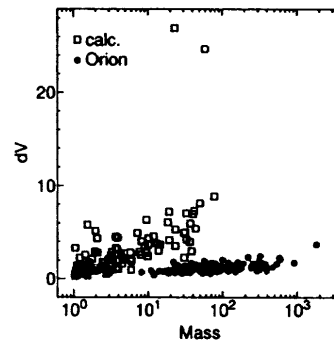


図 3b

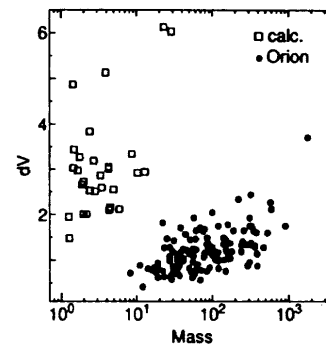


図 3c

<sup>1</sup>オリオン分子雲コアと計算では質量範囲が異なるが、オリオン分子雲では特に質量の大きなコアが観測されているためである。他の dark cloud と呼ばれる分子雲にはより小さなコアも多く存在する。以下においては、質量範囲は異なるが比較のためオリオンのデータを参考にする。

図 3a、3b、3c はそれぞれ、等温ガス重力無し、等温ガス重力有り、断熱ガスのモデルである。各図において、白抜き記号は計算結果、黒丸はオリオン分子雲のコアの観測データを表す。図 3a では、20 万年後と 40 万年後の比較的若いコア (上向きの三角) と 80 万年後と 100 万年後の古いコア (下向きの三角) を分けてプロットしている。

図 3a より、若いコアに含まれるガスは比較的大きな速度の広がりを持っているが 50 万年程度経つと散逸によって  $1\text{--}2\text{ km sec}^{-1}$  にまで減少し、オリオン分子雲コアに近い値を示す。等温ガスで重力を含む場合、計算は 50 万年で止めているので、オリオン分子雲コアに比べて大きな値を示している。また、特に大きな値を持つコアは重力収縮によるものであると考えられる。一方、断熱ガスの場合散逸が小さいので初期に与えられた大きな速度を保っている。

4.4 コアのランダム速度

コア自身の持つ並進速度を、それぞれの質量に対してプロットしたものが図 4 である。

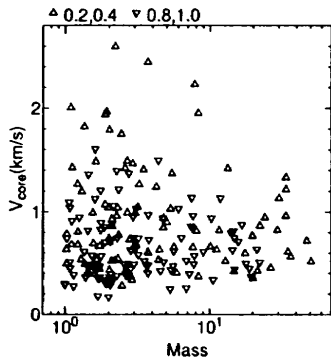


図 4a

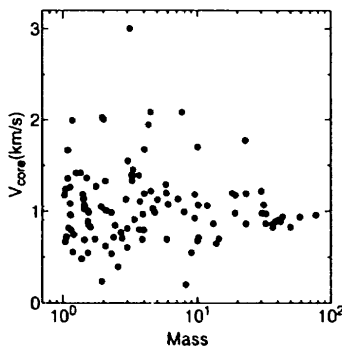


図 4b

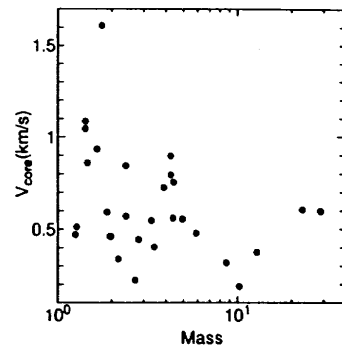


図 4c

図 4a、4b、4c はそれぞれ、等温重力無し、等温重力有り、断熱ガスのモデルを表す。図 4a において、上向きの三角の記号は若いコア (20 万年と 40 万年)、下向きの三角は古いコア (80 万年と 100 万年) を表す。図から分かるように、いづれのモデルにおいてもコアの持つ並進速度は  $1\text{--}2\text{ km sec}^{-1}$  程度であり、コアの年齢にはあまり依存しない。また、オリオン分子雲におけるコアでも同程度のランダムな速度が観測されている。

5 まとめ

星間分子雲内部の構造の進化の様子を、簡単なモデル化と 3 次元の流体数値計算を用いて調べた。その結果、実際に分子雲内に観測されている高密度コアと同様な性質を持つコアの形成を数値計算によっても再現することが出来ることが分かった。

分子ガスは放射による冷却が良く効いていると考えられているが、今回の計算においても等温近似のモデルが良く観測を再現している。特に、高密度で質量の大きなコアの形成には自己重力が大きな役割を持っていることが示された。

コアの質量分布については、今回の計算ではいづれのモデルにおいても観測で得られている分布と同様な分布が再現された。これは、質量分布がガスの熱的な性質や自己重力にあまり依存しない量であることを示唆しているが、これについてはさらに調べる必要がある。

最後に、計算によって得られたコアの諸量と、オリオン分子雲 (Tatamatsu et al.1993) 及び dark cloud (Myers & Benson 1983) で観測されたコアの諸量を表 1 にまとめる。

\*縦軸のスケールは図 3a と異なる

	数値計算	観測	
		オリオン	暗黒雲
サイズ (pc)	several×0.1	0.1	0.1
密度 (cm <sup>-3</sup> )			
等温、重力無	9×10 <sup>4</sup>		
等温、重力有	3×10 <sup>5</sup>	1.3×10 <sup>5</sup>	3×10 <sup>4</sup>
断熱、重力無	2×10 <sup>4</sup>		
質量			
等温、重力無	6M <sub>☉</sub> 、最大 50M <sub>☉</sub>		
等温、重力有	9M <sub>☉</sub> 、最大 80M <sub>☉</sub>	80	4
断熱、重力無	5M <sub>☉</sub> 、最大 29M <sub>☉</sub>		
質量分布 (勾配)			
等温、重力無	-1.86		
等温、重力有	-1.66	-1.6~-1.98	
断熱、重力無	-1.69		
速度幅 (km sec <sup>-1</sup> )			
等温、重力無	1.6 young:2.4,old:0.9		
等温、重力有	3.6	1.2	0.3
断熱、重力無	3.1		
コアの ランダム速度			
等温、重力無	0.76 young:0.9,old:0.67		
等温、重力有	1.1	1.15	
断熱、重力無	0.63		

表 1

## 6 参考文献

- Book,D.L.,Boris,J.P., & Hain,J. 1975,  
J.Comp.Phys. 18, 248
- Boris,J.P. & Book,D.L. 1973, J.Comp.Phys. 11, 38
- , 1976, in Methods of Computational Physics, Vol.16,  
Chap.11
- Myers,P.C. & Benson,P.J. 1983, Astrophys.J. 266, 309
- Myers,P.C. et al. 1988, Astrophys.J. 324, 907
- Tatematsu,K. et al. 1993, Astrophys.J., 404, 643

## 高速鉄道に係わる空力問題の数値シミュレーション (その2)

飯田雅宣\* 吉田康夫\* 前田達夫\* 小川哲\*\* 和田安弘\*\*

### Numerical Simulation of Aerodynamic Problems in High Speed Railways (Part 2)

by

Masanobu IIDA, Yasuo YOSHIDA, Tatsuo MAEDA  
Railway Technical Research Institute  
Satoru OGAWA, Yasuhiro WADA  
National Aerospace Laboratory

#### ABSTRACT

Numerical simulation of aerodynamic problems in high speed railways has been performed to investigate applicability of CFD to aerodynamic design of vehicles and ground structures. The first problem treated here is passing-by of two trains in open area. Unsteady 3D Euler simulation using relatively moving grids has been conducted and the result qualitatively agrees with real testing data. The second problem is compression wave generation during train nose entry into the tunnel. Axisymmetric Euler simulation gives quite realistic results on the compression waveform and can be extensively used to optimize area distribution of the train nose for reduction of strength of the pressure wave radiated from the tunnel exit.

#### 1. はじめに

高速鉄道では、車両や地上設備の設計・改良にあたって空気力学的な検討を行う必要がある。その検討手法として、最近では数値シミュレーション (CFD) が有力になりつつある。今回、高速鉄道の空力問題の中から、明かり区間における列車すれちがいと、トンネル突入時の圧縮波形成に関する数値シミュレーションを行ったので報告する。

#### 2. 列車すれちがいの数値シミュレーション

##### 2.1 列車すれちがい時の空力現象

対向列車の先頭部・後尾部、パンタカバーなどの形状変化部が自列車側方を通過すると、自列車の車体表面上の圧力分布が変化し、非定常空気が働く。この結果、車両が過渡的に動揺する。このすれちがい時の動揺は、両列車の速度、形状、上下線の線路間隔、車体・台車間の支持機構などの影響を受ける。すれちがい時の乗り心地を限度以上に悪化させないために、これらの項目が及ぼす影響を検討しておく必要がある。

図1にすれちがい時の圧力変動を実測した例を示す。この図は、A車が260km/h、B車が210km/hですれちがう時の、B車の中間車側面で

測定した圧力の時間変化を示したものである。先頭部通過時に正負の圧力パルス、後尾部通過時に負正の圧力パルスが観測される。この結果は、列車の先頭部に湧き出し、後尾部に吸い込みを置いたポテンシャル流のモデルで定性的に説明できる<sup>1)</sup>。

いま、新幹線などの長大編成列車を対象とし、中間部が平行な形状であるとすれば、列車同士のすれちがいは、先頭部対先頭部、先頭部対中間部、先頭部対後尾部、後尾部対中間部、後尾部対後尾部、と分けて考えることができる。通常後尾部まわりでは流れの剥離が大きく、先頭部まわりに比べれば圧力変化は小さいので、すれちがい時の動揺については先頭部通過に係わる場合の方が大きくなる。

さらに、すれちがいの問題については地上側の条件として、明かり区間 (トンネル外) とトンネル区間の場合がある。トンネル内走行中の車両まわりの圧力分布は、突入時に発生した圧力波のトンネル内の往復や、対向列車とのすれちがいによって、複雑に変化するが、すれちがいの瞬間の車両まわりの3次元的な圧力分布の変化によっておこる衝撃的な動揺 (主として横揺れ) の問題に限れば、トンネル区間の方が明かり区間よりも影響は小さい。これはトンネル内では対向列車の圧力分布がすれちがう側と反対側 (トンネル壁面側) にまわりこむためである。

\*鉄道総合技術研究所

\*\*航空宇宙技術研究所

2.2 数値シミュレーション

前項で述べた点を踏まえ、今回は明かり区間での列車先頭部同士のすれちがいの数値シミュレーションを行う。列車の先頭部としては、高速鉄道を前提とし、剥離の小さな流線形のを対象とする。流れの粘性は影響が小さいので省略する。圧縮性については、高速走行（例えば500km/h）時の定量的な評価を行うことを最終目的とするため、その影響を含める。以上により、支配方程式は非定常3次元圧縮性オイラー方程式となる。

数値計算プログラムは、前回<sup>2)</sup>トンネル突入の計算に用いたものの3次元版である。計算法は、セル中心定義の有限体積法であり、セル界面での数値流束はMUSCL型のTVDスキームにより求める。時間積分は陽的な2段階Runge-Kutta法によって行う。

列車のすれちがいのような、複数物体が相対的に運動する問題を取り扱うために、ここでは領域分割法を用いる。自列車、対向列車、地上のそれぞれに対して計算格子を割当て、列車側の格子は列車とともに移動させる。各計算格子間では、互いに領域境界を越えてダミーセルを設定し、そのセル内の物理量を内挿あるいは総和によって相手側の格子から計算する。各計算格子間の領域境界では、2方向の格子線が連続で、1方向の格子線のみが食い違うような構成とし、計算格子間の位置関係の決定は1次元的な探索によって行う。計算格子全体の鳥瞰図を図2に、先頭部付近を拡大したものの正面図と平面図を図3に示す。図3の平面図では格子線が食い違っていることがわかる。

2.3 計算条件

列車の計算モデルとしては、先頭部と計算格子の最後方まで続く半無限長の中間部からなるものを考える。自列車と対向列車は同一の形状とする。走行速度は、両列車とも同一で270km/h（マッハ0.22）とする。両列車が同一形状、同一速度の場合は、点対称条件を使用することにより計算格子を半分に節約できるが、ここでは今後の拡張を考えて、自列車と対向列車で別々の格子を用いた。

はじめ両方の列車を一定の距離だけ離しておき、衝撃的に発進させることにより、計算を開始する。急発進によって圧力波が発生するが、列車がすれちがう時点ではその影響が十分小さ

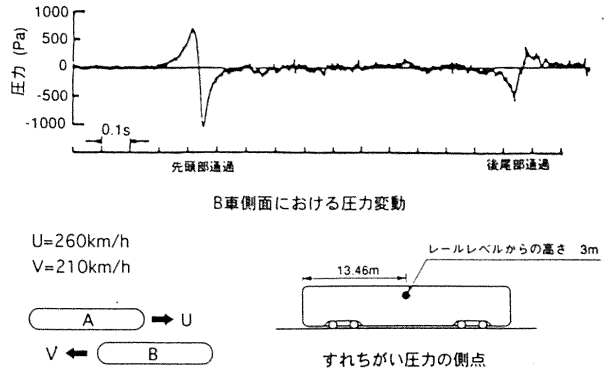


図1 すれちがいの時の圧力変動に関する実測例

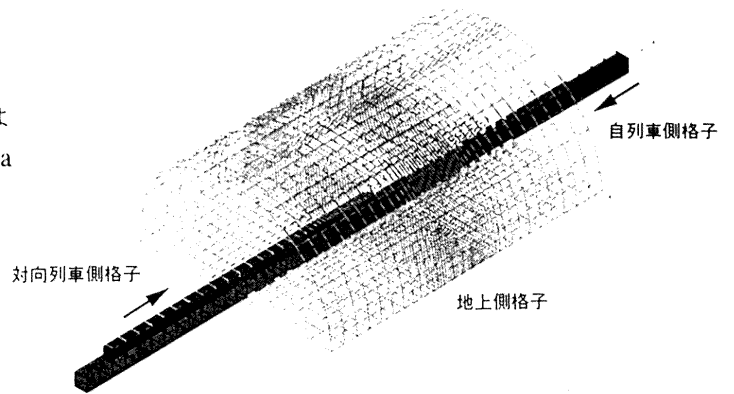


図2 列車すれちがいのシミュレーションのための計算格子（全体図）

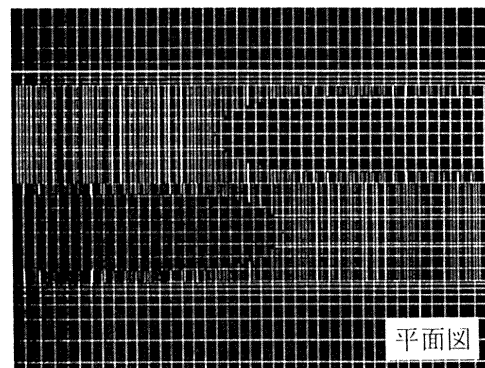
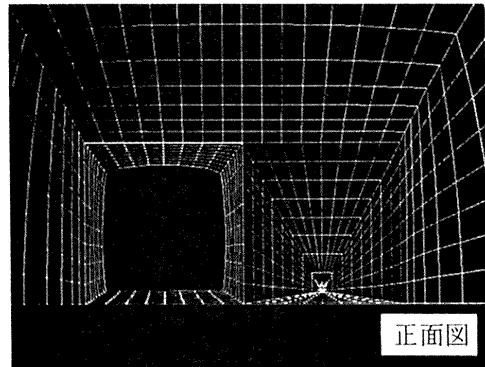


図3 列車すれちがいのシミュレーションのための計算格子（先頭部付近拡大図）



くなるように発進位置を決定する。ここでは両方の列車を車両高さの30倍だけ離して発進させる。図2、3の計算格子の全セル数は約11万である。

2.4 計算結果

先頭部と先頭部がすれちがった直後の圧力分布を図4に示す。対向列車（図で手前側の列車）の影響により、自列車側面に地面と同様の圧力分布が現われている。対向列車の先頭部先端付近の高圧部と先頭部から中間部へかけての低圧部の影響により、自列車側面では圧力の極大点、極小点が現われる（極小点は図では対向列車車体で隠れていて見えない）。

この圧力分布が時間とともに自列車側面上を移動し、その結果編成列車を構成する各車両に非定常空気力が働く。車両の動揺については、編成列車の運動方程式に、この非定常空気力を外力として加えることにより解析することができる。

自列車の平行部側面上の固定した位置における圧力の時間変化を図5に示す。対向列車とのすれちがい側の側面では正負のパルス状の圧力分布が見られ、図1の実測結果と同じ傾向である。なお、列車の形状や走行条件が異なっているため、ここでは定性的な比較にとどめた。また図5によると、自列車のすれちがいと反対側側面での圧力変化は小さい。したがって、自列車車両には主として横向きの力とヨーイングモーメントが働くことがわかる。

先頭部と先頭部のすれちがいは純粋に非定常な現象であるが、先頭部と中間部のすれちがいは境界層の発達などを無視すれば、一種の定常状態になっているとみなせる。自列車を無限長とし、対向列車に固定した座標系から見れば定常な問題に置き換えることができる。この原理を応用して風洞試験によりすれちがい時の影響を評価することができる<sup>3)</sup>。明かり区間のすれちがいの問題では、影響を受ける側の車両表面の圧力分布がわかれば十分なことが多く、このような定常モデルが有効である。

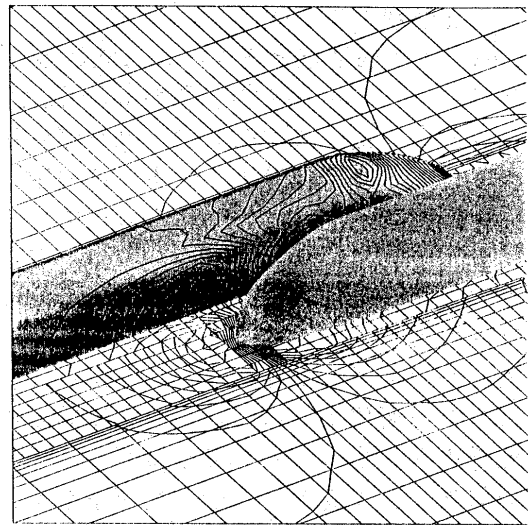


図4 先頭部すれちがい直後の圧力分布

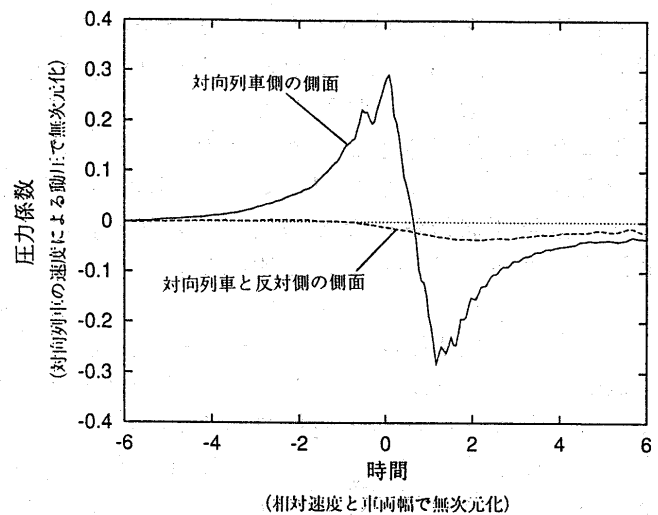


図5 すれちがい時の自列車中間部側面における圧力変動 (相対速度と車両幅で無次元化)

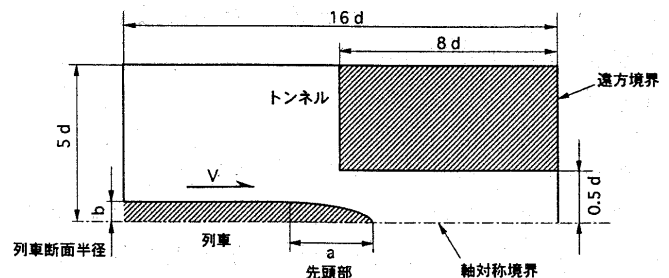


図6 トンネル突入シミュレーションの計算モデル

### 3.トンネル突入シミュレーションによる 先頭部形状の最適化

#### 3.1 列車先頭部形状とトンネル微気圧波

列車のトンネル突入時に形成される圧縮波は、トンネル内を伝播して、突入側と反対側の坑口でトンネル微気圧波を発生させる。この微気圧波を低減するためには、トンネル入口で形成される圧縮波の圧力勾配を小さくすることが有効である<sup>4)</sup>。

トンネル入口で形成される圧縮波の波形は、列車先頭部の形状に依存する。したがって、先頭部形状を最適化することにより、圧縮波の圧力勾配を小さくすることができる<sup>5) 6)</sup>。圧縮波の圧力勾配は、車両の最大断面積が小さく、また先頭部が長いほど小さくなるが、車両設計上、それらの値には限度がある。したがって、与えられた車両最大断面積（車両断面積とトンネル断面積の比）と先頭部長さに対して、圧縮波の圧力勾配ピーク値を最小とするような先頭部形状を見いだすことが重要となる。これは、一種の設計問題（最適化問題）である。

ここでは、前回報告した軸対称のトンネル突入シミュレーションプログラム<sup>2) 7)</sup>を用いてトンネル微気圧波低減のための列車先頭部形状の最適化を行った結果について述べる。

#### 3.2 トンネル突入の数値シミュレーション

数値シミュレーションにおける支配方程式および数値計算法は前回と同様である。トンネル突入時の圧縮波形成に関して3次元性の影響は小さいので、軸対称流のシミュレーションを行う。実際先頭部の3次元形状を設計する場合は、軸対称先頭部の形状を最適化し、それと同じ断面積分布となるような先頭部形状を決定するという方法が有効と考える。図6にはトンネル突入の計算モデルを、図7には計算格子の例を示す。

#### 3.3 先頭部形状と圧縮波波形の関係

計算結果については前回報告したので省略する。ただし、後の議論の前提となる先頭部形状に関する計算結果については以下で説明しておく。図8に、先頭部形状が圧縮波波形に及ぼす影響を数値シミュレーションにより調べた結果を示す。図8上は、トンネル入口からトンネル直径の6.8倍だけ奥へ入った位置での圧力の時間変化、すなわち圧縮波の波形を示したものであ

