

境界要素法を用いた2次元フラップ付き翼周りの計算格子の生成

岩佐 正道* 柳澤 三憲*

Grid Generation around Airfoil with a Flap
Using Boundary Element Method

by

Masamichi Iwasa
Mitsunori Yanagizawa
Science University of Tokyo

Abstract

In many cases, it is very difficult to generate uni-grid around complicated configurations. It has been used that the method for generation of the grid by simulating electric line of force and equipotential surface. But it is difficult to apply to dents in a body. This paper describes a method for generating uni-grid around a airfoil with a flap, having a exceeding dent, by simulating electric line of force and equipotential surface using boundary element method. The grid is mainly generated by dividing panels of wing into rather small panels.

1 はじめに

複雑形状物体周りに計算格子を張る場合、現在ではマルチブロック法などの格子生成法が研究されている。しかし流れ場の計算には単一格子を生成するのが最も便利であるため、単一格子の生成を行なった。この格子生成法は境界要素法を用いており、Laplace 方程式を解析的に解くことによって得られた解によって電気力線と等ポテンシャル面をシミュレーションしていることになる。

一般に電気力線と等ポテンシャル面を用いると、直交性の良い grid が生成できる反面、凹領域を有する物体に対しては、電気力線が物体内部に入り込んでしまうということが知られている。本研究において、翼とフラップの隙間のような、かなりの凹領域を有する物体について grid 生成を試みたので報告する。

2 格子生成法

ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

が基礎方程式となり、その基本解

$$\phi^* = -\frac{1}{2\pi} \int \ln r \, ds \quad (2)$$

を用いる。

2.1 計算法

物体表面（内部領域）及び外部領域をパネルに分割し、次の境界条件を与える。

$$\begin{aligned} \text{内部境界} \quad \phi &= \phi_B \\ \text{外部境界} \quad \phi &= \phi_\infty \end{aligned} \quad (3)$$

各パネル面に強さ σ の湧き出しを分布させ、任意の点のポテンシャルを ϕ とすれば、 ϕ は

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \int \sigma \ln r \, ds \quad (4)$$

と表すことができる。(4) 式を離散化すると

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \sum_k \sigma_k \int \ln r \, ds \quad (5)$$

$$= -\sum_k B_{hk} \sigma_k \quad (6)$$

となる。

ここで、 B_{hk} は空力的影響係数と呼ばれ、湧き出し

*東京理科大学

が距離 r 離れた場所にある Control Point に及ぼす影響を表す量で、次のように表すことができる。

$$B_{hk} = \frac{1}{2\pi} \int \ln r \, ds \quad (7)$$

以上より、次のような σ_k を未知数とする連立一次方程式が得られる。

$$[B_{hk}] \{ \sigma_k \} = \{ \phi_B, \phi_\infty \}^T \quad (8)$$

(8) 式を解いて σ_k を求める。この求められた σ_k から任意の空間における速度（電界の強さ）を求めるには次式を用いる。

$$\nabla \phi = - \sum_k \nabla B_{hk} \sigma_k \quad (9)$$

速度（電界の強さ） E は、二次元で考えれば

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ E_y &= - \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (10)$$

ポテンシャルの差 $d\phi$ の E 方向の距離 ds は、

$$ds = - \frac{d\phi}{E} \quad (11)$$

と表すことができ、さらに2方向の成分で表せば、

$$\begin{aligned} dx &= \frac{E_x}{E} ds \\ dy &= \frac{E_y}{E} ds \end{aligned} \quad (12)$$

となる。従って、(11) 式を (12) 式に代入すると

$$\begin{aligned} dx &= - \frac{E_x}{E^2} d\phi \\ dy &= - \frac{E_y}{E^2} d\phi \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。この式は、ポテンシャルの差 $d\phi$ の面を表しており、次の様な連立常微分方程式の初期値問題を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\phi} &= f(\phi, x, y) \\ \frac{dy}{d\phi} &= f(\phi, x, y) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで関数 f は例えば x 方向について書くと

$$f(\phi, x, y) = - \frac{E_x}{E^2} \quad (15)$$

であり、さらに (9) 式が代入される。上式の解 $x = x(\phi)$ を初期条件 $x_0 = x(\phi_0)$ のもとで求めることになるが、このとき f は y によらない。同様に y についても初期条件のもとで解く。この x, y を用いてつぎの等ポテンシャル面に到達する。

