オイラー方程式に対するハイブリッドゴドゥノフ法

相曽 秀昭 (AISO, Hideaki) 高橋 匡康 (TAKAHASHI, Tadayasu)* ABOUZIAROV, Moustafa**

Here we are concerned with difference approximation for compressible Euler equations. We here introduce a higher order accurate scheme of difference based on Godunov shceme. The methodology to acquire the higher accuracy is to trace the characteristics backward in time. But we choose only the characteristics associated with the genuinly nonlinear fields to take into account. The choice is based rather on the property of compressible Euler equation than on that of general systems of hyperbolic conservation laws.

ここでは圧縮性流体の Euler 方程式を近似する差分スキームの高精度化の一方法を議論する。圧縮性 Euler 方程式は双曲型保存系の一つの例であり、差分近似による数値計算においては非線形性に特有の衝撃波を正確に捉える為に保存型が好ましい事も良く知られて種々の保存型差分近似が提案されてきた。Godunov 法による差分近似はそれら保存型差分近似の中でも、Riemann 問題の厳密解を利用している点で理論的整合性に優れた差分近似として知られている。また近似解を利用する方法も Godunov 的方法として知られる。

一方、差分近似を高精度化する為の研究では、特定の形の差分スキームを高精度化するものもあるが、一般的に保存型差分近似を対象とした高精度化の手法も検討されてきた。その中では各有限体積における分布再構成が良く知られ、van Leer らによる MUSCL 法がよい例である。分布再構成による高精度化は、差分近似での離散的時間発展に必然である情報の喪失を、各有限体積内での保存を考慮しつつ再現しようとする考え方として解釈され、その考え方はかなり自然なものである。

しかし、保存型差分近似の高精度化を隣接する有限体積間でやり取りされる数値流束の高精度化であると解釈すれば、保存的な分布再構成を基礎としない方法論も可能である。本稿では、特性曲線を時刻をさかのぼる方向に追跡する事で数値流束を高精度化する方法について考え、これを Godunov 法及び Godunov 的方法の高精度化に利用する。

なお、特性曲線による数値流束の高精度化は保存型差分近似に一般的に適用できる方法論ではあるが、ここで扱う圧縮性 Euler 方程式の場合には安定性確保のために真性非線形な場に対応する特性曲線 (所謂特性速度 $u, u \pm c$ のうちの $u \pm c$ に対応するもの) のみを高精度化の為に利用する。この特性曲線の取捨選択は圧縮性 Euler 方程式特有の性質に基づくものである。

はじめに

Euler 方程式の数値計算法の高精度化の方法について、従来の (Harten[3, 4] に発する)TVD 計算法の発展の延長線上とは異なる手法を提案する。

* 航空宇宙技術研究所 計算科学研究部, Computational Sciences Division, National Aerospace Laboratory JAPAN, (E-mail : aiso@nal.go.jp, takahasi@nal.go.jp)

** Nizhni-Novgorod University, (E-mail : abouziar@dk.mech.unn.runnet.ru)

数学的手法で数値計算の信頼性を検証する手段として、各計算法の適合性 (弱解への収束性、エントロピー条件への適合性、その他解の重要な挙動への適合性) を議論する事は一般的に行われているが、数値計算全体の最終的な信頼性保証の為には全ての要素の解析 (証明) を要する。しかし、全ての証明が不可能な場合でも計算結果に対する包括的な客観的根拠が工学的応用では強く求められる。

そこで、数学的解析に厳密解の性質をある程度の精密に解析し、数値計算結果のその性質(条件)への適合をソフトウェア的に検査(事後検査)して計算結果の包括的な信頼性を考察する研究が進んでいる。この方法では、数値計算が厳密解の性質に適合しない部分(数値計算の不都合と呼ぶ)が明示される。当該不都合の除去には数値計算の不都合生成機構の解析とそれに基づく計算法の修正が必要だが、現在の Euler 方程式(又は高 Reynolds 数 Navier-Stokes 方程式)に対する高精度計算法は精密な一方で不都合生成機構の解析には複雑過ぎるきらいがある。そこで、**構成原理が明快で分かりやすい**高精度計算法を元に事後検査で不都合を除去し信頼性の高い計算結果を得る方法が考えられ、それには現在複雑化の一途を辿る高精度計算法とは異なる思考に基づく計算法の開発が重要である。