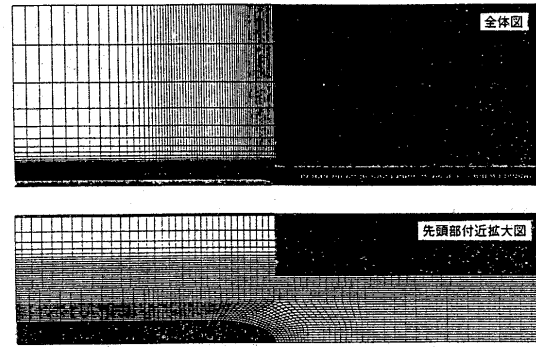


図7 トンネル突入シミュレーションの計算格子

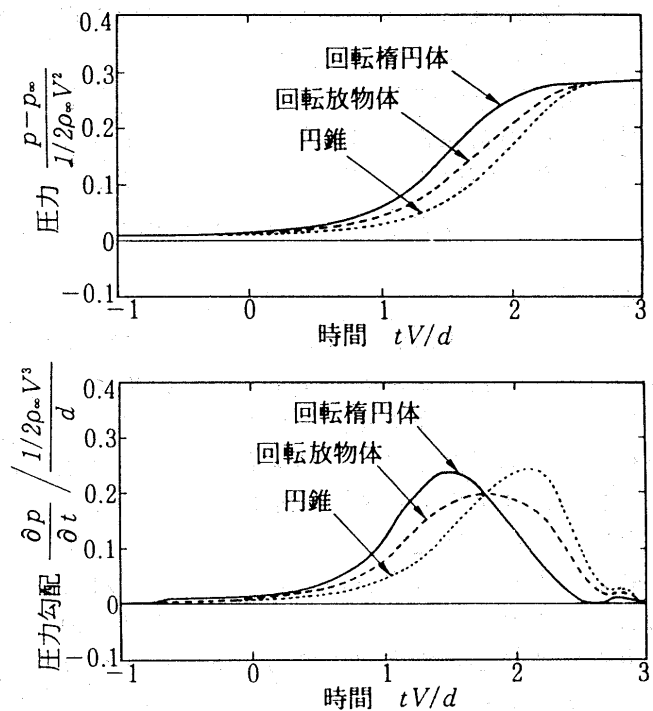


図8 先頭部形状が圧縮波波形に及ぼす影響  
R=0.12 M=0.18 a/b=7

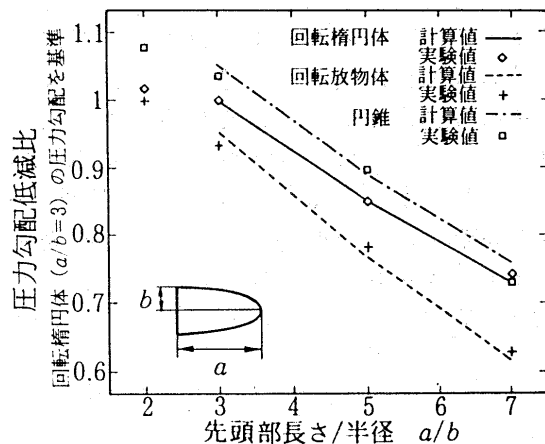


図9 先頭部形状・長さとの圧縮波圧力勾配の関係  
模型実験と数値シミュレーションの比較  
R=0.12 M=0.18

る。図8下は、その時間微分波形で（時間的な）圧力勾配である。計算条件は、列車・トンネル断面積比 $R=0.12$ 、突入マッハ数 $M=0.18$ 、先頭部の長さ $a$ と車両断面半径 $b$ の比 $a/b=7$ 。先頭部形状として、回転楕円体、回転放物体、直円錐の3つの基本的な形状とした場合のシミュレーションの結果を示している。図8よりこの3形状の中では回転放物体が最も圧力勾配のピーク値が小さいことがわかる。（なお、1次元流の考察からも理解されるように先頭部で大きな剥離がない限り、圧縮波の圧力上昇量は車両の最大断面積から決まり、先頭部の形状変化には依存しない。）図9は、先頭部形状と圧縮波の圧力勾配の関係を数値シミュレーションと模型実験で比較したものであるが、両者は一致する結果を与えており、数値シミュレーションが先頭部形状の効果を評価するために有効な手法であることを示している。

3.4先頭部断面積分布の最適化

図8によれば、3つの基本形状の中で回転放物体による圧縮波の圧力勾配ピーク値が最小であった。これは回転放物体の断面積変化率が一定（断面積分布が直線的）であることと関連があると考えられる。この直線的な分布を初期値として断面積分布を修正することにより、圧力勾配ピーク値をさらに小さくできると期待できる。

圧縮波の圧力勾配ピーク値を小さくするためには、圧力上昇に要する時間を長くし、その間の圧力上昇を直線的にすればよい。したがって最適な断面積分布として、基本的には直線分布で、先端と終端（先頭部と平行部の境界）で断面積変化が大きくなっているという分布が考えられる。ここでは断面積分布を、

$$\frac{A(x)}{A_0} = (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\frac{x}{\ell} + \alpha_1(1-\alpha_2)\sqrt{\frac{x}{\ell}} + \alpha_2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$$

と表す。ここで、 $x$ :先端からの距離、 $\ell$ :先頭部長さ、 $A(x)$ :断面積分布、 $A_0$ :最大断面積である。 $\alpha_1$ と $\alpha_2$ はパラメータで、この値は後述の最適化手法により決定される。パラメータの数を増やせば、断面積分布のより細かな調整が可能となるが、最適化のための計算時間が増大するので、妥協が必要である。今回の計算では、上式の2パラメータの表現で実用上問題のない結果が得られている。

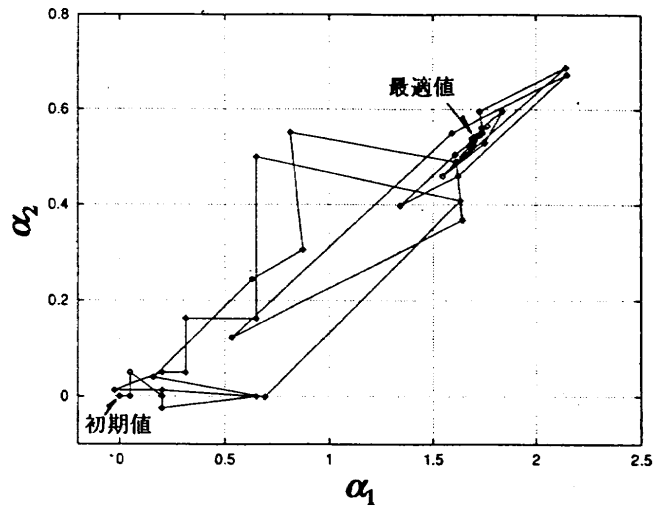
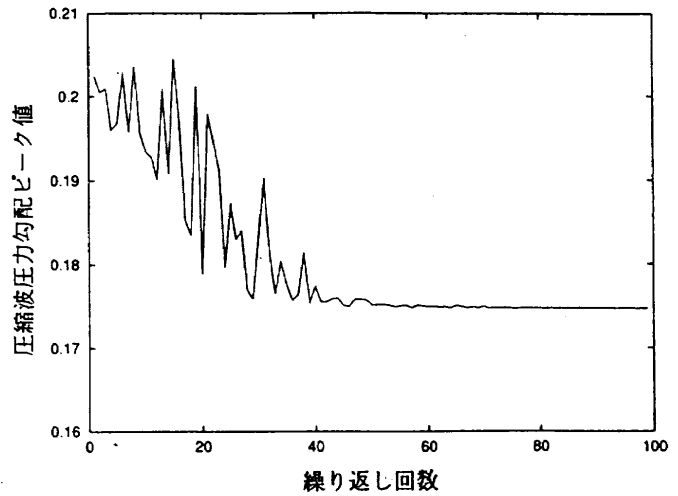


図10 先頭部断面積分布最適化の収束履歴

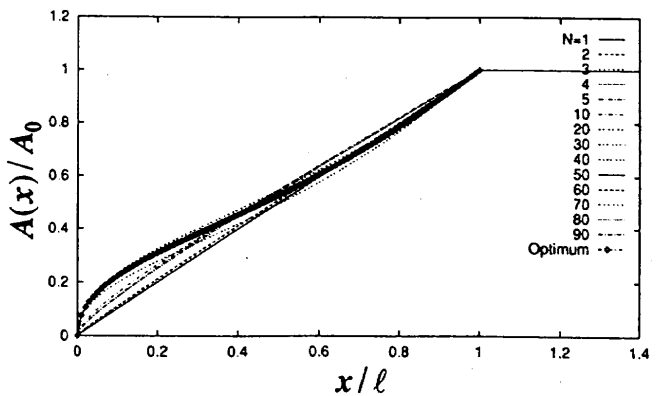


図11 先頭部の最適断面積分布

最適化の手法としては、非線形計画法の中で直接探索法に属するRosenbrock法<sup>8)</sup>を用いる。直接探索法では目的関数の導関数を計算する必要がないので、今回のように数値シミュレーションプログラムの出力が目的関数の値となるような問題への適用が容易である。

形状の最適化を自動的に行うためには、格子形成も自動化する必要がある。ここでは軸対称モデルに対して代数的に格子を形成するルーチンを作成して、シミュレーションプログラムに組み込んでいる。

図8の計算と同一の条件に対し、直線分布を初期分布として、断面積分布の最適化を行った結果を以下に示す。図10は収束の履歴である。図10上が目的関数の値（圧縮波の圧力勾配ピーク値）が繰り返し計算によって収束していく状況を示し、図10下が2つのパラメータの収束状況を示している。図11は断面積分布の収束状況、図12は圧縮波波形と圧力勾配波形の収束状況を示す。図11、12でマークでプロットした線が、最適断面積分布とそれによる圧縮波の波形を示す。はじめに意図した通り、直線的に圧力が上昇する圧縮波の波形が得られている。最適断面積分布の特長は、先端で断面積変化が大きく、鈍頭な形状となっていることである。鈍頭な形状では、先端の淀み点前方の高压領域の広がりが大きくなるので、先頭部が実際にトンネルに突入する前の早い段階からトンネル内の圧力を上昇させることができる。

ここで扱ったような非線形問題では、極小値が1つとは限らず、常に大域的な最小値が得られるという保証はない。しかし、上記で得られた最適断面積分布に関しては、目標通りの圧縮波の波形が得られており、満足すべき結果と言える。

なお、列車の先頭部形状の決定に当たっては、ここで述べた微気圧波の低減効果だけでなく、空気抵抗や空力騒音などの他の項目についても検討する必要がある。

#### 4. おわりに

すれちがいのシミュレーションについては定性的に妥当な結果が得られたが、今後、単純形状について理論計算や模型実験との定量的な比較を行い、シミュレーションの検証を進める。

トンネル突入のシミュレーションについては設計ツールとしての有用性が示されたものと考え

ている。今後はトンネル側の形状最適化などに発展させていく予定である。

最後に、すれちがいシミュレーションにおいて車両の表面格子データを提供していただいた鈴木昌弘氏に感謝の意を表す。

#### 参考文献

- 1)川口光年, 鉄道技研報告 No.386, 1963
- 2)飯田雅宣ほか, 航技研特別資料 SP-22, 1994
- 3)井門敦志ほか, 鉄道総研報告 Vol.7, No.7, 1993
- 4)小沢智, 鉄道技研報告 No.1121, 1979
- 5)前田達夫ほか, 鉄道総研報告 Vol.4, No.1, 1990
- 6)Maeda, T. et al., The International Conference on Speedup Technology for Railway and MAGLEV Vehicles, Nov. 1993, Vol.2
- 7)飯田雅宣, 鉄道総研報告 Vol.8, No.6, 1994
- 8)杉江日出澄ほか, "FORTRAN77による数値計算法", 培風館, 1986

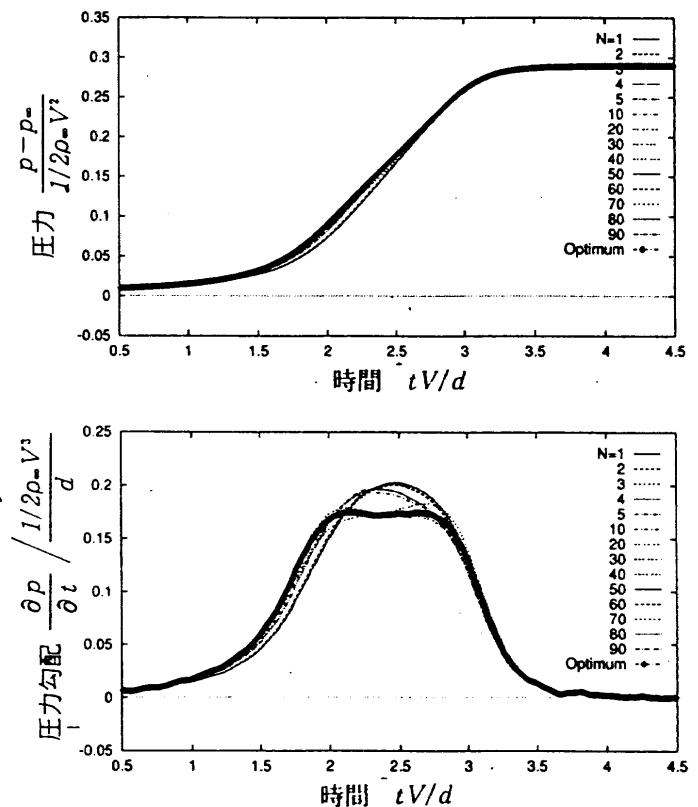


図12 最適断面積分布の先頭部による圧縮波と圧力勾配

## 壁乱流中を伝播する孤立波の解について

白 布日其其格\* 松尾裕一† 柘植俊一‡

Turbulent Solitary Wave Propagating through Wall  
Boundary Layer

Burtsitsig Bai Yuichi Matsuo Shunichi Tsuge

## ABSTRACT

A flat plate turbulent Boundary Layer has been investigated numerical by applying turbulence governing equations without any empirical parameters, that originally proposed by Tsuge. Pseudo-compressibility method is employed to make the system of Equations hyperbolic. FDM with Newton Iteration and with the upwind technique is applied to solve fluctuation equations for given velocity profiles. An approximate factorization is used to speed up the convergence. A solitary wave solution of turbulent vortices is obtained in the physical-plus eddy space, Reynolds stress and other turbulence intensities are calculated through simple integrations, and satisfactory agreement with experimental data is observed.

## 1 はじめに

レイノルズの実験(1883)以来、乱流現象の解明は今だに物理学における未解決で最大の難問である。応用面でも、この領域の正しい知識が欠落しているため、例えば航空機の摩擦抵抗値、スクラムジェットの着火距離が決定できないまま残されている。

最近の計算機科学の急激な発展は低レイノルズ数域での乱流の直接シミュレーションを可能にした。但し、乱流のフラクタル構造の存在のため、この手法では至るところで微分不可能な物理量を扱うことになる。最小渦を分解するためにステップサイズ $\Delta x$ をフラクタル構造の下限、すなわちコルモゴロフスケール( $LR_e^{-3/4}$ 、 $L$ は流れの特徴長さ)以下に取らなければならない。これに要求される計算機の容量は $(L/\Delta x)^3$ に比例するからレイノルズ数の実用域での計算は絶望的なものである。

他方、NS方程式を平均し微分可能な量に直し、無理のないステップサイズで解くには、そこで平均量として現れるレイノルズストレスを決めるために何等かの

乱流モデリング(例えば $k-\epsilon$ モデル)の導入は避けられない。それは恣意的パラメータが存在し、実験値を必要とする。非常に複雑な流れまたは燃焼や化学反応が伴うような実験値の非常に不足している流れの解析は困難である。これらの制限を受けない乱流理論とは、実験値に寄生する記述的理論ではなく、それ自身で自立できる予言的理論でなくてはならない。歴史的に始めての予言的乱流理論と言えるものでKarman-Howarthの統計的乱流理論があるが、これはごく単純な一様等方性の場合に限られる。

柘植<sup>[2]</sup>は、実験に依存する恣意的パラメータを一切含まないという意味で真に予言的、しかも上記のような高レイノルズ数域にも適用可能な乱流理論を提案した。それは、非平衡統計力学の第一原則から出発し、流体力学に至るところで平均値と乱流相関という2セットの方程式が連立するという形を取る。この理論では、もっとも重要なのは統計力学上、元来問題とされて来た無限連立方程式の打ち切り条件が直観的物理像に裏付けられるように導入されたことである。それに、相関方程式は非線形のまま変数分離ができて、独立変数が多点空間から一点空間に変わり、現存の数値解法は適用可能となる。例えば、ベナール対流<sup>[3]</sup>、乱流火炎

\* 筑波大学院工学研究科

† 航空宇宙技術研究所数理解析部

‡ 筑波大学構造工学系

[1]について、それぞれ数値解析が行われ、実験とよく一致する結果を得た。

この理論は最近周波数空間でなく、波数空間で考察する<sup>[4]</sup>ことで、境界層型流れはもっと扱い易くなった。本研究では平板境界層の応用例を考える。第2節では平板境界層の定式化を行い、第3節では数値計算の過程を説明する。第4、5節では結果を考察し、結論を示した。

## 2 平板境界層の定式化

平板境界層とは固体壁の近くの乱流の代表的なもので、流れに平行に置かれた平板の上に形成される流れである(図1参照)。固体表面では速度がゼロなので、非常に単純でありながらも、固体面のそばの乱流の特性をすべて備えている典型的なタイプであるためその第一原則による解析は重要な意義を持つ。

ここでまず拓植による乱流理論を簡単に紹介する、乱流相関は  $q$  を用いて次のように表示する

$$\begin{aligned} \langle u'_j \hat{u}'_l \rangle &= RP \int_{-\infty}^{\infty} q_j \hat{q}_l \delta(k+\hat{k}) dk d\hat{k} \\ \langle u'_j \hat{u}'_l \hat{u}'_r \rangle &= RP \int_{-\infty}^{\infty} q_j^+ \hat{q}_l^+ \hat{q}_r^+ \delta(k+\hat{k}+\tilde{k}) dk d\hat{k} d\tilde{k} \quad (2.1) \end{aligned}$$

しかし、 $q = q(x, k, t)$ ,  $\hat{q} = q(\hat{x}, \hat{k}, t)$ ,  $\tilde{q} = q(\tilde{x}, \tilde{k}, t)$  で、 $k$  は波数ベクトルである。 $x = \hat{x}$  の際、2点相関式は乱流輸送量を表す。式2.1)で

$$q = q^+ \quad (2.2)$$

と仮定することでB B G K Y階級(Bogoliubov, 1959)が自然に打ち切られる、すなわち打ち切り条件である。しかし  $q_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) は各成分の速度ゆらぎを、 $q_4$  は圧力揺らぎを表す。こういう前提で、第一原則より導びかれた乱流支配方程式は多点空間での変数分離ができたように表される、まずゆらぎについては

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_r}{\partial x_r} &= 0 \\ (-i\omega + \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial x_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}) q_j & \\ + q_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} \int q_j(k - \tilde{k}) q_l(\tilde{k}) d\tilde{k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial q_4}{\partial x_j} &= 0 \quad (2.3) \end{aligned}$$

となり、平均流については

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial x_r} &= 0 \\ (\frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial x_r} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}) u_j & \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_r} \langle u'_j u'_r \rangle &= 0 \quad (2.4) \end{aligned}$$

となる。 $u_r$  は速度成分で、 $p$  は圧力である。(2.3)式は微積分方程式であるため、更に次のような変換を施すと

$$\begin{aligned} q_\alpha(x, k, t) &= e^{ik \cdot x} Q_\alpha(x, k, t) \\ Q_\alpha(x, k, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{ik \cdot s} f_\alpha(x, s, t) \quad (2.5) \end{aligned}$$

(2.3)は  $f$  についての微分方程式になる

$$\begin{aligned} \partial_j f_j &= 0 \\ (\frac{\partial}{\partial t} - C_l \frac{\partial}{\partial s_l} + u_l \partial_l - \nu \partial_l^2) f_j & \\ + \frac{1}{\rho} \partial_j f_4 + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} f_j + \partial_l f_j f_l &= 0 \quad (2.6) \end{aligned}$$

ここで、 $\nu$  は動粘性係数、 $\partial_l = \partial_{x_l} + \partial_{s_l}$ 。  $C$  は変数分離常数  $\omega$  に由来するもので、境界層型流れでは、大規模構造の波速であり、低レイノルズ数平板境界層の場合約一様流速の約0.8倍<sup>[5]</sup>である。 $s_l$  は長さのスケールを持ち、ここでは渦のサイズを表し  $x_l$  は物理座標である。 $f_\alpha$  ( $\alpha = j, 4$ ) は  $q_\alpha$  に対応して、速度成分及び圧力擾乱を表す。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha &= 0 \quad (\alpha = j, 4) \quad \text{as } |s| \rightarrow \infty \\ f_j &= 0 \\ \partial_x f_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \left( \begin{array}{l} \text{at solid boundaries, or} \\ \text{in approaching a uniform} \\ \text{flow or fluid at rest.} \end{array} \right) \quad (2.7)$$

であり、方程式の解は孤立波型であることを要求する。

式(2.3)と(2.4) (または(2.4)と(2.6)) は非圧縮性乱流を支配する2セットの方程式である。これはもっとも一般的なもので平板境界層への適用は簡単である。

一様流速と境界層の厚さを用いて方程式を無次元化並びに相似変換を行い、更に保存系に直すと、平板境界層に対するゆらぎの支配方程式は次のように書ける。

$$Q_j + E\mu + F\gamma + F\sigma + G\nu - Re^{-1} \Delta Q = H \quad (2.8)$$

ここで

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} f_1 \\ (u - c + f_1)f_1 + f_4 \\ (u - c + f_1)f_2 \\ (u - c + f_1)f_3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_2 \\ (v + f_2)f_1 + \\ (v + f_2)f_2 + f_4 \\ (v + f_2)f_3 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_3f_1 \\ f_3f_2 \\ f_3f_3 + f_4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

式(2.8)の右辺Hの各要素は次のように与えられる。

$$s_0 = \tilde{\nabla} f_1$$

$$s_1 = \tilde{\nabla}((u + f_1)f_1 + f_4) + \delta_x f_1 \nu u_\nu f_2 u_\nu$$

$$s_2 = \tilde{\nabla}((u + f_1)f_2) + \delta_x f_1 \nu v_\nu f_2 v_\nu$$

$$s_3 = \tilde{\nabla}((u + f_1)f_3)$$

$$\tilde{\nabla} = \delta_x(\mu \partial_\mu + \nu \partial_\nu) + \sigma \partial_\sigma$$

しかし $\mu, \sigma, \nu$ はそれぞれ流れ方向、壁からの垂直方向とスパン方向の渦のサイズを表す相似座標、 $y$ は物理空間での垂直方向の相似座標で、 $Re = U\delta(x)/\nu$ はレイノルズ数である。

実際の物理像より $F_\sigma$ の影響は $F_\eta$ より小さいから $\sigma$ の微分項は無視する。(2.8)式を一般直交座標系

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(\mu, \nu) \\ \eta &= \eta(\mu, \nu) \\ \zeta &= \zeta(\mu, \nu) \end{aligned} \quad (2.9)$$

に書き直すと

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{Q} + \partial_\xi(\hat{E} - R_\xi^{-1} J^{-1}(\Delta\xi \cdot \Delta\xi) e_\xi I) \\ + \partial_\eta(\hat{F} - R_\eta^{-1} J^{-1}(\Delta\eta \cdot \Delta\eta) e_\eta I) \\ + \partial_\zeta(\hat{G} - R_\zeta^{-1} J^{-1}(\Delta\zeta \cdot \Delta\zeta) e_\zeta I) = J^{-1} H \end{aligned} \quad (2.10)$$

上式中

$$S = \hat{\kappa}_\mu E + \hat{\kappa}_\nu F + \hat{\kappa}_\sigma G \quad (S = \hat{E}, \hat{F}, \hat{G})$$

$$(\Delta\kappa \cdot \Delta\kappa) = \hat{\kappa}_\mu^2 + \hat{\kappa}_\nu^2 + \hat{\kappa}_\sigma^2 \quad (\kappa = \xi, \eta, \zeta)$$

$$\hat{\kappa}_\ell = \frac{\kappa_\ell}{J} \quad (\ell = \mu, \nu, \sigma)$$

ここで、 $\hat{Q} = J^{-1}Q$ 。JはJacobianで、Iは単位Matrixである。

なお各乱流輸送量である乱流強度、レイノルズストレス等は(2.1)式より簡単に分かるように次の二重積分式で計算する。

$$R_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \iint f_i f_j d\mu d\nu, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

しかし、 $\ell$ は実際の計算次元数でここでは $\ell = 2$ である。

### 3 数値解析

本来なら上記の2セットの方程式を連立して解くはずだが、ここで第一ステップとして2次元平均流を与え、揺らぎの方程式を解くプロセスを取る。擬似圧縮性を

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial f_4}{\partial t} + \partial_j f_j = 0 \quad (3.1)$$

のように導入することで方程式は双曲型になることを利用して、圧縮性流れの解法<sup>[8]</sup>を用いて解いた。ここで、 $\beta$ は擬似圧縮性パラメータである。

