

2次元 Euler 方程式に対する風上法の適用について

橋 正和*

Upwind Schemes for the Two-Dimensional Euler Equations

by

Masakazu Tachibana
National Aerospace Laboratory

Abstract

A genuinely two-dimensional Euler scheme was developed for rectangular grids. This scheme is equivalent to the extension of one-dimensional Steger-Warming scheme to two dimensions. In order to construct the scheme, linearized Euler equations were solved analytically at cell vertexes using Poisson's wave formula.

1. はじめに

1次元オイラー方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0$$

の1次精度 Godunov 型スキーム

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2}^n - \tilde{\mathbf{f}}_{i-1/2}^n)$$

は

$$\mathbf{q}_j^{n+1} = 1/\Delta x \int_{I_j} \mathbf{q}_n(x, t_{n+1}) dx.$$

と近似解 \mathbf{q}_n の積分形で書ける。このために我々は1次元リーマンソルバーを容易に理解することができる。しかし、2次元オイラー方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = 0$$

では、セル頂点での初期値問題が複雑なため、この考え方は採用されず、通常 x, y 方向の1次元スキームの重ね合わせとして解かれている (operator split 法)。この方法では、単純化し、実際の物理から乖離しまった分だけ、次式のように Δt の安定限界が小さくなってしまう。

$$\text{CFL 条件: } \left(\frac{\lambda_x \Delta t}{\Delta x} + \frac{\lambda_y \Delta t}{\Delta y} \right) \leq 1$$

そこで本研究では、より物理現象に近い近似解 \mathbf{q}_n を解析的に求めることにより

$$\mathbf{q}_{i,j}^{n+1} = 1/(\Delta x \Delta y) \int_{I_{i,j}} \mathbf{q}_n(x, y, t_{n+1}) dx dy.$$

を満たす、2次元オイラースキームを構成することを目的とする。

2. 定式化

セルの角では Euler 方程式に非線型の効果を入れて解くのは困難だと考えられるので、線型化した方程式を扱う。1次元問題に対する Steger-Warming 法:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{i+1/2} = \mathbf{A}_i^+ \mathbf{q}_i + \mathbf{A}_{i+1}^- \mathbf{q}_{i+1}$$

$$\mathbf{A} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$$

は各セルについて独立に線型方程式

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0$$

を解き、 Δt 時間後の解をすべて重ね合わせる方法と解釈できるので、これを図1のように純粹に2次元に拡張して見よう。

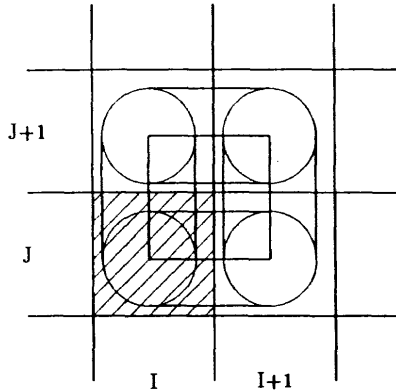


図1:セル(I,J)にある流体の Δt 時間後の様子

線型化したオイラー方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

を扱いやすくするために、まず次のように流れにのった座標系にガリレイ変換する。

静止座標系 $(t, x, y, q) \leftrightarrow$ 移動座標系 $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{q})$

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x} = x - ut \\ \bar{y} = y - vt \\ \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{q} \end{cases}$$

ここで u, v はそれぞれ x, y 方向の流速であり、 \mathbf{L} は

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 \\ \frac{u^2+v^2}{2} & u & v & 1 \end{bmatrix}$$

である。そうすると、式(1)は次式のように変換される。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{x}} + \bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2)$$

ここに $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{A} - u\mathbf{I})\mathbf{L} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/(\gamma - 1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{B} - v\mathbf{I})\mathbf{L} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 1 \\ 0 & 0 & a^2/(\gamma - 1) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり、 a は音速である。式(2)を分解すると当然の事ながら音波の式

$$\frac{\partial^2 \bar{q}_4}{\partial \bar{t}^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{q}_4}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{q}_4}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

が導かれ、次のポアソンの波動公式を用いて解析解が求められる。

$$\bar{q}_4 = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left\{ \frac{1}{2\pi a} \iint_{C_{a\bar{t}}} \frac{h(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 \bar{t}^2 - (\xi - \bar{x})^2 - (\eta - \bar{y})^2}} d\xi d\eta \right\} + \frac{1}{2\pi a} \iint_{C_{a\bar{t}}} \frac{g(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2 \bar{t}^2 - (\xi - \bar{x})^2 - (\eta - \bar{y})^2}} d\xi d\eta$$

