

境界層遷移予測に対する速度分布計算精度の影響

跡部 隆, 航技研

Effect of Accuracy of Velocity Profile on Transition Prediction of Boundary Layer

by

Takashi Atobe, NAL

ABSTRACT

The effect of accuracy of boundary layer calculations on the prediction of laminar-turbulent transition of boundary layer is examined by comparing the two scheme of boundary layer calculations, using a similarity equation and a Navier-Stokes code. The flow field is a boundary layer around an NACA0015 wing model. The Orr-Sommerfeld equations are used for the local stability analysis and the N factor of the e^N method is used for a criterion. From the present study a slight difference of velocity profiles causes a significant difference of an end result.

1. はじめに

流れのなかに置かれた物体表面には境界層と呼ばれるごく薄い層が存在し、ポテンシャル流で近似される外側の流れと個体壁とを矛盾無く接続する物理的に大変重要な領域がある。この境界層は流体の乱れ成分がほとんど無い層流状態と、時間的にも空間的にも大きく乱れた乱流状態とに分けられ、それぞれ層流境界層と乱流境界層と呼ばれ区別される。そして乱流境界層は層流境界層に比べ摩擦抵抗が極端に大きくなることが知られている。

境界層の層流状態から乱流状態への変化は境界層遷移と呼ばれ、比較的短い間に発生する。境界層遷移を引き起こす主な原因としては、速度分布や圧力分布などのわずかな歪みや、物体表面の粗さなどが考えられる。主流中に内在する微小な攪乱波がこれらの非一様性によって不安定化し、その振幅がある有意な大きさまで増幅したとき遷移が発生すると考えるのが一般的である。このような観点から考えるとき、攪乱波のふるまいを波動論的立場で記述し境界層遷移を議論することは自然であり、事多くの現象の説明に成功している。

境界層遷移の発生位置の予測は、揚抗比向上が至上命題である航空機の設計開発分野では特に重要な課題であり、これまでも様々な手法で試みられてきた¹⁾。特に近年では計算機の発達に伴って境界層遷移を数値的に予測する方法がいくつか提案されてきた。なかでも NASA で開発された数値予測コード SALLY は、様々な翼形状に対して比較的簡単に予測結果を得ることができる汎用予測コードの最たるものである²⁻⁴⁾。

この SALLY に代表されるように、境界層遷移の数値予測はほとんどの場合次の 3 段階を経て行われる。第 1 段階は、計算対象となる主流と物体形状から各点における境界層の速度分布を求める境界層計算である。第 2 段階は安定性解析で、平面波等で近似される攪乱波の増幅率（固有値）をそれぞれの点で計算する。最後は第 2 段階で得られた増幅率を攪乱波の伝播経路に沿って積分する部分で、この積分値（初期振幅比の対数）の大きさを遷移の発生を判断する（固有値の積分）。したがって最終予測結果の精度は上述の各ステップ、つまり、

1. 境界層計算
2. 安定性解析
3. 固有値の積分

のそれぞれの精度に依存する。

SALLY コードをはじめとして各国の研究者らによって提案されている予測手法の多くは第 3 ステップについての開発であり、第 1 ステップである速度場の差に起因する予測結果の違いを系統的に調べた例は少ない。第 1 段階における計算誤差はそれ以降の計算結果を大きく左右することは容易に想像される。そこで本研究では、予測計算の基本となる境界層速度分布の差が最終予測結果に対してどのように影響を及ぼすかを定量的に調べた。流れ場は NACA0015 型翼モデルとし、境界層の速度分布計算には SALLY コードで用いているものと同じ相似解と、Navier-Stokes コードの二つを用いた。局所安定性解析には最も一般的は Orr-Sommerfeld 方程式を用い、固有値の積分にはやはり SALLY における手法を踏襲した。

2. 流れ場と計算手法

流れ場は迎い角, 後退角をともに持たない NACA0015 2 次元翼を計算対象とした. 主流速度と翼弦長に基づくレイノルズ数は 0.5×10^6 である. 以下において, 数値予測のための各 3 ステップについてそれぞれ簡単に解説する.

2.1 境界層計算

まず第 1 段階である境界層計算であるが, すでに述べたように本計算では異なる二つの手法によって得られる境界層の速度分布を用いて, 最終果に現れる差を定量的に評価することを目的としている. 計算は「SALLY による相似解」と「Navier-Stokes コード」によるが, それぞれの主な特徴を以下に概略する.

