

# 多重不安定性計算のためのモデル方程式

伊藤信毅 (航技研)

A simple model of disturbance equations for analysis of multiple instabilities

Nobutake ITOH

National Aerospace Laboratory, Chofu, Tokyo 182-8522, JAPAN

## ABSTRACT

Small disturbances superimposed on a growing boundary-layer flow are governed by partial differential equations, but a simpler estimation of stability characteristics will be done if the exact disturbance equations are reduced to an eigenvalue problem of the corresponding ordinary differential equations. In this paper, a simple model of the ordinary differential system is proposed, which includes the most important terms of boundary-layer growth and wall curvature.

Key Words: linear stability theory, laminar-turbulent transition, three-dimensional boundary layer

## 1. はじめに

境界層の安定性や攪乱の成長率を簡単に見積りたいことはしばしば起こる。遷移点の予測や実験との比較データが望まれる場合で、それほど高い精度でなくても目的にかなうことが多い。特に三次元境界層の問題では、複数の不安定現象が発生するために<sup>1,3)</sup>、それらの特徴を明確にするような安定計算が要求される。本研究では、厳密な偏微分線形攪乱方程式を解く代わりに、非平行性と壁面曲率を取り入れた常微分モデル方程式の固有値問題を提案し、それによって境界層の不安定特性を見積る方法を検討する。

## 2. 厳密な線形攪乱方程式

十分に長く、至る所小さな表面曲率を持つ後退翼を考え、その上に形成される境界層の安定性を調べる。翼表面に沿って前縁に直角な翼弦方向に  $x$ 、前縁に平行に  $y$ 、表面に垂直に  $z$  の一般直交曲線座標を取る。一般に、無限に長い翼面上の境界層は局所的に Falkner-Skan-Cooke の相似解で近似することができる<sup>2)</sup>。この相似境界層は、 $x$  方向の速度  $U_e$  が  $x^n$  に比例し、 $y$  方向の速度が一定値  $V_\infty$  を取る外部流に対応する境界層方程式の解で、境界層厚さを  $\delta = (\nu x / U_e)^{1/2}$ 、相似変数を  $\zeta = z / \delta$  とするとき、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \bar{U} &= U_e F'(\zeta), \quad \bar{V} = V_\infty G(\zeta), \\ \bar{W} &= -\frac{\nu}{\delta} \left[ \frac{1+m}{2} F(\zeta) - \frac{1-m}{2} \zeta F'(\zeta) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $F(\zeta)$  と  $G(\zeta)$  は Falkner-Skan および Cooke の関数である<sup>4)</sup>。

この基本流に微小な波動型攪乱が重ねられた場合

を考え、 $x$  方向と  $y$  方向の波数を  $\alpha$  と  $\beta$ 、振動数を  $\omega$  とし、振幅  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$  は  $x$  と  $z$  の関数で表されるものとする。ただし以下では、 $\delta$  と  $V_\infty$  とを基準尺度として定義された次の無次元量を使用する。

