

### 3次元境界層中に発達する横流れ不安定波の波数特性

跡部 隆, 山本 稀義, 伊藤 信毅 (航技研)

## Characteristics of Wavenumber of the Crossflow Waves Developing in 3-Dimensional Boundary Layers

T. Atobe, K. Yamamoto and N. Itoh

National Aerospace Laboratory

### ABSTRACT

Characteristics of wavenumber of disturbance waves developing in three-dimensional boundary layer are examined using a complex ray theory which is established by an extended kinematic wave theory. The most important feature of this theory is that the propagation path of disturbance developing in the boundary layer can be determined uniquely and the  $N$  factor of  $e^N$  method can also be expressed as a function of frequency and wavenumber. The purpose of the present study is to indicate the validity of this theory by comparison with the results of famous SALLY code and the 'envelope-envelope' method. Computations have been made for a flow around a yawed circular cylinder with sweep angle  $50^\circ$ . The velocity profiles are obtained by an approximate method of boundary layer calculation based on a similarity solutions. From this computation, it is found that there is no contradiction in the  $N$  factor among the results obtained by the complex ray theory and by the other methods. Furthermore, the frequency dependence of the wavevector is demonstrated from this method.

**Key Word:** 3-Dimensional Boundary Layer, Laminar-Turbulent Transition,  $e^N$  Method, Complex Ray Theory

## 1. はじめに

境界層の層流-乱流遷移を予測する手法はこれまでも多くの研究者らによって提案され、様々な流れ場に適用されてきた。その一つに攪乱波の振幅増が指数関数的であると仮定し、増幅率を空間的に、または時間的に積分して初期振幅との比を遷移発生の目安とするいわゆる  $e^N$  法に基づくものがある。この手法は比較的容易に遷移を予測することができることと、流れ場の安定性に関する全体像を把握しやすいという利点があり、航空分野では機体の設計開発等において広く活用されている<sup>1)</sup>。

しかし一般に増幅率は分散関係式から求めるため、これを解くためには波数などの物理量をパラメータとして取り扱わなければならない、計算結果に人為的な不正確さが含まれる。流れ場の性質を大雑把に理解しようとする場合にはパラメトリック計算を行うことにも意味はあるが、遷移点の正確な予測を必要とする場合には別な手法を用いる必要が生ずる。

そこで、パラメトリック計算に代る高信頼度の予測手法が幾つか提案されている<sup>2-4)</sup>。その中で Itoh<sup>5)</sup>は複素特性曲線法に基づいた攪乱伝播理論を構築した。この手法は、解くべき分散関係式に物理的な実現条件を課すことでパラメータとして与えなければならない未知量を消滅し、計算結果から人為的な不定性を排除するものである。つまりこの手法の優れている点は、遷

移点を高信頼度で予測するだけでなく、遷移に最も寄与すると思われる攪乱の波数ベクトルを振動数などの関数として定義するところにある。

本研究はこの点に着目し、流れに沿って増幅する実現可能な攪乱の波数ベクトルの振動数依存性を調べた。対象とする流れ場は  $50^\circ$  の後退角を持つ無限円柱周りの流れとし、主流速度とその方向に沿う翼弦長に基づくレイノルズ数は  $0.5 \times 10^6$  とした。

## 2. 流れ場と安定性方程式

流れ場は図1に示すように、直径  $D$ 、後退角  $\Lambda = 50^\circ$  の無限円柱周りの境界層で、主流速度  $Q_\infty$  とその方向に沿う翼弦長  $L = D / \cos \Lambda$  に基づくレイノルズ数  $R_Q$  は  $R_Q \equiv Q_\infty L / \nu = 0.5 \times 10^6$  である。

この条件の下で境界層の各点での速度分布を求め、それぞれの安定性を調べる。速度分布は Kaps and Cebeci<sup>6,7)</sup> の手法を用いた。これは境界層近似によって導出される相似方程式の解を、境界層外部の圧力を相似パラメータとして求める手法で、SALLY コード<sup>8)</sup> で使われている。安定性方程式の解析には平行流近似によって導出される最も単純な Orr-Sommerfeld 方程式を用いた。

図2はこの安定性方程式に基づいて計算された横流れ不安定の臨界レイノルズ数における  $X$  依存性を示す。ここで  $X$  は前縁に垂直な方向の座標をその方向の表面