時間微分に関しては、陰的オイラースキームを用いた。局所時間線形化を行うと、(2.10)式は次のようなデルタ形式に書ける。

$$\begin{aligned} [I + h(\partial_\xi(A - A^\nu) + \partial_\eta(B - B^\nu) \\ + \partial_\zeta(C - C^\nu))] \Delta \hat{Q}^n = -h(R^n - H) \end{aligned} \quad (3.2)$$

しかし

$$R^n = \partial_\xi(\hat{E} - \hat{E}^\nu)^n + \partial_\eta(\hat{F} - \hat{F}^\nu)^n + \partial_\zeta(\hat{G} - \hat{G}^\nu)^n$$

また  $A = \frac{\partial Q}{\partial Q}$  etc. は流束 Jacobian Matrices、 $\Delta \hat{Q}^n = \hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n$  で  $h = \Delta t$  である。

更に(3.2)式の左辺を、近似的に因数分解し、各方向のマトリクスを対角化<sup>[6]</sup>する

$$\begin{aligned} [I + h(\partial_\xi \Lambda_\xi - \partial_{\xi\xi} \nu_\xi I)] \Delta Q^{(1)} &= -h X_\xi^{-1} R \\ [I + h(\partial_\eta \Lambda_\eta - \partial_{\eta\eta} \nu_\eta I)] \Delta Q^{(1)} &= X_\eta^{-1} X_\xi \Delta Q^{(1)} \quad (3.3) \\ [I + h(\partial_\zeta \Lambda_\zeta - \partial_{\zeta\zeta} \nu_\zeta I)] \Delta Q^{(1)} &= X_\zeta^{-1} X_\eta \Delta Q^{(1)} \end{aligned}$$

$$Q^{n+1} = Q^n + J X_\xi \Delta Q^{(3)} \quad (3.4)$$

こうすることで、計算機の容量と計算時間を大幅に節約することができた。

空間微分に関しては、右辺はTVDスキームを用い、左辺は粘性項は2次精度中心差分で、非粘性項は一次精度風上差分で離散化した、こうすることで、数値安定性と正確性を改善することができた。離散化した(3.3)はLU-ADI法<sup>[7]</sup>を用いて解いた。

初期条件には、微小擾乱を用いた。

### 4 結果と考察

数値計算は  $Re = 10^7$  という実用域での乱流について行った。計算領域は  $-20 < \mu < 20, 0 < \eta < 1, 0 < \nu < 10$  で格子サイズは  $61 * 41 * 31$  である。

図2から図6にて、それぞれ  $f_1$  の  $\eta, \nu$  面での分布と各座標面上の等高線を示す。ゆらぎは壁付近で急成長し、壁から離れて行くにつれてだんだん減衰して行くことが分かる。他のゆらぎ量に関しても、近い構造の孤立波解が求められた(図7、図9参照)。

図8は境界層内の乱流強度の分布、図10はレイノルズ応力の分布の計算値をそれぞれ実験値と比較したものである。乱流強度については壁近くの大きさの順序は正しく再現されているが定量的な一致は十分ではない。これは擬似圧縮性を導入したこと、平均流と連立して解いてないことと垂直方向の渦座標を無視していることが原因と考えられる。レイノルズ応力はかなりよい一致を示している。

### 5 結言

(1) 変数分離法による乱流理論を壁乱流に適用し、従来の数値解法に従って、孤立波の解が存在することが確かめられた。

(2) この孤立波の解からレイノルズストレス、乱流強度を求め、実験結果と比較した。

### 参考文献

- [1] 柘植、小川、“孤立波としての乱流I—予混合火炎・その伝播速度” 燃焼科学と技術, vol.1, pp. 85-101, 1993.
- [2] S.Tsuge, “Separability into coherent and chaotic time dependences of turbulent fluctuations,” *Phys.Fluids*, vol. 27, pp.1370-1376, Jun. 1984.
- [3] K.Ishibashi, “ベナール乱流の孤立波解,” *Ph.D Thesis, Ins.Eng.Mech.Univ.Tskuba Japan*, 1991.
- [4] S.Tsuge and S.Ogawa, “Turbulence as a Solitary Wave in Physical-plus-eddy Space,” *Under Review Process, Physical Review Letters*
- [5] S.Taneda, *Phys.Fluids*, vol. 26, pp.2801, 1983.
- [6] Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., “A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm,” *Journal of Computational Physics*, vol. 39, pp.347-363, 1981.
- [7] S.Obayashi, “Numerical Simulation of Underexpanded Plumes Using Upwind Algorithm,” *AIAA Paper*, 88-4360-CP, 1988.
- [8] Y.Matsuo, C. Arakawa, S.Saito and H.Kobayashi, “Navier-Stocks Computations for Flowfield of an Advanced Turboprop,” *AIAA Paper*, 88-3094, 1988.

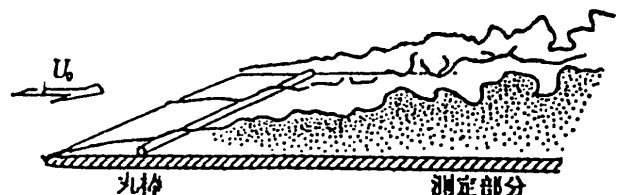


図1: Flat Plate Turbulent Boundary Layer



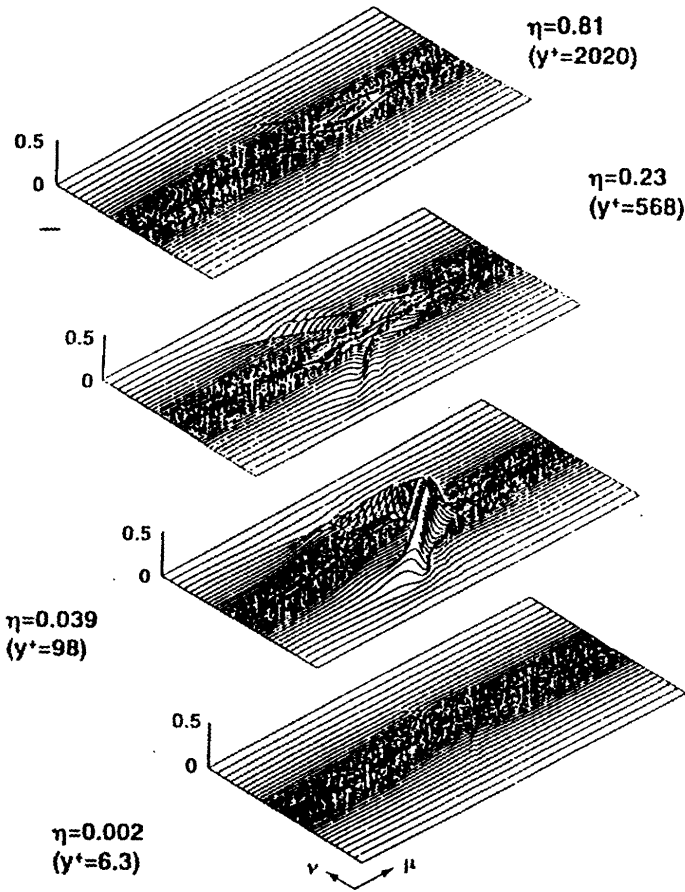


図 2:  $f_1$  Distribution on Specified  $\eta$  Planes

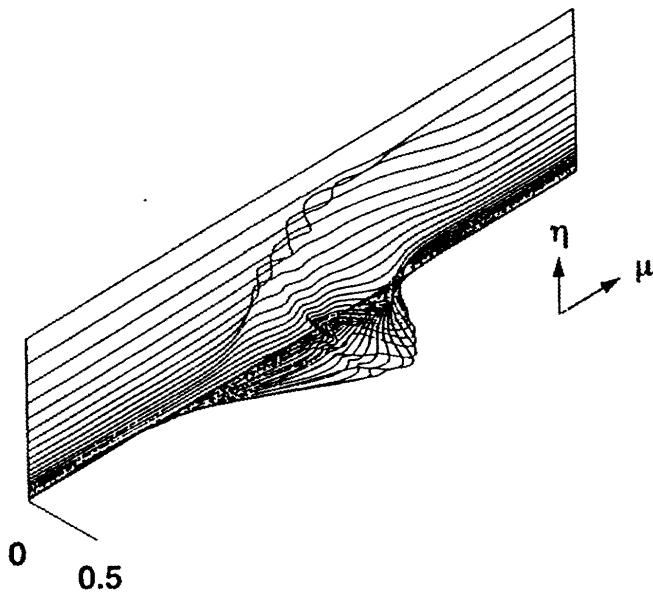


図 3:  $f_1$  Distribution on Specified  $\nu$  Plane

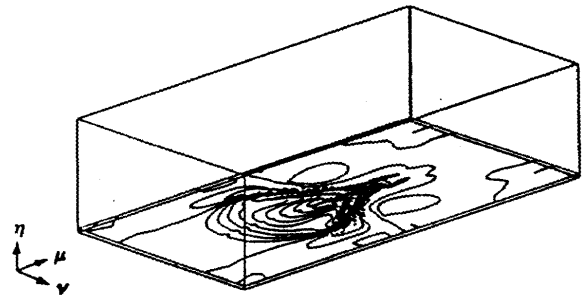


図 4:  $f_1$  Contours on Specified  $\eta$  Plane

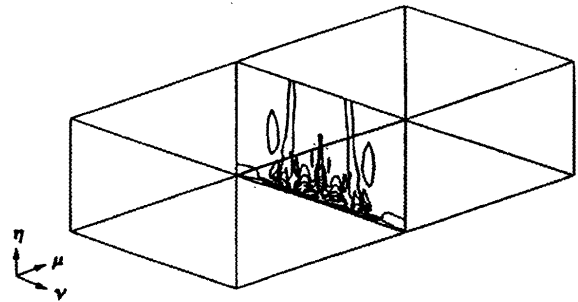


図 5:  $f_1$  Contours on Specified  $\mu$  Plane

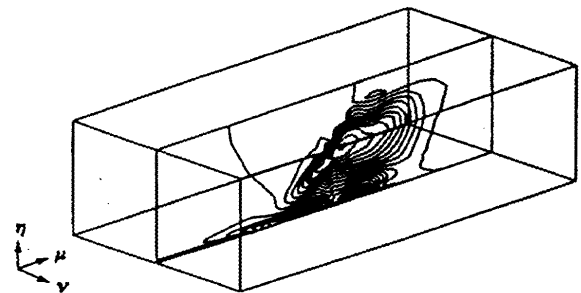


図 6:  $f_1$  Contours on Specified  $\nu$  Plane

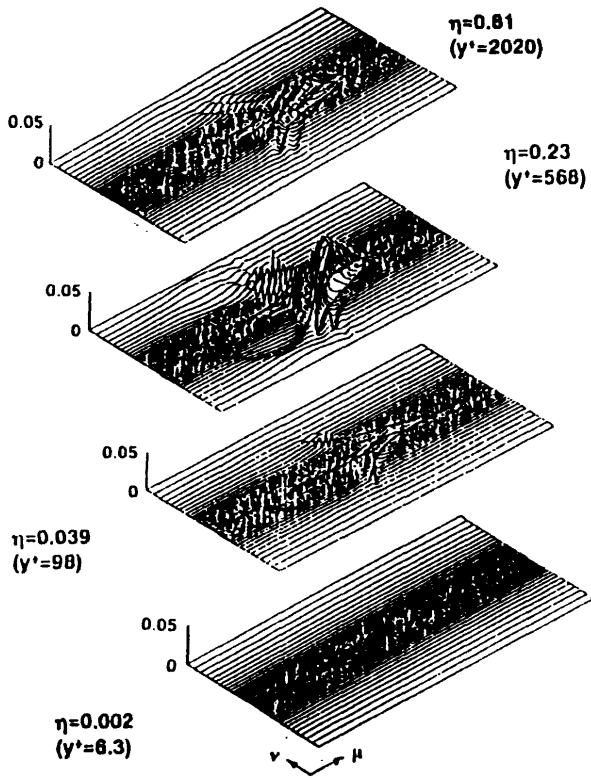


図 7:  $f_2$  Distribution on Specified  $\eta$  Planes

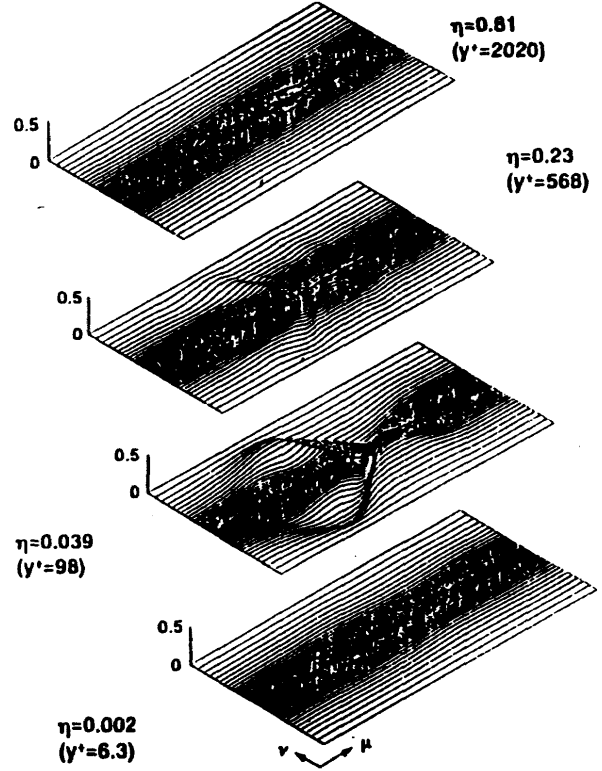


図 9:  $f_3$  Distribution on Specified  $\eta$  Planes

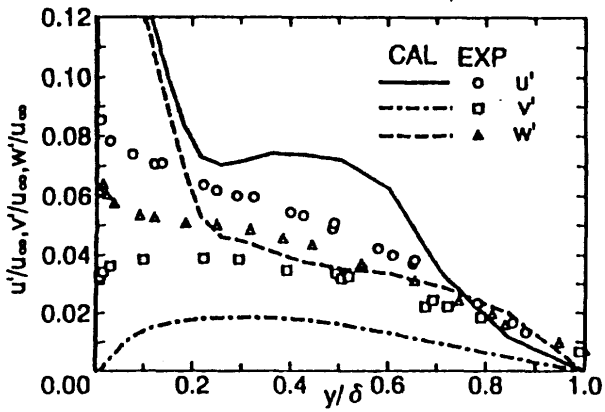


図 8: Turbulent Intensity Profiles

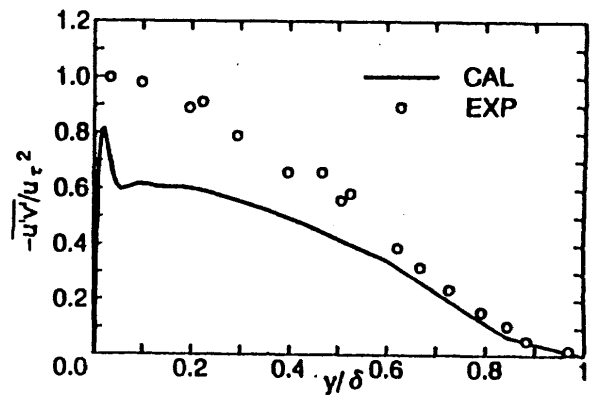


図 10: Reynolds Stress Profile

## 大規模計算とボリューム・ビジュアライゼーション

白山 晋 ((株)ソフテック)

## Large Scale Computing and Volume Visualization

Susumu SHIRAYAMA, SofTek Systems Inc.,  
BTS-3F, 1-22-7 Sangenjaya, Setagaya-ku, Tokyo 154

This paper describes several issues about a scientific visualization system utilized in analyzing a flow field obtained by a large scale computing. Firstly, a characteristic of data by the large scale computing is considered. Secondly, we focus on the efficiency of the volume-visualization techniques, and the accuracy of a proposed method is discussed. As a preliminary case, some model fields are visualized by using a Z-slice algorithm on a personal computer system.

*Key Words* : Volume Visualization, Large Scale Computing

1. はじめに

CFDにおける可視化の研究は可視化技術の開発よりも応用面を中心として発展してきた。このため、実験における可視化とは異なり、基礎的な技術に関する研究は少ない。これは、次の二つの理由による。一つは、先行していたコンピュータ・グラフィックスの研究の中で開発された技術が、そのまま使えたことである。見方を変えれば、CFD固有の手法というものがある。(但し、仮想粒子の追跡法はCFD独自の可視化法として位置づけられている[1,2]。) もう一つは、ソフトウェア、ハードウェアを含めた可視化システムの理想像が、初期の段階から明示されてきたためである。このため、個々の手法よりも、統合システムの構築が重要であるとされた。更に言えば、見える流れ(出力された図)に対する吟味よりもシステム構築者のプログラミング技術が注目された時期が続いた。最近では、可視化のためのプログラミングツール(例えばAVSなど)によって見えない流れを見えるようにする労力は緩和されている。このため、可視化から解析への移行が促進されるものと思われる。しかしながら、現状では解析から可視化システムへのフィードバックが第三者の手に委ねられていることも事実として受けとめなければならない。

流れの研究の中での可視化の重要性について改めて述べる必要はないと思うが、大部分の研究者の使用している可視化システムが、そのような状況の中で成熟してきたことを思い起こす必要がある。というのは、可視化システムが次のような問題を抱えているからである。そして、それらの問題点について言及することが、本稿の目的である。

(a) 可視化の精度

(b) 計算環境に合った可視化手法の構築

(c) 新しい方法の導入

(a)については、可視化手法自身の精度と計算との適合性を問題とする。後者に関して、著者は「局所補間という観点から、格子生成、計算、可視化が統合される」という予想をたて、一つの解決策を提案している[3,4]。本稿では、ボリューム・ビジュアライゼーションと局所補間ということを考えてみる。使用している可視化システムの中味を知らないという流れの研究者の注意を促したい。

(b)多くの手法が、開発時でもっとも性能のよいハードウェアを想定して修正されてはいるが、計算に適した機種と可視化に適したものは一致しない。まして、可視化手法は、流れの研究者が作ったものではないために、計算環境を考えたときに新しい可視化システムが必要となる。大規模計算を例にしてこの問題を考えてみたい。

(c)CFD独自の方法であれば問題は少ないのだが、今後の主流となるであろうと一般的に言われている方法が本当に役立つのかは導入前に検討する必要があるだろう。一例としてボリューム・ビジュアライゼーションを考えてみる。

2. 大規模計算における可視化

大規模計算における可視化は、計算に適した機種と可視化に適したものの違いから、ハードウェアの性能の向上まかせという面が強くあらわれる。現時点では10万点程度の構造格子であれば、パソコンでの可視化も可能であるし、100万点であっても、GWSで処

理ができる。数千万点となるとどうか。並列化等による手法の効率化、解法への組み込みなど考慮すべき点は多い。しかし、それ以上に大規模計算の特性を考え、それに適した方法を模索する必要がある。そのためには、大規模計算のもつ二つの面（全体から得られる大規模構造、部分部分の詳細な構造）を同時に考えなければならない。図1に球後流の圧力分布を示す。レイノルズ数は40万、計算に用いた格子数は約1200万点（300x250x161）である。図1(b)は、1(a)を拡大したもので、剥離位置は球面上の縞模様の最後の部分であることが確認されており、それより後流側で軸対称性が著しく崩されている。

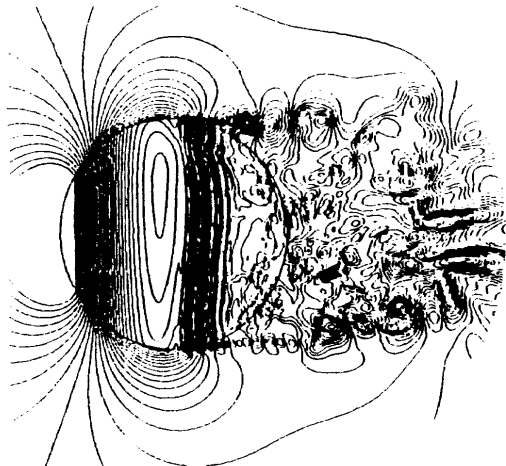


図1(a) 物体面と対称面上の圧力分布

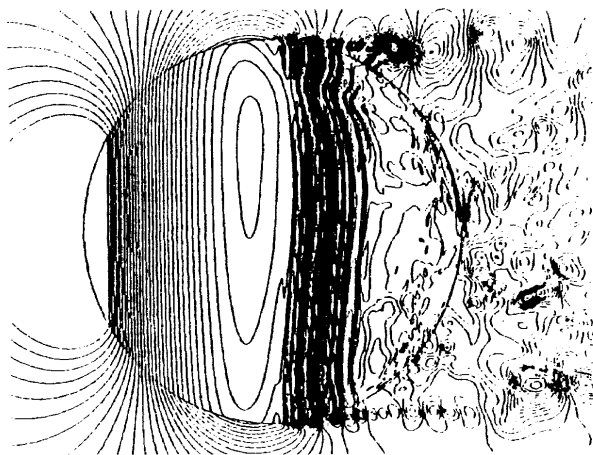


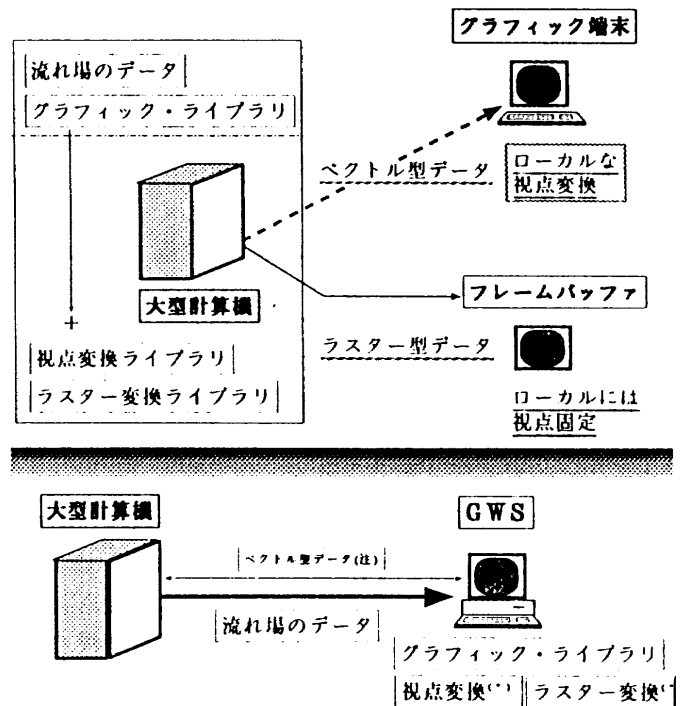
図1(b) 図1(a)の拡大図

実験によると、このレイノルズ数では抵抗の急減現象が始まっていて、計算によって詳細な様子が捉えられたかに思える。実は、この可視化は実験的事実とこれまでの経験をもとに等値線のレベルとか見方等がある程度決めて行っている。物体形状が単純なことも見るべき領域を絞り込むことに役立っている。それでも、着目すべき現象は、ある領域に集中しているものの、前もって特定することはできない。このため同じ可視化手法を用いてもいくつかの見方をする必要がある。そして、部分部分の構造は全体の構造か

ら見ると空間のコヒーレンスが良いとはいえない。

さて、大規模計算の二つの面を計算環境から考えてみよう。図2に可視化システムからみた計算環境の例を示す。全体を見る場合、ディスプレイの精度（画素の数）が中心に考えられることが多く、画面解像度が基準となる可視化の体系があらわれる。大型計算機上でイメージデータを生成後、結果はフレームバッファに送られるというシステムが考えられる。後述するように、ボリューム・ビジュアライゼーションの利点が大規模計算に適したものであるとする研究の根拠は、画面解像度が基準になる可視化が大規模計算の一つの特徴を捉えているということに起因する。部分を見る場合は、データ面でいえば粗い計算の集まりと見なせるので、次の三つのデータ選択がその時々で考えられる。