本稿では、Riemann 問題の厳密解(又はその近似)を利用する Godunov 法(又は Godunov 的方法)と Lax-Wendroff 法の幾何的解釈でもある特性曲線遡及法の組み合わせによる Euler 方程式の高精度差分計算法を得る新しい方法論を提案する。なお、その過程で Lax-Wendroff 法で生じる数値振動の抑制にスプライン補間関数の単調性を基準とする数値流束の切換(スイッチング)が有効である事も示す。

1. Godunov 差分近似及び Godunov 的差分近似

圧縮性 Euler 方程式(空間1次元)

$$U_t + F(U)_x = 0, \tag{1}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(e+p) \end{pmatrix},$$

(但し $p = (\gamma - 1)(e - \frac{1}{2}\rho u^2)$) を数値的に解くために、$x$-及び t-方向それぞれの差分幅を Δx Δt とし数値計算用の格子点系 $\{(i\Delta x, n\Delta t)\}_{i,n\ \text{は整数},n\geq 0}$ をとる。各格子点 $(i\Delta x, n\Delta t)$ は時刻 $t = n\Delta t$ における有限体積(区間)$((i-\frac{1}{2})\Delta x, (i+\frac{1}{2})\Delta x)$ を代表する点と考え、そこでの従属変数(物理量)U の代表値又はその近似値を U_i^n と記す。『差分近似』の語では各 U_i^n の集合 $\{U_i^n\}_{i,n\ \text{は整数},i\geq 0}$ 又はこの $\{U_i^n\}$ を定める手順(差分近似式)を意味する。

ここで厳密解 $U = U(x,t)$ について、時刻 $t = n\Delta t$ から $t = (n+1)\Delta t$ の間に隣接2体積 $((i-\frac{1}{2})\Delta x, (i+\frac{1}{2})\Delta x), ((i+\frac{1}{2})\Delta x, (i+\frac{3}{2})\Delta x)$ の境界 $x = \frac{1}{2}\Delta x$ を通過する流束の時間平均

$$(\bar{F}_{\text{exact}})^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} F(U((i+\frac{1}{2})\Delta x, t))dt$$

が得られるならば、

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda\left[(\bar{F}_{\text{exact}})^n_{i+\frac{1}{2}} - (\bar{F}_{\text{exact}})^n_{i-\frac{1}{2}}\right], \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{2}$$

によって、厳密な $\{U_i^n\}$ が得られる事となる。

実際の数値計算法では、各有限体積 $((i-\frac{1}{2})\Delta x, (i+\frac{1}{2})\Delta x)$ での変数 U の状況は各格子点 $(i\Delta x, n\Delta t)$ 上の U の近似値 U_i^n で与えられてしまう為に、厳密な $(\bar{F}_{\text{exact}})^n_{i+\frac{1}{2}}$ を得る事は不可能である。そこで、それらの近似値を用いて $(\bar{F}_{\text{exact}})^n_{i+\frac{1}{2}}$ を近似する数値流束 $\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$ を構成し保存型の差分近似

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda\left[\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}^n_{i-\frac{1}{2}}\right], \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{3}$$

を得る。

Godunov 差分近似 [2] では $\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$ の構成は次のように構成される。Riemann 問題

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U(x,0) = \begin{cases} U_L, x < 0 \\ U_R, x > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

の厳密解(厳密 Riemann 解)$U = U(x,t)$ は x/t に依存する解となるが、これを $U = W(x/t; U_L, U_R)$ と記す。そして

$$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = F(W(0; U_i^n, U_{i+1}^n)) \tag{5}$$

で各数値流束 $\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$ を構成すれば Godunov 差分近似を得る。ここで(5)で定める数値流束は、U_i^n と U_{i+1}^n の関数なので $\bar{F}^G(U_i^n, U_{i+1}^n)$ とも記す。

また、U_i^n, U_{i+1}^n から $\bar{F}^G(U_i^n, U_{i+1}^n)$ を導く過程を何らかの方法で近似して各数値流束 $\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$ を構成した場合にはその差分近似は Godunov 的差分近似と呼ばれる。

尚、初期値問題

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0 \\ U(x,0) = U_i^n, (i-\frac{1}{2})\Delta x < x < (i+\frac{1}{2})\Delta x \end{cases} \tag{6}$$