$$\begin{aligned} R_i &= x / \delta, \quad \zeta = z / \delta, \quad \alpha = \delta \bar{\alpha}, \quad \beta = \delta \bar{\beta}, \quad \omega = \delta \bar{\omega} / V_\infty, \\ \kappa_w &= \delta / r_w, \quad u(\zeta, R_i) = \bar{u} / V_\infty, \quad v(\zeta, R_i) = \bar{v} / V_\infty, \\ w(\zeta, R_i) &= \bar{w} / V_\infty, \quad p(\zeta, R_i) = \bar{p} / \rho V_\infty^2, \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $r_w$  は翼表面の局所的曲率半径である。 $y$  方向レイノルズ数は  $R_0 = V_\infty \delta / \nu$  で定義され、 $x$  方向レイノルズ数  $R_i = U_e \delta / \nu$  は  $x$  方向の無次元座標に一致する。以上をナビエ・ストークスと連続の式<sup>5)</sup>に代入し、微小攪乱に比例する項を取り出すと厳密な線形攪乱方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \left[ L - \frac{1}{hR_0} (mU - \frac{1-m}{2} \zeta U') + O\left(\frac{1}{R_i^2}\right) \right] u \\ - \frac{R_i}{R_0} \left[ U' + O\left(\frac{1}{R_i^2}\right) \right] w - \frac{1}{h} \left[ i\alpha - \frac{1-m}{2R_i} \zeta D + \frac{1+m}{2} \frac{\partial}{\partial R_i} \right] p = 0, \\ Lv + \frac{1-m}{2hR_i} \zeta V' u - V' w - i\beta p = 0, \\ \left[ L - \frac{W'}{R_0} + O\left(\frac{1}{R_i^2}\right) \right] w + \frac{R_i}{hR_0} \left[ 2\kappa_w U + O\left(\frac{1}{R_i^2}\right) \right] u - Dp = 0, \\ \frac{1}{h} \left( i\alpha - \frac{1-m}{2R_i} \zeta D + \frac{1+m}{2} \frac{\partial}{\partial R_i} \right) u + i\beta v + \left( D + \frac{\kappa_w}{h} \right) w = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $U=F'(\zeta)$ ,  $V=G(\zeta)$ ,  $W=-\frac{1+m}{2}F'+\frac{1-m}{2}\zeta F$ ,

$$L=-\nabla^2+i\omega-\frac{U}{h}\left(i\alpha\frac{R_1}{R_0}-\frac{1-m}{2R_0}\zeta D+\frac{1+m}{2R_0}\frac{\partial}{\partial R_1}\right)-i\beta V-\frac{W}{R_0}D,$$

$$D=\partial/\partial\zeta, \quad \nabla^2=D^2-\alpha^2-\beta^2+O(1/R_1), \quad h=1+\kappa_*\zeta$$

であり、 $\kappa_*$ は $O(1/R_1)$ の微量と仮定されている。上式は $\zeta$ と $R_1$ に関する偏微分方程式であり、一般には数値的に積分する必要があるが、本論文ではこれを簡単な常微分モデル方程式で近似し、固有値問題に帰着させる方法を提案する。

### 3. 安定性方程式の簡単なモデル

最近の研究<sup>6)</sup>で、壁の曲率がない場合の三次元付着線流れ( $m=1$ )に対しては、厳密な攪乱方程式(3)の級数解が $R_1$ の2乗の逆数に展開される形で得られることが判った。この級数解の初項は、偏微分方程式(3)に対する最低次近似として導かれる常微分方程式の固有値問題から定まり、 $R_1 \rightarrow \infty$ に対する漸近解を与える。ここでの表記法に従うと、最低次近似式は次のように表される。

$$\left[-\frac{1}{R_0}(D^2-\beta^2)+i\omega-U\left(i\alpha\frac{R_1}{R_0}+\frac{2}{R_0}\right)-i\beta V-\frac{W}{R_0}D\right](u^-)-U'w=0,$$

$$\left[-\frac{1}{R_0}(D^2-\beta^2)+i\omega-i\alpha U-i\beta V-\frac{W}{R_0}D\right]v-V'w-i\beta p=0,$$

$$\left[-\frac{1}{R_0}(D^2-\beta^2)+i\omega-i\alpha U-i\beta V-\frac{W}{R_0}D-\frac{W'}{R_0}\right]w-Dp=0,$$

$$\left(i\alpha\frac{R_1}{R_0}+\frac{1}{R_0}\right)(u^-)+i\beta v+Dw=0. \quad (4)$$

ただし、壁に垂直な速度成分 $W$ の代わりに、非平行補正された量 $\tilde{W}=-\{(1+m)/2\}F(\zeta)$ を用いた<sup>6)</sup>。 $m=1$ の場合には両者は一致し、 $m<1$ で後者がその特性を維持するからである。

