

マッハ10で飛行するスペースプレーン周りの数値シミュレーション

真鍋圭司*1、瀬崎新士*2、西尾正富*1

Numerical Simulation of Flowfield Around Space Plane Traveling at Mach 10

by

Keiji MANABE, Shinji SEZAKI and Masatomi NISHIO

ABSTRACT

The numerical simulation around a space plane traveling at the speed of Mach 10 was carried out based on FEM (Finite Element Method). In this FEM formulation, stress (pressure) term is partially integrated in an element by applying the weighted residual method, and the hypersonic flowfield around a space plane model including shock wave can be calculated. 3-dimensional simulations were conducted for the case of the angle of attack is 0 and 10 degree. The simulation results are compared with experimental results obtained by the electric discharge method, and good correlation between them was found.

1. はじめに

極超音速飛翔体周りの流れの解明は、スペースプレーンなどの飛翔体形状の設計や宇宙開発を進める上で非常に重要である。著者らの一人によって開発された放電発光法⁽⁴⁾は、極超音速流のほとんど全ての流動現象を可視化、計測することが可能な方法であり、種々の現象が解明されてきた。この方法は、三次元流れ場の可視化も可能であるという特徴を有する。

一方、近年の計算機環境の発達を背景に、CFD (Computational Fluid Dynamics)による計算機シミュレーションが多く行われている。現在、衝撃波を含む極超音速飛翔体周りのシミュレーションの主流は差分法であり、スペースプレーン周りの流れの三次元計算例も示されている⁽⁵⁾。差分法に対し、有限要素法 (FEM) は固体の変形解析などの分野で、その有用性が認められている。

本報告では、有限要素法により極超音速飛翔体周りの流れの計算を行った結果について報告する。マッハ10で飛行するスペースプレーンの周りの流れ場をFEMを用いて3次元シミュレーションを行った。また、放電発光法による実験結果と計算結果を比較し、手法の妥当性を検討した。

2. 有限要素計算手法

有限要素法 (FEM) は、差分法と比較して、計算メッシュを自由に作成できることや、定式化が容易で汎用性があるなどの利

点を有する。まず最初に、今回開発したFEMシミュレーション手法の概要を述べる。

圧縮性流体の支配方程式は保存形式で次のようにまとめることができる。なお、本文中の式の下添字にはテンソル表記の総和規約を適用する。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

ここで、 U 、 F_i 、 G_i は次の値を取る。

$$\left. \begin{aligned} U &= \langle \rho \quad \rho u_x \quad \rho u_y \quad \rho u_z \quad \rho e \rangle \\ F_i &= u_i U \\ G_i &= \langle 0 \quad \sigma_{ix} \quad \sigma_{iy} \quad \sigma_{iz} \quad u_m \sigma_{mi} - q_i \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ρ は密度、 u_i は速度、 e は単位質量あたりのエネルギーである。また、 σ_{ij} は応力であり、圧力 p と次の関係がある。

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - p \delta_{ij} \quad (3)$$

τ_{ij} は粘性応力 (偏差応力)、 δ_{ij} はクロネッカーデルタである。また、 q_i は熱流速である。

式(1)は、括弧<>の順番でそれぞれ、質量、 x 、 y 、 z 方向の運動量、エネルギーの保存則を表す。

通常よく行われる定式化⁽⁶⁾では、圧力 p は F_i に含ませ、 G_i は粘性応力 τ_{ij} のみ考えるが、本研究の定式では、圧力 p を G_i に服編ませた。理由は後述するが、その処理が、本手法の特徴である。

*1 福山大学工学部機械工学科

*2 福山大学工学部機械工学科院生

次に、重み付き残差法 (Galerkin 法) に基づいた FEM 定式を行う。いま、解析対象 V の表面 S_U , S_P 上で、境界条件として次式を考える。