2.1.1 相似解 (SALLY)

この相似解は Kaups and Cebeci によって得られたもので, 基礎方程式は図 1 で示される座標系上で記述された圧縮性 Navier-Stokes 方程式, 連続の式, エネルギー方程式である.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho xu) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho xv) = 0. \quad (2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{w}{x} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \frac{w^2}{x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.2)$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho \frac{w}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho \frac{uw}{x} = -\frac{1}{x} \frac{dp}{d\theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (2.3)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho \frac{w}{x} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + w^2}{2} \right) \right). \quad (2.4)$$

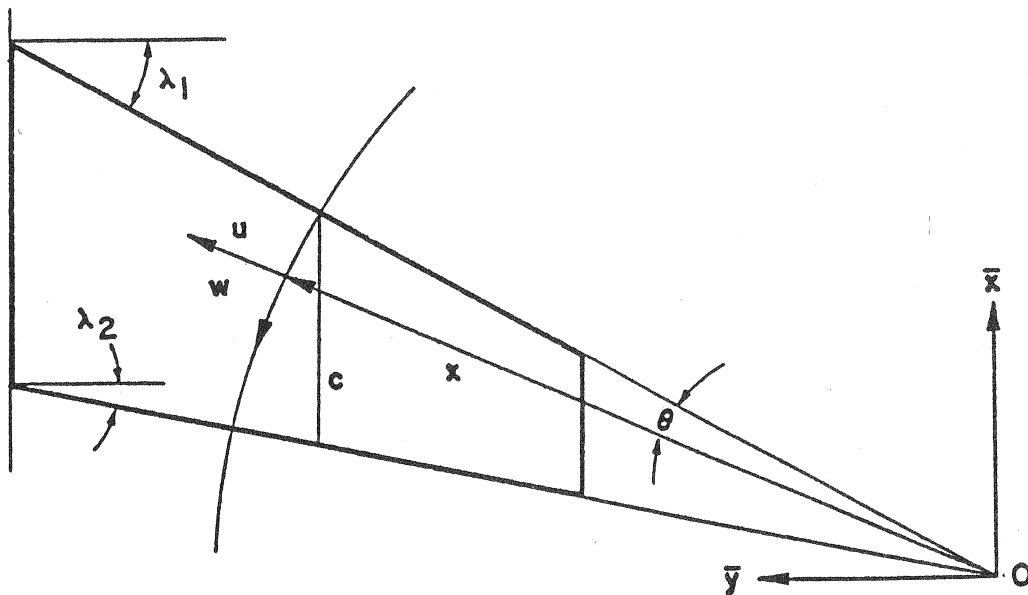


図 1. 座標系.

式中 y は壁面垂直方向の座標を示し, u, v, w はそれぞれ x, θ, y 方向の速度成分, p は圧力, H はエントロピー, ρ は密度, Pr はプラントル数を表す. ここで新たに変数 η

$$d\eta \equiv \sqrt{\frac{\bar{u}_e}{\rho_e \mu_e x}} \rho dy, \quad (2.5)$$

と, ベクトルポテンシャル ψ, ϕ ,

$$\rho \bar{u}x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (2.6)$$

$$\rho wx = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (2.7)$$

$$\rho vx = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + (\rho vx)_w, \quad (2.8)$$

を定義し, さらに無次元パラメータ f, g を以下のように定義する.

$$\psi = x^{3/2} \sqrt{\rho_e \mu_e \bar{u}_e} f(\eta, \theta), \quad (2.9)$$

$$\phi = x^{3/2} \sqrt{\rho_e \mu_e \bar{u}_e} \frac{w_e}{\bar{u}_e} g(\eta, \theta). \quad (2.10)$$

ただし $\bar{u} \equiv -u$ で, 添字 e は境界層外縁における量を表す. これらの関係式 (2.5)-(2.10) を用いると, 基礎方程式 (2.1)-(2.4) から次のような相似方程式が得られる.

$$(Cf'')' + m_1 f'' f + m_2 g f'' - m_3^2 ((g')^2 - f' g') + m_4 f'' = m_3 (g' \frac{\partial f'}{\partial \theta} - f' \frac{\partial g}{\partial \theta}), \quad (2.11)$$

$$(Cg'')' + m_1 g'' f + m_2 g g'' + m_5 (c - (g')^2) - (c - f' g') + m_4 g'' = m_3 (g' \frac{\partial g'}{\partial \theta} - g'' \frac{\partial g}{\partial \theta}), \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{CE'}{Pr} + \frac{C\bar{u}_e^2}{He} \left(1 - \frac{1}{Pr}\right) (f' f'' + m_3^2 g' g'') \right)' + m_1 E' f + m_2 E' g + m_4 E' = m_3 (g' \frac{\partial E'}{\partial \theta} - E' \frac{\partial g}{\partial \theta}). \quad (2.13)$$