もう一つの重要な例は、凹局面に沿う二次元淀み点境界層の場合である。この流れのゲルトラー不安定も同様に局所レイノルズ数の逆数に関する級数解で表される<sup>7)</sup>。その場合、級数解の初項を支配する方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} [D^2-\beta^2-R_0\omega_1-\tilde{W}D-U](u/R_1)-U'w &= 0, \\ [D^2-\beta^2-R_0\omega_1-\tilde{W}D+U](v/R_0)-i\beta p &= 0, \\ [D^2-\beta^2-R_0\omega_1-\tilde{W}D-\tilde{W}'U](w/R_0)+2(\kappa_*R_1/R_0)Uu-Dp &= 0, \\ i\beta v + Dw &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $\omega_1$ は攪乱の時間的増幅率であり、無次元化に用いた $V_\infty$ はここでは任意な定数基準速度を表すものと見なされている。良く知られているように、この安定問題は $G=R_1(-\kappa_*)^{1/2}$ で定義されるゲルトラー数によって支配される。

本論文では、上に述べた2系統の攪乱方程式と一般的に用いられる平行流近似方程式を重ねあわせることで、後退翼に沿う境界層のほとんど至る所で十分信頼できる安定性方程式が得られるものと期待

する。これまで用いてきた基準速度 $U_\infty$ と $V_\infty$ の代わりに合成速度 $Q_\infty=(U_\infty^2+V_\infty^2)^{1/2}$ を用いることにすると、この方法で得られたモデル方程式はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-i\alpha U-i\beta V)-\frac{W}{R}D-\frac{2\hat{\kappa}_s}{R}U\right]u \\ -U'w-i\alpha p=0, \\ \left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)-\frac{W}{R}D\right]v-V'w-i\beta p=0, \\ \left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)-\frac{W}{R}D-\frac{W'}{R}\right]w-Dp=0, \\ \left(i\alpha+\frac{\hat{\kappa}_s}{R}\right)u+i\beta v+Dw=0. \end{aligned} \quad (6)$$

さらに $v$ と $p$ を消去して、 $u$ と $w$ に関する2元連立方程式に書き直すと、

$$\begin{aligned} \left[SL-\frac{2\hat{\kappa}_s}{R}\beta^2U\right]u-\left[i\alpha LD+\beta(\beta U'-\alpha V')\right]w=0, \\ \left[\left(L-\frac{W'}{R}\right)(D^2-S)+i(\alpha U''+\beta V'')+\frac{\hat{\kappa}_s}{R}(U'D+U'')\right]w \\ +\frac{2}{R}\left[\hat{\kappa}_s\left(i\alpha+\frac{\hat{\kappa}_s}{R}\right)(UD+U')-\kappa_*SU\right]u=0, \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 $L(D)=\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2-\beta^2)+i(\omega-\alpha U-\beta V)-\frac{W}{R}D$ ,  
 $S=\alpha^2+\beta^2-i\alpha\frac{\hat{\kappa}_s}{R}$ ,  $U=\frac{F'(\zeta, m)}{(1+\gamma^2)^{1/2}}$ ,  $V=\frac{G(\zeta, m)}{(1+\gamma^2)^{1/2}}$ ,  
 $\omega=\omega\delta/Q_\infty$ ,  $\kappa_*=R\delta/r_*$ ,  $\hat{\kappa}_s=m(1+\gamma^2)^{1/2}$ ,  $\gamma=V_\infty/U_\infty$ である。この式において、粘性項以外の $1/R$ に比例する項を無視すると平行流近似方程式<sup>8)</sup>が得られ、第2式はよく知られたOrr-Sommerfeld方程式に帰着する。

同じような重ね合わせの手法を用いて、境界条件を導くと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} u=w=w'=0 \quad \text{at} \quad \zeta=0, \\ u'-\rho_1u+K_1(w''-\rho_1w')=0, \\ w''-(\rho_2+\rho_3)w'+\rho_2\rho_3w+K_2(u+K_1w')=0, \\ w'''-(\rho_1+\rho_2+\rho_3)w''+(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)w' \\ -\rho_1\rho_2\rho_3w=0, \quad \text{at} \quad \zeta=\zeta_*. \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ はそれぞれ代数方程式  
 $L(\rho_1)-2\hat{\kappa}_s\beta^2U_0/S=0$ ,  $\rho_2^2+S=0$ ,  $L(\rho_3)-W_0=0$   
の正の実部を持つ根であり、係数は $K_1=-i\alpha/S$ ,  $K_2=2U_0\{\kappa_s(i\alpha+\hat{\kappa}_s/R)\rho_1-\hat{\kappa}_sS\}/(\rho_1+\rho_3-W_0)(\rho_1+\rho_3)$ で与えられる。外部境界条件を課す位置は、以前の研究<sup>9)</sup>に従って $\zeta_*=10$ に選んだ。結局、同次の常微分方程式(7)を同次境界条件(8)のもとに解くことになり、固有値問題が得られる。その解は波数 $\alpha$ ,  $\beta$ と振動数 $\omega$ を結び付ける分散関係式を与えるが、ここではそれらの量がすべて複素数値を取れるものとする。