ここで $h(x, y) = \bar{q}_4(x, y, t = 0), g(x, y) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{q}_4(x, y, t = 0)$ であり $C_{a\bar{t}}$ は中心が (\bar{x}, \bar{y}) 、半径 $a\bar{t}$ の円の内部領域を示す。

初期条件 $\bar{\mathbf{q}} = (\alpha, 0, 0, \beta)^T$ を持つ矩形領域の $\Delta \bar{t}$ 時間後の解を求めると図2のようになる。

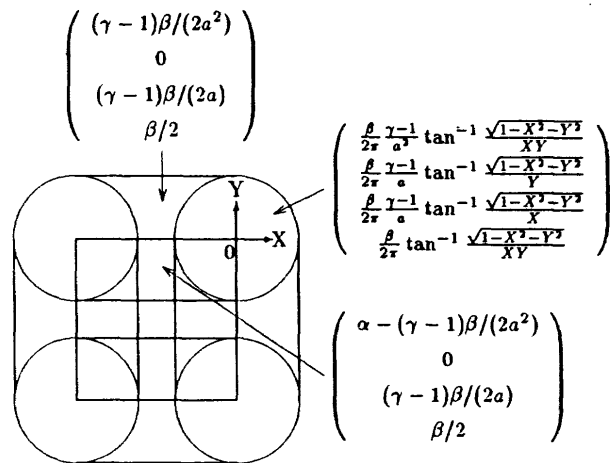
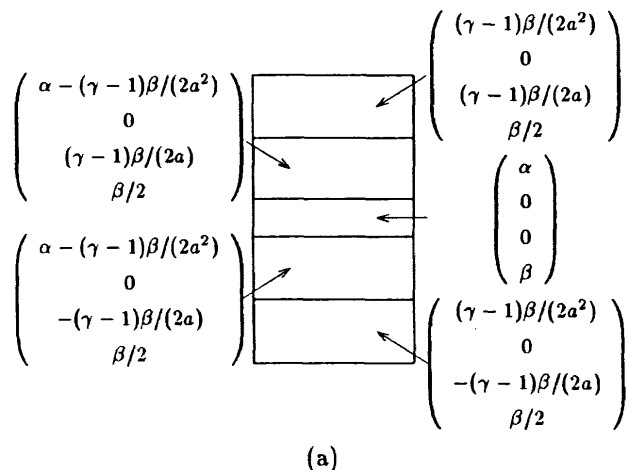
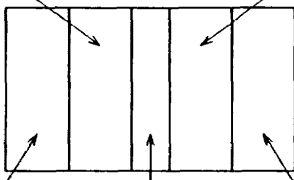


図2:初期条件 $\bar{\mathbf{q}} = (\alpha, 0, 0, \beta)^T$ を持つ矩形領域の $\Delta \bar{t}$ 時間後の解

ここで $X = \bar{x}/(a\bar{t}), Y = \bar{y}/(a\bar{t})$ とする。この解 $\bar{\mathbf{q}}$ は図3のように4つの部分の重ね合わせとして表現すると以後の計算が簡単になる。



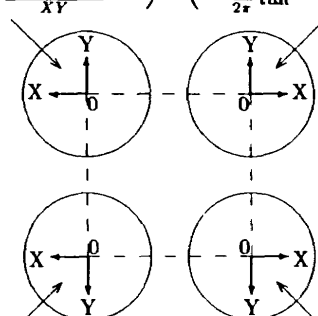
(a)

$$\begin{pmatrix} \alpha - (\gamma - 1)\beta/(2a^2) \\ -(\gamma - 1)\beta/(2a) \\ 0 \\ \beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - (\gamma - 1)\beta/(2a^2) \\ (\gamma - 1)\beta/(2a) \\ 0 \\ \beta/2 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} (\gamma - 1)\beta/(2a^2) \\ -(\gamma - 1)\beta/(2a) \\ 0 \\ \beta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\gamma - 1)\beta/(2a^2) \\ (\gamma - 1)\beta/(2a) \\ 0 \\ \beta/2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a^3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \\ -\frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} \\ \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} \\ \frac{\beta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a^3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \\ \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} \\ \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} \\ \frac{\beta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a^3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \\ -\frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} \\ -\frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} \\ \frac{\beta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a^3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \\ \frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} \\ -\frac{\beta}{2\pi} \frac{\gamma-1}{a} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} \\ \frac{\beta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} \end{pmatrix}$$