上記の理論に対し空力的影響係数及び速度は解析的計算によって求める。

2.2 解析的計算

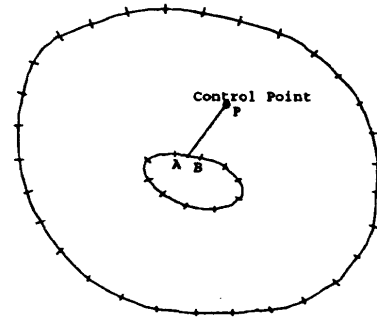


図 1:

解析的計算は Control Point の座標 $P(X_1, Y_1)$ 、パネルの左端の座標 $A(X_2, Y_2)$ 、パネルの右端の座標 $B(X_3, Y_3)$ として進めた (図 1)。Normal Vector の向きに注意し、常に領域を左側に見る方向に積分しなければならない。すなわち、座標 $A(X_2, Y_2)$ から座標 $B(X_3, Y_3)$ へ向かって積分する。従って変数変換を行なう際のパラメーター t もその方向に沿って設定する必要がある[2]。

ここで

$$I = \int_{AB} \ln r \, ds \quad (16)$$

なる線積分を考える。

ここで r は、Control Point と積分するパネル上の微小線素 ds との距離である。

特異点を含まない場合、 x, y をそれぞれ

$$\begin{aligned} x &= (x_3 - x_2)t + x_2 \\ y &= (y_3 - y_2)t + y_2 \end{aligned} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (17)$$

と表すことにする。つまり上式の変換を行うことによって区間 $[A, B]$ を $[0, 1]$ に移すことができる。

微小線素 ds との距離 r は、

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \quad (18)$$

で与えられる。

特異点を含む場合は、 x, y を

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{x_3 - x_2}{2} \right) t + \frac{x_3 + x_2}{2} \\ y &= \left(\frac{y_3 - y_2}{2} \right) t + \frac{y_3 + y_2}{2} \end{aligned} \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (19)$$

と表す。但し、特異点は $t = 0$ に存在するものとする。パネル上の微小線素 ds までの距離 r は、

$$r = \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2} - x \right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2} - y \right)^2} \quad (20)$$

次に微小線素 ds を考える。

特異点を含まない場合 ds は、

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned} \quad (21)$$

(17) 式を代入すれば、

$$ds = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} dt \quad (22)$$

となる。

結局、解くべき方程式 I は、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \\ &\times \int_0^1 \ln \left\{ (x_1 - (x_3 - x_2)t - x_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + (y_1 - (y_3 - y_2)t - y_2)^2 \right\} dt \end{aligned} \quad (23)$$

ということになる。

特異点を含む場合、微小線素 ds は

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned} \quad (24)$$

(19) 式を代入すれば、

$$ds = \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2} dt \quad (25)$$

となる。従って解くべき積分 I は、積分区間を分割して、

$$\begin{aligned} I &= 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2} \\ &\times \left[\int_0^\epsilon \ln \left\{ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)t - \frac{x_3 + x_2}{2}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)t - \frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 \right\} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_\epsilon^1 \ln \left\{ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)t - \frac{x_3 + x_2}{2}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)t - \frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 \right\} dt \right] \end{aligned} \quad (26)$$

となる。

(23) 式を計算した結果、空力的影響係数 B_{hk} は、

$$B_{hk} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{R_0}$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \ln R_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{S_0}{R_0} \ln \frac{R_1}{R_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_1}{R_0} \ln \frac{R_2}{R_0} - 2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{S_2}{R_0} \left(\tan^{-1} \frac{S_0}{S_2} - \tan^{-1} \frac{S_1}{S_2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