長  $l_s \equiv \pi/2D$  で無次元化した量である。破線は上記主流中での局所レイノルズ数で、こちらは各点における境界層の排除厚さと境界層外縁での主流成分に基づいて定義された量である。この図から、およそ  $0.1 < X < 0.3$  の領域で攪乱の振幅は増幅することがわかる。

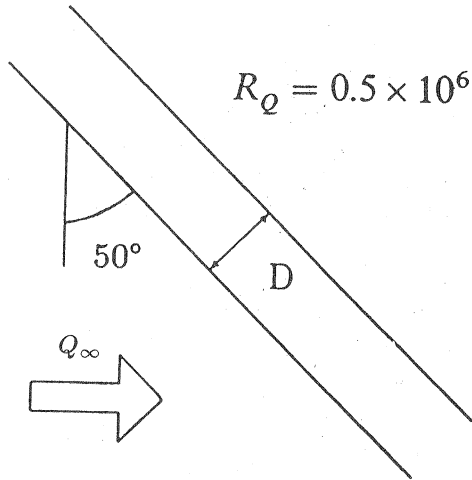


図1. 流れ場。主流  $Q_\infty$  とその方向に沿う翼弦長  $L$  に基づくレイノルズ数  $R_Q$  は  $R_Q = 0.5 \times 10^6$  である。

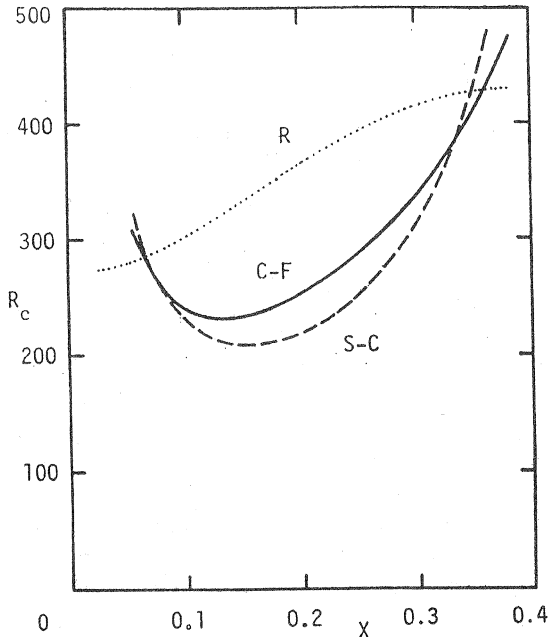


図2. 臨界レイノルズ数。破線は与えられた主流中での局所レイノルズ数 (Itoh<sup>5</sup>) から。

### 3. 複素特性曲線法

境界層中を伝播する攪乱がつぎのように表されるものとする。

$$u(X) = \tilde{u}(Z) \exp(i\Theta/\epsilon_0), \quad (3.1)$$

ここで無次元座標系  $X(X, Y, Z) = (x/l_s, y/l_s, z/\delta)$  は前縁に直角方向、スパン方向、そして壁に垂直方向の直交座標系を表し、 $i$  は虚数単位、 $\epsilon_0$  は微小パラメータ

である。ただし  $\delta \equiv \sqrt{\nu x}/(Q_E \cos \Lambda)$  は排除厚さである（添字の  $E$  は境界層外縁における量を表す）。指数部にある  $\Theta$  は複素位相関数で、 $X, Y$  方向の複素波数  $\alpha, \beta$  と複素振動数  $\omega$  はそれぞれ

$$\frac{\partial \Theta}{\partial X} = \frac{\alpha}{\Delta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{\beta}{\Delta}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial T} = -\frac{\omega}{\Delta^*}, \quad (3.2)$$

で定義される。ここで  $T$  は時間  $t$  を  $\delta/Q_E$  で無次元化した量で、 $\Delta$  と  $\Delta^*$  は

$$\Delta \equiv \frac{\delta}{\sqrt{\nu l_s/U_\infty}}, \quad (3.3)$$

$$\Delta^* \equiv \Delta / [\sqrt{1 + (V_E/U_E)^2} \cdot 2 \sin(\pi X) \cos \Lambda], \quad (3.4)$$