(d)

図3: 図2の解を4個の部分(a)~(d)に分解した結果

これらの解を公式(1)を用いてY方向に線積分して加え合わせれば、以下の数値流束が求められる。

$$\tilde{q}_{i+1/2,j+1} = \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{u^+(v+a)^+}{u} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} \\ 0 \\ \frac{\gamma-1}{2}a \\ \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{u^+v^+}{u} \begin{pmatrix} (\gamma-2)(\gamma-1) \\ 0 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{u^+(v-a)^+}{u} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} \\ 0 \\ -\frac{\gamma-1}{2}a \\ \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(u+a)^+v^+}{u+a} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} \\ \frac{\gamma-1}{2}a \\ 0 \\ \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(u-a)^+v^+}{u-a} \begin{pmatrix} \frac{\gamma-1}{2} \\ -\frac{\gamma-1}{2}a \\ 0 \\ \frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \tan^{-1} \frac{a(q-a)^-}{uv} \begin{pmatrix} -(\gamma-1)v \\ 0 \\ -(\gamma-1)a^2 \\ -a^2v \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \tan^{-1} \frac{(q-a)^-}{u} \begin{pmatrix} (\gamma-1)a \\ 0 \\ (\gamma-1)av \\ a^3 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \tan^{-1} \frac{(q-a)^-}{v} \begin{pmatrix} 0 \\ (\gamma-1)av \\ (\gamma-1)au \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(q-a)^-}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ -(\gamma-1)a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{4\pi\Delta y} \frac{\rho}{\gamma(\gamma-1)} \frac{(|u|-a)^-}{a} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\gamma-1)\pi a^2 \text{sign}(u)^{\frac{1+\text{sign}(v)}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\tilde{f}_{(i+1/2,j+1)-(i,j)} = L(\bar{A} + uI)\tilde{q}_{i+1/2,j+1}$$

ここで q は流速の絶対値を指し、 $(i+1/2, j+1) \leftarrow (i, j)$ はセル (i, j) からセル境界 $(i+1/2, j+1)$ への影響を示す。また式(3)の v を $-v$ に変え、第3成分の符号を変えれば同様に $\tilde{f}_{(i+1/2,j)-(i,j)}$ が求まる。 $\tilde{f}_{(i+1/2,j)-(i,j)}$ は従来型 (operator split 型) Steger Warming 法 (以下 S-W 法と略す) との間に

$$\tilde{f}_{(i+1/2,j)-(i,j)} = \tilde{f}_{S-W(i+1/2,j)-(i,j)} - \tilde{f}_{(i+1/2,j+1)-(i,j)} - \tilde{f}_{(i+1/2,j-1)-(i,j)} \quad (4)$$

の関係を持つ。

なお、本スキームのように CFL 数が 1 まで安定な陽的スキームには、time split(fractional step) 法や Colella[1] の多次元解法等があるが、これらはスカラー双曲形方程式を基礎にして構成されており、式 (3) 中の $(q-a)^-$ のかかった項に対応する要素は含んでいない。

3. 計算例

はじめに図 4(a) のような初期条件で計算を行った。 $+x, -x, +y, -y$ 方向へは一樣な状態が続いているという境界条件を設定した。図 4(b) は operator split 型 S-W 法、図 4(c) は本方法での密度分布の結果である。両者とも格子点数は 30×30 で、CFL 数は 0.96 である。operator split 法に比べて本方法が CFL 数 1 まで確かに安定に解をだしえることを示している。

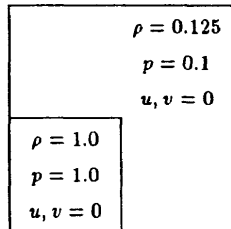


図 4(a):初期条件

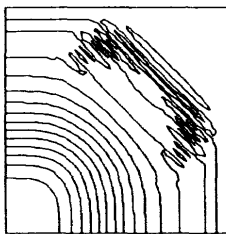


図 4(b):S-W 法の数値解

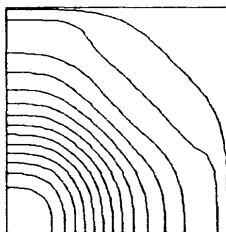


図 4(c):Modified S-W 法の数値解

次に図 5(a) の衝撃波反射の例題を解いた。流入マッハ数が 2.9、衝撃波入射角が 29° 、格子点数が 60×21 の場合の圧力分布を示す。図 5(b) は operator split 型 S-W 法の CFL 数 0.6435 の時の収束解で、図 5(c) は本方法での CFL 数 0.9945 の時の収束解である。本法は operator split 型 S-W 法に比べ、解が改善されている