#### 4. 計算結果の検討

はじめに平板に沿う二次元ブラジウス境界層のT-S不安定を考え、流れの非平行性の影響を見ておく。図1には二次元T-S波に対する2本の中立安定曲線が与えられている。破線で示されている平行流近似解に対して、非平行モデル(7)の結果(実線)は全体としてレイノルズ数 $R$ の低い方にずれており、Smith<sup>10)</sup>の漸近理論と同様に、非平行性が流れを不安定化することを示している。すなわち、平行流近似の臨界レイノルズ数 $R_c=301.6$ は非平行モデルの臨界値 $R_c=271.5$ に減少するが、これを排除厚レイノルズ数に直すと、 $R_{\delta^*}=519.0$ と $R_{\delta^*}=467.2$ に相当する。

つぎに壁面曲率のある場合の例として、凹曲面に沿う二次元境界層のゲルトラー不安定を考える。壁面の曲率は基本流に影響しない程度に弱いものと仮定して、ここではブラジウス速度分布を基本流に選んだ。図2はスパン方向波数に対する中立安定ゲルトラー数の変化を示すもので、破線が平行流近似、実線が非平行モデルの結果である。平行流近似、すなわちゲルトラーの方程式から得られる中立曲線が波数の単調増加関数であり、したがって臨界点が波数0で生じることは古くから知られている<sup>11)</sup>。これに対して、モデル式(7)から得られる中立曲線は $\beta_c=0.473$ と $G_c=2.36$ の位置に臨界点を持ち、それより小さい波数に対して中立曲線は上昇する。この傾向は二次元淀み点流れのゲルトラー不安定<sup>7)</sup>と同じであり、流れの非平行性を取り入れた成果である。

本論文で基本流の対象としているFalkner-Skan-Cooke相似境界層の中で $m=1$ の場合、すなわち付着線流に対しては、その多重不安定特性が厳密な攪乱方程式の級数解で記述されることが判っている<sup>6)</sup>。しかし、この級数解は、付着線からの距離 $R_1$ が大きいときに有効だが、 $R_1$ がある程度小さくなると発散するものであり、したがって、付着線のごく近傍領域の安定特性についてはまだ明確にされていない。そこで、この流れにモデル式(7)を適用したとき、どのような情報が得られるかは興味深い問題である。いま壁面曲率を0とすれば、流れ場を決定するパラメータはレイノルズ数と外部流線の角度である。 $U_e$ が $x$ に比例するから、 $\gamma^{-1}$ は付着線からの距離を代表する無次元量になる。図3は臨界レイノルズ数とそれに対応する波数と振動数を $\gamma^{-1}$ に対してプロットしたものである。付着線に近づくに連れて臨界レイノルズ数は急激に上昇すること、特に横流れ攪乱では $\alpha$ が0に、 $\beta$ が一定値に近づくことなどが注目される。同じ計算結果を、 $R_0$ の臨界値の $R_1$ に対する変化として図示したものが図4である。 $R_1$ の大きいところでは、流線曲率(S-C)モードが厳密級数解の漸近線にほとんど一致し、横流れ(C-F)不安定より低い臨界値を与える。これに対して $R_1$ を0に近づけると、S-Cモードは発散し、C-Fモードの臨界曲線が $R_0$ の一定値に漸近するようになる。しかし、この値は、スパン方向に伝播するT-S攪乱に対する厳密解<sup>12)</sup>の臨界値 $R_0=583.1$ とは一致しない。付着線のごく近傍でのC-F臨界曲線はかなり不自然な振る舞いをするようで、さらに詳細な研究が必要と思われる。