ここでプライムは y 方向に関する微分を表し,

$$f' = \bar{u}/\bar{u}_e, \quad g' = w/w_e,$$

$$E = H/H_e, \quad C = \rho\mu/\rho_e\mu_e, \quad c = \rho_e/\rho,$$

$$m_1 = -1.5, \quad m_2 = m_5 + 0.5m_3^2 + \frac{0.5p_3}{(\rho\mu)_e} \frac{d(\rho\mu)_e}{d\theta}, \quad m_3 = w_e/\bar{u}_e,$$

$$m_4 = \frac{-(\rho v)_w}{(\rho\bar{u})_e} (R_x)^{1/2}, \quad m_5 = \frac{1}{\bar{u}_e} \frac{dw_e}{d\theta}, \quad R_x = \frac{\bar{u}_e x}{\nu_e},$$

である. また境界条件は

$$\eta = 0, \quad f = g = f' = g' = 0, \quad E'_w = 0, \quad (2.14)$$

$$\eta = \eta_\infty, \quad f' = g' = E = 1. \quad (2.15)$$

である. この相似解の係数は, 与えられた圧力分布をもとに前縁から積分することで得られ, それによって各点での速度分布形状が決まる.

2.1.2 Navier-Stokes コード

基礎方程式は相似解と同様圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いる. 計算格子は図2にあるようにC型格子を用い, 格子点数は境界層内に約50点入るように設定した. スパン方向には周期境界条件を課し, 乱流モデルは用いなかった.

2.2 安定性解析

局所安定性解析には線形解析によって得られるよく知られた Orr-Sommerfeld 方程式を用いた.

$$(D^2 - (\alpha^2 + \beta^2))^2 v - i\alpha RU(D^2 - (\alpha^2 + \beta^2))v + i\alpha RD^2 Uv = -i\omega R(D^2 - (\alpha^2 - \beta^2))v. \quad (2.16)$$

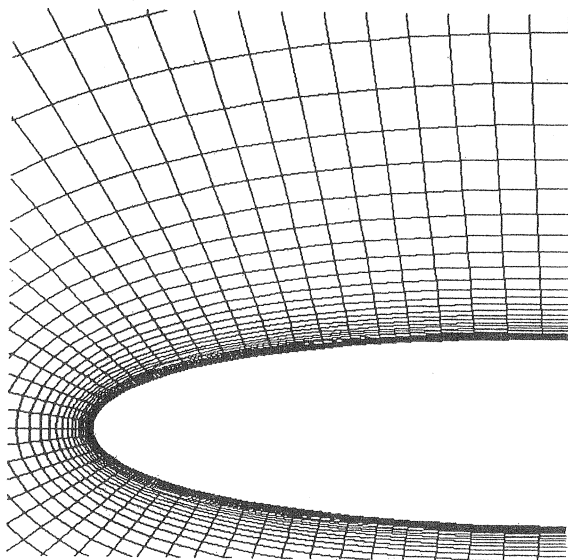
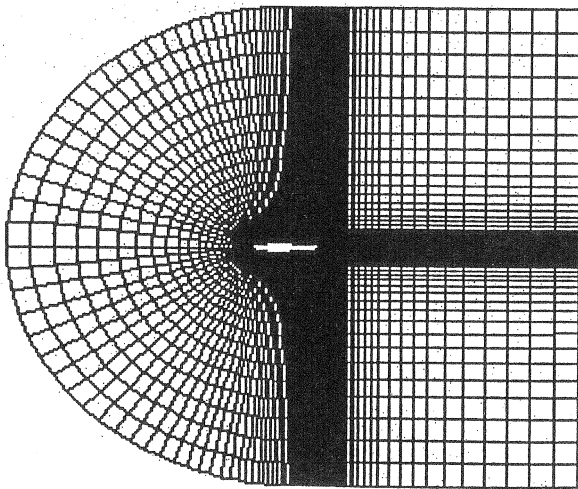


図2. 計算格子.