の解 $U=U^n(x,t)$ について、領域 $[(i-\frac{1}{2})\Delta x,(i+\frac{1}{2})\Delta x]\times[0,t]$ で Green の公式を適用して

$$\begin{aligned}U_i^n\cdot\Delta x&+F(W(0;U_i^n,U_{i+1}^n))\cdot\Delta t\\&-\int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x}U^n(x,\Delta t)dx\\&-F(W(0;U_{i-1}^n,U_i^n))\cdot\Delta t=0\end{aligned}\qquad(7)$$

となるが、これから

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta x}\int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x}U^n(x,\Delta t)dx\\&=U_i^n-\lambda\left\{F(W(0;U_i^n,U_{i+1}^n))\right.\\&\qquad\left.-F(W(0;U_{i-1}^n,U_i^n))\right\}\end{aligned}\qquad(8)$$

が得られ、(3) が Godunov 差分近似であれば、

$$U_i^{n+1}=\frac{1}{\Delta x}\int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x}U^n(x,\Delta t)dx\qquad(9)$$

であることが分かる。つまり、Godunov 差分近似を次のように解釈してもよい。

(G0) 時刻 $t=n\Delta t$ での差分近似の値 $\{U_i^n\}_{i\,\text{は整数}}$ から、各有限体積上で一定値である階段関数を初期値とする初期値問題 (6) を仮定し、

(G1) 初期値問題 (6) を Δt だけ時間発展させ、

(G2) 各有限体積上で U の平均値をとってそれを各 U_{i+1}^n とする。

この解釈によれば、適切な初期値 $\{U_i^0\}_{i\,\text{は整数}}$ が与えられたとしても、厳密 Riemann 解を利用する Godunov 差分近似であっても (G2) の平均化により厳密な時間発展との誤差が生じ、これが数値計算の誤差を生じさせる事を容易に想像し得る。

2. 特性曲線遡及法

線形のスカラー保存則

$$u_t+f(u)_x=0,\ f(u)=c\cdot u\qquad(10)$$

について考える。先に圧縮性 Euler 方程式 (1) に対して行ったと同様に差分格子等を定め差分近似 $\{u_i^n\}_{i,n\,\text{は整数},i\geq 0}$ を考える。$x=(i+\frac{1}{2})\Delta x$ を時刻 $t=n\Delta t$ から $t=(n+1)\Delta t$ までに通過する流束の平均の近似値である数値流速 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ を初期値問題

$$\begin{cases}u_t+c\cdot u_x=0\\ u(x,0)=\dfrac{u_{i+1}^n-u_i^n}{\Delta x}(x-i\Delta x)+u_i^n\end{cases}\qquad(11)$$

の厳密解

$$\begin{aligned}u=u(x,t)&=u(x-ct,0)\\&=\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{\Delta x}(x-ct-i\Delta x)+u_i^n\end{aligned}\qquad(12)$$

を用いて

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}f(u((i+\tfrac{1}{2})\Delta x,t))dt\qquad(13)$$

により定める。

$$\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n=c\cdot\left\{\frac{u_i^n+u_{i+1}^n}{2}-\frac{1}{2}\lambda c(u_{i+1}^n-u_i^n)\right\}\qquad(14)$$

及び

$$\begin{aligned}\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n=&\tfrac{1}{2}\left\{f(u_i^n)+f(u_{i+1}^n)\right\}\\&-\tfrac{1}{2}\lambda\left(\tfrac{f(u_{i+1}^n)-f(u_i^n)}{u_{i+1}^n-u_i^n}\right)^2(u_{i+1}^n-u_i^n)\end{aligned}\qquad(15)$$

が容易に得られる。(15) からこの数値流束 $\bar{f}_{i+\frac{1}{2}}^n$ が Lax-Wendroff 差分近似 [5] の数値流束であることが分かる。また、(14) からは時刻 $t=n\Delta t$ における $x=i\Delta x$ での u の近似値 u_i^n と $x=(i+1)\Delta x$ での u の近似値 u_{i+1}^n が定める線形補間

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^n(x)=\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{\Delta x}(x-i\Delta x)+u_i^n\qquad(16)$$

