

## No.6 角柱列を過ぎる流れの合流現象と乱流への遷移

秋永剛, 角石孝央, 水島二郎 (同志社大工)

Vortices shed from a row of square bars

T. Akinaga, T. Kadoishi, J. Mizushima

Department of Mechanical Engineering, Doshisha University

### ABSTRACT

Interactions between the wakes in a flow past a row of square bars are investigated by numerical simulations, the linear stability analysis and the bifurcation analysis. It is assumed that the row of square bars is placed across a uniform flow. Two-dimensional and incompressible flow field is also assumed. The flow is steady and symmetric along a streamwise centerline through the center of each square bar at low Reynolds numbers. However, it becomes unsteady and periodic in time at the Reynolds numbers larger than a critical value, and then the wakes behind the square bars become oscillatory. It is found by numerical simulations that vortices are shed synchronously from every couple of adjacent square bars in the same phase or in the anti-phase depending upon the distance between the bars. The synchronous shedding of vortices is clarified to occur due to an instability of the steady symmetric flow by the linear stability analysis. The bifurcation diagram of the flow is obtained and the critical Reynolds number of the instability is evaluated numerically.

Key Words : Flow past a row of square bars, Synchronous shedding of vortices, Instability, Bifurcation

### 1. はじめに

円柱列を過ぎる流れは、風洞実験装置において流れを整流するための整流格子または乱流を生成するための乱流格子を過ぎる流れのモデルである。また、熱交換器においては流路内に円柱列(ピン)が設置され、円柱列により生成される渦が高温壁面および高温円柱列と流体との間の熱交換を促進する役割を果たしている。流体物理学においても、柱列を過ぎる流れは基本的な周期流としても研究され、エネルギーの逆カスケードや流れのカオスの振る舞いなど乱流への遷移について、多くの新しい物理的な現象が発見されている。

レイノルズ数が小さいとき、一様流中におかれた円柱列を過ぎる流れは円柱列の周期と同じ周期をもつ定常流であるが、レイノルズ数が大きくなると各円柱間隙から流れ出るジェット流が相互作用をして、円柱列がもつ周期の2倍、3倍、4倍等の周期をもつ流れとなることを見いだされてきた。これまでの研究は主に実験により行われ、およそ数1000のレイノルズ数で実験が行われてきた。このとき、円柱列後方では流れはほぼ乱流状態であり、円柱間隔比(=円柱間隔/円柱直径)がおよそ2.1-2.2よりも小さいとき円柱間隙から出るジェットは相互作用をして、円柱列の周期の2倍、3倍等の流れのパターンが出現することが示され

た。[1, 2, 3]しかし、ジェットの合流機構についてはまだわかっていない。

最近、もっと小さいレイノルズ数においても円柱列(角柱列)を過ぎる流れにおいて合流現象がおこることが報告された。[5, 6, 7]このとき、円柱列(角柱列)と同じ周期をもつ定常流から合流した定常流に遷移する場合と合流した振動流に遷移する2つの場合がある。合流した定常流に遷移する場合については Mizushima & Takemoto[5] および Mizushima & Kawaguchi [6] が微分方程式の解の分岐理論により調べ、この遷移がピッチフォーク分岐によることを明らかにした。一方、合流した振動流に遷移する機構についてはまだ詳しく調べられていない。

ここでは、一様流中に角柱列が流れと垂直におかれているときに生じる流れの合流現象について数値シミュレーションにより調べ、その合流の物理的原因および数学的解釈について線形安定性理論により明らかにする。

### 2. 基礎方程式と数値計算法

#### 2.1 基礎方程式と境界条件

一様流中に、流れの方向と垂直におかれた角柱列を過ぎる流れを考える(図1)。角柱列より十分上流で流れは速さ $U$ の一様流であり、流れの方向に $x$ 軸、流れ

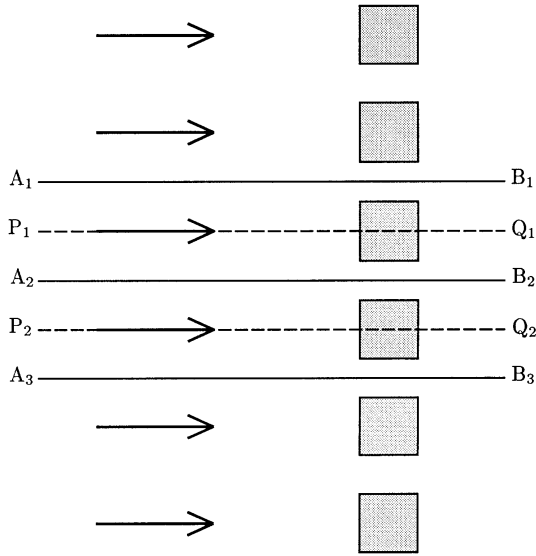


図 1: 角柱列配置と座標系.