ここで α, β, ω はコード, スパン方向の波数と振動数を表し, R は局所レイノルズ数で U は主流のコード方向成分である. この方程式は v に対し定数係数の常微分方程式をなし, 固有値や固有関数分布は適当な境界条件のもとでシューティング法によって解かれる.

2.3 固有値の積分

固有値の積分は主としてSALLYコードで採用されたものと同種の方法を用いた. このコードでは攪乱波の発達を時間発展的なものとして考え, Gaster

変換⁵⁾

$$N \equiv \int \frac{Im[\omega]}{|Re[Vg]|} dx \quad (2.17)$$

によって空間発達に変換された固有値を攪乱波の群速度の方向に沿って積分し, トータルな増幅量を N 値として算出する.

3. 計算結果

3.1 境界層計算

まず相似解とNavier-Stokesコードによる計算結果の差を明確にするため, 一般的な流れ場であるBlasius境界層を対象に計算し速度分布を比較した. その結果が図3で, 横軸が速度やその微係数の大きさ, 縦軸が壁からの高さを表す.

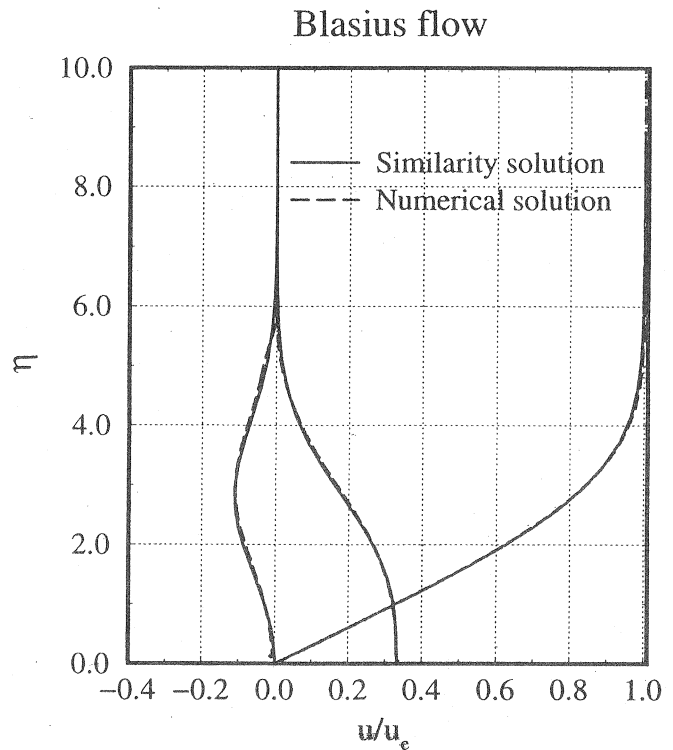


図3. Blasius境界層の速度分布.

これをみると, 速度分布の0階微分はもちろんのこと, 2階微分までほとんどずれることなく一致することがわかる. このことから, 速度分布を求めるため本研究で用いた二つの手法は, いずれにおいても問題がないことがわかる.

次に主計算で対象としたNACA0015型翼モデルについての結果を以下に示す. 図4は翼の断面形状と表面圧力の分布形状を場所の関数として表したものである. 図中の圧力分布はパネル法によって求められたものと, N-Sコードによって求められたものの両方を示すが, それぞれ判別できない程度に良い一致を示している.

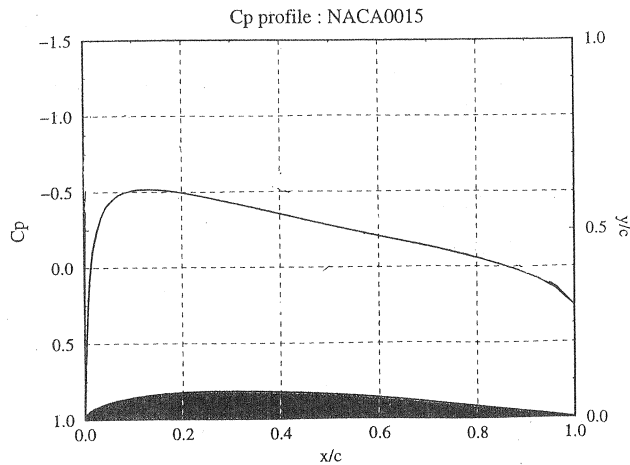


図4. NACA0015 翼断面とその上の圧力分布.