- (a) 全体から特徴的な部分が抜き出されていれば計算データそのもの
- (b) 見たい量が決定できればベクトルデータ
- (c) 見たい量と視点が決まればイメージデータ



(\*)視点変換、ラスター変換は、ソフト的に行う場合、ハード的に行う場合、グラフィックスエンジンのようにその部分だけ高速化する場合等がある。

図2 可視化からみた計算環境

球まわりの流れの可視化がどの様に行われたのかを紹介しよう。格子点の座標値に対するデータ量は144Mbytesで、流れの諸量として圧力と速度をとったので、それに対する一時刻のデータが192Mbytesであった（単精度とする）。GWSやグラフィック端末（TSS端末として接続されている）で会話処理できず、ペク

トル型のデータを大型計算機側で生成し、一時データとして保存後、視点を変更して、二次元ディスプレイで処理した。等圧線を求めるために要した計算時間は約10分、それをグラフィック・データとして転送、そして、一枚の図を描かせるのに約10分かかった。問題点として、データ転送をどうするか(ハードウェアの発展、どのようなデータ形式がよいか)、データをどう蓄えるか(データ圧縮の問題)、データ処理に要する時間を短縮できないか(可視化手法の高速化)などが取り上げられた。その後、アルゴリズムの高速化によって、等値線の計算は約1/2に、表示時間は数秒になったが、すべてが解決されたわけではない。

大規模なデータを扱う上で、「どのように特徴的な部分を見つけるか」が最も重要ではあるが、一般論を導くことは難しく、流れの研究者は事例毎に方法を変えているようである。このテーマは別の機会に話すこととし、この節の最後として、可視化法によるグラフィック・データのデータ量を見積もってみたい。三方向にほぼ同数の点である三次元データを考える。総格子点数を  $n$  とすると次のようにデータ量が見積もれる。

#### ・ベクトル型

##### (a) 点や線による可視化結果から

- ・格子図、ベクトル図、等値線図

$$(n^{\frac{2}{3}}) * O(1)$$

- ・仮想粒子による可視化

$$\text{発生粒子数} * \text{積分ステップ数}$$

##### (b) 多角形による可視化結果から

- ・格子面図

$$(n^{\frac{2}{3}}) * O(1)$$

- ・等値面図

$$(n^{\frac{2}{3}}) * 4 * \text{枚数} * O(1)$$

#### ・ラスタ型(イメージデータ)

$$\text{画素数} * 3 \text{bytes} \quad (\text{例}) 640 * 480 * 3 : \text{約 } 1 \text{Mbyte}$$

このように計算環境に合った可視化を行うために、既存のシステムをデータの構造から見直す必要がある。但し、解析によって得られた知見を可視化システムにフィードバックさせることで、より効率的なデータのハンドリングが可能になることを忘れてはならない。

### 3. ボリューム・ビジュアライゼーション

新しい可視化手法として、ボリューム・レンダリングが紹介されてから既に数年が経過した。騒がれたわりには使われていないというのが正直な感想であるが、方法自身は未だに新機軸として扱われる。その理

由としては、大規模計算に適した可視化手法としての期待とハードウェアの進歩による効率面の改善である。

最近では、ボリューム・レンダリングはボリューム・ビジュアライゼーションの中のレンダリングの操作として位置づけられるので、ここでは、手法をボリューム・ビジュアライゼーションと呼ぶことにする。著者は、ボリューム・ビジュアライゼーションを『二次元等値領域表示の三次元への拡張』と位置づけてきた[5,6]。

等値領域表示の利点は、図3に示すように等値線表示において特定領域の存在位置を明瞭にすることにある。特に、大規模計算において、はじめに特徴的な部分をさがすという作業に適している。それでも使われなかったわけは効率の悪さと定量性である。等値領域表示を等値線表示の代用とする場合、物理量の定量的な分布をも表現できることが前提となる。しかし、ボリューム・ビジュアライゼーションの場合、定量性があいまいになることが指摘されている[5]。これは可視化の精度を考える上で重要である。

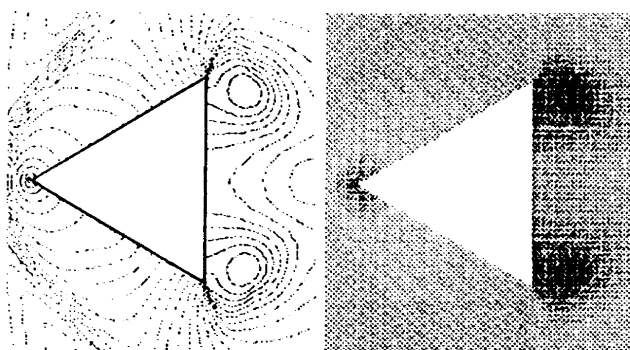
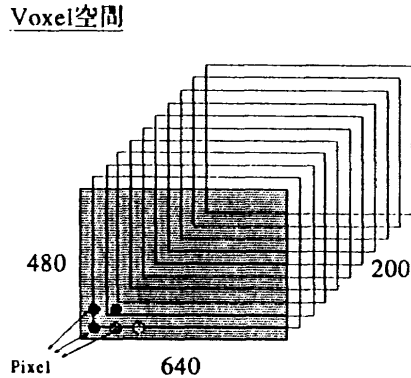
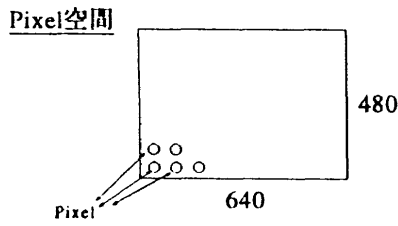


図3 等値線表示と等値領域表示

効率の悪さと定量性の問題があっても、大規模計算に適するとされたのは効率面を補う次の二つの利点が考えられたからである。一つはいわゆる比較論で従来の手法を大規模なデータの可視化に用いたとき、操作の数が増えるために効率的でなくなるということである。もう一つは図4に示すように格子点数が増えると、ボクセル空間が三次元のデータ空間と一致するという考えである(この論文ではボクセル空間を均質なデータの並びとして表現する。このため、CGの文献にあるように一般の三次元データ構造の総称としてのボクセルという呼び方はしない)。後者は、ボリューム・ビジュアライゼーションにとって理想的な状況である。しかし、CFDの大規模計算に当てはまるわけではない。というのは、CFDの場合、格子が均質であることは稀で、かつ、前節で述べたように空間のコヒーレンスが悪いものが多い。このため、元のデータからボクセル空間を構築する必要が生じる。この操作をボクセル・サンプリングと呼ぶこととする。図5に二次元でボクセル・サンプリング(ピクセル・

サンプリング)の概念を示す。 計算格子は均質なものではないので、例えば図5の×印で示したボクセル空間での値を計算格子から補間しなければならない。



計算空間とPixel空間(二次元)、Voxel空間(三次元)が一致すれば、スカラー値に対応した色をPixelに与えればよい。

図4 ボクセル空間の概念図

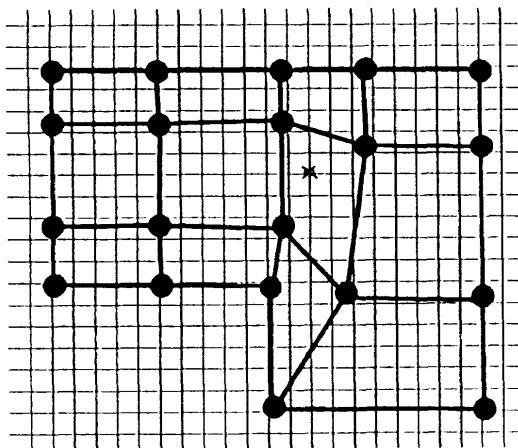


図5 ボクセル・サンプリングの概念図

この時、ある点が多角形の内か外かの判断が必要となる。 この判断のための効率的なアルゴリズムは提案されているものの探索点が増えると計算時間は膨大なものとなる[2]。 このため、大規模計算において計算格子点数の増加とボクセル数の増加は効率面でボリューム・ビジュアライゼーションを非現実的なものとする。 さらに、データの可視化時に切り出されたボクセル空間で視点変換を行う場合、一度のサンプリングで済むが(視点変換毎に行うレンダリングのためのサン

プリングをリサンプリングと呼ぶこととする)、計算精度は元のデータが最も良いので、可視化の精度という問題が生じる。

CFDのデータの場合、ボクセル・サンプリングとリサンプリングを同時に行い、レンダリングにより画像イメージを決定する方法が一般的となる。 よって、大規模計算に対するボリューム・ビジュアライゼーションを行う場合、サンプリングの効率化が重要になる。 また、精度を考える上でレンダリングの最適化も考慮しなければならない。

### 3.1 サンプリングの効率化

最も簡単なサンプリングの方法は先述した図5の方法である。 三次元での例を図6に示す。 例えば、計算格子点数を100万点、ボクセルの数を640x480x200とすると、約6000万点のボクセルが、どの6面体(約100万個)に属するのかを判断する必要がある。 この場合、近傍の情報を使っても計算負荷は大きい。 かなり効率的なアルゴリズムでも約6万点の格子から1280万点のボクセルを探すために、実行性能が約15MFLOPSの計算機を用いて、563秒の計算時間を要した[6]。 悪いことには、単純なサンプリングの場合、ボクセルが計算領域の内か外かの判断も必要となる。 計算領域より大きなボクセル空間を用いる場合のサンプリングの負荷はさらに増大する。

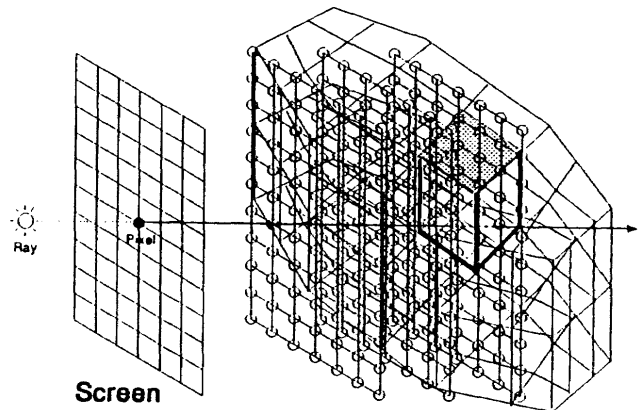


図6 三次元サンプリング(Ray Cast Algorithm)

探索の時間を短縮するために、計算格子を基準としたアルゴリズムが考えられた。 計算格子を多くの多面体の集まりと見なし、3D-DDAによってボクセル空間を構築する方法である。 3D-DDAは、プリミティブを中心とするため、CFDのデータのように計算格子が一様でないものに対しては可視化の精度が画像解像度と密接に関連する。 画像解像度より粗い計算格子に対しては効率的で可視化精度もよい。 しかし、前

もってボクセル空間を用意しておかなければならず、非常に大きなメモリを必要とする。そのため、3D-DDAの特徴を活かした別の方法が考えられた。一例は、まず計算格子を視点座標系に変換し、計算格子を視点座標の一方方向にスライスしながら探索する方法である(図7/1990年頃のCGの会議の参加者から聞いた話である。残念ながら参考文献等がわからない)。本稿では、その中でも、z方向にスライスされた多角形の集まりをピクセル化してサンプリングを行う方法を採用した。この方法を、z-スライス法と呼ぶ。図8に、球対称的な計算格子に波状に分布したスカラー値の空間分布を可視化した例を示す。サンプリングに要した

$\frac{1}{4} * n + \frac{3}{4} * n^{\frac{3}{2}}$ に比例し、s2に要する時間は、 $n^{\frac{3}{2}} + m^{\frac{1}{2}}$ に比例する。実際の計算に要した時間を格子点数を変えて調べた。結果を表1に示す。ボクセル数は640x400x50の1280万点、計算に使用した機種はPC98211p(i486DX2/66MHz)で、機種性能としては約6MFLOPS、実行性能として、2~3MFLOPSと予想されている。

表1: 計算時間/秒

格子点数	s1	s2	s1+s2
20x20x20(1)	19 (1)	47(1)	66 (1)
20x40x40(4)	35 (1.8)	73(1.6)	108 (1.6)
40x40x40(8)	57 (3)	110(2.3)	167 (2.5)
50x50x50(15.6)	95 (5)	149(3.2)	244 (3.7)

計算機性能を加味した比較では、z-スライス法は従来の方法に比べ約10倍速くなっている。さらに、この方法は分散計算環境に適していて、k個システムのPVMでは、s1、s2ともに、計算時間が $\frac{1}{k}$ 倍となることが期待されている。

3.2 可視化の精度

可視化の精度として考えなければならないのは、サンプリング時のエイリアス誤差とレンダリングの最適化である。前者は計算格子とボクセル空間の対応が図9のようなとき、物理量の空間コヒーレンスが悪いと非常に大きくなる(サンプリング定理)。後者はレンダリングによるイメージの違いが誤差の原因となる。

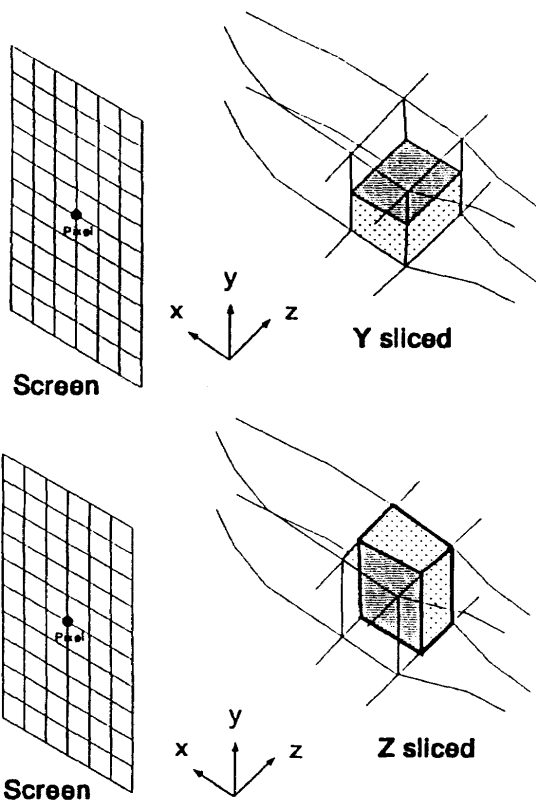


図7 スライス法

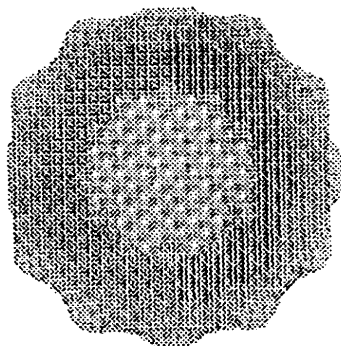


図8 モデル場のスカラーの分布

時間を、スライス処理(s1)とスライス面での探索(s2)に分けて調べてみる。計算格子点数をn、ボクセル数をmとして、粗く見積ると、s1に要する時間は、

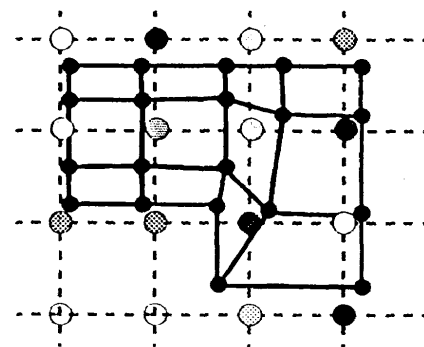


図9 Alias 誤差とサンプリング定理

レンダリングは図10のようにサンプリング点の視点からの積分によって行われる。つまり、一次元的な物理量の分布を高々数個のスカラー値(色を用いることが多い)に対応させる操作である。実験系との比較の場合、分布を積分値に対応させるための積分の方法が物理モデルの検証となり、一つの視点からの結果

で十分である場合が多い（シュリーレン法などの光学系を用いた実験や天体観測等との比較）。正確な物理モデルが得られた場合、可視化の誤差はエイリアス誤差に起因する。

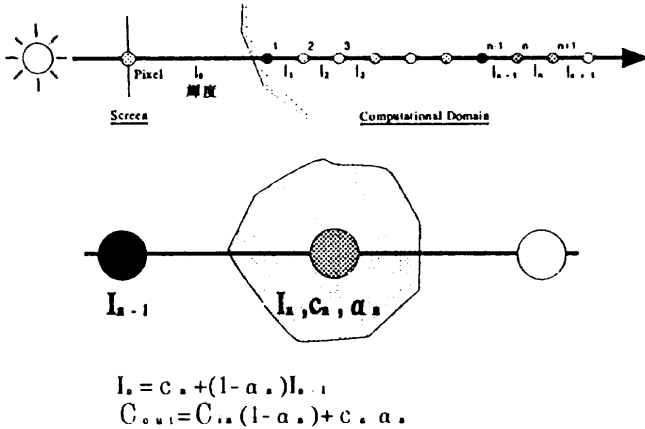


図10 レンダリングの方法

一般的なボリューム・ビジュアライゼーションの場合、物理量の分布の違いによる差異を表す必要があるが、一つの視点からの結果で表現することは難しい。図11はレンダリングの方法を変えた回転楕円体を過ぎる流れ場の動圧分布である。エイリアス誤差とレンダリングの方法による任意性がどの程度結果の解釈に影響するかは、三次元の定量的な分布が如何に正確に求められるかという問題を提起する。この問題は、ボリューム・ビジュアライゼーションの精度を吟味する上で非常に重要なものとなる。紙面の都合で紹介できないが、視点を変化させて求めた何枚かの図から三次元データを再構築することによって、元のデータと比較し、精度を見積もるといった試みを行っている。方法や結果は近々公表する予定である。

4. おわりに

画像データの観点からは、大規模計算の空間コヒーレンスは良いとは言えない。このため、全体と部分を相互に繰り返し調べる必要があり、可視化のパラメータの絞り込みが難しくなる。これは、グラフィック・データ量が一定であるというボリューム・ビジュアライゼーションの利点やはじめに特定領域を探すという目的をも打ち消してしまう。この意味でボリューム・ビジュアライゼーションの効率化と高精度化が急務となる。効率面の向上のためにアルゴリズムの並列化や専用ハードウェアの開発が行われている。高精度化をも実現する手段として、プリミティブ中心の3D-DDAが推奨されている。しかし、メモリ容量が膨大となるため、3D-DDAの特徴を備えたいくつかの方法が模索されている。その中でもスライス・アルゴリズム

という方法が適当であると思われる。精度の面では、x- または y-スライス法が良いが、本稿では、省メモリである z-スライス法を採用した。z-スライス法を用いれば、パソコン環境でも、一つのイメージを数分で生成できる。さらに、分散計算環境に適した方法であることが確かめられている。このため、分散計算環境のもとで流れの解析システムを構築した場合、可視化法の中に効率的なボリューム・ビジュアライゼーションを組み入れることができ、より強力な可視化システムの構築が可能になるものと思われる。

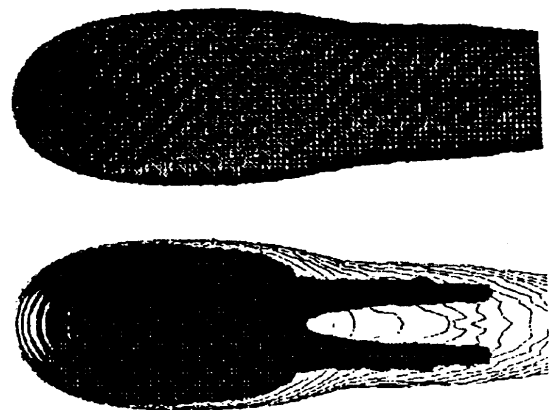


図11 動圧分布の二つの表現

参考文献

1. 白山 晋, "仮想粒子追跡法による流れの可視化", 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集, December, 1990, pp.483-486.
2. Shirayama, S., "Processing of computed vector fields for visualization", Journal of Computational Physics, vol.106, no.1, 1993, pp.30-41.
3. 白山 晋, "局所的な補間を用いた風上法について", 航空宇宙技術研究所特別資料 SP-19, December, 1992, pp.199-204.
4. 白山 晋, "ある種のベクトル場を可視化するための局所的補間について", 第7回数値流体力学シンポジウム講演論文集, December, 1993, pp.697-700.
5. 白山 晋, "CFDにおける可視化について", 東北大学流体科学研究所技術報告 (No.4), February, 1992, pp.13-40.
6. Shirayama, S., "Flow visualization by ray casting in curvilinear systems and feature-oriented image enhancement", Proceedings of the 1st European Computational Fluid Dynamics Conference, Brussels: Elsevier, pp.131-138, September, 1992.



## 非構造格子による2次元圧縮性非粘性流れの計算

坪井 伸幸\*

## Numerical Simulation of Two-Dimensional Compressible Inviscid Flow on Unstructured Grid System

by

Nobuyuki Tsuboi  
Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.

## Abstract

Two-dimensional Euler equations are solved on an unstructured grid system using the finite volume approach. First order part of convection term is calculated by the Roe scheme with the Roe's approximate Riemann solver. Higher order part of convection term is obtained by MUSCL approach with Barth's limiter or Karman's limiter in order to compare numerical stability and convergence. Time integration is achieved by explicit 2-stage Runge-Kutta method or implicit Jacobi method in order to compare CPU time. The unstructured grid system for NACA 0012 is generated from the structured O-mesh grid system. Computational conditions are Mach number of 0.8 and angle of attack of 1.25 degrees. Numerical stability and convergence with Barth's limiter are better than those with Karman's limiter. CPU time of implicit Jacobi method is less than that of explicit 2-stage Runge-Kutta method when the converged result is obtained.