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} & S_U \text{ 上で} \\ G_i n_i &= \bar{P} & S_P \text{ 上で} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 n_i は表面の外向き単位法線ベクトル (方向余弦) である。 S_U 上で 0 となる重み関数 w を式(1)に乗じて解析領域 V で積分し、部分積分を行うと次式となる。なお、表記 x_i は、通常のとおり、 $i=1,2,3$ の順番に対応して、座標 x , y , z を表す。

$$\begin{aligned} \int_V w \frac{\partial U}{\partial t} dV &= - \int_V w \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dV - \int_V \frac{\partial w}{\partial x_i} G_i dV \\ &+ \int_{S_P} w \bar{P} dS \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)の右辺第2項のように、応力 (圧力) を含む項 G_i が座標 x_i による微分の形となっていない。これが、前述の圧力 p を G_i に分離した理由であり、この処理によって衝撃波が安定的に計算できるようになった。

このように応力の微分の項を部分積分 (Gauss の発散定理) によって非微分形とする方法は、弾性解析、塑性解析などの固体の変形解析に用いられる方法である。

次に、離散化処理を行う。いま、要素内の変数 U , F_1 , F_2 を内挿関数 (形状関数) N を用い節点の値を縦に並べた列ベクトル $\{U\}$, $\{F_1\}$, $\{F_2\}$ によって次のように表す。

$$\begin{aligned} U &= \{N\}^T \{U\} \\ F_i &= \{N\}^T \{F_i\} \\ G_i &= \{N\}^T \{G_i\} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、上添字 T は転置を表す。本計算で用いた六面体要素の場合、1 要素に 8 つの節点があるから、 $\{N\}$, $\{U\}$, $\{F_1\}$, $\{F_2\}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{N\}^T &= \{N^{(1)} \quad N^{(2)} \quad \dots \quad N^{(8)}\} \\ \{U\}^T &= \{U^{(1)} \quad U^{(2)} \quad \dots \quad U^{(8)}\} \\ \{F_i\}^T &= \{F_i^{(1)} \quad F_i^{(2)} \quad \dots \quad F_i^{(8)}\} \\ \{G_i\}^T &= \{G_i^{(1)} \quad G_i^{(2)} \quad \dots \quad G_i^{(8)}\} \end{aligned} \quad (7)$$

上添え字の (i) は、1 つの要素周りの節点の番号である。

また、重み関数 w も同様に内挿関数 ϕ を用いて節点の値で表す。

$$w = \{\phi\}^T \{w\} \quad (8)$$

ここで、(13)と同様に六面体要素の場合、

$$\begin{aligned} \{\phi\}^T &= \{\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \dots \quad \phi^{(8)}\} \\ \{w\}^T &= \{w^{(1)} \quad w^{(2)} \quad \dots \quad w^{(8)}\} \end{aligned} \quad (9)$$

一方、 N , ϕ は座標 x_i の関数だから、変数の微分係数は内挿関数の微分で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x_k} \{F_i\} \\ \frac{\partial w}{\partial x_k} &= \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x_k} \{w\} \end{aligned} \quad (10)$$

これらを式 (5) に代入して整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_A \{\phi\} \{N\}^T dV \frac{\partial \{U\}}{\partial t} &= \\ - \int_A \{\phi\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x_i} dV \{F_i\} &+ \int_A \frac{\partial \{\phi\}}{\partial x_i} G_i dV + \int_{S_P} \{\phi\} \bar{p} dS \end{aligned} \quad (11)$$

流体の計算では上流化を考慮する必要がある。上流化の手法として、SUPG 法を用いた。SUPG 法では、重み関数 w の内挿関数 ϕ として、次式を用いる。

$$\{\phi\} = \{N\} + T \left(u_k \frac{\partial \{N\}}{\partial x_k} \right) \quad (12)$$