である。

これらの物理量  $\alpha, \beta, \omega$  は

$$\omega = \omega(\alpha, \beta; R), \quad (3.5)$$

によって関係づけられる。この関係式は分散関係式と呼ばれ、境界条件や媒質によって決まるものである。

波数、振動数の定義式 (3.2) は、簡単な計算で次のような適合条件を与えることがわかる。

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\alpha}{\Delta} \right) = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\beta}{\Delta} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\alpha}{\Delta} \right) = -\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\omega}{\Delta^*} \right), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\beta}{\Delta} \right) = -\frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\omega}{\Delta^*} \right). \quad (3.8)$$

ここで攪乱として、前縁付近のある点から励起されるくさび状攪乱を考える。攪乱が導入されてから十分時間が経った後のことについては、流れが何らかの状態に落ち着いていると考えることができるので振動数  $\omega$  の虚部は 0 となる。また上の関係式の時間  $T$  に関する微分項も 0 と置くことができる。すなわち、

$$\omega_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial T} = 0. \quad (3.9)$$

この条件と (3.6) - (3.8) 式から、以下の方程式が導かれる。

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\beta}{\Delta} \right) + C \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\beta}{\Delta} \right) = 0. \quad (3.10)$$

ここで  $C \equiv \omega_\beta/\omega_\alpha$  は複素群速度を表す。この方程式は“C 上で  $\beta/\Delta$  が不変”，であることを意味している。

いま群速度  $C$  は複素空間に拡張されているが、攪乱が現実的に観測されるためには以下の条件式を満足する必要がある。

$$Y_i = \int_{X_0}^{X_1} C_i dX = 0, \quad (3.11)$$

ここで  $X_0$  と  $X_1$  はそれぞれ攪乱の導入点と観測点に対応している。さらに攪乱の導入点  $X_0$  から観測点  $X_1$  の間の振幅増幅を表す  $N$  は次のように与えられる。

$$N = -E_1 \sqrt{R_Q} \cos \Lambda \int_{X_0}^{X_1} [\alpha_i + \beta_i C_r] dX. \quad (3.12)$$

ここで  $E_1$  は流れから決まる定数であり、 $N$  は通常の  $e^N$  法における  $N$  値、つまり

$$N \equiv \ln(A_1/A_0), \quad (3.13)$$

に対応している。また  $A_0$  と  $A_1$  はそれぞれ点  $X = X_0$  と  $X = X_1$  での振幅の大きさを示す。

## 4. 数値計算結果

まず遷移予測コードとして最も有名な SALLY コードによる予測結果を図3に示す。横軸は  $X$  座標であり、各点における  $N$  値の大きさを縦軸にプロットしてある。前章(12)式の  $N$  値は空間発展に基づく攪乱の成長を表すが、SALLY コードでは複素振動数の虚部を用いて時間発展に基づく振幅成長を表している。ただし  $N$  値そのものは Gaster 変換<sup>9)</sup>により空間発展に置き換えられた増幅率を群速度の方向に沿って積分して得られる。この図から、攪乱の各振動数成分が下流方向にどのように振幅を増幅させていくかがよくわかる。また曲線群の中でも最も振幅が大きくなるのは無次元振動数（無次元化は主流速度  $Q_\infty$  と表面長  $l_s$  による）が 0.07 のものであることがわかる。ただし攪乱の波数ベクトルについてはこの計算手法では特定することはできない。

次に空間発展による記述で最も単純な予測法である「包絡線－包絡線法」による結果を示す。3章で述べたように、複素分散関係式には未知量が四つ存在する。そこで「包絡線－包絡線法」は一般に

●攪乱の時間発展は考えない

●スパン方向に変化が無い

と仮定し、四つの未知量のうち  $\omega_i$  と  $\beta_i$  をともに 0 と置く。そして残りの二つを物理的に意味のある範囲でパラメトリック計算を行い、得られた数値解のうち  $N$  値が最大となるものを予測結果として代表させる手法である。例えば空間発展に基づいて分散関係式を

$$\alpha(\alpha_r, \alpha_i) \equiv A(\beta_r, \omega_r; R), \quad (4.1)$$

と表現した上で、まず  $\omega_r$  を固定し  $\beta_r$  をふり、得られた曲線群の包絡線を得る（図4）。さらに幾つかの  $\omega_r$  に対して同様な計算を行い、各  $\omega_r$  に対する包絡線をそれぞれ一本づつ定める。最後に得られた包絡線群を用いてもう一度包絡線を取り、これを流れ場の  $N$  値曲線とする（図5）。この手法による  $N$  値は物理的な意味を持たないが、少なくとも与えられた流れ場の  $N$  値の最大値を与えるものである。