をとり、x-t 平面上の $x=(i+\frac{1}{2})\Delta x$ における $t=n\Delta t$ と $t=(n+1)\Delta t$ の中間点 $t=(n+\frac{1}{2})\Delta t$ から特性曲線 $\frac{dx}{dt}=f'\equiv c$ に沿って時間 t を $t=n\Delta t$ まで溯った点 $((i+\frac{1}{2})\Delta x-\frac{1}{2}c\Delta t,n\Delta t)$ での x の値

$$x_{i+\frac{1}{2}}^n=(i+\tfrac{1}{2})\Delta x-\tfrac{1}{2}c\Delta t\qquad(17)$$

を線形補間に代入して得られた値

$$\begin{aligned}u_{i+\frac{1}{2}}^n&=\hat{u}_{i+\frac{1}{2}}^n(x_{i+\frac{1}{2}}^n)\\&=\frac{u_i^n+u_{i+1}^n}{2}-\frac{1}{2}\lambda c(u_{i+1}^n-u_i^n)\end{aligned}\qquad(18)$$

を流束関数 $f(u)=c\cdot u$ に代入して数値流束を得ている事が分かる。

通常、Lax-Wendroff 差分近似は数値粘性を 2 次の打切誤差を得られるように決定するものとして導かれるが、上の議論から、特性曲線の遡及により幾何的に定められる点 (18) における流束関数

fの値を数値流束とする差分近似としても解釈できる[1]。即ち、

$$\begin{aligned}\bar f^n_{i+\frac12} &= \bar f^{LW}(u_i^n, u_{i+1}^n)\\ &= f\left(\frac{u_i^n+u_{i+1}^n}{2} - \frac12\lambda\frac{f(u_{i+1}^n)-f(u_i^n)}{u_{i+1}^n-u_i^n}(u_{i+1}^n-u_i^n)\right)\end{aligned} \tag{19}$$

(10) において流束関数 $f(u)$ が非線形である非線形スカラー保存則についても、上記の Lax-Wendroff 差分近似に対する幾何的解釈が成立する。

3. スプライン補間関数の単調性による数値流束の切換

引き続きスカラー保存則 (線形に限らない)

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{20}$$

の差分近似の考察を継続する。Godunov の差分近似の数値流束を $(\bar f^G)^n_{i+\frac12} = \bar f^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$ で表す[2]。

[1] Lax-Wendroff 法として認識される差分近似には何種類かの記述があり、それらの数値流束の間には $O(\Delta^2)$ の違いがある。つまり (19) で定められる数値流束$\bar f^{LW}(u_i^n, u_{i+1}^n)$ から $O(\Delta^2)$ のずれが許容されている。

[2] スカラー保存則の場合、Godunov の数値流束の一般的な公式は次のようになる。

先ず、u_i^n と u_{i+1}^n を両端とする閉区間 $I^n_{i+\frac12} = [\min(u_i^n, u_{i+1}^n), \max(u_i^n, u_{i+1}^n)]$ 上の関数 $f^n_{i+\frac12}(s)$ を次で定める。

1. $u_i^n \le u_{i+1}^n$ の場合には、
   1) $g(s) \le f(s), s \in I^n_{i+\frac12}$,
   2) $g(\theta s_1 + (1-\theta)s_2) \le \theta g(s_1) + (1-\theta)g(s_2), s_1, s_2 \in I^n_{i+\frac12}, t \in [0,1]$

   を満たす関数 $g(s), s \in I^n_{i+\frac12}$ の内の極大のものを $f^n_{i+\frac12}(s)$ とする。即ち、上を満たす任意の $g(s)$ について $f^n_{i+\frac12}(s) \ge g(s), s \in I^n_{i+\frac12}$.
2. $u_i^n \ge u_{i+1}^n$ の場合には、
   1) $g(s) \ge f(s), s \in I^n_{i+\frac12}$,
   2) $g(\theta s_1 + (1-\theta)s_2) \ge \theta g(s_1) + (1-\theta)g(s_2), s_1, s_2 \in I^n_{i+\frac12}, t \in [0,1]$

   を満たす関数 $g(s), s \in I^n_{i+\frac12}$ の内の極小のものを $f^n_{i+\frac12}(s)$ とする。即ち、上を満たす任意の $g(s)$ について $f^n_{i+\frac12}(s) \le g(s), s \in I^n_{i+\frac12}$.

