

平面ポアズイコ流れのバイパス遷移

山本稀義、跡部隆（航技研）、高橋直也（電通大）

By-pass transition of the plane Poiseuille flow

K. Yamamoto*, T. Atobe* and N. Takahashi**

* National Aerospace Laboratory

** University of Electro-Communications

ABSTRACT

By-pass transitions triggered by the initial disturbance and the suction/blowing supplied from the bottom wall of the plane Poiseuille flow are directly simulated on a parallel computer. The simulations are started with initial flows given by the basic flow plus small disturbances with different amplitudes for various Reynolds numbers. It is found that when the amplitude of a disturbance is greater than the threshold amplitude, which depends on -1.7 power of the Reynolds number, the by-pass transition of the flow is triggered by the instability of streamwise vortex components in the disturbance. The similar by-pass transitions of the flow are also induced by the stationary suction/blowings supplied from the wall, which seem to simulate a sort of wall surface roughness. When the suction/blowing excites two modes whose streamwise components of wave numbers have an identical magnitude but opposite sign, these modes interact strongly and induce a large streamwise mode which enhances the by-pass transition of the flow, which has been observed as the oblique transition in the experiment.

Key Words: Plane Poiseuille flow, by-pass transition, DNS, initial disturbance, suction/blowing

1. はじめに

平面ポアズイコ流が層流から乱流へ遷移する力学機構は理論的には線形安定性理論に基づいて研究されてきた¹⁾。すなわち、線形攪乱方程式の固有値問題から不安定になる Tollmien-Schlichting 波 (TS 波と略称) およびその増幅率が調べられてきた。その結果、TS 波が増幅する臨界レイノルズ数は 5772 と導かれた²⁾。しかし、実験的にはこれより遙かに低いレイノルズ数 (~ 1500) でも乱流が発生する事が知られていて³⁾、これについては TS 波不安定では説明が出来ない。

これに対して、近年、主流に含まれている初期攪乱および壁面粗さがある程度大きくなると TS 波不安定によらないバイパス遷移が発生することが注目されてきた⁴⁾。このようなバイパス遷移では流れ方向に軸を持つ縦渦 (streamwise vorticity : SV と略称) 攪乱の不安定性によって遷移が誘起されることが特徴である。これに関連して、これまで Lunblad et al⁵⁾、Reddy et al⁶⁾ および山本と高橋^{7,8)} 等は主流の攪乱による縦渦型のバイパス遷移を DNS によって検証し、それが初期攪乱の振幅に依存することを報告してきた。本研究では、バイパス遷移を誘起する初期攪乱の振幅のレイノルズ数依存性を明らかにすると共に、壁から吸込み吹出しを加えることによって壁面粗さを模擬した流れのバイパス遷移についても調べた結果について報告する。

2. 計算方法の説明

平面ポアズイコ流の座標系 $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$ を基本流 U

の方向に x 、スパン方向に y 、壁に垂直方向に z 取る。また、計算領域を $x \in [0, L_x]$ 、 $y \in [0, L_y]$ 、 $z \in [-1, 1]$ とする。流れを基本流 $U(z)$ と攪乱 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ の和で表し、圧力を $-2\nu x + p$ と表すと \mathbf{u} に関する無次元化された基礎方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - wU' \mathbf{e}_x - \omega \times \mathbf{u} - \nabla P + \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

と導かれる。ここで、 $U = 1 - z^2$ 、 $U' = dU/dz$ 、 \mathbf{e}_x は x 方向の単位ベクトル、 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ 、 $P = p + |\mathbf{u}|^2/2$ 、 ν は動粘性係数、 R はレイノルズ数で、 $R = U(0)/\nu$ と定義される。

また、非圧縮条件は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

流れの計算は \mathbf{u} を x 、 y 方向にフーリエ級数で

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(k_x, k_y, z_j, t) \exp\{i(k_x x + k_y y)\} \quad (3)$$

と展開し、フーリエ係数 $\mathbf{u}(k_x, k_y, z_j, t)$ がスペクトル法によって計算される⁹⁾。ここで、 z_j はチェビシエフ・コ

ロケーション点を表す。なお、以下では記述を簡単にするため、必要のない限り、 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 等の時間 t は省略する。次に、 x, y, z 方向の計算領域は $L_x = 4\pi, L_y = 2\pi, L_z = 2$ と取り、フーリエ成分及びコロケーション点数は $128 \times 64 \times 129$ を用いる。また、DNS の計算には航技研の並列計算機 NWT が使用された。