## 1 はじめに

近年、複雑な航空機を対象とする空力性能評価の手段として、非構造格子を適用する例が増加している[1, 2]。エンジンを含めた航空機等の複雑な機体周りの空力解析を実施する際に、構造格子を用いた場合では、機体周りに多くの領域分割を行わなければ格子生成が困難である。しかし、非構造格子を用いた場合はその必要はなく、任意の形状の機体周りに単一の格子で生成が可能である。また、非構造格子の場合は、衝撃波等の解像度を高めるために、格子数の増減が自由な解適合格子を適用することが、構造格子よりも極めて容易である。

しかし、非構造格子は格子の相互関係が不規則なため、流束計算においては構造格子で一般的に広く採用されているTVD法を採用することができず、従って解の振動を抑える(単調性を保持する)高解像度流束計算法の技術開発が構造格子よりも遅れている。また同様の理由で、時間積分法においても構造格子で用いられているLU法、ADI法を適用することができず、安定性の向上及び計算時間の短縮を目的として使用する陰解法が構造格子の場合程確立されていない。

本研究では、高解像度流束計算法として、隣接する要素に関して、1次元的に単調性を保持するKarman[3]の手法と、多次元的に単調性を保持するBarth[4]の手法を採用した。また、時間積分法については、陽解法の場合はルンゲクッタ法を、陰解法の場合は、緩和法の1種であるJacobi法[3]を適用した。これらの手法を用いて、2次元翼型に対して圧縮性非粘性流解析を実施し、それぞれの手法の計算の安定性、精度及び効率について比較検討したので報告する。

## 2 数値計算法

## 2.1 支配方程式

2次元 Euler 方程式は有限体積法により、以下のような積分形式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} Q \, ds + \int_{\partial\Omega} H(Q) \, dl = 0 \quad (1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ c \end{pmatrix}, \quad H(Q) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (c+p)u \end{pmatrix} n_x + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (c+p)v \end{pmatrix} n_y \quad (2)$$

$$p = (\gamma - 1) \left\{ c - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right\} \quad (3)$$

ここで $\Omega$ は要素面積、 $\partial\Omega$ は要素境界、ベクトル $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ は要素境界に対して垂直な外向き単位ベクトルである。

## 2.2 空間方向の離散化

保存量 $Q$ を要素重心 $i$ で定義するCell-Center法を採用すると、支配方程式は空間方向について以下のように離散化される。

$$S_i \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i = - \sum_{j=1}^3 H(Q_j) \Delta l_j \quad (4)$$

ここで、 $S_i$ は要素 $i$ の面積、 $\Delta l_j$ は要素境界を構成する辺 $j$ の長さである。流束ベクトル $H(Q_j)$ にRoeの流束差分法

[5] を適用すると以下のように表される。

$$H(Q_j) = \frac{1}{2} \left( H(Q_j^+) + H(Q_j^-) - R_j |A_j| L_j \Delta Q_j \right) \quad (5)$$

$$\Delta Q_j = Q_j^+ - Q_j^- \quad (6)$$

ただし、Jacobian 行列  $A = \partial H / \partial Q$  とすると、 $A$  は  $A$  の固有値で構成される対角行列、 $R$  は  $A$  の右固有ベクトルで構成される行列、 $L$  は  $A$  の左固有ベクトルで構成される行列である。行列  $L, A, R$  における要素境界の平均量は Roc の近似 Riemann 解法により求めている。

**高解像度流束計算法**

非構造格子において要素内の保存量を高精度化する際、構造格子と同様に各座標軸方向に分解して高精度化を図ることが困難なため、要素内の保存量分布を多次元的に求める手法が研究されている。この場合、要素内の保存量分布  $Q$  は、1次精度では要素内部で一定、2次精度では要素内部で平面的な勾配となる。要素内  $i$  の高精度化した物理量  $Q_j^+, Q_j^-$  は、保存量を関数とする MUSCL 法により次のように定義され(図1)、最終的には以下の式を用いて高精度化される。

$$Q_j^+ = Q_i + \Phi \nabla Q_i \cdot (r_m - r_i) \quad (7)$$

$$Q_j^- = Q_i + \Phi \nabla Q_i \cdot (r_m - r_i) \quad (8)$$

構造格子とは異なり、非構造格子では  $\nabla Q$ 、 $\Phi$  の導出に固有の特徴を有するため、以下にこれらをまとめる。

(1) 要素内の物理量の勾配  $\nabla Q$

要素内の物理量の勾配  $\nabla Q$  は、以下の様な Gauss の発散定理より求めている。

$$\nabla Q_i = \frac{1}{S_i} \int_{\partial \Omega} Q n d\Omega \quad (9)$$

上式の積分の評価方法には、以下の3つがある(図2)[4]。すなわち、(i) 積分経路は要素境界として  $\nabla Q_i$  を求める方法(以降方法1と呼ぶ) (ii) 積分経路は隣接する要素重心を結ぶ経路とし、 $\nabla Q_i$  を求める方法 (iii) 要素を構成する節点の周囲に補助検査体積を使用し、各節点上で物理量勾配を求め、台形公式より  $\nabla Q_i$  を求める方法(以降方法2と呼ぶ)である。格子が歪んだ場合における精度は、(i) から (iii) の順に良くなるが、計算時間は逆に (i) から (iii) になるに従い、増加する。本研究では、計算時間が最も少ない (i) と、格子が歪んだ場合の精度が最も良い (iii) をそれぞれ使用している。

(a) 方法1

積分経路を要素境界とし、積分を実行して  $\nabla Q_i$  を求める。すなわち、

$$\nabla Q_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} (Q_i + Q_k) n_j \Delta l_j \quad (10)$$

(b) 方法2

要素を構成する節点の周囲に補助検査体積を使用し、各節点上で物理量勾配を求め、台形公式より  $\nabla Q_i$  を求める。積分経路を要素境界とし、積分を行う方法である。すなわち、補助検査体積に囲まれた節点  $i1, i2, i3$  における  $\nabla Q_{i1}, \nabla Q_{i2}, \nabla Q_{i3}$  を求め、最終的に以下のように  $\nabla Q_i$  を求める。

$$\nabla Q_i = \frac{1}{3} (\nabla Q_{i1} + \nabla Q_{i2} + \nabla Q_{i3}) \quad (11)$$

なお、本方法は Fromm の方法と等価である。

(2) 制限関数  $\Phi$

非構造格子においても、構造格子と同様に解の振動を抑え、単調性を保持するために必要な制限関数  $\Phi$  の導入が必要である。本研究では、Karman と Barth の2種類の制限関数をそれぞれ採用した(図3)。

(a) Karman の手法

辺  $j$  に対して隣り合う要素のみを対象として、保存量の単調性を保持する手法である。具体的な制限関数は下記の通りである。

$$\Phi_j = \frac{\min \text{mod} \left( (\nabla Q_i)^2, \beta \nabla Q_i \cdot \nabla Q_k \right) + \epsilon}{\nabla Q_i^2 + \epsilon} \quad (12)$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{sgn}(x) \cdot \max[0, \min\{|x|, y \text{sgn}(x)\}] \quad (13)$$

ここで、 $k = p, q, r, \beta = 1 \sim 2, \epsilon = 1 \times 10^{-6}$  である。

(b) Barth の手法

要素  $i$  に対して隣接する全ての要素を対象として、保存量の単調性を保持する手法である。まず、節点  $m (= 1, 2, 3)$  を有する要素の保存量の最大値、最小値を計算する。

$$Q_m^{\min} = \min(Q_m, Q_{\text{neighbors}}) \quad (14)$$

$$Q_m^{\max} = \max(Q_m, Q_{\text{neighbors}}) \quad (15)$$

次に節点  $m$  における制限関数  $\bar{\Phi}$  を求める。

$$\bar{\Phi}_m = \begin{cases} \min \left( 1, \frac{Q_m^{\max} - Q_m}{Q_i - Q_m} \right) & , \text{ if } Q_m - Q_i > 0 \\ \min \left( 1, \frac{Q_m^{\min} - Q_m}{Q_i - Q_m} \right) & , \text{ if } Q_m - Q_i < 0 \\ 1 & , \text{ if } Q_m - Q_i = 0 \end{cases} \quad (16)$$

要素  $i$  における制限関数  $\Phi_i$  は、最終的には節点  $1, 2, 3$  における制限関数の最小値をとる。

$$\Phi_i = \min(\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3) \quad (17)$$

2.3 時間積分法

非構造格子において適用されている時間積分法は、陽解法が主流である。この理由は、離散化した方程式の左辺を構成する行列がブロック疎行列となり、直接行列を反転することが非常に困難となるためである。本研究では、時間積分法として、陽解法の2段階ルンゲクッタ法と、非構造格子においても適用可能な陰解法の一つである緩和法の Jacobi 法をそれぞれ適用した。

(1) 陽解法

2段階ルンゲクッタ法は以下のように表される。

$$\begin{aligned} Q_i^{(0)} &= Q_i^n \\ Q_i^{(1)} &= Q_i^{(0)} - \alpha_1 (\Delta t_i / S_i) \sum_{j=1}^3 H(Q_j^{(0)}) \Delta l_j \\ Q_i^{(2)} &= Q_i^{(0)} - \alpha_2 (\Delta t_i / S_i) \sum_{j=1}^3 H(Q_j^{(1)}) \Delta l_j \\ Q_i^{n+1} &= Q_i^{(2)} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.0$  である。

## (2) 陰解法

本研究で用いている陰解法は、支配方程式を時間に關して線形化した後、左辺の行列の成分を対角成分のみ残す、緩和法の Jacobi 法を使用している [3]。本方法は、流れ場の非線形性を考慮した方法であり、これは以下のように表される。

$$\left[ I + \frac{\Delta t_i}{2S_i} \left\{ \sum_{j=1}^3 A_i^j \Delta l_j \right\} \right] (Q_i^{s+1} - Q_i^s) = Q_i^s - Q_i^s - \frac{\Delta t_i}{S_i} \sum_{j=1}^3 H(Q_j^s) \Delta l_j \quad (19)$$

ここで  $s$  はサブイタレーション数を示している。また、Jacobian 行列  $A^j$  は以下のように近似されたものを使用している。

$$A^+ = \frac{1}{2} (A + |\lambda|_{max} I) \quad (20)$$

本研究では、収束を加速するために局所時間刻み法を用いている。また、境界においては、外部境界は一樣流遠方条件を、壁面境界は滑り壁条件を適用することで、境界上の流束を与えている。各要素間の関係は、辺の両隣の2つの要素と辺を構成する2つの節点を結びつける、辺ベースにより構成されており [1]、ベクトル化もマルチカラー法により行っている。

## 3 計算結果及び考察

本計算で使用した NACA 0012 翼型周りの非構造格子は、三角形要素数は 8128、格子点数は 4191、辺数は 12319 である。この非構造格子は、O 型構造格子 (格子点数:  $128 \times 32$ ) の四角形 1 要素を三角形 2 要素に分割したものである (図 4)。この非構造格子を用いて、一樣流条件  $M = 0.8, \alpha = 1.25^\circ$  の計算を実施した。繰り返し計算回数は、陽解法の場合は 6,000 回、陰解法の場合は 1,500 回 ~ 2,000 回としている。また、計算機は VP-2400 を使用している。

## 高解像度流束計算法の比較

時間積分法として、陽解法を使用した場合の計算結果を以下に述べる。図 5 に Karman の手法と Barth の手法をそれぞれ適用した場合の流れ場のマッハ数分布を示す。いずれも翼上面の強い衝撃波及び翼下面の弱い衝撃波を鮮明に捕らえている。Karman の手法と Barth の手法のマッハ数分布における差は、1 つは翼面近傍の分布、もう 1 つは翼上面の衝撃波近傍の分布であり、Karman の手法よりも Barth の手法の方が妥当な分布を示していると考えられる。この理由は、Karman の手法を使用した場合は、翼面上で空間精度が低下していること、また衝撃波近傍では 1 次元性的にのみ制限関数を適用しているため、Barth の手法の様に多次元的な単調性が保持されていないためである。

図 6(a) に Karman の手法と Barth の手法を適用した場合の翼面上圧力分布の比較を示す。マッハ数分布の違い程、翼面上の圧力分布の差は小さくなく、翼上面及び翼下面の衝撃波が鮮明に捕らえられていることがわかる。

図 6(b) に Karman の手法と Barth の手法を適用した場合の翼面上の Entropy Error の比較を示す。Karman の手法は、翼前縁の Entropy Error が 0.031 と大きく、また翼後縁近傍の Entropy Error は振動していることがわかる。それに対して Barth の手法は、翼前縁の Entropy Error が 0.002 であり、

Karman の手法の場合と比較して Entropy Error が全体的に約半分になっていることがわかる。一般的に、翼面上における Entropy Error が大きいと、翼面近傍の空間精度は低下することから、Karman の手法よりも Barth の手法の方が翼面近傍における空間精度は良いことがわかる。

図 6(c) に Karman の手法と Barth の手法を適用した場合の収束履歴の比較を示す。Karman の手法を使用した場合は、反復回数が 3,500 以降から、周期的な振動が発生している。これは、先程と同様に単調性の保持が多次元的に満足されていないためと考えられる。Barth の手法を使用した場合は、反復回数の増加に伴う周期的な変動は見られず、安定に計算が実施可能であった。また、両者の計算可能な CFL 数の上限は、Karman の手法が 0.6、Barth の手法が 0.8 であった。

表 2 に反復回数が 6,000 回から 6,010 回の間の、制限関数  $\Phi$  が 1 未満の辺 (Karman の手法) または要素 (Barth の手法) の割合 (% edges limited または % elements limited) 及び全計算領域の制限関数の平均値 (Mean  $\Phi$ ) を示す。Karman の手法の場合は 98% の辺が制限関数により物理量の修正を受けており、Mean  $\Phi$  は 0.88 である。一方 Barth の手法の場合は、21-22% の要素が制限関数により物理量の修正を受けており、Mean  $\Phi$  は 0.94 である。Barth の手法を用いた場合の制限関数により物理量の修正を受ける要素の割合は、Karman の手法を用いた場合の制限関数により物理量の修正を受ける辺の割合よりも小さい。さらに Mean  $\Phi$  を比較した場合、Barth の手法の方が Karman の手法よりも 1 に近い。一般的に、制限関数により物理量の修正を行う (Mean  $\Phi < 1$ ) ことは、安定性を高めるために数値粘性を付加して空間精度を落とすことと等価である。すなわち、Mean  $\Phi = 1$  の場合は空間 2 次精度、Mean  $\Phi = 0$  の場合は空間 1 次精度である。さらに、制限関数により物理量の修正を受ける要素 (辺) の割合が高いということは、幅広い計算領域に数値粘性を付加することと同じであり、不必要な計算領域にも数値粘性を付加していることになる [6]。以上のことより、Barth の手法の方が、Karman の手法よりも空間精度は高く、限られた領域にのみ数値粘性を付加していることがいえる。

表 3 に、Karman の手法と Barth の手法の効率を示すが、両手法の単位時間当たりの計算時間は、それぞれ  $5.44 \mu\text{cell/step}$  及び  $8.65 \mu\text{cell/step}$  であり、Barth の手法は、Karman の手法に比べて 1.6 倍の計算時間を要していることがわかる。陰解法におけるサブイタレーション数及び CFL 数効果

高解像度流束計算法として Barth の手法を使用した場合の結果を述べる。図 7(a) に CFL=10 の時の、残差におけるサブイタレーション数効果を示す。計算時間に対する収束状況に関しては、サブイタレーション数の影響はそれほど大きくないが、 $s = 3$  の場合は細かい振動が  $s=5,7$  に比べて顕著である。一方、 $s = 7$  の場合よりも  $s = 5$  の場合の方が最も残差が小さい結果となっている。理由は、サブイタレーション数が少ないと、1 時間ステップ中で完全に緩和されず (不足緩和)、その影響が時間ステップの進行に対して現れていると考えられる。本計算結果では、 $s=5$  で十分に緩和されていたため、最適なサブイタレーション数は 5 とした。

図 7(b) に  $s=5$  の時の、残差における CFL 数効果を示す。CFL=10,15 に比べて 5 の場合は最も収束が遅く、CFL=10 が最も早い。一方、細かい振動は、CFL=5,10 に比べて 15 の方が顕著である。本研究で使用した陰解法は、非線形の流体の方程式を線形化する過程で、左辺の時間変動量を考慮する行

列の非対角成分を0として近似しているの、陰解法を解くために考慮すべき隣接要素の範囲が狭い。従って、CFL数を増加させることはすなわち陰解法を解くために考慮すべき隣接要素の範囲が拡大することを意味しているため、CFL数を増加させるほどこれらの矛盾が生じ、数値的振動が増大したと考えられる。従って、本計算結果では最適なCFL数を10と判断した。

時間積分法(陽解法と陰解法)の比較

図8に高解像度流束計算法としてBarthの手法を使用した場合における陽解法と陰解法の収束履歴の比較を示す。計算初期では、陽解法の方が収束は若干早いものの、計算時間が経つにつれて陰解法の方が収束が進行している。単位時間当たりの計算時間は、陽解法では $8.65\mu\text{/cell/step}$ 、陰解法では $36.73\mu\text{/cell/step}$ と増加するが、陽解法を使用した場合の最終ステップにおける計算時間は466秒、陰解法を使用した場合の同一の残差となる時の計算時間は234秒であり、計算時間は49.8%短縮されている(表3)。以上の結果から、非構造格子においても構造格子と同様に、陽解法よりも陰解法の方が計算時間の短縮を実現できることが示された。

4 おわりに

非構造格子において、2種類の高解像度流束計算法及び陰解法の安定性、精度及び効率を定量的に評価した。その結果、高解像度流束計算法においては、多次元的に単調性を満足するBarthの手法は、1次元的に単調性を満足するKarmanの手法よりも単位要素単位ステップ当たり1.6倍の計算時間を要したが、CFL数は0.6から0.8に向上し、翼前縁におけるEntropy Errorは約1/20に減少し、全計算領域の制限関数の平均値は0.88から0.94に増加し、Barthの手法はKarmanの手法よりも有効であることがわかった。時間積分法においては、高解像度流束計算法としてBarthの手法を採用した場合、陰解法(CFL数10、サブイタレーション数5回)は、陽解法(CFL数0.8)に比べて単位要素単位ステップ当たり約4倍であるが、総計算時間では40%になり、陽解法よりも陰解法の方が有効であることが示された。今後、設計ツールとしての実用化を進めるため、解適合格子法の適用、Navier-Stokes方程式への拡張及び3次元化を実施する予定である。

参考文献

- [1] Jameson, A., Baker, T. J. and Weatherill, N. P., "Calculation of Inviscid Transonic Flow over a Complete Aircraft," AIAA Paper 86-0103, 1986.
- [2] 中橋, "準非構造格子による外部粘性流の数値計算," 第6回数値流体力学シンポジウム, 1992.
- [3] Karman, S. L. and Spragle, G. S., "Development of an Unstructured CFD Method," AIAA Paper 91-0019, 1991.
- [4] Barth, T. J. and Jespersen, D. C., "The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes," AIAA Paper 89-0366, 1989.
- [5] Roe, P. H., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," J. of Computational Physics Vol. 43, p. 357-372, 1981.
- [6] Aftosmis, M., Gaitonde, D. and Tavares, T. S., "On the Accuracy, Stability and Monotonicity of Various

Reconstruction Algorithms for Unstructured Meshes," AIAA Paper 94-0415, 1994.

表1 時間積分法と高解像度流束計算法の対応

時間積分法	高解像度流束計算法	
	要素内の物理量の勾配 $\nabla Q$	制限関数 $\Phi$
陽解法	方法1	Karmanの手法
	方法2	Barthの手法
陰解法	方法2	Barthの手法

表2 Karmanの手法及びBarthの手法の制限関数の挙動の比較

Karman's Limiter		Barth's Limiter	
% edges limited	Mean $\Phi$	% elements limited	Mean $\Phi$
97.93814	0.8761301	21.50590	0.9397085
97.93814	0.8761246	21.49360	0.9397117
97.93814	0.8761016	21.48129	0.9397154
97.93814	0.8761150	21.50590	0.9397182
97.93814	0.8761341	21.51820	0.9397218
97.93814	0.8761261	21.54281	0.9396975
97.93814	0.8761094	21.48129	0.9397031
97.93814	0.8760842	21.46899	0.9397073
97.93814	0.8760886	21.48129	0.9396203
97.93814	0.8761099	21.45669	0.9396238

表3 各種計算法の安定性、精度、効率の比較

時間積分法	陽解法		陰解法
	Karmanの手法	Barthの手法	Barthの手法
高解像度流束計算法			
安定性 (CFL数)	0.6	0.8	~15
精度	Mean $\Phi$	0.88	0.94
	翼前縁におけるEntropy Error	0.034	0.002
効率	単位要素、単位ステップ当たり ( $\mu\text{s/cell/step}$ )	5.44	8.65
	総計算時間 (sec)	265	526
		(6,000 $\mu$ ) (6,000 $\mu$ )	(6,000 $\mu$ ) (778 $\mu$ ), s=5)

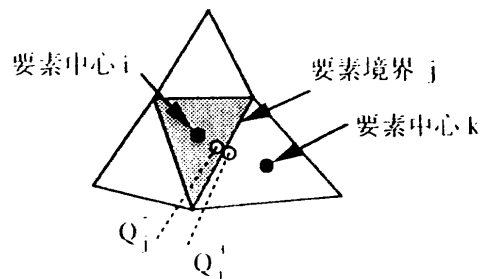


図1 要素iの概念図

—— 経路(i)  
 - - - 経路(ii)  
 ····· 経路(iii)

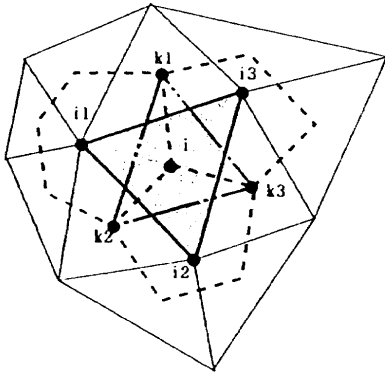
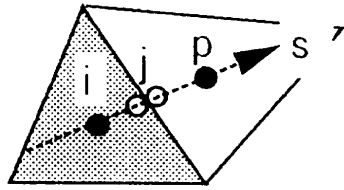
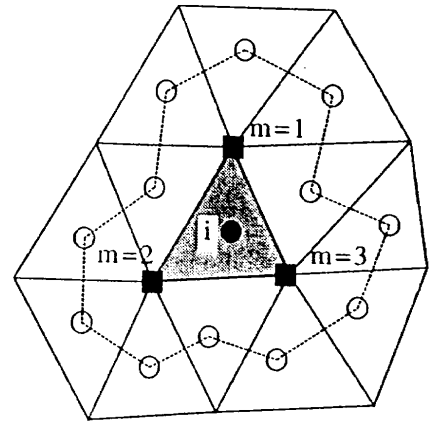


図2 要素内の物理量の勾配の評価方法



(a)Karman の手法



(b)Barth の手法

○:neighbor

図3 Karman の手法と Barth の手法の概念図

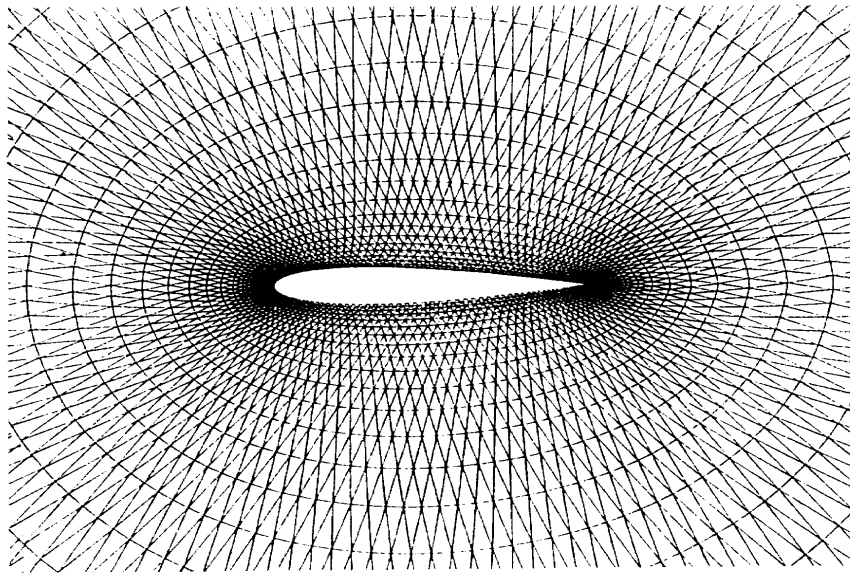
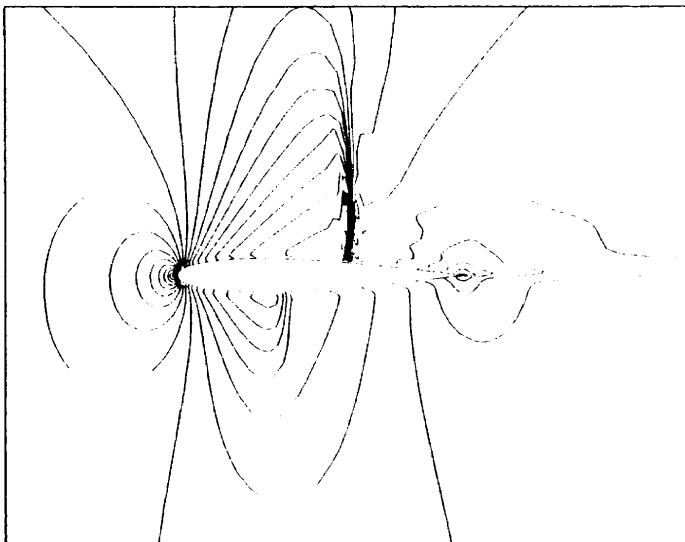
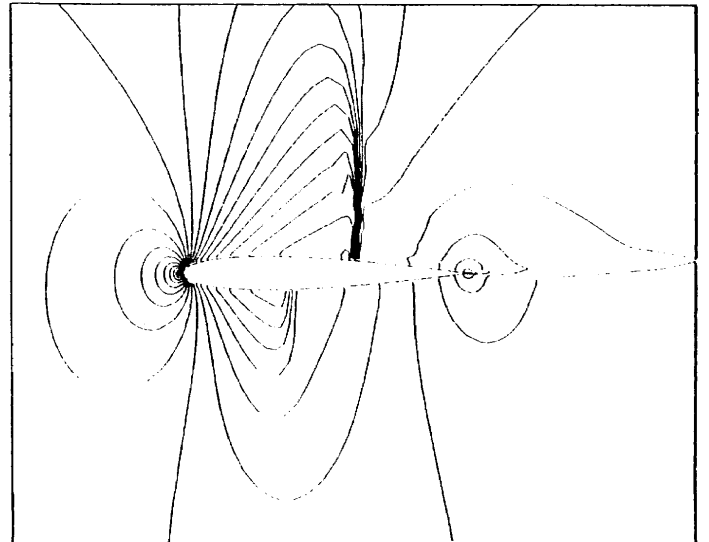