と垂直に  $y$  軸をとる. 角柱はすべて辺長  $d$  の正方形断面をもち, 間隔  $P$  で等間隔に並んでいる. 流れを特徴づけるパラメータとしてレイノルズ数  $Re \equiv Ud/\nu$  と間隔比  $A \equiv P/d$  を定義する. ここで,  $\nu$  は流体の動粘性係数である.

ここでは, 2次元流れ場を仮定する. 基礎方程式は連続の式と非圧縮ナビエ・ストークス方程式であり, 速度を  $\mathbf{u} = (u, v)$ , 圧力を  $p$  とおくと, 無次元形で次式のように表される.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2)$$

ただし, 無次元化においては代表長さとして角柱の辺長  $d$ , 代表速度として上流での一様流速  $U$  を用いた. 2次元流の仮定より, 基礎方程式 (1) と (2) は流れ関数  $\psi$  と渦度  $\omega$  を用いて次の渦度輸送方程式とポアソン方程式に書き換えることもできる.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\omega = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

角柱の表面では, 滑りなしの境界条件 (粘着条件) を用い, 角柱列の十分上流で流れは一様流であると仮定する. 十分下流では主にゾンマーフェルトの放射条件

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

を用いた. (5) 式における  $u$  の値としては各点での  $x$  方向速度  $u$  を用いる. ただし, 線形安定性解析における攪乱速度場の計算では, 十分下流で流出条件  $\partial^2 \psi / \partial x^2 = 0$  および  $\partial \omega / \partial x = 0$  を用いた.

## 2.2 対称定常流

レイノルズ数が小さいときには流れは各角柱を通り  $x$  軸に平行な直線 (図における  $P_1Q_1$  および  $P_2Q_2$ ) と角柱間の中心を通る  $x$  軸に平行な直線 (図における  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  および  $A_3B_3$ ) に対して対称な定常流である. この対称定常流はレイノルズ数がある値よりも大きくなると不安定になるが, 基礎方程式の解としてはどんなに大きなレイノルズ数でも存在する. この対称定常流を  $\bar{u}$ ,  $\bar{p}$  または  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\omega}$  で表すと,  $\bar{\psi}$  と  $\bar{\omega}$  は次の方程式を満たす.

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} \right), \quad (6)$$

$$\bar{\omega} = - \left( \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right). \quad (7)$$

$\bar{\psi}$  および  $\bar{\omega}$  が満たすべき境界条件は  $\psi$  と  $\omega$  が満たすべき境界条件と同じである.

## 2.3 線形安定性理論

対称定常流の線形安定性を調べるため, 対称定常流  $\bar{\psi}$ ,  $\bar{\omega}$  に攪乱  $\psi'$ ,  $\omega'$  が付け加わった状況を考え, 流れ関数  $\psi$  および渦度  $\omega$  を対称定常流と攪乱の和であるとして  $\omega = \bar{\omega} + \omega'$  および  $\psi = \bar{\psi} + \psi'$  と表す. これらを方程式 (3), (4) に代入し, 攪乱についての非線形項を無視することにより, 次の線形攪乱方程式を得る.

$$\lambda \hat{\omega} = \frac{\partial^2 \hat{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\omega}}{\partial y^2} + Re \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right) \quad (8)$$

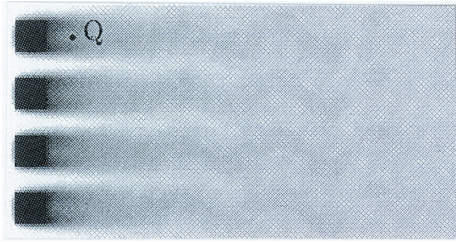
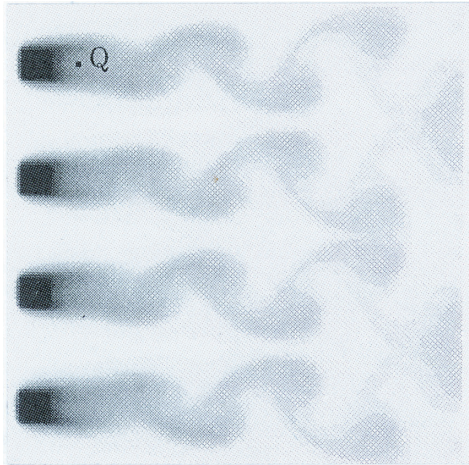
$$\hat{\omega} = - \left( \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

ここで,  $\lambda$  は複素線形増幅率であり, 攪乱を  $\psi' = \hat{\psi}(x, y) \exp(\lambda t)$  および  $\omega' = \hat{\omega}(x, y) \exp(\lambda t)$  とおいた.