3. 初期攪乱によるバイパス遷移

平面ポアズイユ流においてはレイノルズ数が 5772 以上では初期攪乱が小さくても TS 波型遷移が実現することが知られている¹⁾。しかし、初期攪乱が大きくなると流れ方向に軸を持つ縦渦(SV)攪乱の不安定性に基づく遷移が発生することが分かってきた⁴⁾。この SV 型遷移における攪乱の増幅は、TS 波の指数関数的増幅とは違って代数関数的な増幅で、かつ、その増幅率が大きいことが特徴である⁷⁾。

SV 型遷移において発生する主要なフーリエ成分の発達過程を図 1 に示す。レイノルズ数は 10000 である。横軸は無次元時間 t 、縦軸は流れの単位質量当たりのフーリエ成分 (k_x, k_y) のエネルギー

$$E(k_x, k_y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dz |\mathbf{u}(k_x, k_y, z, t)|^2 \quad (4)$$

を表す。図中の各曲線は低波数領域 $0 \leq k_x, k_y \leq 5$ の計算結果を示し、実線は 2 次元攪乱 $E(k_x, 0)$ 、点線は 3 次元攪乱 $E(k_x, k_y)$ を表す。 $E(k_x, k_y)$ の初期値は同一の値 10^{-7} と与えられた場合の結果であるが、これ以下のエネルギーでは SV 型の遷移は実現しなかった。しかし、その場合でも、 $R = 10000$ であるのでやがては TS 波型遷移が発生してくるが、TS 波の増幅率は縦渦に比べて小さいので、遷移が実現する特性時間は十分大きい(約 10 倍)ことが報告されている⁷⁾。

一方、図 2 は $R = 5000$ での SV 型遷移における主要なモードの発達過程を示す。この場合は $E(k_x, k_y)$ の初期値が $R = 10000$ と同じ値 10^{-7} では SV 型の遷移は発生しなかったので一桁大きい 10^{-6} と与えられた。また、この場合のレイノルズ数は 5772 より小さいので $E(k_x, k_y)$ の初期値がこれ以下では TS 波型遷移も発生しない結果が得られた。すなわち、微小な初期攪乱からは遷移しないことが検証された。

前記の様に SV 型遷移を誘起する初期攪乱の大きさはレイノルズ数に依存することが分かったので、次に SV 型遷移を誘起する初期攪乱の振幅がレイノルズ数にどの様に依存するかについて調べた。そのため、コロケーション点における攪乱の自乗平均振幅 $\bar{u}(z_j)$ を

$$\bar{u}(z_j) = \left[\frac{1}{L_x L_y} \iint dx dy u(x, y, z_j)^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

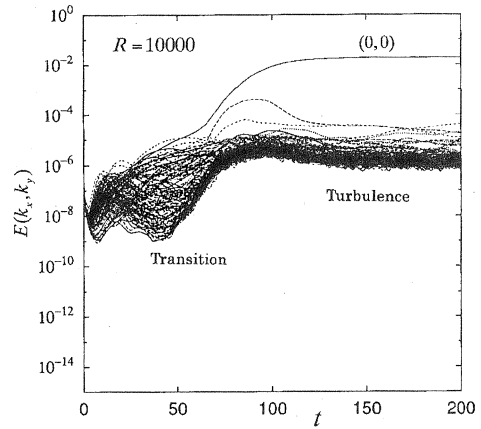


図 1 初期攪乱によるバイパス遷移過程における主要な低波数モードの発達 ($R = 10000$)

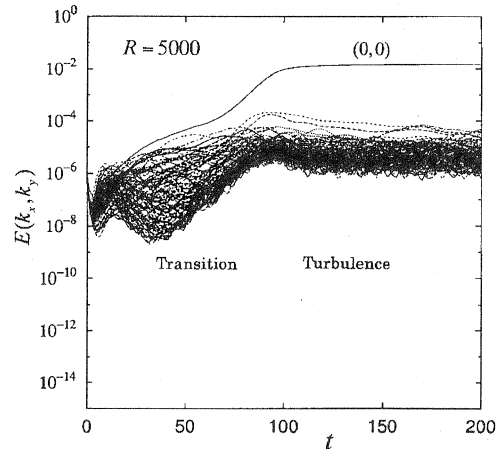


図 2 初期攪乱によるバイパス遷移過程における主要な低波数モードの発達 ($R = 5000$)

と定義したとき、初期攪乱の振幅の代表値としてその最大値 $u' = \text{Max}(\bar{u}(z_j))$ で定義する。種々のレイノルズ数における SV 型遷移が実現した u' の計算結果を図 3 に示す。図中の白丸は SV 遷移が実現した場合の種々の DNS の初期攪乱の振幅 u' の中の最小値を示し、黒丸は実現しなかった場合の種々の DNS の振幅 u' の中の最大値を示す。実線はこれらの結果から閾値を R の中乗で近似した線で、その中指標は -1.7 で近似される結果が得られた^{7, 8)}。また、前述の様に TS 波型遷移の臨界レイノルズ数は 5772 であるので、初期攪乱の振幅 u' がこの実線より低くても $R > 5772$ の場合は TS 波型遷移が実現する。しかし、 $R < 5772$ の場合は微小攪乱からは乱流への遷移は実現しない。この結果から、SV 型遷移は