T は定数である。

また、式(11)の左辺の係数を対角化した。すなわち、行列

$$\int_A \{\phi\} \{N\}^T dV \text{ の各行を対角項に足し合わせて対角行列にした。}$$

その場合、変数 U の時間積分に対して陽解法を適用すれば連立方程式を解く必要がなくなり、3次元計算のような大規模な計算を小メモリーで行うことができる。

さらに、 G_i の項に関して人工散逸項を付加し、計算の安定化を行った。

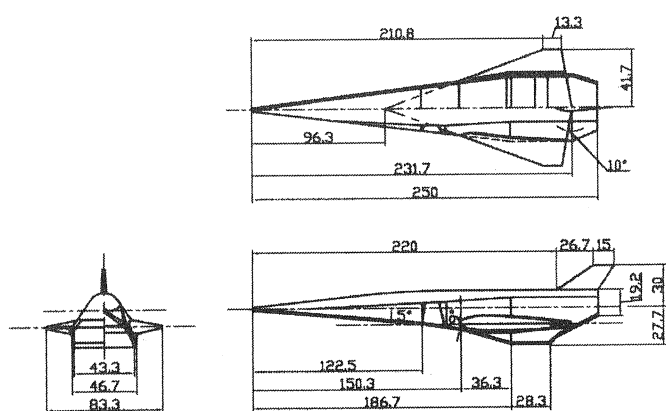


図1 スペースプレーン模型の概要

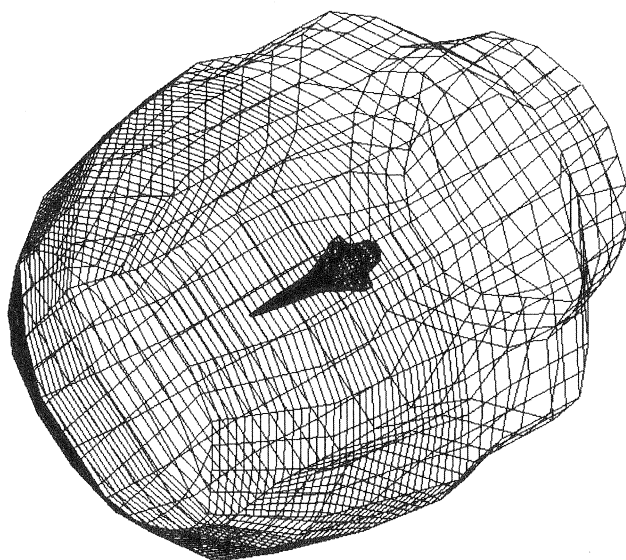
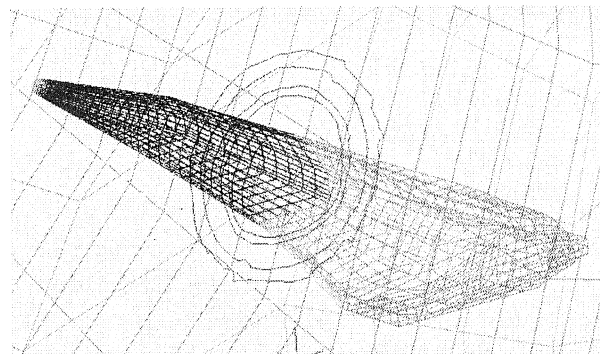
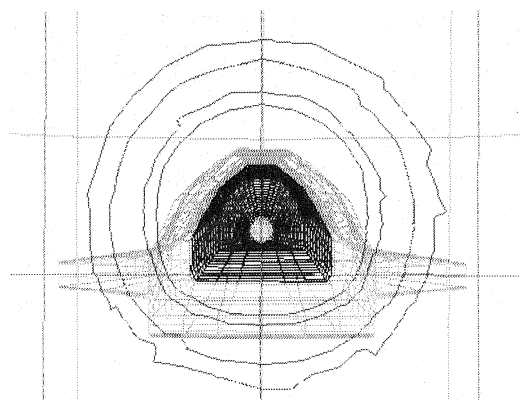