次にこの関数$f^n_{i+\frac12}(s)$ を利用して

$$\bar f^G(u_i^n, u_{i+1}^n) = \begin{cases} \min_{s\in I^n_{i+\frac12}} f^n_{i+\frac12}(s), & u_i^n \le u_{i+1}^n \text{の場合} \\ \max_{s\in I^n_{i+\frac12}} f^n_{i+\frac12}(s), & u_i^n \ge u_{i+1}^n \text{の場合} \end{cases} \tag{21}$$

とすれば、Godunov 差分近似の数値流束$\bar f^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$ を得る事ができる。

保存型差分近似

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda\left(\bar f^n_{i+\frac12} - f^n_{i-\frac12}\right) \tag{22}$$

の全て数値流束を$\bar f^n_{i+\frac12} = \bar f^{LW}(u_{i+1}^n, u_i^n)$ ととる Lax-Wendroff 差分近似では数値計算結果に振動が生じる事が知られている。一般に全ての場所において打切誤差を 2 次以上の高次精度に保った場合に差分近似に振動が生じる事が知られている。そこで、振動の抑制の為に勾配が大きい部分や勾配が急変化する部分では打切誤差を 1 次精度として振動を回避する方法が取られる。ここでは、スプライン補間関数を用いる次の方法を提案する。

1. 2 次関数 $q_i^n(x) = a_i^n x^2 + b_i^n x + c_i^n$ を

   $$q_i^n(j\Delta x) = u_j^n, j = i-1, i, i+1$$

   が満足されるように定める。

2. $q_i^n(x)$ が $(i-1)\Delta x \le x \le (i+1)\Delta x$ で単調であり、かつ $q_{i+1}^n(x)$ が $i\Delta x \le x \le (i+2)\Delta x$ で単調である場合には

   $$\bar f^n_{i+\frac12} = \bar f^{LW}(u_i^n, u_{i+1}^n)$$

   とする。そうでない場合には

   $$\bar f^n_{i+\frac12} = \bar f^G(u_i^n, u_{i+1}^n)$$

   とする。

次の定理が成り立つ。

定理 1 CFL 条件として$\lambda \cdot \sup|f'| \le \frac12$を仮定する。上の方法で定められた保存型差分近似 (22) は TVD(全変動減少) 性を有する。即ち、全ての非負整数 n について

$$\sum_i \left|u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\right| \le \sum_i \left|u_{i+1}^n - u_i^n\right|. \tag{23}$$

この方法による、Lax-Wendroff 差分近似の TVD 化について次の事に注意する。

1. スプラインのどちらかが極値を有するようになった途端に数値流束$\bar f^n_{i+\frac12}$が$\bar f^{LW}$から$\bar f^G$に変化するので、数値流束$\bar f^n_{i+\frac12}$の u_i^n, u_{i+1}^n に対する依存性が連続でない部分が生じる。この移

行を滑らかにするような修正法は考え得るが、この定義のように移行が不連続であっても計算例において特に不都合は発見されていない。

元来、この非連続的な移行の生じる部分は解の特異性が強い部分なので、それほどの影響が生じないと推測される[3]。

2. この方法では数値流束$\bar{f}^n_{i+\frac{1}{2}}$の$\bar{f}^{LW}$と$\bar{f}^{G}$の間での切換には$u^n_i, u^n_{i+1}$の他に$u^n_{i-1}$や$u^n_{i+2}$も用いられるが、$\bar{f}^{LW}$と$\bar{f}^{G}$ともそれ自体は$u^n_i, u^n_{i+1}$の2つにしか依存しない。他の精度切換 (リミッティング又はスイッチング) においては、切換による場合分けが済んだ段階 (プログラムの観点からは、最終的に数値流束$\bar{f}^n_{i+\frac{1}{2}}$を求める計算式が決定して計算を実行する段階) でもu^n_i, u^n_{i+1}の他にu^n_{i-1}やu^n_{i+2}が必要とされる事が多い。

   数値計算の不都合の生成機構を解明する場合には、数値流束$\bar{f}^n_{i+\frac{1}{2}}$の最終的な定義が$u^n_i, u^n_{i+1}$にのみ依存する事は大きな利点となる。