従来の TS 波型遷移の亜臨界において観測されている乱流遷移の実験結果を説明するものである³⁾。

4. 吸込み吹出しによるバイパス遷移

平面ポアズイコ流の下壁面から次の様な吸込み吹出し w_s を加える。

$$w_s(x, y, -1) = \sum_k [A_s(k_x, k_y) \cos(k_x x + k_y y) + c.c.] \quad (6)$$

w_s が与えられると壁面上には図 4 の様な剥離泡が形成され、これらは特別な壁面の粗さの効果を模擬すると考えられる^{10,11)}。また、この外乱によって流れの中には w_s と同じフーリエ成分を持つ攪乱が誘起されることが確認されている⁸⁾。

流れのレイノルズ数が10000で、吸込み吹出し(6)の波数成分として、3次元成分 $A_s(4,2)$ を与えた場合の遷移における主要な低波数モードの発達過程を図5に示す。振幅 A_s は 4×10^{-3} と与えた。時間と共に w_s によって直接励起される攪乱の(4,2)モード(以下では基本モードと呼ぶ)が発生するが、すぐに定常値に落ち着く。これとほぼ同時に平均流の変形を表す(0,0)モードが励起されるが、これは(6)において(4,2)と共に(-4,-2)も同時に与えられているためである。時間と共にその他の種々のモードが励起されてくるが、 $t \approx 500$ 頃から非線形相互作用が激しくなってきた、ついには $t \approx 600$ で急速に乱流へ遷移することを示している。この時最も卓越するモードは流れ方向の縦渦成分(0,10)である。

一方、図6は w_s の波数成分として k_x が反対な2つの斜行波成分 $A_s(4,2)$ と $A_s(-4,2)$ を与えた場合の遷移過程を示す。この場合の遷移では、まず、 w_s によって直接に励起される攪乱の基本モードは斜行波(4,2)と(-4,2)で、そのエネルギーは 10^{-6} 程度である。次に、これら2つのモードの干渉によって流れ方向の縦渦成分(0,4)、さらにはその高調波の(0,8)成分が励起されてくるが、その際のエネルギーは基本モードに比べて約2桁も大きいレベルとなっている。その結果、この場合のSV遷移は急激となり、 $t \approx 170$ で乱流へ遷移している。この様な二つの斜行波による急激なバイパス遷移については翼面境界層の遷移に関連して実験的にも注目されている¹²⁾。

5. むすび

平面ポアズイコ流の初期攪乱および壁面に加えられた吸込み吹出しによって誘起されたバイパス遷移過程をDNSに基づいて研究した。その結果、以下のことが得られた。

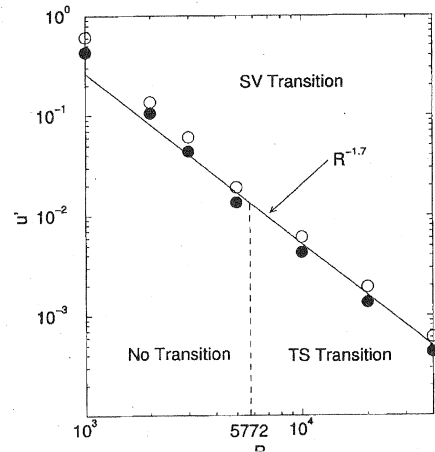


図3 バイパス遷移が発生する初期攪乱の振幅のレイノルズ数依存性。○はバイパス遷移が発生した初期攪乱の振幅の最小値を示し、●は遷移が発生しなかった初期攪乱の振幅の最大値を示す。