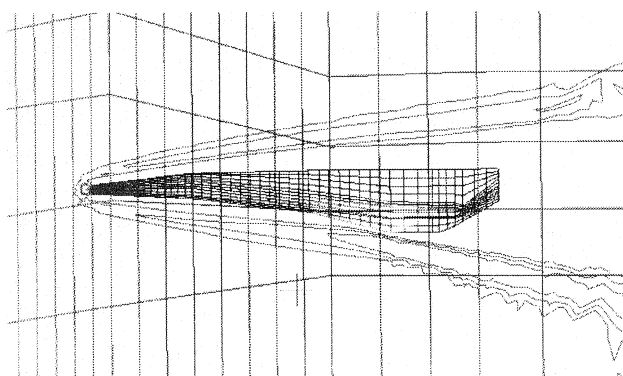
図2 計算メッシュ例



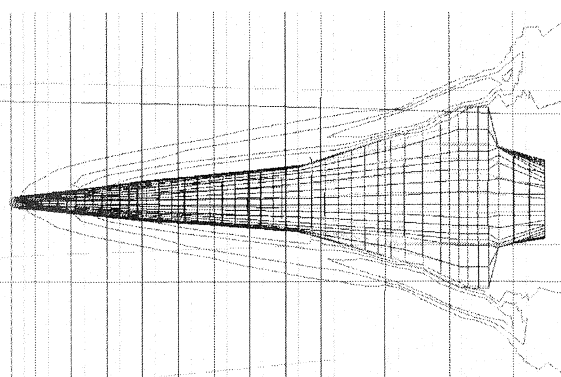
(a-1) 前方から眺めた場合(1)



(a-2) 前方から眺めた場合(2)



(b) 側方から眺めた場合



(c) 上方から眺めた場合

3. 計算モデルおよび計算条件

図1に、スペースプレーン模型の概要を示す。これに基づき、有限要素メッシュを作成した。本計算に用いた有限要素メッシュを図2に示す。このモデルでは、節点数40612、要素数39000である。

計算は放電発光法による実験条件と同条件に設定した。すなわち、マッハ数1.0であり、静圧 $p_\infty=70\text{ Pa}$ 、密度 $\rho_\infty=4.5 \times 10^{-3}\text{ kg/m}^3$ 、速度 $v_\infty=1500\text{ m/s}$ である。

また、粘性係数はサザーランドの公式により算出した。

図3 迎え角 0° の場合の密度分布

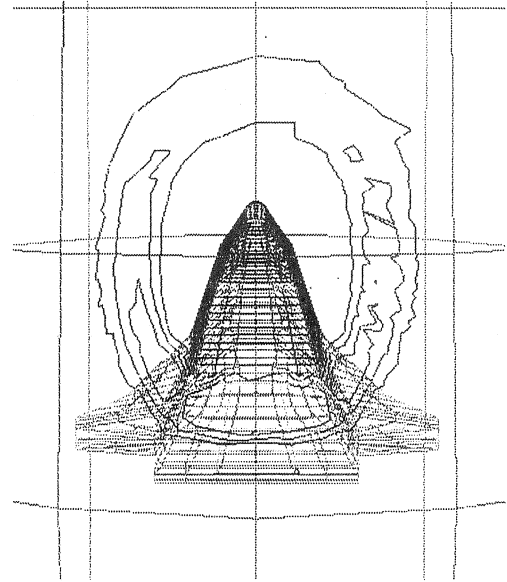
4. 計算結果および考察

図3に、迎え角 0° の場合の密度分布を示す。図は、密度 ρ/ρ_∞ の値が1.1, 1.5, 2.0の線をプロットしたものである。スペースプレーン周りに密度分布が集中する部分が認められ、衝撃波に対応しているものと考えられる。三次元シミュレーションであるので、前方、側方など、任意の方向から観察可能である。しかしながら、本計算は、コンピューター環境の問題から比較的粗いメッシュで行ったため、衝撃波が幅を持って計算されている。