のように求めることができる。

ここで、 $R_0, R_1, R_2, S_0, S_1, S_2$ は、それぞれ

$$R_0 = (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \quad (28)$$

$$R_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (29)$$

$$R_2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 \quad (30)$$

$$S_0 = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1) \quad (31)$$

$$S_1 = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_3 - y_1) \quad (32)$$

$$S_2 = (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1) \quad (33)$$

である。

特異点においては、(26) 式を解く。0 から ϵ までの積分は、

$$\begin{aligned} &\int_0^\epsilon \ln \left\{ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)t - \frac{x_3 + x_2}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)t - \frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 \right\} dt \\ &= 2\epsilon(\ln \epsilon - 1) + \epsilon \ln \left\{ \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2 \right\} \\ &= 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (34)$$

又、 ϵ から 1 までの積分は、

$$\begin{aligned} &\int_\epsilon^1 \ln \left\{ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)t - \frac{x_3 + x_2}{2}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)t - \frac{y_3 + y_2}{2}\right)^2 \right\} dt \\ &= 2\epsilon(1 - \ln \epsilon) - 2 \\ &\quad + (1 - \epsilon) \ln \left\{ \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2 \right\} \\ &= \ln \left\{ \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2 \right\} - 2 \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (35)$$

従って空力的影響係数 B_{hk} は、(34) 式と (35) 式より

$$\begin{aligned} B_{hk} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2} \\ &\times \left[\ln \left\{ \left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2 \right\} - 2 \right] \end{aligned} \quad (36)$$

(28)式を使えば

$$B_{hk} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{R_0} \left(2 \ln \frac{1}{2} + \ln R_0 - 2 \right) \quad (37)$$

となる。ここで特異積分には pf 積分を用いている。また連立常微分方程式には Runge-Kutta-Fehlberg 法^[3]を適用している。

解析的に求めた速度 E_x, E_y を示す。

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi} \sqrt{R_0} \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{x_3 - x_2}{R_0} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{S_0}{R_0} \frac{2(x_2 - x_1)}{R_1} \\ & - \frac{x_3 - x_2}{R_0} \ln \frac{R_2}{R_0} - \frac{S_1}{R_0} \frac{2(x_3 - x_1)}{R_2} \\ & - 2 \frac{y_3 - y_2}{R_0} \left(\tan^{-1} \frac{S_0}{S_2} - \tan^{-1} \frac{S_1}{S_2} \right) \\ & + 2 \frac{S_2}{R_0} \left(\frac{(x_3 - x_2)S_2 + S_0(y_3 - y_2)}{(S_2 + S_0)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(x_3 - x_2)S_2 + S_1(y_3 - y_2)}{(S_2 + S_1)^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$E_y = \frac{\sigma}{4\pi} \sqrt{R_0} \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{y_3 - y_2}{R_0} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{S_0}{R_0} \frac{2(y_2 - y_1)}{R_1} \\ & - \frac{y_3 - y_2}{R_0} \ln \frac{R_2}{R_0} - \frac{S_1}{R_0} \frac{2(y_3 - y_1)}{R_2} \\ & + 2 \frac{x_3 - x_2}{R_0} \left(\tan^{-1} \frac{S_0}{S_2} - \tan^{-1} \frac{S_1}{S_2} \right) \\ & + 2 \frac{S_2}{R_0} \left(\frac{(y_3 - y_2)S_2 - S_0(x_3 - x_2)}{(S_2 + S_0)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(y_3 - y_2)S_2 - S_1(x_3 - x_2)}{(S_2 + S_1)^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

3 結果

3.1 予備段階としての grid 生成

翼の grid 生成の予備段階として対称物体の凹領域に grid を生成した。物体はひょうたん型のような物である。段々と凹領域が深くなっていき、最後には電気力線が物体内部に入り込んでしまい、grid は生成されていない。図2にその様子を示す。この深い溝の部分に grid を生成しようとするときかなりパネルを細かくしなければならない。ポテンシャルが急激に変化するためである。図3は、図2の最後で grid が生成できなかった部分の拡大図である。きれいに grid が生成されている。パネル数は493枚である。