図4 NACA 0012 翼型周りの非構造格子 (要素数 8182, 節点数 4192)

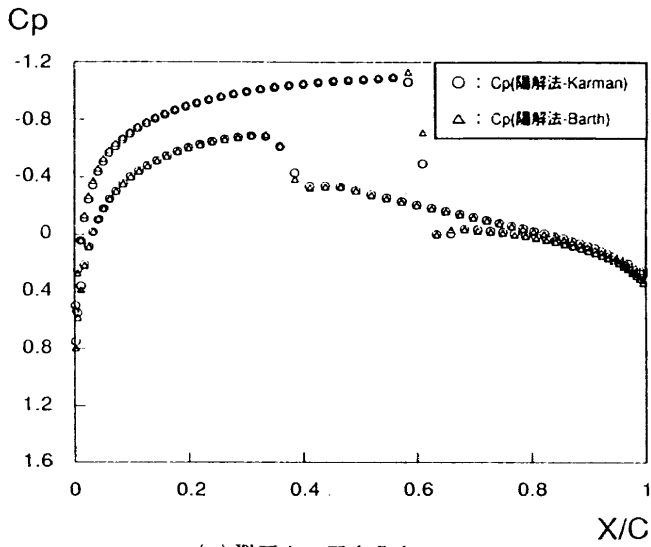


(a)Karman の手法

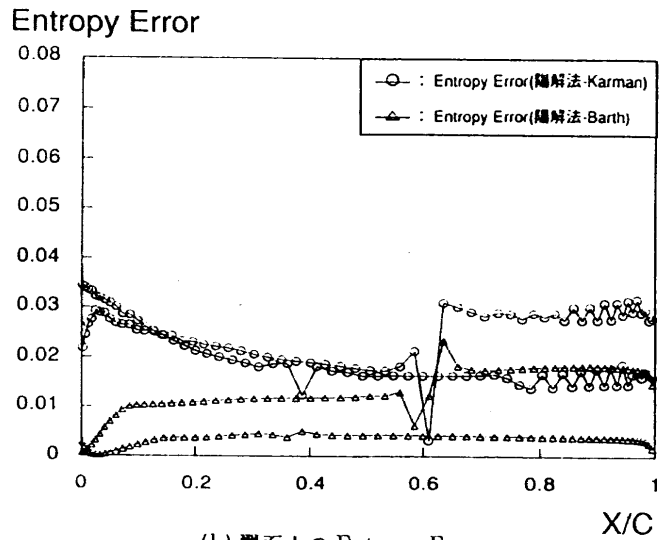


(b)Barth の手法

図5 高解像度流束計算法の比較: 流れ場のマッハ数分布

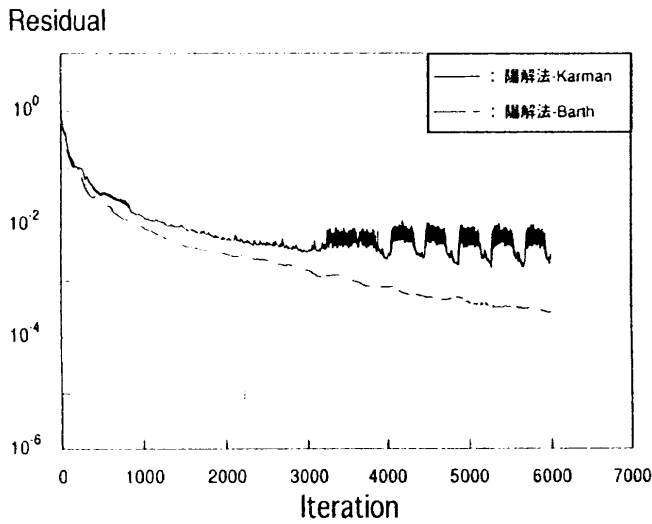


(a) 翼面上の圧力分布



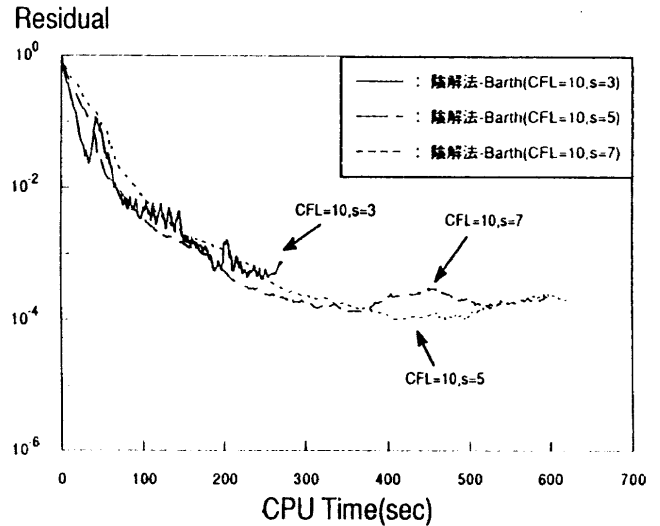
(b) 翼面上の Entropy Error

図6 高解像度流束計算法の比較



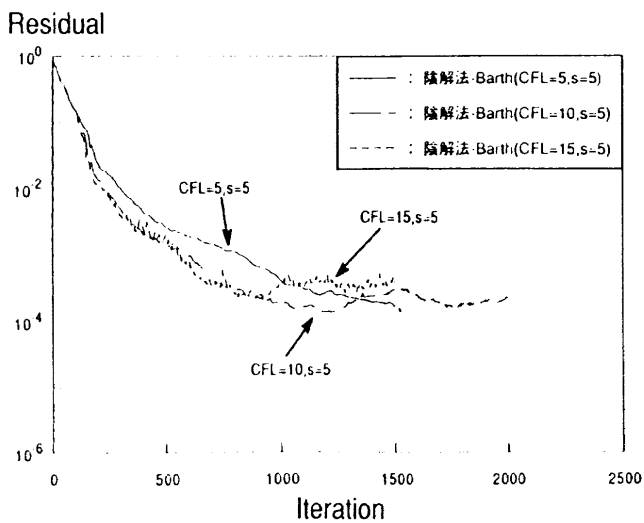
(c) 収束履歴の比較

図6 高解像度流束計算法の比較



(a) サブイタレーション数効果

図7 陰解法におけるサブイタレーション数効果及び CFL 数効果



(b) CFL 数効果

図7 陰解法におけるサブイタレーション数効果及び CFL 数効果

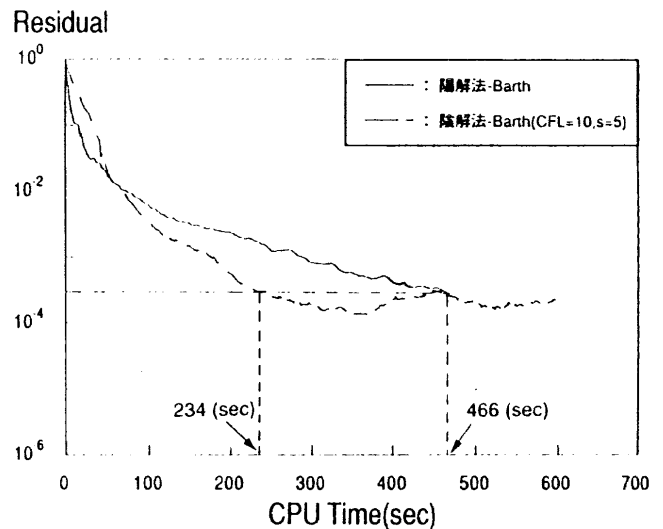


図8 時間積分法(陽解法と陰解法)の収束履歴の比較

## マルチトランスピュータシステムにおける 2次元非圧縮性流れの並列計算

小幡正規\*, 鈴木智博\*\*, 里深信行\*

Parallel Computation for Two Dimensional Incompressible Flow on Array of Transputers

by

Masanori Obata, Toshihiro Suzuki and Nobuyuki Satofuka  
Kyoto Institute of Technology

### Abstract

The two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations are solved on a distributed memory parallel computer. The Poisson solver based on a modified successive over-relaxation (SOR) method is implemented on an array of 16 transputers (T805), and it is applied to solve the incompressible Navier-Stokes equations in terms of the vorticity-stream function formulation. The method of lines approach using a rational Runge-Kuta time integration scheme is adopted to solve the vorticity transport equation. As a parallelizing strategy, the domain decomposition technique is used to solve the partial differential equation on a structured grid. The result of the parallelized Poisson solver for 129x129 grid points gives high speedup of 15.7 and efficiency of 0.98 of computations on 16 PEs. In the computation of the incompressible Navier-Stokes equations we get an almost linear speedup of approximately 15.96 and corresponding efficiency 0.998 is obtained through the present implementation of the parallel algorithm for 16 transputers.

### 1. まえがき

近年, 計算流体力学の分野においては, 計算対象の複雑形状化および問題の複雑化などにより大規模な数値シミュレーションの必要性が急速に高まり, 並列計算機の利用によりその計算速度の向上をはかろうとする研究が盛んに行われている。また, プロセッサ単体の高速化にも限界が見え始め, コンピュータメーカー各社も並列型のスーパーコンピュータの開発に力を入れている。

有限差分法などの構造格子を用いる場合の並列化手法としては, 計算格子をプロセッサの数だけの小領域に分割する領域分割法<sup>(1)(2)</sup>を用いることが一般的である。圧縮性流れの計算などにおいてはこの領域分割法は並列化のための非常に有効な手段である。非圧縮性流れの数値解析には1つ以上のポアソン方程式を解かねばならない。ポアソン方程式の解法としては主に緩和法による反復解法を用いるが, その1反復あたりの計算量が少ないため, 相対的に通信の負荷が重くなりあまり並列化の効率は期待できない。また, 並列化しても計算の内容がシリアル計算と変わらないよう

にするためにRed-Blackなどの多色の格子点を使ったSOR法が用いられるが, この方法では, 通信されるべきデータ量は変わらないものの, 通信の回数が増えるために並列化の効率の低下を招く恐れがある。

そこで, 本研究ではポアソン方程式の反復解法の並列化手法と本論分で提案する並列化反復解法の非圧縮性流れの解析への適用について述べる。

### 2. ポアソン方程式の並列化手法

ポアソン方程式の並列化には主にRed-Black型の逐次過緩和(Successive Over-Relaxation;SOR)法が用いられるが, 本研究では計算格子を図1のように1方向のみに分割し, 図2に示す方法でSORの計算を行う。図1において各領域間は互いに1点だけ重なっており, ●は各プロセッサにおいて計算される点であり, また○は領域分割により生じる領域間の境界であり, プロセッサ間のデータ通信により与えられる。本手法では, 各プロセッサの計算領域は左右の2つにさらに分割され, 4段階を経て1反復とする。1段階目では左半分の緩和計算, 2段階目は左部分の重複領域を左側プロセッサへ送信し, 同様に右境界のデータを受け取る。3段階目では右半分の計算, 4段階目で右側の

\* 京都工芸繊維大学, \*\* 京都工芸繊維大学大学院

送信と左境界の受信を行う。収束の判定は反復段階ごとに各計算領域ごとの残差を合計し、全計算領域の平均二乗残差により行っている。図2の○はk段階の数値、●はk+1段階の値を持つ点であることを示している。Red-Black型のSOR法と比較すると、通信量は等しいが、送信・受信をそれぞれ1回と数えた場合の通信回数が半分となるために通信による並列化効率の劣化が改善されると考えられる。

### 3. 並列計算機

用いる並列計算機は、16台のトランスピュータからなるTFSである。図3にTFSの概要を示す。

ルートにホストコンピュータと接続のためのトランスピュータが置かれるが、本研究ではルートトランスピュータは計算には用いずにホストコンピュータとTFSとの接続のインターフェースとしてのみ使用している。TFSでは、任意のトランスピュータ間の結合をソフトウェアから記述できるが、ここでは、リング型の結合としている。用いたトランスピュータは、クロック数25MHzのT805が16台である。T805のピーク性能は27.5MFLOPSで、4本の通信速度20Mbpsのシリアルリンクで互いに接続される。1台あたりの主記憶容量は、2Mbyteである。

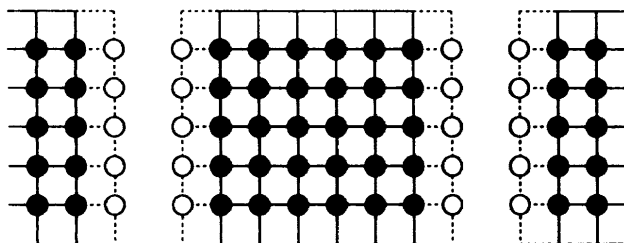


図. 1 計算格子の分割

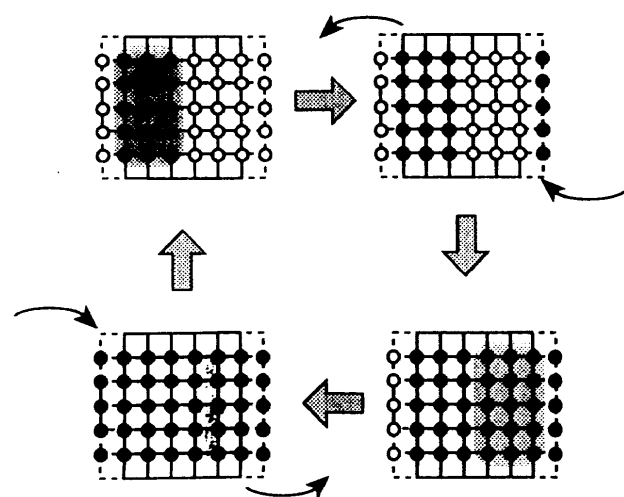


図2 並列化SOR法

### 4. ポアソン方程式の並列計算

本並列化SOR法の検定問題として、2次元のデカルト座標においてポアソン方程式の計算を行う。

用いたポアソン方程式は2次元のデカルト座標(x,y)において、

$$\nabla^2\phi = f(x,y) \tag{4.1}$$

と表されるが、ここで生成項f(x,y)は、

$$f(x,y) = -\sin x - \cos y \tag{4.2}$$

とする。このとき式(4.1)の解析解は

$$\phi = \sin x + \cos y \tag{4.3}$$

のようになる。

計算領域は  $0 \leq x,y \leq 2\pi$  とし、初期値として計算領域全体においてfの値を0とする。境界はディリクレ境界として式(4.3)で与えられる解析解で固定する。

格子点数は33x33, 65x65 および 129x129 の3通りについて、プロセッサ数は1, 2, 4, 8 および 16 の5通りについてそれぞれ計算時間の測定を行う。収束条件は、 $\psi$ の平均二乗残差が $10^{-5}$ 未満になることとし、計算時間の測定は、反復計算の開始から収束解が得られるまでとする。並列化によりどのように計算が高速化するかを測るために加速比を導入する。加速比Spは次式で定義される。

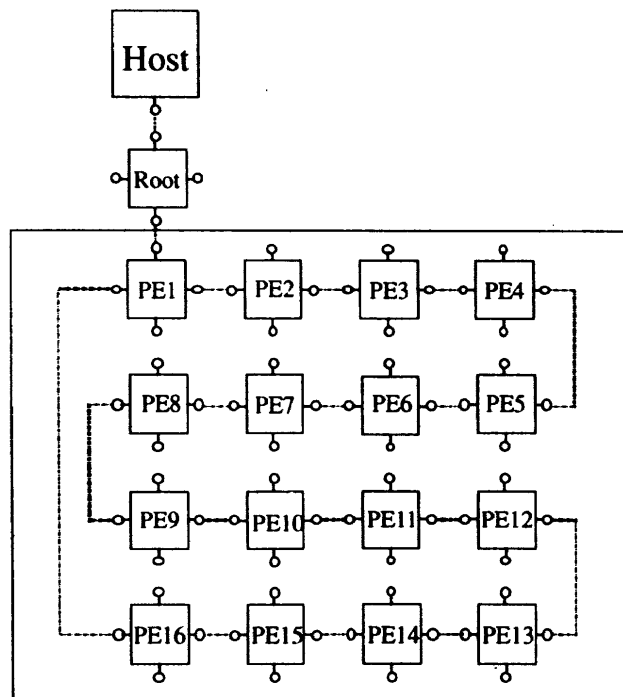


図3 TFSの概要



$$S_p = T_1 / T_p \quad (4.4)$$

ここで、 $T_1$  および  $T_p$  は 1 および  $p$  プロセッサで要する計算時間である。

図4 および表. 1 に得られた加速比を示す。格子点数が 33x33 の場合は 1 プロセッサあたりで計算される格子点数が少なく、計算される格子点の数と通信される格子点の数が 1 : 1 になる最も通信の負荷の高い場合であるが、このときは 16 プロセッサで 12.76 倍の加速比が得られている。格子点数が 65x65 および 129x129 の場合では約 15.7 倍の加速比ではほぼプロセッサ数に対して比例して加速比が増加していくことがわかる。実際の流れの数値シミュレーションに用いられる格子点数は 129x129 以上であることから本並列化 SOR 法がポアソン方程式の並列計算に対して有効な手法であることが確認できる。

また、格子点が少ない場合には最適過緩和係数が小

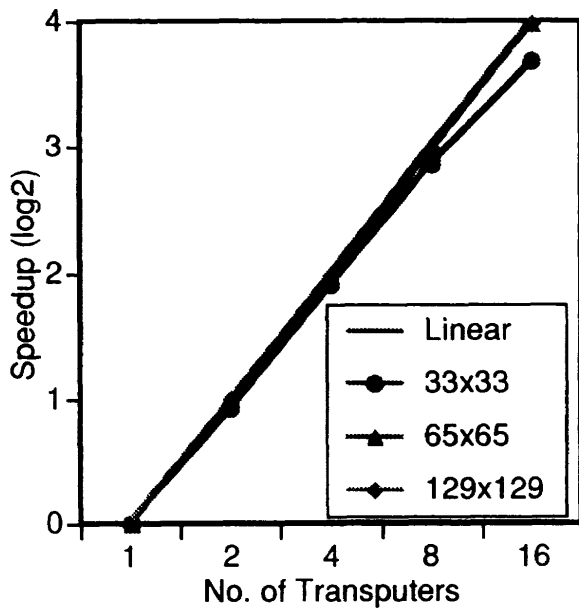


図4 加速比 (ポアソン方程式)

表1 加速比 (ポアソン方程式)

No. of Transputers	33x33	65x65	129x129
1	1.00	1.00	1.00
2	1.90	1.99	2.00
4	3.76	3.94	3.98
8	7.26	7.86	7.90
16	12.76	15.65	15.67

さくなっていくという傾向があるが、これは分割された計算領域を通常の SOR 法で計算した場合も同様である。図5 は、格子点数 129x129 の計算領域でポアソン方程式を通常の SOR 法と並列化 SOR 法でプロセッサの数だけ 1 方向に計算格子を等分割した場合の最適過緩和係数の変化を示したものである。本並列化 SOR 法では単一領域で計算を行う場合と同じ最適過緩和係数を使用できることがわかる。

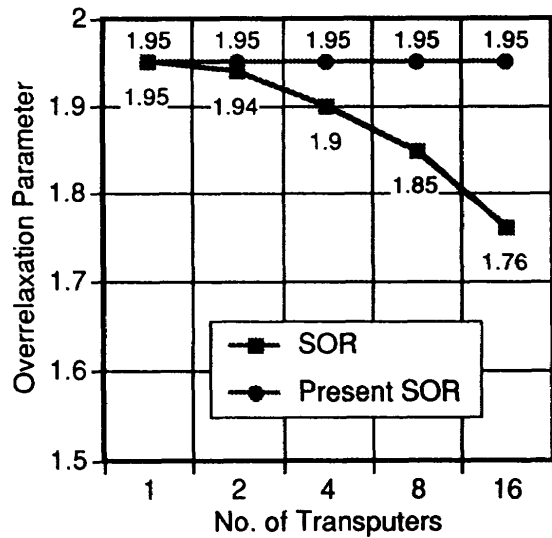


図5 最適過緩和係数

### 5. 非圧縮性流れの数値計算への適用

次に、本並列化 SOR 法の 2 次元非圧縮性流れへの適用として円柱まわりのレイノルズ数  $Re=40$  の定常流れおよび  $Re=100$  の非定常流れの計算を行う。

基礎方程式として渦度一流れ関数表示のナビエ・ストークス方程式を用いる。渦度一流れ関数表示のナビエ・ストークス方程式は、一般曲線座標系  $(\xi, \eta)$  で

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{1}{Re} \frac{1}{J^2} \left( \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \\ & \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -J^2 \omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

と記述される。ここで、 $\omega$  は渦度、 $\psi$  は流れ関数であり、デカルト座標  $(x, y)$  において流速  $(u, v)$  についてそれぞれ、

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$(u, v) = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (5.2)$$

と定義される。また、 $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau$  および  $J$  はメトリックおよび座標変換のヤコビアンであり、

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$\gamma = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2,$$

$$\sigma = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} D_y - \frac{\partial y}{\partial \eta} D_x \right), \quad \tau = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} D_x - \frac{\partial x}{\partial \xi} D_y \right),$$

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (5.3)$$

である。ただし、

$$D_x = \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2},$$

$$D_y = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (5.4)$$

である。

渦度輸送方程式の数値計算法には、線の方法を用い、空間を中心差分で離散化し、2段階有利ルンゲ・クッタ法<sup>(3)</sup>で時間積分を行う。2段階有利ルンゲ・クッタ法の計算手順は、空間微分項の離散化をしたのちの時間に対する常微分方程式を

$$\frac{d\omega}{dt} = W(\omega) \quad (5.5)$$

としたとき、

$$g_1 = \Delta t W(\omega^n), \quad g_2 = \Delta t W(\omega^n + c_2 g_1),$$

$$g_3 = b_1 g_1 + b_2 g_2,$$

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \frac{2g_1(g_1, g_3) - g_3(g_1, g_1)}{(g_3, g_3)} \quad (5.6)$$

の様に表される。ここで  $(g_1, g_3)$  はベクトル  $g_1, g_3$  の内積を表し、 $b_1, b_2, c_2$  は

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2 c_2 \leq -0.5 \quad (5.7)$$

を満たす必要がある。本計算では

$$b_1 = 2, \quad b_2 = -1, \quad c_2 = 0.5 \quad (5.8)$$

を用いている。

流れ関数のポアソン方程式の解法には2. のポアソン方程式の並列化手法を用いる。

まず、第1の計算対象は  $Re=40$  の円柱周りの定常流れである。

計算格子は、 $32 \times 33, 64 \times 33, 128 \times 33$  とする。図6に  $128 \times 33$  のときの計算格子を示す。図7は、このとき16台のトランスペュータによって計算を行ったときの等  $\psi$  線図である。この結果は1プロセッサの結果と完全に一致し、並列化SOR法の信頼性が確認できる。図8に得られた並列効率を示す。計算は、1~16台のトランスペュータを用いた。16台のトランスペュータで  $32 \times 33$  のときの並列効率が低いのは、このとき1プロセッサあたりの計算領域が2ライン分のみで最も全体の計算量に比べて通信の負荷が高くなる場合となるためである。従ってこのとき16プロセッサに対して得られる加速比11.23が最も低い加速比となる。また、計算格子が  $128 \times 33$  の場合で2,4および8プロセッサについてリニア以上の加速比が出ているが、これは、本並列化SOR法に要する反復回数が、1プロセッサに対するSOR法の計算の反復回数より少なくて済むためである。