4. Godunov 差分近似の高精度化

上で構成されたLax-Wendroff差分近似のTVD化を圧縮性Euler方程式等の非線形保存則の系に適用する場合にはいくつかの問題点が生じる[4]。

1. スカラー保存則の場合は特性曲線遡及法によって求められる点は (17) の定める$x^n_{i+\frac{1}{2}}$のみであるが、2以上の方程式からなる系の場合には特性曲線が複数あるので、このような点は特性曲線の本数分だけ求められる。方程式系が変数変換により各単独変数ごとの独立な方程式に分解されれば、特性曲線遡及法で求められたこれらの点を各単独変数の線形補間 (上の (16) と同様に定められる) と組み合せて使えるが、非線形の場合には不可能である。

2. 非線形の場合、(16) に相当する線形補間についてもどのような変数について行うかが問題となる。実際、圧縮性Euler方程式の場合、保存変数$(\rho, \rho u, e)$で行うか物理変数(ρ, u, p)で行うかは、線形補間や2次関数補間を用いる他の方法 (MUSCL法 [6] など) でも議論がしばしば行われる所となっている

ここでは1の問題点を回避する為に、Euler方程式に等エントロピーの仮定を入れた線形化[5]を行い (線形退化する場に対応する特性曲線を消去し、真性非線形な場に対応するものの2つにできる。)、特性曲線遡及法によって得られる2つの点における線形補間の値を組み合せる為にGodunov法を採用する。等エントロピーの仮定に関しては、高次精度性を要求する滑らかな現象の部分においては妥当なものであると考えられる。(そうでない場所では、スイッチングによって高次精度化から除外される事が期待される。) また、2の問題点については、物理変数を用いる事とする。

即ち、U^n_iとU^n_{i+1}から数値流束$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$を定めるアルゴリズムは次のようになる。

1. 各$U^n_i = \begin{pmatrix} \rho^n_i \\ (\rho u)^n_i \\ e^n_i \end{pmatrix}$について、$u^n_i = \dfrac{(\rho u)^n_{i+\frac{1}{2}}}{\rho^n_{i+\frac{1}{2}}}$, $p^n_i = (\gamma - 1)\left(e - \dfrac{1}{2}\rho u^2\right)$とする。各$i$について、スプライン関数

   $$\begin{aligned} &(\rho_{\mathrm{spline}})^n_i(x), x \in [(i-1)\Delta x, (i+1)\Delta x] \\ &(u_{\mathrm{spline}})^n_i(x), x \in [(i-1)\Delta x, (i+1)\Delta x] \\ &(p_{\mathrm{spline}})^n_i(x), x \in [(i-1)\Delta x, (i+1)\Delta x] \end{aligned}$$

   を$(\rho_{\mathrm{spline}})^n_i(j\Delta x) = \rho^n_j, (u_{\mathrm{spline}})^n_i(j\Delta x) = u^n_j, (p_{\mathrm{spline}})^n_i(j\Delta x) = p^n_j \ (j = i-1, i, i+1)$を満たすように定め、それぞれの$i$について6つのスプライン関数$(\rho_{\mathrm{spline}})^n_i$, $(\rho_{\mathrm{spline}})^n_{i+1}$, $(u_{\mathrm{spline}})^n_i$, $(u_{\mathrm{spline}})^n_{i+1}$, $(p_{\mathrm{spline}})^n_i$, $(p_{\mathrm{spline}})^n_{i+1}$

---

[3] この不連続性を修正した場合には、次の2に述べる利点を失ってしまう事にも注意する。

[4] 非線形保存則の系に拡張された場合、TVD性又はその理論的な拡張が定義できない。TVD性という部分に関しては「スカラーの場合にはTVD性により数値振動が除去されるので、式の拡張を巧く行えば系の場合にも数値振動の抑制が期待できる」という形の推測にしかならない。

[5] $\dfrac{p}{\rho^\gamma}$ = 定数の仮定により、圧縮性Euler方程式 (1) は

$$\begin{cases} u_t + u u_x + \dfrac{c^2}{\gamma p} p_x = 0 \\ p_t + \gamma p u_x + u p_x = 0 \end{cases} \tag{24}$$

となり (cは音速、即ち$c^2 = \dfrac{\gamma p}{\rho}$)、これを適当な$u = u_0, p = p_0, c = c_0$で線形化すれば、係数行列は$\begin{pmatrix} u_0 & \frac{(c_0)^2}{\gamma p_0} \\ \gamma p_0 & u_0 \end{pmatrix}$となり、その固有値 (即ち、方程式の特性速度) は$u_0 \pm c_0$となる。