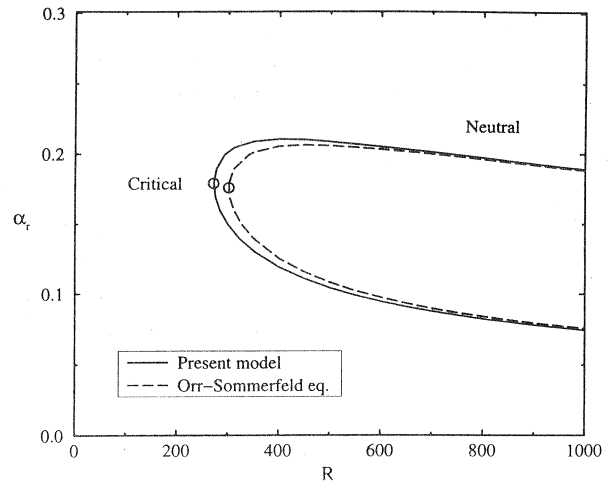


Fig. 1. Neutral curves of Blasius flow.

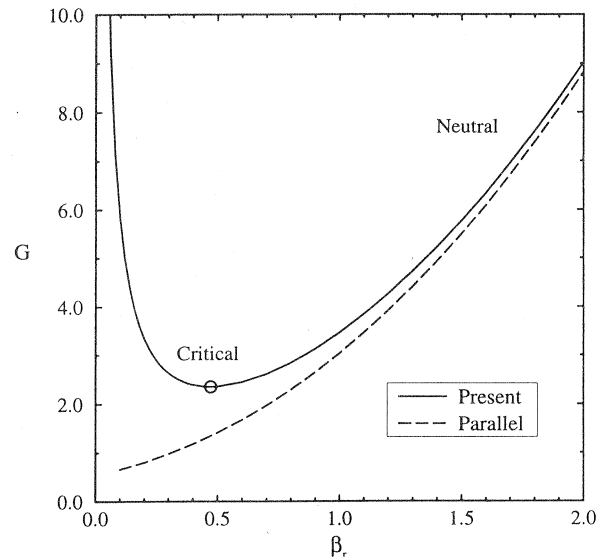


Fig. 2. Neutral curves for Görtler instability.

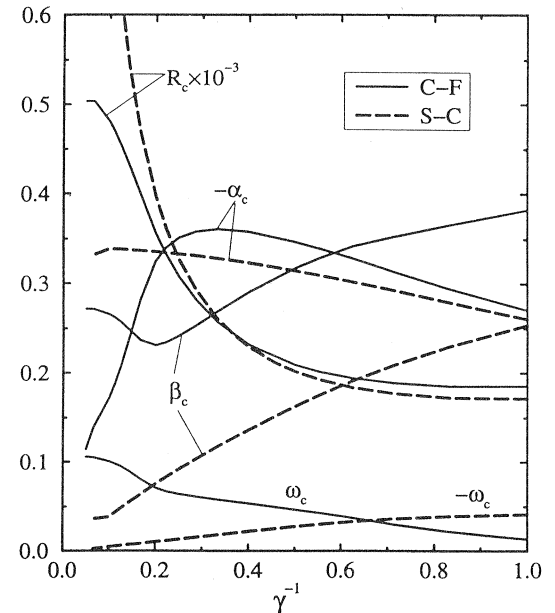


Fig. 3. Critical curves of attachment-line flow.