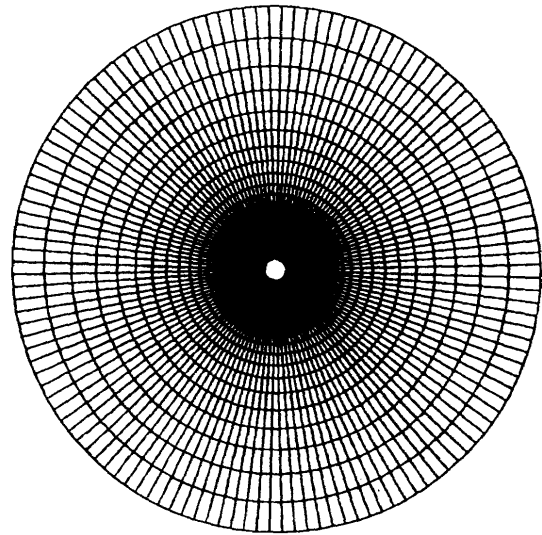


図6 計算格子 (128x33)

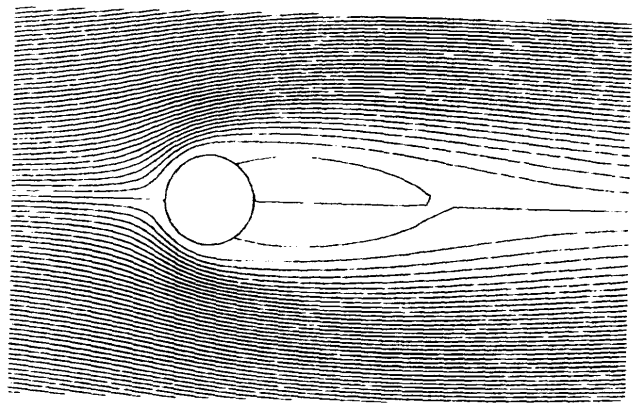


図7 等  $\psi$  線図 (Re=40)

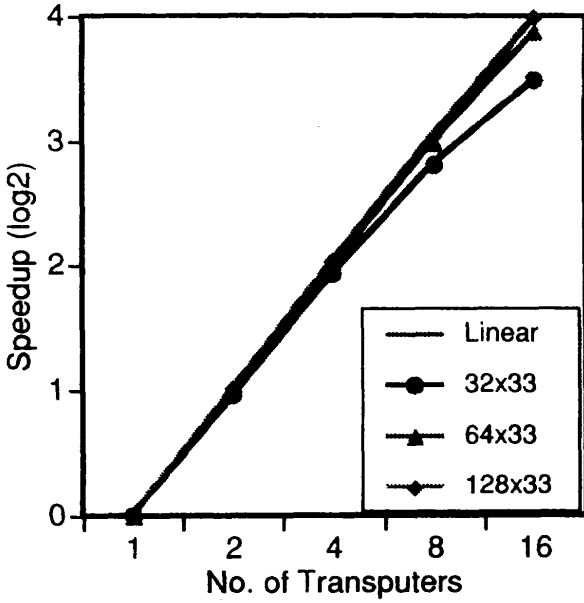


図8 加速比 (非圧縮性N-S方程式)

次に計算格子を 256x65 として  $Re=100$  のカルマン渦列の発生する非定常流れの計算を16プロセッサを用いて計算を行った。図9に円柱の中心より流れの後方3.5の位置の渦度の時間変化を示す。これより流れが完全に周期的となっていることがわかる。図10に流れが周期的になったときの渦度場を周期を  $T$  として  $0.2T$  ごとに示す。渦が交互にはがれていく様子が再現され、また、 $t=0.0T$  と  $t=1.0T$  の流れの様子が一致し、これからも流れの周期性が確認でき、非定常問題に対しても並列化SOR法の信頼性が確認できる。

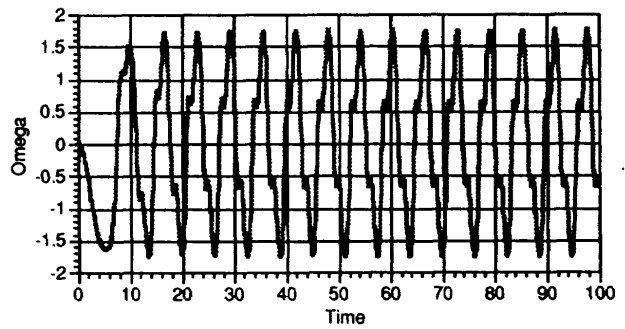


図9 渦度の時間変化

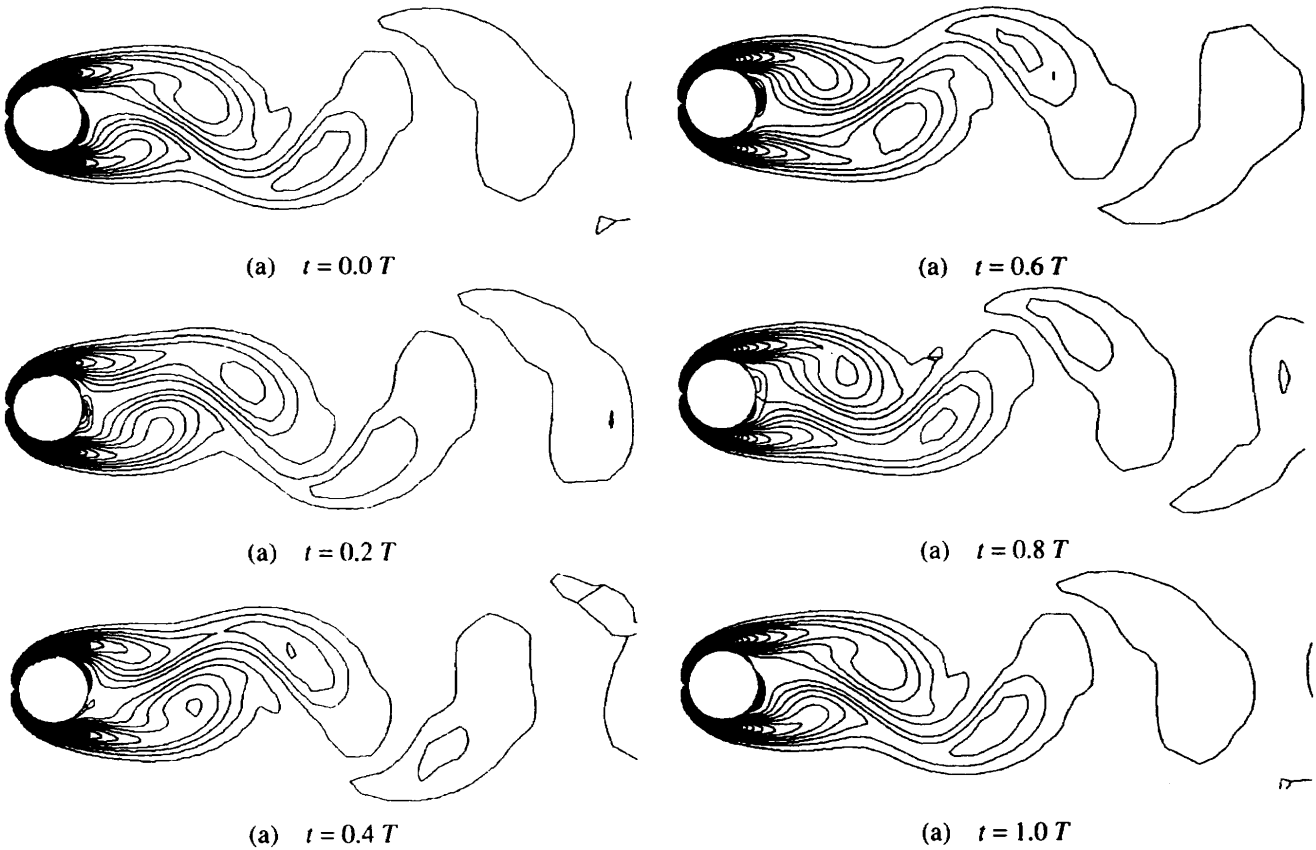


図10 等渦度線図 ( $Re=100$ )

## 5. まとめ

本研究では、領域分割法を用いたポアソン方程式の効果的な並列化手法である並列化SOR法を示している。ポアソン方程式の数値計算の検定問題に適用した結果、16台のトランスペュータを用いて128x129の格子点のときに加速比15.67が得られた。また、渦度-流れ関数表示の非圧縮性Navier-Stokes方程式を用いた定常流れの数値計算に適用し、解の信頼性の確認を行った。また、このとき128x33の格子点において加速比15.96が得られた。さらに非定常流れにも応用し、その解の信頼性の確認を行った。本手法はその他の並列計算機にも容易に応用可能であると期待される。

## 参考文献

- (1) Osama El-Giar and Tim Hopkins, A Generally Configurable Multigrid Implementation for the Solutions of Three-Dimensional Elliptic Equations on a Transputer Network, Transputer/Occam JAPAN 3 pp.35-45, 1990.
- (2) K.-H. Hoffman and Hun Zou, Parallel Efficiency of Domain Decomposition Methods, Parallel Computing Vol.19 No.12 1375-1391, 1993.
- (3) N. Satofuka and T. Tsujita, A New Explicit Methods for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations, Proc. of th BAIL II Conf. pp.364, 1982.

## 2次元 Euler 方程式に対する風上法の適用について

橋 正和\*

## Upwind Schemes for the Two-Dimensional Euler Equations

by

Masakazu Tachibana  
National Aerospace Laboratory

## Abstract

A genuinely two-dimensional Euler scheme was developed for rectangular grids. This scheme is equivalent to the extension of one-dimensional Steger-Warming scheme to two dimensions. In order to construct the scheme, linearized Euler equations were solved analytically at cell vertexes using Poisson's wave formula.

## 1. はじめに

1次元オイラー方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0$$

の1次精度 Godunov 型スキーム

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2}^n - \tilde{\mathbf{f}}_{i-1/2}^n)$$

は

$$\mathbf{q}_j^{n+1} = 1/\Delta x \int_{I_j} \mathbf{q}_n(x, t_{n+1}) dx.$$

と近似解  $\mathbf{q}_n$  の積分形で書ける。このために我々は1次元リーマンソルバーを容易に理解することができる。しかし、2次元オイラー方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0$$

では、セル頂点での初期値問題が複雑なため、この考え方は採用されず、通常  $x, y$  方向の1次元スキームの重ね合わせとして解かれている (operator split 法)。この方法では、単純化し、実際の物理から乖離しまった分だけ、次式のように  $\Delta t$  の安定限界が小さくなってしまう。

$$\text{CFL 条件: } \left( \frac{\lambda_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{\lambda_y \Delta t}{\Delta y} \right) \leq 1$$

そこで本研究では、より物理現象に近い近似解  $\mathbf{q}_n$  を解析的に求めることにより

$$\mathbf{q}_{i,j}^{n+1} = 1/(\Delta x \Delta y) \int_{I_{i,j}} \mathbf{q}_n(x, y, t_{n+1}) dx dy.$$

を満たす、2次元オイラースキームを構成することを目的とする。

## 2. 定式化

セルの角では Euler 方程式に非線型の効果を入れて解くのは困難だと考えられるので、線型化した方程式を扱う。1次元問題に対する Steger-Warming 法:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2} = \mathbf{A}_i^+ \mathbf{q}_i + \mathbf{A}_{i+1}^- \mathbf{q}_{i+1}$$

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$$

は各セルについて独立に線型方程式

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0$$

を解き、 $\Delta t$  時間後の解をすべて重ね合わせる方法と解積できるので、これを図1のように純粹に2次元に拡張して見よう。

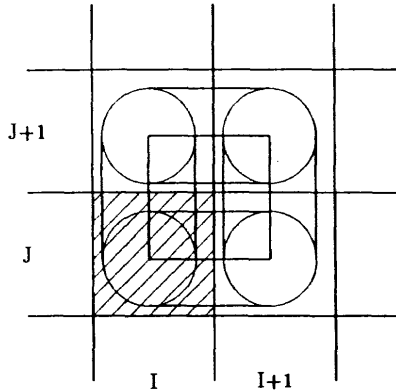


図1:セル(I,J)にある流体の  $\Delta t$  時間後の様子

線型化したオイラー方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

を扱いやすくするために、まず次のように流れのつた座標系にガリレイ変換する。

静止座標系  $(t, x, y, q) \leftrightarrow$  移動座標系  $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{q})$

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x} = x - ut \\ \bar{y} = y - vt \\ \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{q} \end{cases}$$

ここで  $u, v$  はそれぞれ  $x, y$  方向の流速であり、 $\mathbf{L}$  は

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2+v^2}{2} & u & v & 1 \end{bmatrix}$$

である。そうすると、式(1)は次式のように変換される。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2)$$

ここに  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$  は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{A} - u\mathbf{I})\mathbf{L} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(\gamma - 1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{B} - v\mathbf{I})\mathbf{L} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & a^2/(\gamma - 1) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり、 $a$  は音速である。式(2)を分解すると当然の事ながら音波の式

$$\frac{\partial^2 \bar{q}_4}{\partial \bar{t}^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{q}_4}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{q}_4}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

が導かれ、次のポアソンの波動公式を用いて解析解が求められる。

$$\bar{q}_4 = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left\{ \frac{1}{2\pi a} \iint_{C_{a\bar{t}}} \frac{h(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 \bar{t}^2 - (\xi - \bar{x})^2 - (\eta - \bar{y})^2}} d\xi d\eta \right\} + \frac{1}{2\pi a} \iint_{C_{a\bar{t}}} \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 \bar{t}^2 - (\xi - \bar{x})^2 - (\eta - \bar{y})^2}} d\xi d\eta$$

ここで  $h(x, y) = \bar{q}_4(x, y, t = 0), g(x, y) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}_4(x, y, t = 0)$  であり  $C_{a\bar{t}}$  は中心が  $(\bar{x}, \bar{y})$ 、半径  $a\bar{t}$  の円の内部領域を示す。

初期条件  $\bar{\mathbf{q}} = (\alpha, 0, 0, \beta)^T$  を持つ矩形領域の  $\Delta \bar{t}$  時間後の解を求めると図2のようになる。

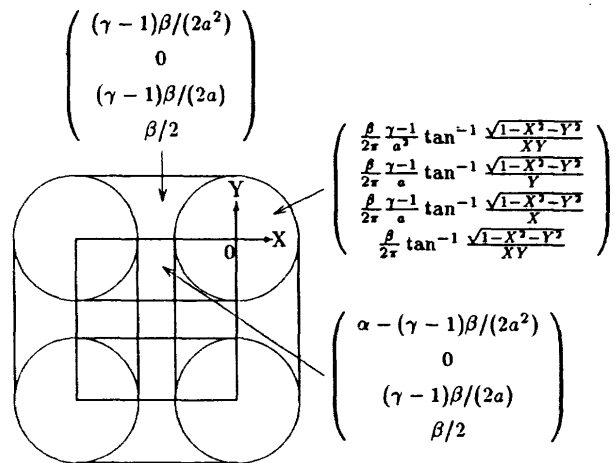
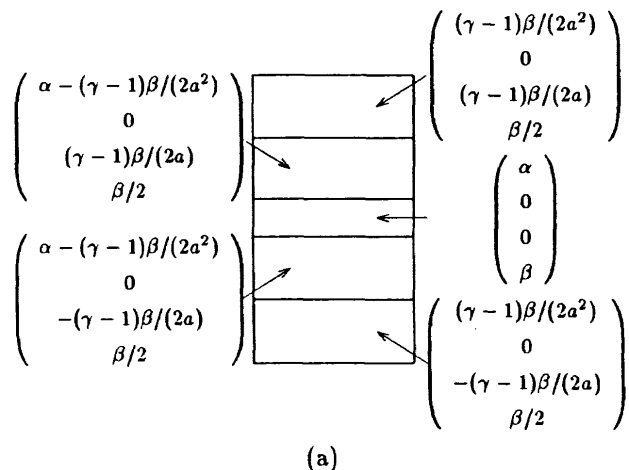
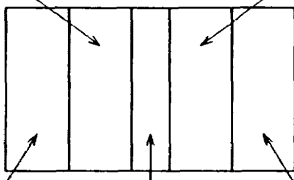


図2:初期条件  $\bar{\mathbf{q}} = (\alpha, 0, 0, \beta)^T$  を持つ矩形領域の  $\Delta \bar{t}$  時間後の解

ここで  $X = \bar{x}/(a\bar{t}), Y = \bar{y}/(a\bar{t})$  とする。この解  $\bar{\mathbf{q}}$  は図3のように4つの部分の重ね合わせとして表現すると以後の計算が簡単になる。



(a)

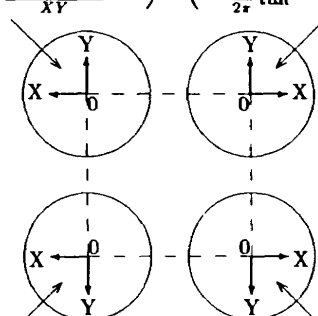
$$\begin{pmatrix} \alpha - (\gamma - 1)\beta/(2a^2) \\ -(\gamma - 1)\beta/(2a) \\ 0 \\ \beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - (\gamma - 1)\beta/(2a^2) \\ (\gamma - 1)\beta/(2a) \\ 0 \\ \beta/2 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} (\gamma - 1)\beta/(2a^2) \\ -(\gamma - 1)\beta/(2a) \\ 0 \\ \beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\gamma - 1)\beta/(2a^2) \\ (\gamma - 1)\beta/(2a) \\ 0 \\ \beta/2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a^3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \\ -\frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} \\ \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} \\ \frac{\beta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a^3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \\ \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} \\ \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} \\ \frac{\beta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a^3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \\ -\frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} \\ -\frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} \\ \frac{\beta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a^3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \\ \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} \\ -\frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} \\ \frac{\beta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \end{pmatrix}$$

(d)

図3: 図2の解を4個の部分(a)~(d)に分解した結果

これらの解を公式(1)を用いてY方向に線積分して加え合わせれば、以下の数値流束が求められる。

$$\tilde{q}_{i+1/2,j+1} = \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{u^+(v+a)^+}{u} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} \\ 0 \\ \frac{\gamma-1}{2} a \\ \frac{e^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{u^+v^+}{u} \begin{pmatrix} (\gamma-2)(\gamma-1) \\ 0 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{u^+(v-a)^+}{u} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} \\ 0 \\ -\frac{\gamma-1}{2} a \\ \frac{e^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(u+a)^+v^+}{u+a} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} \\ \frac{\gamma-1}{2} a \\ 0 \\ \frac{e^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(u-a)^+v^+}{u-a} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} \\ -\frac{\gamma-1}{2} a \\ 0 \\ \frac{e^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \tan^{-1} \frac{a(q-a)^-}{uv} \begin{pmatrix} -(\gamma-1)v \\ 0 \\ -(\gamma-1)a^2 \\ -a^2v \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \tan^{-1} \frac{(q-a)^-}{u} \begin{pmatrix} (\gamma-1)a \\ 0 \\ (\gamma-1)av \\ a^3 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \tan^{-1} \frac{(q-a)^-}{v} \begin{pmatrix} 0 \\ (\gamma-1)av \\ (\gamma-1)au \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(q-a)^-}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ -(\gamma-1)a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(|u|-a)^-}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\gamma-1)\pi a^2 \text{sign}(u)^{\frac{1+\text{sign}(v)}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\tilde{f}_{(i+1/2,j+1)-(i,j)} = L(\bar{A} + uI)\tilde{q}_{i+1/2,j+1}$$

ここで  $q$  は流速の絶対値を指し、 $(i+1/2, j+1) \leftarrow (i, j)$  はセル  $(i, j)$  からセル境界  $(i+1/2, j+1)$  への影響を示す。また式(3)の  $v$  を  $-v$  に変え、第3成分の符号を変えれば同様に  $\tilde{f}_{(i+1/2,j)-(i,j)}$  が求まる。 $\tilde{f}_{(i+1/2,j)-(i,j)}$  は従来型 (operator split 型) Steger Warming 法 (以下 S-W 法と略す) との間に

$$\tilde{f}_{(i+1/2,j)-(i,j)} = \tilde{f}_{S-W(i+1/2,j)-(i,j)} - \tilde{f}_{(i+1/2,j+1)-(i,j)} - \tilde{f}_{(i+1/2,j-1)-(i,j)} \quad (4)$$

の関係を持つ。

なお、本スキームのように CFL 数が 1 まで安定な陽的スキームには、time split(fractional step) 法や Colella[1] の多次元解法等があるが、これらはスカラー双曲形方程式を基礎にして構成されており、式 (3) 中の  $(q-a)^-$  のかかった項に対応する要素は含んでいない。

### 3. 計算例

はじめに図 4(a) のような初期条件で計算を行った。 $+x, -x, +y, -y$  方向へは一樣な状態が続いているという境界条件を設定した。図 4(b) は operator split 型 S-W 法、図 4(c) は本方法での密度分布の結果である。両者とも格子点数は  $30 \times 30$  で、CFL 数は 0.96 である。operator split 法に比べて本方法が CFL 数 1 まで確かに安定に解をだしえることを示している。

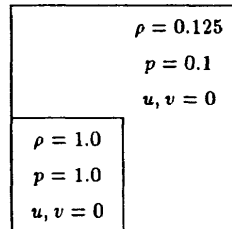


図 4(a):初期条件

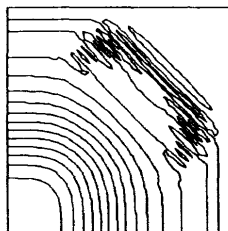


図 4(b):S-W 法の数値解

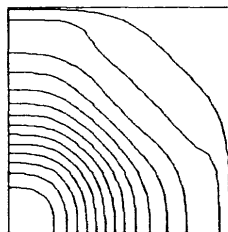


図 4(c):Modified S-W 法の数値解

次に図 5(a) の衝撃波反射の例題を解いた。流入マッハ数が 2.9、衝撃波入射角が  $29^\circ$ 、格子点数が  $60 \times 21$  の場合の圧力分布を示す。図 5(b) は operator split 型 S-W 法の CFL 数 0.6435 の時の収束解で、図 5(c) は本方法での CFL 数 0.9945 の時の収束解である。本法は operator split 型 S-W 法に比べ、解が改善されている

のがわかる。大きな  $\Delta t$  をとれるようになったことが、数値粘性の減少に役立っていると考えられる。

また、式 (4) から

$$\tilde{f}_{\text{modified S-W}} = \tilde{f}_{\text{S-W}} + \delta \tilde{f}$$

と書くことができるが、 $\tilde{f}_{\text{S-W}}$  は他の operator split 型流束に変えることもできそうなので次の  $\tilde{f}_{\text{Roe}}$  を用いてみた。

$$\tilde{f}_{\text{modified Roe}} = \tilde{f}_{\text{Roe}} + \delta \tilde{f}$$

図 5(d) は operator split 型 Roe 法の CFL 数 0.6435 の時の収束解で、図 5(e) は上式のように修正した Roe 法の CFL 数 0.9945 での収束解である。修正した Roe 法も CFL 数が 1 まで計算可能なようである。また Roe 法が数値粘性を最小限に抑えるため図 5(e) は図 5(c) と比べて、シャープな解となっている。

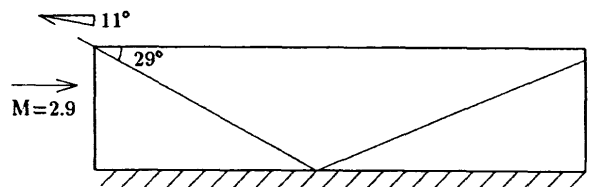


図 5(a):境界条件

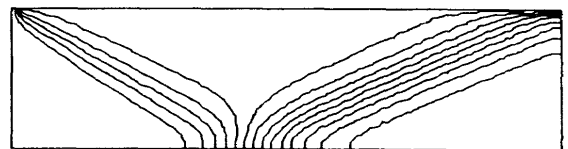


図 5(b):S-W 法の数値解

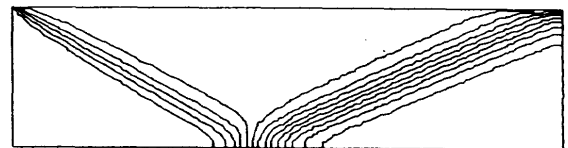


図 5(c):Modified S-W 法の数値解

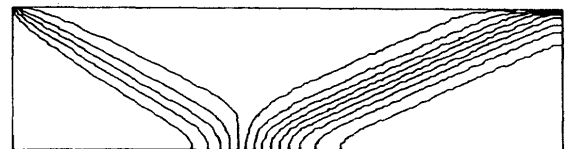


図 5(d):Roe 法の数値解

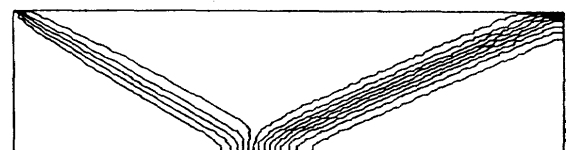


図 5(e):Modified Roe 法の数値解



#### 4. 終わりに

線型化することによってセルの角でもリーマン問題の近似解を構成し、純2次元的にオイラー方程式に対してスキームを作ることができることを示した。

なお、スカラー双曲形方程式を基礎として構成されている time split(fractional step) 法や Colella の多次元解法の1次精度のものとも比較して見たが、ほとんど同じ様な解が得られている。この例題では角での精密な取り扱いよりも、Davis[2], Roe[3] らの多次元風上法を取り入れる事の方が重要なかもしれない。

#### 参考文献

- [1] P. Colella: "Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws", *Journal of Computational Physics*, **87**, pp. 171-200 (1990).
- [2] S. F. Davis: "A rotationally biased upwind difference scheme for the Euler equations", *Journal of Computational Physics*, **56**, pp. 65-92 (1984).
- [3] P. L. Roe: "Discrete models for the numerical analysis of time-dependent multidimensional gas-dynamics", *Journal of Computational Physics*, **63**, pp. 458-476 (1986).