図5はN-Sコードによる、収束直前の表面圧力分布を示す。この図にはスパン方向に振動するパターンが見られるが、これは周期境界条件を課したときの計算結果においてみられる典型的なパターンである。実際の数値計算における収束判定は、数値データの収束誤差とともにこのような可視化の結果も用いて判断した。

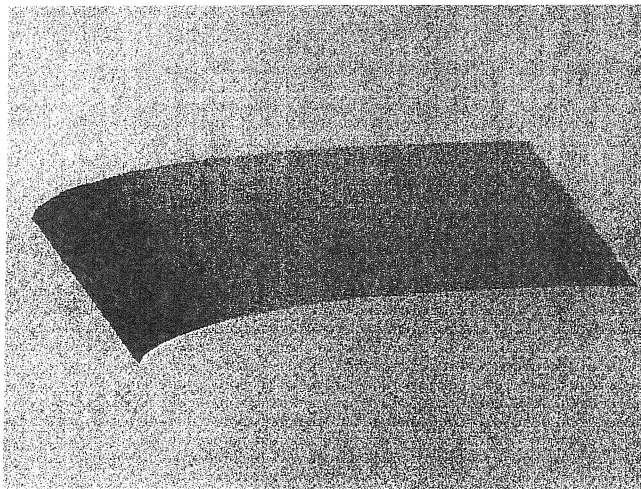


図5. N-Sコードによる表面圧力分布.

図6は相似解によって求めたある点における速度分布と、N-Sコードを用いて求めた速度分布の結果を示している。図4からわかるように、二つの計算手法によって求めた圧力分布がほとんど判別不能なくらい小さいにもかかわらず、速度分布は一見してずれている。ここでは示さないが2階微分についてのずれは著しい。すでに示したように、安定性解析で用いるO-S方程式は速度分布の2階微分まで含むことから、このずれは最終結果に対して決定的な影響をおよぼす可能性を持つ。

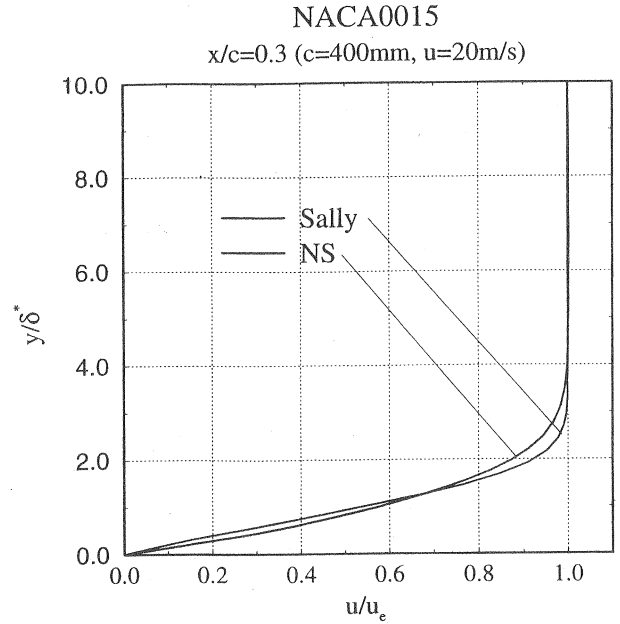


図6. 相似解とN-Sコードによる速度分布の比較.

3.2 予測結果

まずSALLYコードによって得られた結果を図7に示す。横軸はコード位置で縦軸は振幅の大きさを表すN値である。図中にある4本の曲線は、主流速度を20m/sから40m/sまで変化させたときにそれぞれの条件で最も振幅の大きくなる攪乱を表示したものである。例えば主流速度20m/sの場合、最も大きなN値を示すのは攪乱の振動数が800Hzであることを意味している。この図をみると、どの主流速度に対しても攪乱の振幅は下流に向かって単調増加であることがわかる。またx/cが0.6付近から下流では、全ての曲線において歪みがみられるが、これは計算格子の影響を受けて結果が正しく計算されていないことを意味している。つまり本計算では計算資源上の制約から下流部分の格子が上流部分に比べて粗くなっており、その結果後半部分で計算精度が落ちているのである。

次に同様な計算をN-Sコードによって得られた速度分布に対して行われた計算結果を図8に示す。ここでは主流速度は20m/sとし、攪乱の振動数は600Hzとした。縦軸、横軸とも図7と同じであり、SALLYコードによって得られた同じ条件における計算結果も同時に示した。この図をみると、両者とも下流にいくにしたがって振幅が単調増加する傾向は同じだが、増幅の割合に差がありその差は下流にいくにしたがって増加することがわかる。例えばN=5に到達するコード位置を比較すると、その差は約10%ほどもある。