方程式 (8), (9) を SOR 法により解き  $\lambda$  を計算し,  $\lambda$  の実部 (線形増幅率)  $\lambda_r$  が正のとき対称定常流は安定であり,  $\lambda_r$  が負のとき不安定であると判定する.

## 2.4 数値計算法

数値計算においては計算領域を等間隔の格子状に分

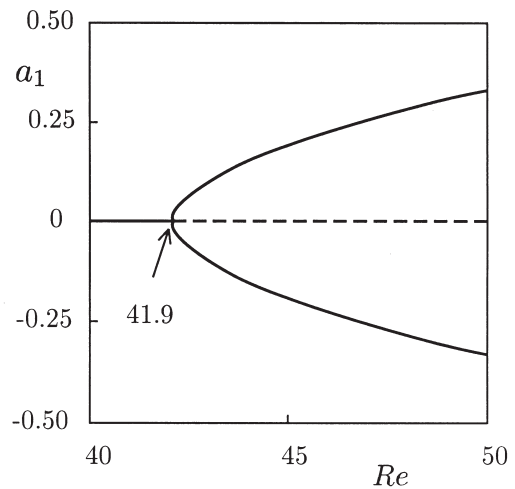
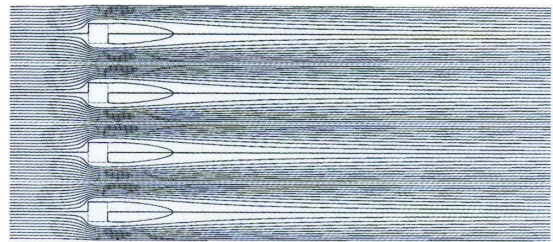
図 2: 流れ場, 同位相振動流.  $A = 2, Re = 48$ .図 3: 流れ場, 逆位相振動流.  $A = 4, Re = 48$ .

割し, 方程式を差分近似することにより, 数値シミュレーションおよび対称定常流の線形安定性解析を行った. ナビエ・ストークス方程式の直接数値シミュレーションには MAC 法, 対称定常流解を直接に求めるときには SOR 法を用いた. 定常な状態は渦度輸送方程式の時間微分項をゼロとした方程式とポアソン方程式を SOR 法で解くことにより求めることができる. また, 線形安定性解析には SOR 法を用いた.

### 3. 結果と考察

#### 3.1 数値シミュレーション

数値シミュレーションにより流れの時間発展を調べた. その典型的な計算結果を示す. 図 1 において流れは  $A_1B_1$  と  $A_2B_2$  間で周期的であると仮定して数値シミュレーションを行った結果を図 2 に示す. 図 2 は間隔比  $A = 2$ , レイノルズ数  $Re = 48$  で, 適当に定めた初期状態より十分に時間が経ってほぼ周期的な状態での流れ場である. この図より各角柱から同位相で渦が放出されていることが見て取れる. 図 1 において流れは  $A_1B_1$  と  $A_3B_3$  で周期的であり,  $A_2B_2$  について反対称性を仮定して数値シミュレーションを行った結果を図 3 に示す. この流れは間隔比  $A = 4$ , レイノル

図 4: 分岐図. 逆位相モード.  $A = 4$ .図 5: 対称定常流 (不安定).  $A = 3, Re = 48$ .

ズ数  $Re = 48$  で, 初期状態より充分時間が経ったときの流れである. 隣り合う角柱から互いに逆位相で渦が放出されている.

流れが対称定常流から振動流へと遷移する様子を詳しく調べるため, 角柱中心から後方  $1.5d$  の点 Q (図 2, 図 3) における速度の  $y$  方向成分  $v_1$  のとる最大値と最小値を測定した. 図 4 に例示した  $A = 4$  のときの逆位相振動モードに対する  $v_1$  の最大, 最小値のレイノルズ数依存性を図 4 に示す. これより, 間隔比  $A = 4$  の逆位相モードの臨界レイノルズ数  $Re_c$  は 41.9 で, 定常流は  $Re_c$  でホップ分岐して振動流へ遷移することが分かる. 臨界レイノルズ数におけるストローハル数  $St = fd/U$  も評価した. 同様にして図 2 に示されるのときの同位相モードへの遷移の臨界レイノルズ数  $Re_c$  は 28.6 であることが分かった.

#### 3.2 定常解

対称定常流を数値的に計算した. 例として間隔比  $A = 3$ , レイノルズ数  $Re = 48$  の定常流を図 5 に示す.