が全て単調である場合には、3 以降の手順に進む。そうでない場合には Godunov 差分近似の数値流束をとり

$$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}^G(U^n_i, U^n_{i+1})$$

とする。

3. $\rho^n_{i+\frac{1}{2}} = \rho^n_i + \rho^n_{i+1}$, $u^n_{i+\frac{1}{2}} = u^n_i + u^n_{i+1}$, $p^n_{i+\frac{1}{2}} = p^n_i + p^n_{i+1}$, $c^n_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ とし、ρ, u, p の補間線形関数

$$\hat{\rho}^n_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{\rho^n_{i+1} - \rho^n_i}{\Delta x}(x - i\Delta x) + \rho^n_i,$$
$$\hat{u}^n_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{u^n_{i+1} - u^n_i}{\Delta x}(x - i\Delta x) + u^n_i,$$
$$\hat{p}^n_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{p^n_{i+1} - p^n_i}{\Delta x}(x - i\Delta x) + p^n_i$$

を定める。

4. 2 つの特性速度として $u^n_{i+\frac{1}{2}} \pm c^n_{i+\frac{1}{2}}$ をとり、特性曲線遡及法で

$$x^n_{i+\frac{1}{2},-} = (i + \tfrac{1}{2})\Delta x - \tfrac{1}{2}(u^n_{i+\frac{1}{2}} + c^n_{i+\frac{1}{2}})\Delta t$$
$$x^n_{i+\frac{1}{2},+} = (i + \tfrac{1}{2})\Delta x - \tfrac{1}{2}(u^n_{i+\frac{1}{2}} - c^n_{i+\frac{1}{2}})\Delta t$$

をとる。これから $\rho^n_{i+\frac{1}{2},\pm} = \hat{\rho}^n_{i+\frac{1}{2}}(x^n_{i+\frac{1}{2},\pm})$, $u^n_{i+\frac{1}{2},\pm} = \hat{u}^n_{i+\frac{1}{2}}(x^n_{i+\frac{1}{2},\pm})$, $p^n_{i+\frac{1}{2},\pm} = \hat{p}^n_{i+\frac{1}{2}}(x^n_{i+\frac{1}{2},\pm})$ として $U^n_{i+\frac{1}{2},\pm} = \begin{pmatrix} \rho^n_{i+\frac{1}{2},\pm} \\ \rho^n_{i+\frac{1}{2},\pm} u^n_{i+\frac{1}{2},\pm} \\ e^n_{i+\frac{1}{2},\pm} \end{pmatrix}$ (但し、$e^n_{i+\frac{1}{2},\pm} = \frac{1}{2}\rho^n_{i+\frac{1}{2},\pm}(u^n_{i+\frac{1}{2},\pm})^n + \frac{1}{\gamma-1}p^n_{i+\frac{1}{2},\pm}$) を定める。

5. Godunov 差分近似の流束を定める関数 F^G を用いて、

$$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}^G(U^n_{i+\frac{1}{2},-}, U^n_{i+\frac{1}{2},+})$$

として数値流束 $\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$ を定める。

Godunov 差分近似の数値流束の代わりに、Godunov 的差分近似の数値流束を用いても同様の方法論が適用できる。

5. まとめ

本稿では、特性曲線遡及法と Godunov 法を組み合せて Euler 方程式の差分近似を高精度化する方法論の紹介を行った。理論的に証明がなされている部分はスカラー保存則における Lax-Wendroff 差分近似の TVD 化の部分のみである。直感的に分かりやすい方法でもあるので理論的な解析の進展が望まれる。

また、特性曲線の高精度化への利用は特にロシアでは盛んに行われたようであるが、([1] に比較的よくまとめられている。) 文献検索の不便さから殆ど紹介されていない。今後、関連する諸方法論についての研究状況を総括する事も重要であると思われる。

参考文献

1) O.M. Belotserkovsky. *Mathematical Modelling in Informatics: Numerical Solution in the Mechanics of Continuous Media.* , 1997. ISBN 5 8122-0026-2.

2) S. K. Godunov. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics (in Russian). *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 47, pp. 251 306, 1959.

3) A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, Vol. 49, pp. 357 393, 1983.

4) A. Harten. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 21, No. 1, pp. 1 23, 1984.

5) P. D. Lax and B. Wendroff. Systems of conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 13, pp. 217 237, 1960.

6) B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 32, pp. 101 136, 1979.