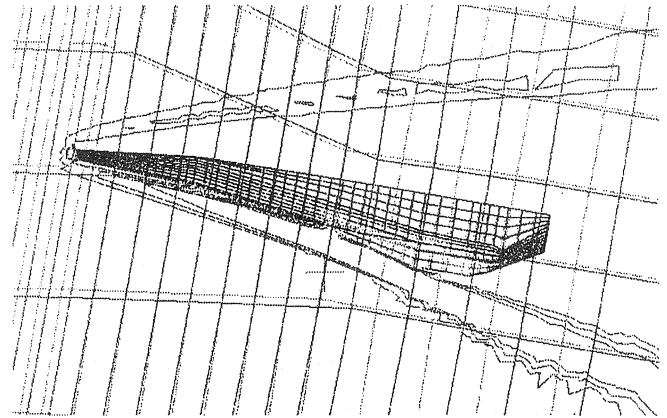
図4に迎え角が 10° の場合の密度分布を示す。図3と同様、衝撃波が密度分布の集中している部分として計算されている。

図3および図4の側方から眺めた図において、放電発光法による実験結果と比較したが、衝撃波形状は、比較的よい対応関係が認められた。

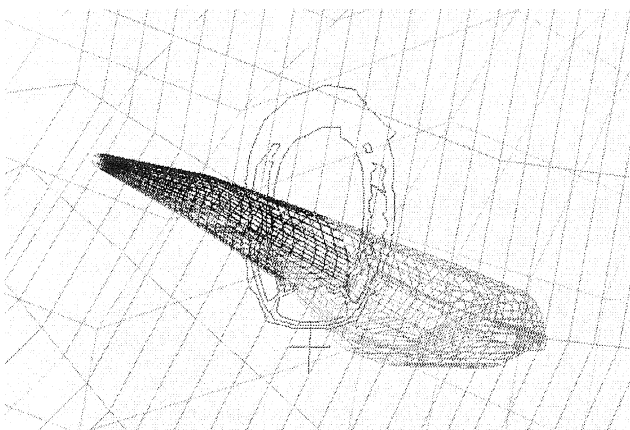
この放電発光法は、三次元流れ場の可視化も可能であるという特徴を有する。図5に、スペースプレーン模型の後方から眺めた図において、衝撃波を可視化した結果を、計算値、実験値と対応させて示す。計算は前述のように、粗いメッシュで行ったため、衝撃波がシャープでないが、全体的に実験と対応していると思われる。



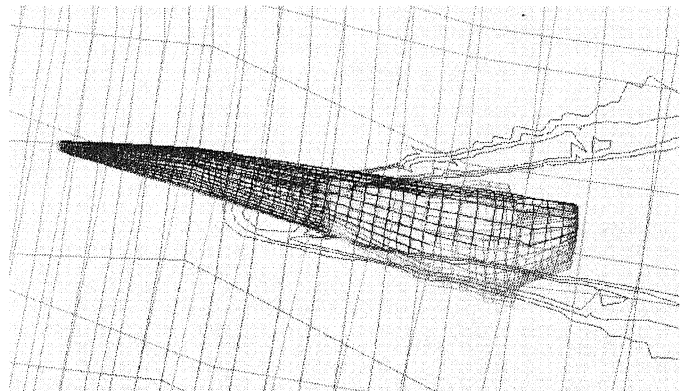
(a-2) 前方から眺めた場合(2)



(b) 側方から眺めた場合



(a-1) 前方から眺めた場合(1)