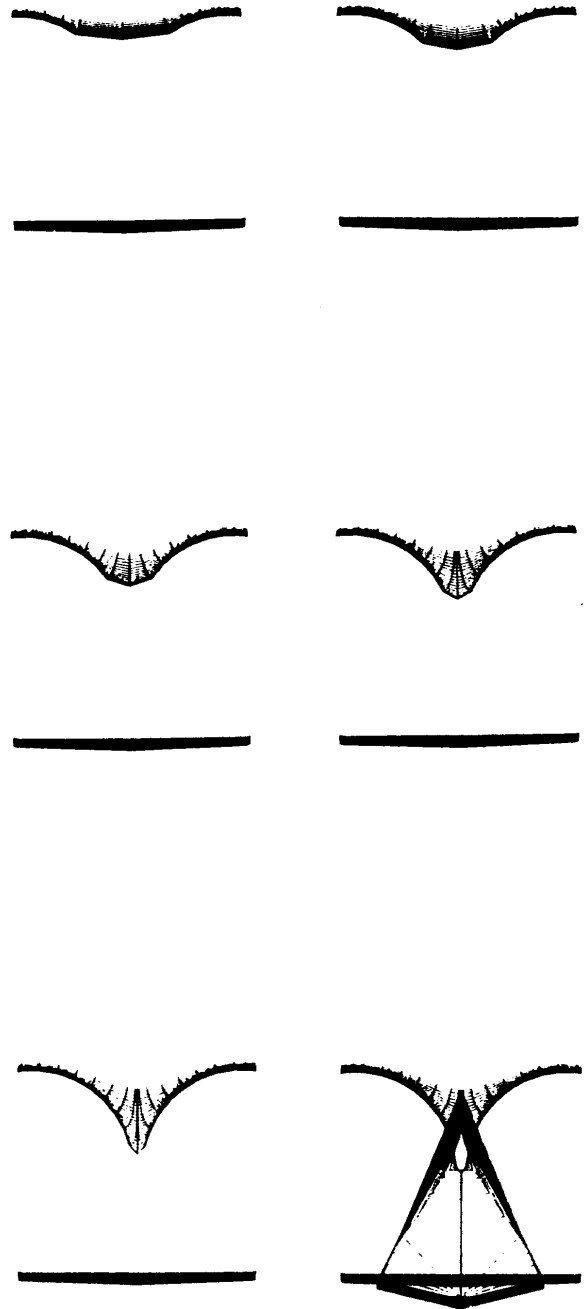


図 2: 凹領域の変化

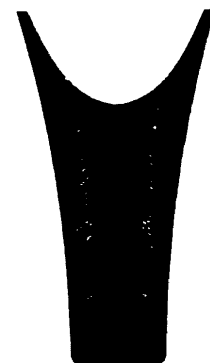


図 3: 凹領域の拡大図

3.2 フラップ付き翼周りの grid

次に翼についての結果を示す。図4は通常の一枚翼についての 56×14 の計算格子である。図5から7がフラップ付き翼周りの計算格子である。ひょうたん型と比べてかなり凹領域が激しくなっているが grid を張る難しさはさほど変わらない。翼とフラップは結合して一つの物体としている。ここでもポテンシャルの急激な変化が良くわかる。パネルと同様にポテンシャルの刻み幅も相当に細かくする必要がある。フラップ付き翼については、 503×55 の計算格子である。