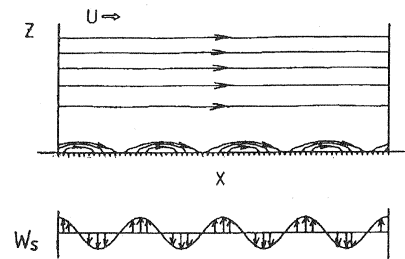


図4 壁面からの吸込み吹き出しによる剥離泡の概念図

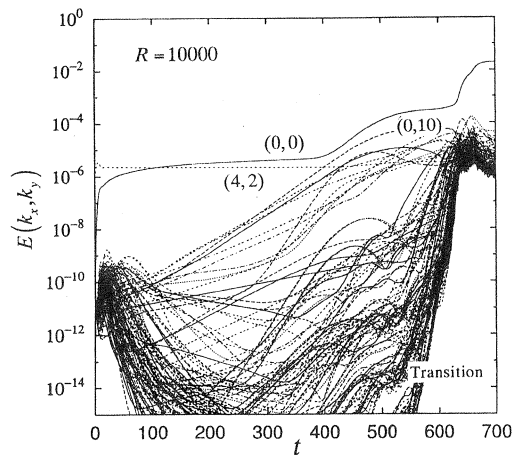


図5 波数成分 $A_s(4,2)$ を持つ吸込み吹き出しによって誘起された SV 型遷移過程における攪乱の主要な成分の発達

- 1) 初期攪乱の振幅が大きくなると攪乱の縦渦成分が不安定になり縦渦型のバイパス遷移が発生する。
- 2) バイパス遷移を誘起する初期攪乱の振幅の閾値はレイノルズ数に依存し、その -1.7 乗に比例する。
- 3) 吸込み吹き出しは流れの中に同じ波数成分を持つ攪乱を誘起するが、その攪乱が更に攪乱の縦渦成分を不安定化することによってバイパス遷移が発生する。
- 4) 吸込み吹き出しの波数成分として k_x が反対の2つの斜行波成分を含む場合にはそれらが干渉して強い縦渦攪乱を誘起することによってバイパス遷移が発生する。

参考文献

- 1) Drazin, P. G. and Reid, W. H.: *Hydrodynamics Stability* (Cambridge University Press, 1981).
- 2) Orszag, S. A.: Accurate Solution of the Orr-Sommerfeld Stability Equation, *J. Fluid Mech.* Vol. **50** (1971) 689.
- 3) Patel, V. C. and Head, M. R.: Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flow, *J. Fluid Mech.* Vol. **38** (1969) 181.
- 4) Trefethen, L. N., Trefethen, A., Reddy, S. C. and Driscoll, T. A.: Hydrodynamic stability without eigenvalues, *Science*, Vol. **261** (1993) 578.
- 5) Lundbladh, A., Henningson, D. S. and Reddy, S. C.: Threshold amplitudes for transition in channel flows, in *Transition, Turbulence and Combustion*, Vol. I (Eds. Hussaini, M. Y. et al, Kluwer, 1994) 309.
- 6) Reddy, S. C., Schmid, P. J., Baggett, J. S. and Henningson, D. S.: On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows, *J. Fluid Mech.* Vol. **365** (1998) 269.
- 7) 山本稀義、高橋直也：“平面ポアズイコ流のDNS”、日本流体力学会年会2000講演論文集(2000)583.
- 8) Yamamoto, K. and Takahashi, N.: Direct Numerical Simulation of By-Pass Transition in the Plane Poiseuille Flow, *Proceedings of NAL Workshop on Prediction of Laminar-Turbulent Transition in Boundary Layer*, NAL-SP (2000).

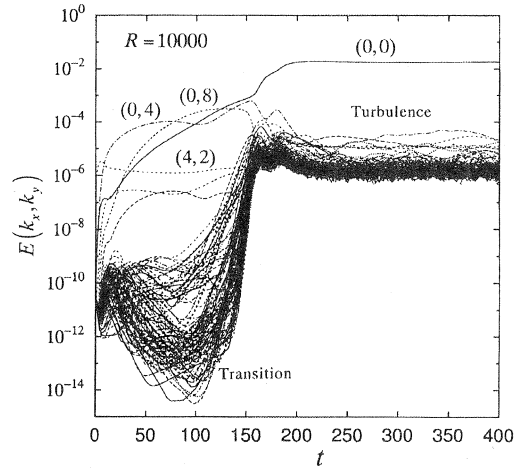


図6 二つの斜行波成分 $A_y(4,2)$ 及び $A_y(-4,2)$ を持つ吸込み吹き出しによって誘起されたSV型遷移過程における攪乱の主要な成分の発達

- 9) Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni and Zang, T. A.: *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, 1987).
- 10) Floryan, J. M., Yamamoto, K. and Murase, T.: Laminar-Turbulent Transition Process in the Presence of Simulated Wall Roughness, *Canad. Aero. Space J.* **38** (1992) 173.
- 11) Yamamoto, K.: Numerical Simulation on Laminar-Turbulent Transition of the Channel Flow with Simulated Wall Roughness, in *Laminar-Turbulent Transition* (Ed. Kobayashi, R., Springer-Verlag, 1995) 245.
- 12) Elofsson, P. A. and Alfredsson, P. H.: An experimental study of oblique transition in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. **358** (1998) 177.