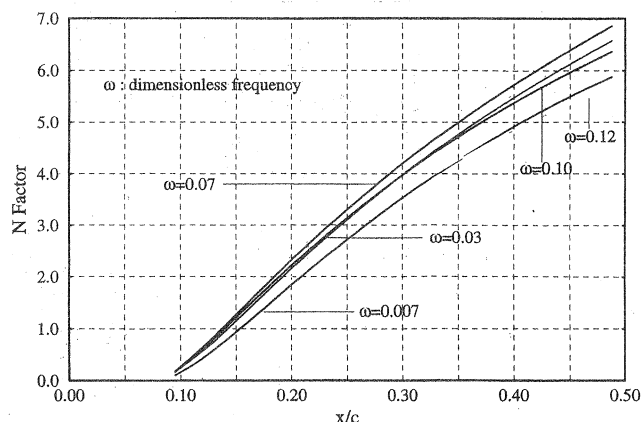


図3. SALLY コードによる予測結果。

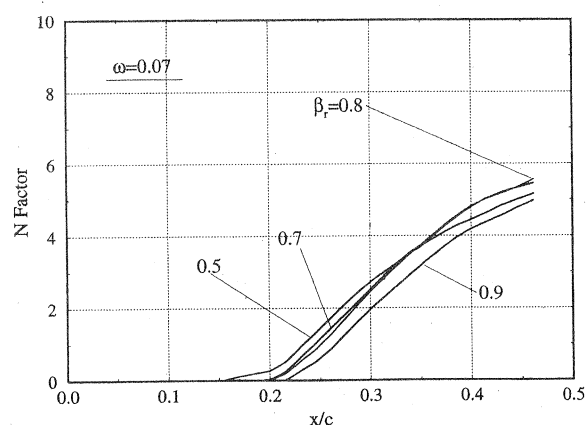


図4. 包絡線－包絡線法による予測結果. ( $\omega = 0.07$  に固定した場合の、幾つかの波数に対する  $N$  値の変化.)

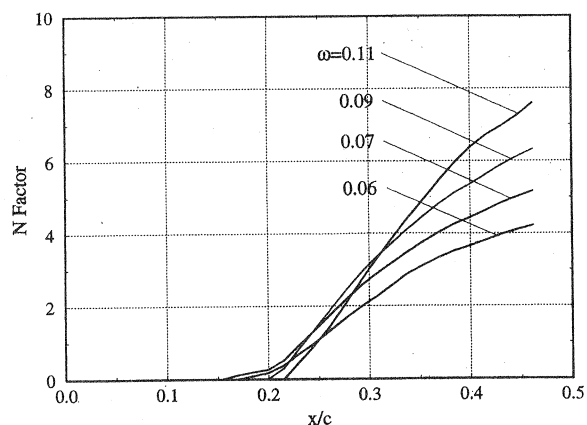


図5. 包絡線－包絡線法による予測結果. (図5と同様な計算を幾つかの  $\omega$  に対して行ったときの結果.)

図6は攪乱伝播理論に基づいて構築された予測コードによる結果を示す。攪乱の導入点  $X_0$  は  $X = 0.1$  に、観測点  $X_1$  は  $X = 0.3$  に設定した。横軸は振動数を表し、攪乱の各振動数成分に対する  $N$  値と波数  $\alpha_r, \beta_r$  を図に示した。これを見ると、最も大きな増幅をみせる成分は定在波 ( $\omega = 0$ ) ではなく、進行波 ( $\omega \simeq 0.09$ ) であることがわかる。この手法は観測点  $X_1$  を定めて  $N$  値を定義するため、前述の二つの手法のように下流方向に沿った振幅の変化を示すためには  $X_1$  を変化させて計算を繰り返す必要があるが、ここでは省略した。

最後に波数ベクトルの向き、つまり  $\phi \equiv \tan^{-1}(\beta_r/\alpha_r)$  で定義される量を、振動数の関数として図7に示す。この図から、波数ベクトルの向き  $\phi$  は振動数の増加に対して単調増加していることがわかる。このように攪乱伝播理論によると波数ベクトルの振動数依存性を明確に示すことができる。これは従来の SALLY コードや包絡線-包絡線法では求めることができないものであり、本手法の優位性を示すものである。