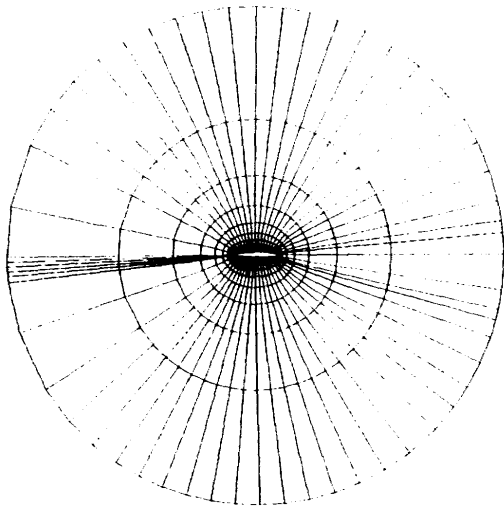


図 4: 一枚翼

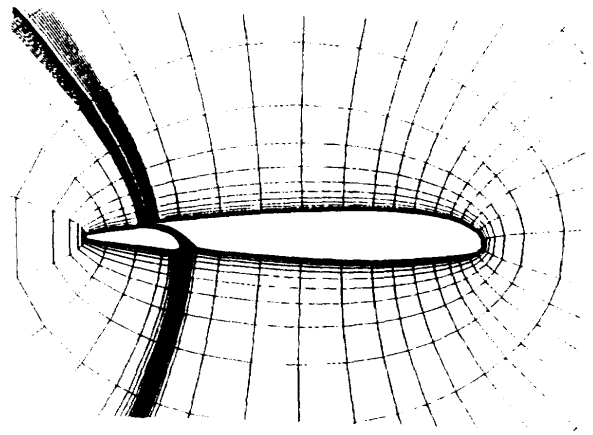


図 6: フラップ付き翼 (2)

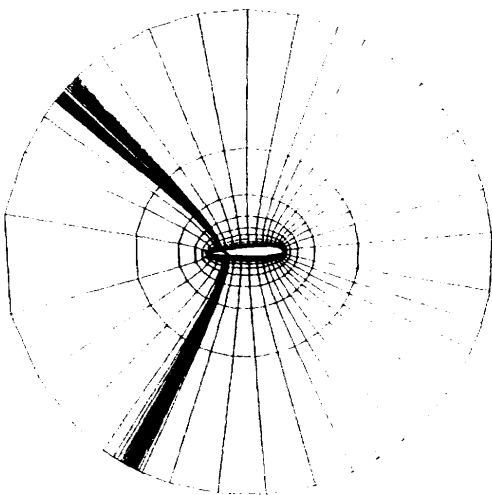


図 5: フラップ付き翼 (1)

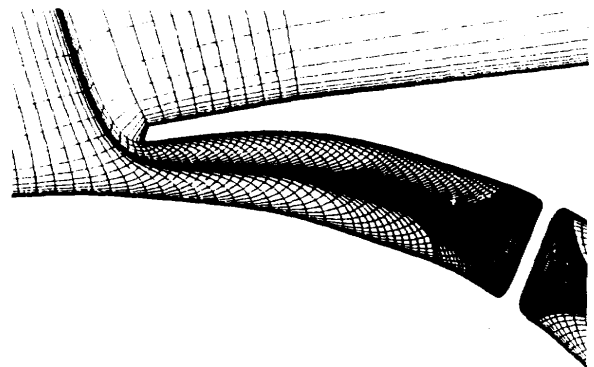


図 7: フラップ付き翼 (3) - 結合部付近

4 まとめと今後の課題

二次元フラップ付き翼周りの計算格子の生成を試みた。その結果、翼とフラップが共有するかなりの凹領域の部分についても grid の生成が可能であることがわかった。但し、パネル、ポテンシャルの刻み幅は共にかなりの細かさを要求され、効率の良いパネルの切り方をする必要がある。むだなパネルの増加は無駄な計算時間の増加を招くだけであると言える。

今後の課題としては、これをさらに複雑な形状物体周りの計算格子の生成に結び付けること、この grid を用いての差分計算を行なうことがあげられる。

参考文献

- [1] M. Yanagizawa, M. Nakada, Y. Koshika and A. Inoue "Generation of 3-D Grid Using Boundary Element Method," *Special Publication of National Aerospace Laboratory*, vol. SP-10, No. 34, pp. 201-207, Nov. 1989.
- [2] 岩佐 正道, "二次元翼の計算格子の生成," 東京理科大学 柳沢研究室卒論, 1992.
- [3] Tim Hopkins and Chris Phillips "NUMERICAL METHODS IN PRACTICE Using the NAG Library," *International Computer Science Series*, Addison-Wesley Publishing Company.