公式 (1)

$$\int \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} dY = Y \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X}$$

$$\int \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} dY = Y \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} - \sqrt{1-X^2-Y^2}$$

$$\int \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} dY = Y \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} - 2X \tan^{-1} \sqrt{\frac{Y+\sqrt{1-X^2}}{\sqrt{1-X^2}-Y}} + \tan^{-1} \frac{XY}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}$$



## ガスタービン冷却系の中空軸部分での旋回流による静圧降下

岸部 忠晴\* 梶 昭次郎\*\*

Static pressure drop by swirling flow  
of an internal cooling air system  
through a turbine shaft

by

TADAHARU KISHIBE, SHOJIRO KAJI

Tokyo University

## ABSTRACT

High thermal efficiency of the gas turbine is dependent on high turbine entry temperature, which is limited by the turbine blade and nozzle guide vane materials. Cooling these components with internal air system allows their environmental operating temperature to exceed their melting point. The cooling air is taken from the compressor and passes through in the hollow turbine shaft.

Generally, it is assumed that any troublesome phenomenon by swirling flow does not occur if the cooling air enters the hollow shaft with the relative tangential velocity equal to zero, i.e., the absolute tangential velocity equal to the circumferential speed of the shaft at the air inlet. In this calculation for an internal cooling air system, however, it is observed that unexpectedly even the relative tangential velocity grows as the rotational speed of the shaft increases, and as a result, static pressure drops remarkably.

---

\* 東京大学大学院

\*\* 東京大学工学部航空宇宙工学科

## 1. 序

ガスタービンの高効率化のためにはタービン入口温度を上げる必要がある。その際タービン翼を冷却する必要が生じ、この冷却空気はコンプレッサーからタービンまで中心軸内の中空部分を経由して運ばれる。一般に旋回成分を含む流れは半径が小さくなると静圧が降下することをはじめ様々な現象を引き起こすが、従来この中心孔内の冷却空気は相対周方向速度を持たないように導入すれば、旋回流による現象は発生しないと考えられていた。この仮定のもとに冷却空気的设计は行われているが、実際には設計どおりにいかないことが多かった。

今回の計算で、予想以上に旋回成分が発達していること、その結果無視できないほど静圧が降下していることを発見した。

## 2. 計算

計算領域は、図1のように、実際のガスタービンに使用されている冷却系のインデューサ出口から、ディフューザまでである。このうちインデューサ出口を計算領域の入口境界とし、ディフューザ出口を出口境界とした。また、計算上の便宜と渦心を計算領域に含ませるために、計算領域を中心孔部とディフューザ部②に分け、さらに中心孔部を、中心軸近傍③と外周部①に分けた。領域①②は円筒座標系、領域③はデカルト座標系の基礎方程式を解く。今回の計算では、軸対称と仮定して円筒座標系の領域①②では $\theta$ 方向に格子を取らず、二次元格子で解いた。領域③は三次元格子である。各領域接続部は一重に重複してある。ちなみに中空軸の内径は40mmで、入口境界は半径が65mmのところにある。

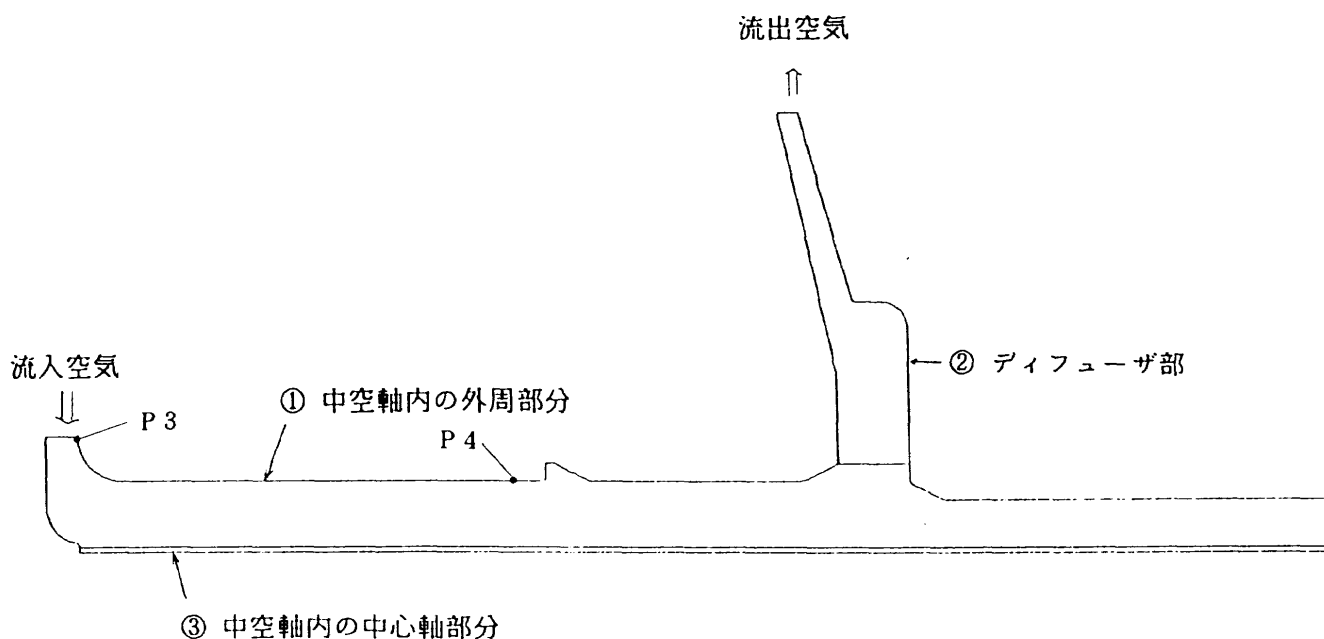


図1 計算領域

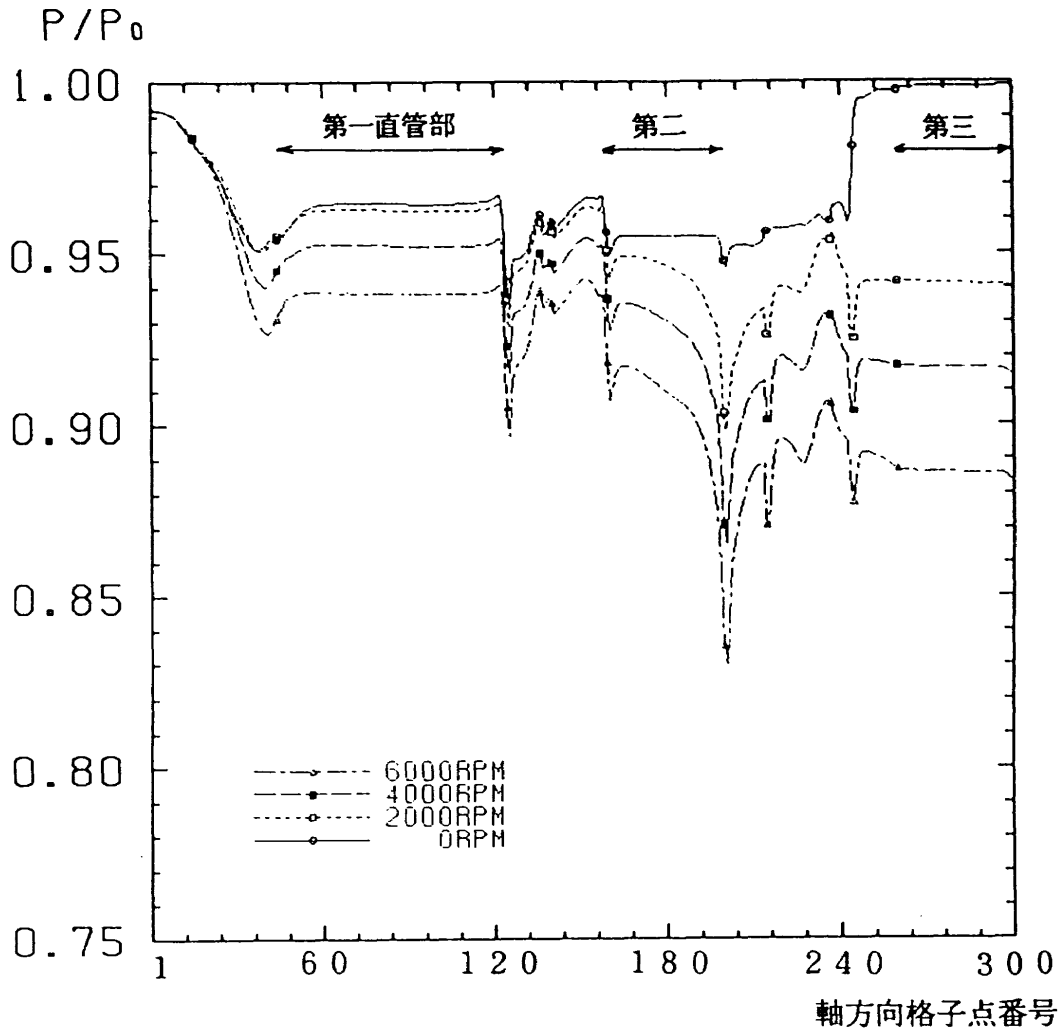


図2 壁面圧力分布

基礎方程式はNS方程式であるが、乱流粘性は入れず、層流粘性のみで計算している。

計算にはTVDを用い、陰解法で解いた。ローカルタイムステップを利用し、CFL数を領域①②で5、領域③で20にして計算した。

計算条件は、入口全圧3.0ata、流量1.0kg/sであり回転数をパラメータとし、0rpmから6000rpmまで2000rpmごとに4つ取った。入口境界では、回転に対する相対流入角を0°にしている。出口の静圧を調節することで、流量を計算条件に合わせている。

計算格子点数は、領域①が40×1×300、領域②が101×1×23、領域③が9×9×300で合計すると約38,000点である。

### 3. 結果

流量を計算条件に合わせて、出口の静圧を調

節した。各回転数に対して与えた出口静圧と、そのときの流量を表1に示す。

表1 各回転数の出口静圧と流量

回転数	出口静圧	流量
0	2.760	1.009
2000	2.715	0.9924
4000	2.664	0.9994
6000	2.609	1.00004

図2に、各回転数の中心孔の壁面静圧分布の結果を示す。縦軸は、静圧を入口全圧で無次元化したものであり、横軸は軸方向の格子点を順番どおりに配置したものである。グラフ上の○□などの記号は、格子形状の変わり目の位置を示す。

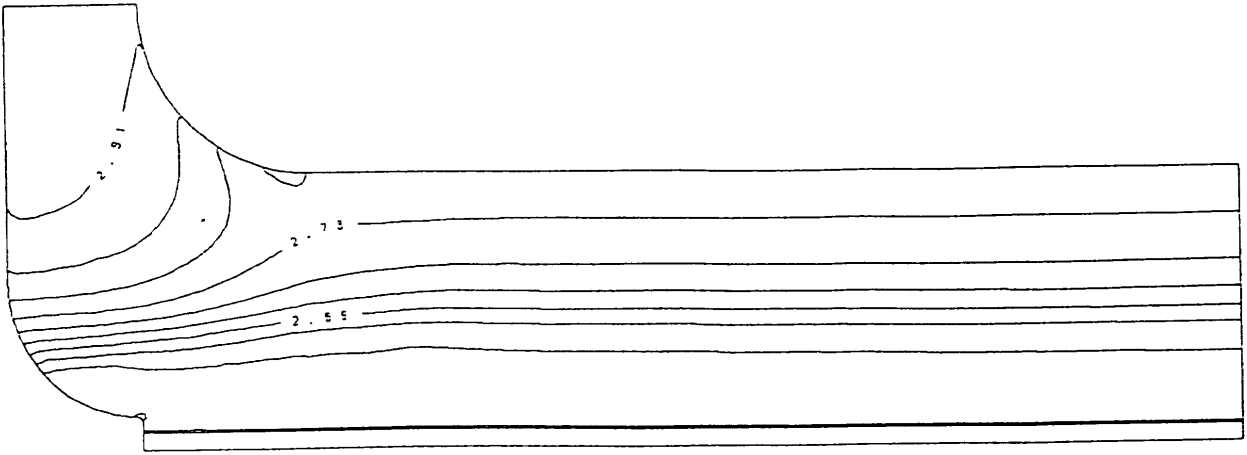


図3. 1 入口付近の静圧分布

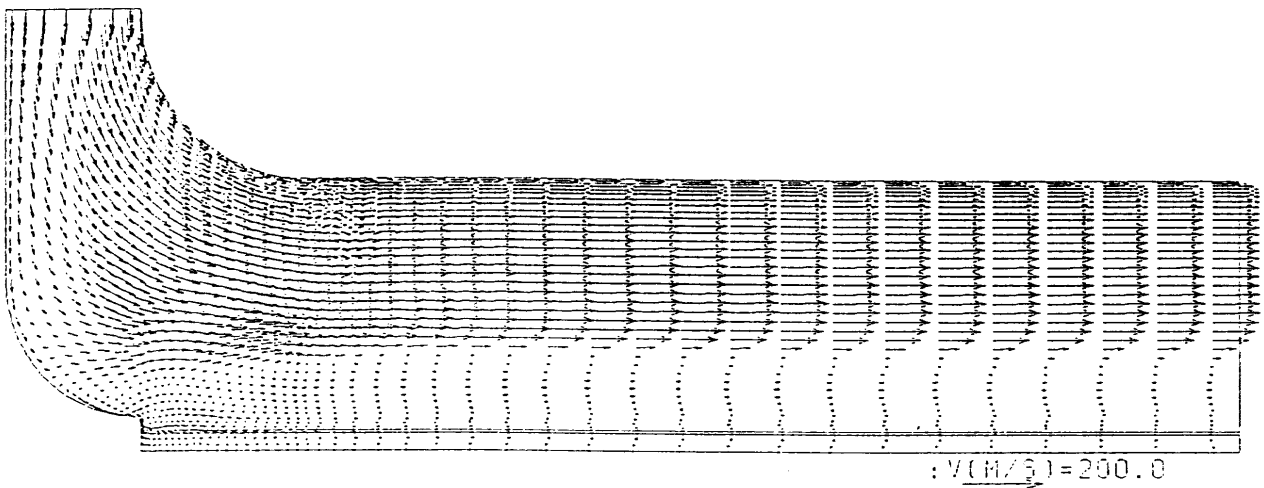


図3. 2 入口付近の速度ベクトル

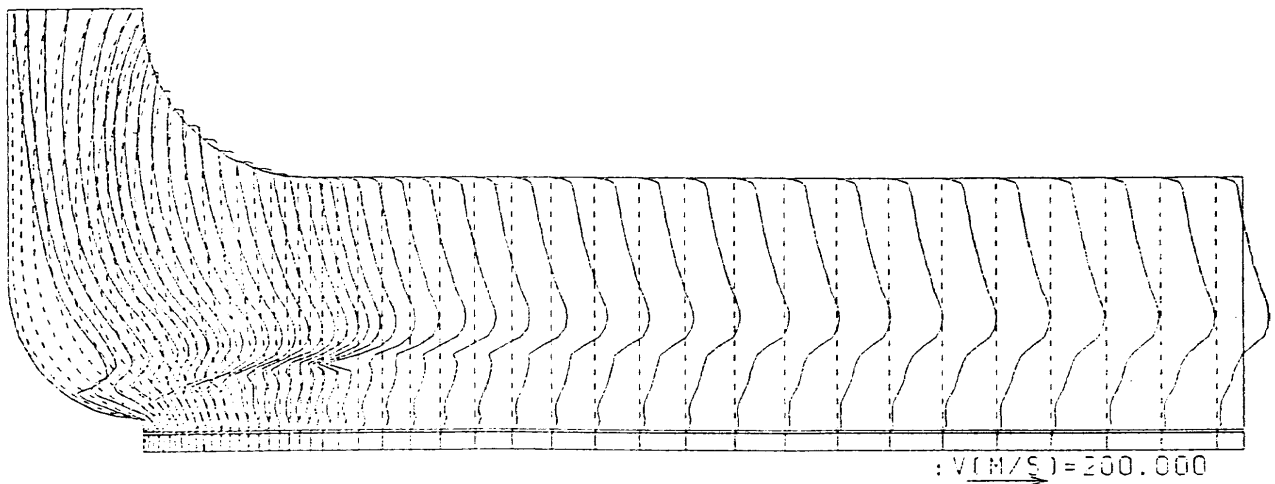


図3. 3 入口付近の周方向速度分布

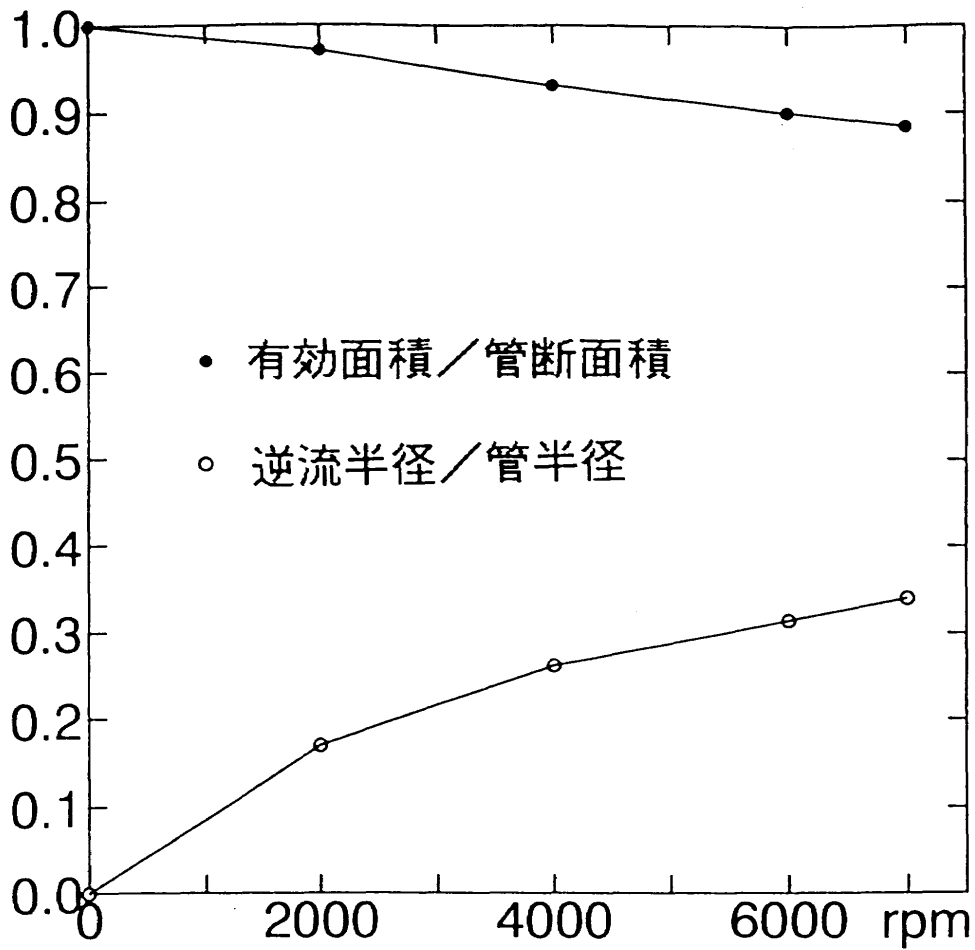


図4 有効面積/管断面積と逆流半径/管半径

また図3に、7000 rpm の入口付近の静圧分布図、速度ベクトル図、周方向速度分布図を載せる。

[1] 入口R部では、入口境界の面積より中心孔部の流れに垂直な面積が小さくなることにより流れが加速され静圧が減少する。ただし、中心孔第一直管部には回転数の増加に従って大きくなる逆流部が存在するため、有効面積が少なくなってその分軸方向速度が大きくなること、回転数の増加に伴って周方向速度が大きくなること、の二つによって静圧減少に差異ができるものと考えられる。この周方向速度の存在、逆流部の存在は以下の理由による。すなわち、入口境界では回転に対する相対流入角を $0^\circ$ にして空気を導入しているが絶対座標で見ると旋回成分を持っているために旋回流となっており、遠心力によって中心軸付近の静圧が低下し圧力の高い下流の空気が逆流してくるのである。

ただし、図4によると逆流部の半径/管半径が大きくなっても有効面積はたいして変わらないので、周方向速度の増加の方が効いているらしい。実際、 $V_z$ を比較してみると回転数によってほとんどかわっていなかった。

[2] 中心孔第二直管部では、0 rpmの分布は平坦であるがそれ以外では右下がりである。これは図4を見ると、出口が上方にあることと遠心力の両方によって、主流が管壁付近に寄るため主流部の面積が少なくなっていくことで、静圧が減少すると考えられる。

[3] 中心孔第三直管部は、どの回転数でも軸方向速度はほとんどないが、0 rpmでは全圧はほぼ入口全圧のままであり周方向速度がないこと、それ以外の回転数では逆流部の低い全圧になっておりさらに周方向速度が他の直管部と同程度あること、の差によって、静圧の大幅な違いを生んでいる。

---

## 航空宇宙技術研究所特別資料27号

平成6年12月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺東町7丁目44番地1  
電話三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社三興印刷  
東京都新宿区西早稲田2-1-18

---