### 5. むすび

後退翼上に形成される三次元境界層の多重不安定性を予測するための簡単で便利な安定計算法が提案された。付着線境界層に対する厳密な攪乱方程式の級数解の初項を支配する方程式と二次元淀み点流れのゲルトラー不安定に対する級数解初項を決める方程式および良く知られた平行流近似方程式の3つを重ね合わせることで安定性方程式の簡易モデルが作られた。壁面の曲率と境界層流れの非平行性が合理的に取り入れられているので、後退翼の前縁から後縁までのほとんどの領域で十分信頼できる安定特性を与えるものと予想される。翼の設計や遷移現象の解明を目的とする実験<sup>13,14)</sup>に基礎的な計算データを提供するという目的には、極めて有効な方法である。

### References

- 1) Itoh, N.: Instability of three-dimensional boundary layers due to streamline curvature. *Fluid Dyn. Res.* 14 (1994), 353-366.
- 2) Itoh, N.: Streamline-curvature instability of three-dimensional boundary layers, II. Stability estimation of the flow on a yawed elliptic cylinder. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.* 39 (1996), 60-73.
- 3) Itoh, N.: Development of wedge-shaped disturbances originating from a point source in a three-dimensional boundary layer. *Fluid Dyn. Res.* 18 (1996), 337-354.
- 4) Rosenhead, L.: *Laminar Boundary Layers*. 1963, Chap. 8, Oxford Univ. Press, Oxford.
- 5) Goldstein, S.: *Modern Development in Fluid Dynamics*. 1938, Chap. 4, Oxford Univ. Press, Oxford.
- 6) Itoh, N.: Non-parallel stability analysis of three-dimensional boundary layers along an infinite attachment line. *Fluid Dyn. Res.* 27 (2000), 143-161.
- 7) Itoh, N.: A non-parallel theory for Görtler instability of Falkner-Skan boundary layers. *Fluid Dyn. Res.* 28 (2001), 383-396.
- 8) Mack, L.M.: Boundary-layer linear stability theory. AGARD Rep. No. 709 (1984), pp. 3.1-3.81.
- 9) Itoh, N.: Centrifugal instability of three-dimensional boundary layer along concave walls. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.* 37 (1994), 125-138.
- 10) Smith, F.T.: On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 366 (1979), 91-109.
- 11) Herbert, Th.: On the stability of the boundary layer along a concave wall. *Arch. Mech. Stoc.* 28 (1976), 1039-1055.
- 12) Hall, P., Malik, M.R. and Poll, D.I.A.: On the stability of an infinite swept attachment line boundary layer. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 395 (1984), 229-245.
- 13) Takagi, S., Itoh, N. and Tokugawa, N.: Dispersive growth of unsteady disturbances due to cross-flow and streamline-curvature instabilities in 3-D boundary layers. *Proc. 1996 Meeting of Japan Soc. Fluid Mech.*, 1996, pp. 87-88.
- 14) Kusumo, P., Takagi, S., Tokugawa, N., Itoh, N. and Nishizawa, A.: Behavior of unstable disturbances near the attachment line. *NAL SP-48* (2000), pp. 23-24.

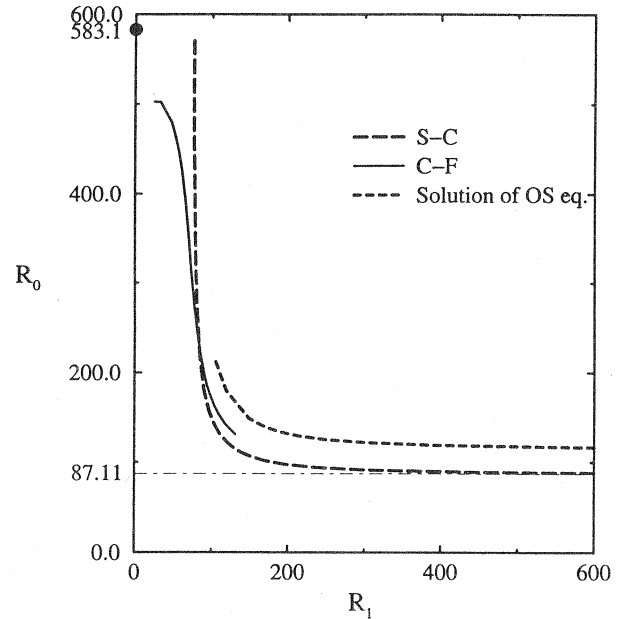


Fig. 4. Critical curves on the  $(R_1, R_0)$ -plane.