この差はとても誤差の範囲とは言いがたく、計算結果の信憑性に疑念が持たれることは避けられない。はじめに述べたようにこの計算は3つの段階から成るが、ここで比較した計算はそのうちの第1段階が違っただけである。このことは、境界層遷移の数値予測においては境界層の速度分布をいかに精度良く求めるかが非常に大きな問題となることを示している。

と e^N 法を用いた。この結果、平板境界層のような単純な流れ場ではよく一致する境界層計算コードでも、実際の流れ場に対しては速度分布に差が生じ、最終的な予測結果においては多い場合で10%程度も違いが出るのがわかった。

参考文献

- 1) Arnal, D.: Boundary Layer Transition : Predictions Based on Linear Theory, *AGARD Rep. 793* (1993), pp.1.
- 2) Kaups, K. and Cebeci, T.: Compressible Laminar Boundary Layers with Suction on Swept and Tapered Wings, *J.A.14* no.7 (1977), pp.661.
- 3) T.Cebeci and P.Bradshaw, *Momentum Transfer in Boundary Layers* (1977), Hemisphere, pp.213.
- 4) Strowski, A. and Orszag, S.: Mass Flow Requirements for LFC Wing Design, *AIAA Paper 77* (1977), pp.1222.
- 5) Gaster, M.: A Note on the Relation between Temporally-Increasing and Spatially-increasing Disturbances in Hydrodynamic Stability, *J.F.M. 14* (1962), pp.222.

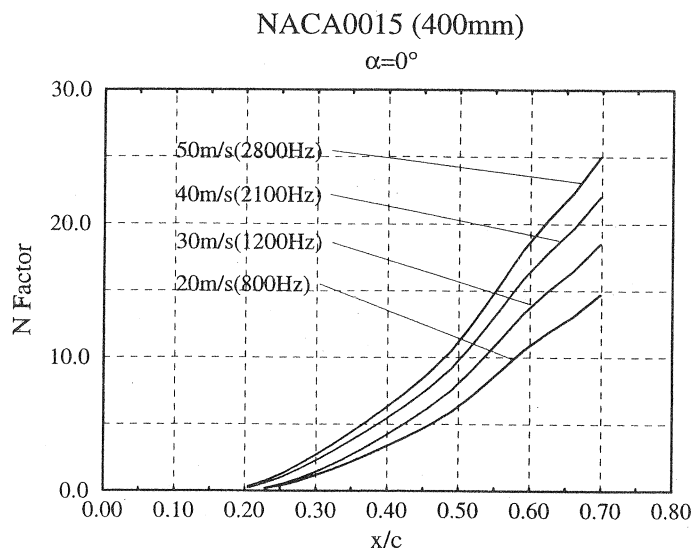


図7. SALLY コードによる N 値の計算.

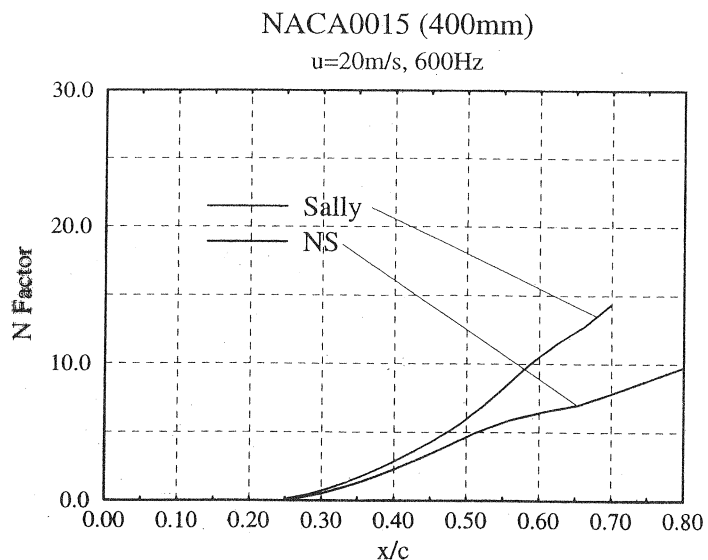


図8. SALLY コードと N-S コードによる N 値の比較.

4. まとめ

境界層の遷移予測計算における速度分布の計算精度の影響を、同一の安定性解析手法を用いることで明確に示した。流れ場は NACA0015 の 2 次元翼を対象とし、安定性解析には Orr-Sommerfeld 方程式