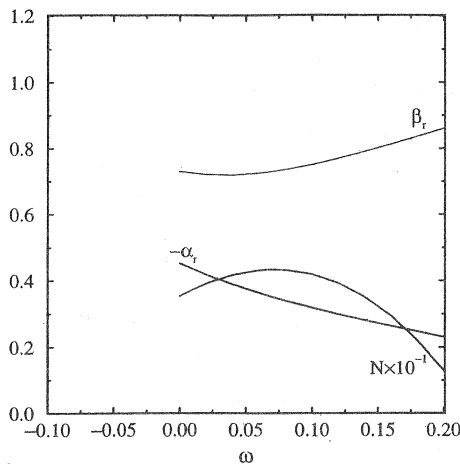


図6. 複素特性曲線法による  $N$  値, 波数ベクトルの振動数依存性. ( $X_0 = 0.1, X_1 = 0.3, \beta_i = 0$ .)

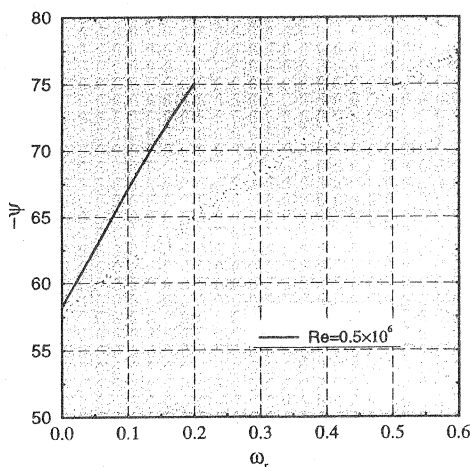


図7. 攪乱波の波数の角度  $\phi = \tan^{-1}(\beta_r/\alpha_r)$  の振動数依存性. ( $X_0 = 0.1, X_1 = 0.3, \beta_i = 0$ .)

## 5. まとめ

本研究では3次元境界層の層流-乱流遷移を数値的に予測するための計算コードを構築し、その計算結果を検証した。基本的な予測手法は最も一般的に用いられる  $e^N$  法を用いたが、計算結果の精度向上を図るため攪乱伝播理論を採用したところが本研究の特色である。

数値計算は  $50^\circ$  の後退角を持つ斜め円柱まわりの境界層を対象にし、主流速度と翼弦長に基づくレイノルズ数は  $0.5 \times 10^6$  とした。境界層の速度分布は相似解から計算し、安定性解析には Orr-Sommerfeld 方程式を用いた。

本手法による計算結果を SALLY コードによる結果と、包絡線-包絡線法による結果と比較したところ、これら三つの手法による差はほとんどないことが示された。

また攪乱の波数ベクトルは、振動数成分の増加に対して単調増加することがわかった。このことは本研究で用いた理論が攪乱波の波数ベクトルも表現可能にするという、他の手法にない優位性を示すものである。

## 参考文献

- 1) Arnal, D.: Boundary Layer Transition : Predictions Based on Linear Theory, *AGARD Rep.* **793** (1993), pp.1.
- 2) Mack, L.M.: Boundary-layer Linear Stability Theory, *AGARD Rep.*, **709** (1984), pp.3-1.
- 3) Gaster, M.: On the generation of Spatially Growing Waves in a Boundary Layer, *J. Fluid Mech.* **22** (1965), PP.433.
- 4) Cebeci, T. and Stewartson, K.: On Stability and Transition in Three-Dimensional Flows, *AIAA J.* **18** (1980), pp.398.
- 5) Itoh, N.: Development of Wedge-shaped Disturbances Originating from a Point Source in a Three-dimensional Boundary Layer, *Fluid Dyn. Res.* **18** (1996), pp.337.
- 6) Kaups, K. and Cebeci, T.: Compressible Laminar Boundary Layers with Suction on Swept and Tapered Wings, *J.A.* **14** no.7 (1977), pp.661.
- 7) T.Cebeci and P.Bradshaw, *Momentum Transfer in Boundary Layers* (1977), Hemisphere, pp.213.
- 8) Strowski, A. and Orszag, S.: Mass Flow Requirements for LFC Wing Design, *AIAA Paper* **77** (1977), pp.1222.
- 9) Gaster, M.: A Note on a Relation Between Temporally-Increasing and Spatially-Increasing Disturbances in Hydrodynamic Stability, *J.F.M* **14** (1962), pp.222.