のがわかる。大きな Δt をとれるようになったことが、数値粘性の減少に役立っていると考えられる。

また、式 (4) から

$$\tilde{f}_{\text{modified S-W}} = \tilde{f}_{\text{S-W}} + \delta \tilde{f}$$

と書くことができるが、 $\tilde{f}_{\text{S-W}}$ は他の operator split 型流束に変えることもできそうなので次の \tilde{f}_{Roe} を用いてみた。

$$\tilde{f}_{\text{modified Roe}} = \tilde{f}_{\text{Roe}} + \delta \tilde{f}$$

図 5(d) は operator split 型 Roe 法の CFL 数 0.6435 の時の収束解で、図 5(e) は上式のように修正した Roe 法の CFL 数 0.9945 での収束解である。修正した Roe 法も CFL 数が 1 まで計算可能なようである。また Roe 法が数値粘性を最小限に抑えるため図 5(e) は図 5(c) と比べて、シャープな解となっている。

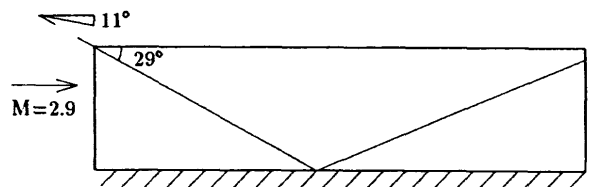


図 5(a):境界条件

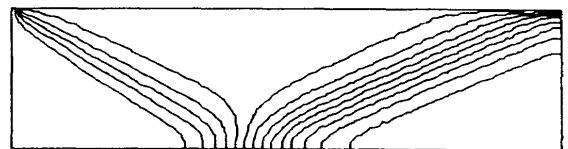


図 5(b):S-W 法の数値解

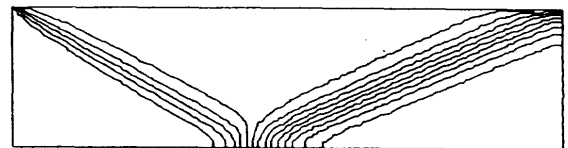


図 5(c):Modified S-W 法の数値解

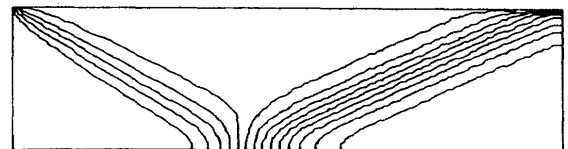


図 5(d):Roe 法の数値解

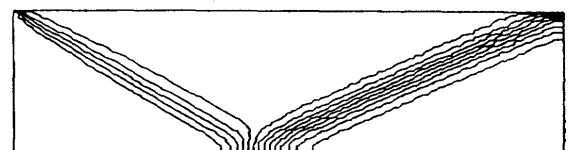


図 5(e):Modified Roe 法の数値解

4. 終わりに

線型化することによってセルの角でもリーマン問題の近似解を構成し、純2次元的にオイラー方程式に対してスキームを作ることができることを示した。

なお、スカラー双曲形方程式を基礎として構成されている time split(fractional step) 法や Colella の多次元解法の1次精度のものとも比較して見たが、ほとんど同じ様な解が得られている。この例題では角での精密な取り扱いよりも、Davis[2], Roe[3] らの多次元風上法を取り入れる事の方が重要なかもしれない。

参考文献

- [1] P. Colella: "Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws", *Journal of Computational Physics*, **87**, pp. 171-200 (1990).
- [2] S. F. Davis: "A rotationally biased upwind difference scheme for the Euler equations", *Journal of Computational Physics*, **56**, pp. 65-92 (1984).
- [3] P. L. Roe: "Discrete models for the numerical analysis of time-dependent multidimensional gas-dynamics", *Journal of Computational Physics*, **63**, pp. 458-476 (1986).

公式(1)

$$\int \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} dY = Y \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{XY} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X}$$

$$\int \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} dY = Y \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{Y} - \sqrt{1-X^2-Y^2}$$

$$\int \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} dY = Y \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-X^2-Y^2}}{X} - 2X \tan^{-1} \sqrt{\frac{Y+\sqrt{1-X^2}}{\sqrt{1-X^2}-Y}} + \tan^{-1} \frac{XY}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}$$