(c) 斜め上方から眺めた場合

図4 迎え角 10° の場合の密度分布

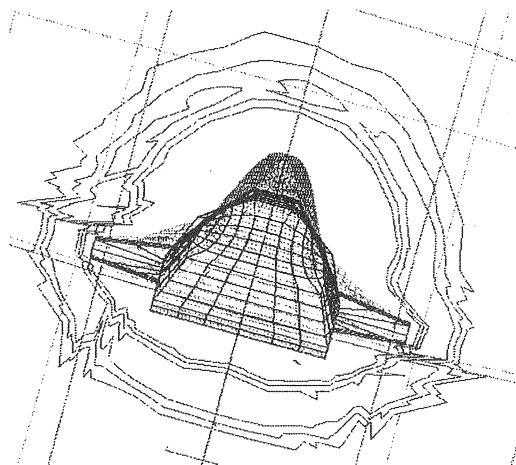
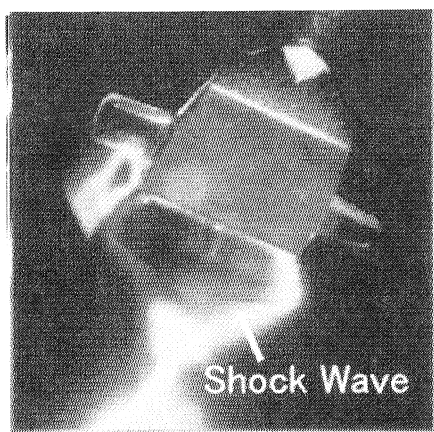
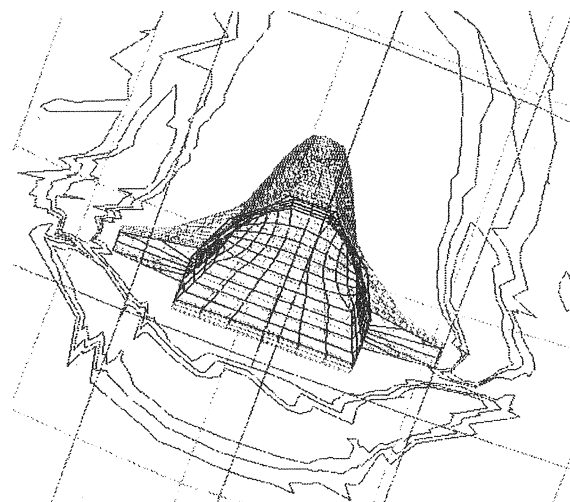
(a) 実験結果 (迎え角 0°)(b) 計算結果 (迎え角 0°)(a) 実験結果 (迎え角 10°)(b) 計算結果 (迎え角 10°)

図5 実験結果と計算結果の比較

5. おわりに

マッハ10で飛行するスペースプレーンの周りの流れを、有限要素法 (FEM) によって計算した。圧力に関する項を部分積分し、圧力の空間微分の計算を不要とし、その処理によって、衝撃波が安定的に計算されるようになった。スペースプレーンの周りに生じる衝撃波の様子が3次元で計算された。計算結果は、放電発光法による計算結果と対応関係が認められた。

参考文献

(1) Nishio, M. and Hagiwara, T., "Hypersonic Flowfield Analysis of an X-33 Model with the Electric Discharge Method," AIAA Journal of Space Craft and Rockets, Vol.36, No.6, 1999.

(2) 西尾, 小竹, 井藤, 萩原, 松岡: 次世代スペースシャトル試験機 X-33 周りの流れの放電発光法による可視化, 日本航空宇宙学会論文集 Vol.47, No.544, 1999, 210.

(3) Nishio, M. and Hagiwara, T., "Investigation of Flowfield Around Hypersonic X-33 Model by Electric Discharge Method," AIAA Paper 98-1576.

(4) 真鍋, 瀬崎, 西尾: マッハ10で飛行するスペースプレーン周りの流動場の解析, 日本機械学会中国四国支部第39期総会・講演会講演論文集(2001), 201.

(5) 山本, 伊藤: 再使用ロケット、スペースプレーンの遷超、極超音速流 CFD 解析, 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム'99 論文集(1999), 135.

(6) 圧縮性流体解析, 数値流体力学編集委員会編, 東京大学出版会(1995)