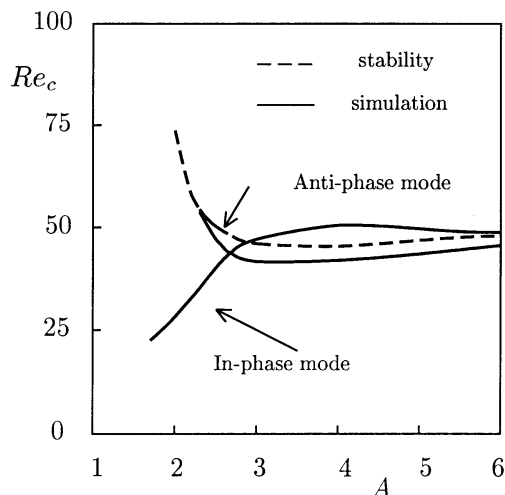


図 6: 遷移図. 臨界レイノルズ数.

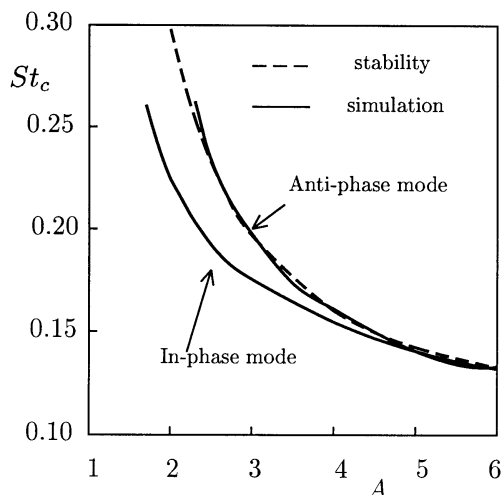


図 7: ストローハル数.

この定常流は不安定であり、時間発展方程式の数値シミュレーションによって求めることはできない。

### 3.3 線形安定性

定常流の線形安定性解析を行い、振動流へ遷移する臨界レイノルズ数を求めた。間隔比  $A = 4$  の逆位相モードに対する線形増幅率を計算し、臨界レイノルズ数  $Re_c$  を求めると  $Re_c = 45.4$  となった。数値シミュレーション結果の分岐解析により得られた臨界レイノルズ数は 41.9 であり、およそ 8% の相対誤差があるがこれは差分近似による誤差であり、差分間隔を小さくすると減少する。

いろいろな間隔比  $A$  について臨界レイノルズ数  $Re_c$  を計算した結果は図 6 のようになる。またそのときのストローハル数は図 7 のようになる。なお、図 6 および図 7 において実線は数値シミュレーションによって求めた解、破線は線形安定性解析で求めた解である。

図 6 において臨界レイノルズ数を示す曲線は同位相モードでは左下がり逆位相では左上がり、線形安定性と数値シミュレーションの結果はほぼ一致している。また、 $A = 2.7$  で臨界レイノルズ数の大小関係が逆転している。間隔比が  $A = 2.7$  より小さいところでは定常流は同位相振動流へ遷移し、間隔比が  $A = 2.7$  より大きいところでは定常流は逆位相振動流へ遷移することが分かる。

ストローハル数は図 7 に示すように同位相モードと逆位相モードについてほぼ同様の傾向である。線形安定性解析の結果とほぼ一致する。間隔比が大きくなると同位相モードと逆位相モードの値が近づくことがわかる。

また、間隔比が大きくなると角柱後流間の相互作用が小さくなり、一様流中における角柱が一つおかれた場合の臨界レイノルズ数 48.8 および臨界ストローハル数 0.135[5] に漸近している。

## 参考文献

- [1] J. G. von Bohl: Das verhalten paralleler Luftstrahlen. *Ing.-Arch.* **11** (1940) 295-314.
- [2] P. Bradshaw: The effect of wind-tunnel screens on nominally two-dimensional boundary layers. *J. Fluid Mech.* **22** (1965) 679-687.
- [3] P. M. Moretti: Flow-induced vibrations in arrays of cylinders. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25** (1993) 99-114.
- [4] T. Matsui: Proc. 1975 Joint JSME-ASME Applied Mechanics Western Conference (1975, Honolulu, Japan Soc. Mech. Engr.), pp. 415-421.
- [5] J. Mizushima & Y. Takemoto: Stability of the flow past a row of square bars. *J. Phys. Soc. Japan* **65** (1996) 1673-1685.
- [6] J. Mizushima & Y. Kawaguchi: Transitions of flow past a row of square bars. *J. Fluid Mech.* **405** (2000) 305-323.
- [7] J. F. Ravoux & P. Le Gal: Biorthogonal decomposition analysis and reconstruction of spatiotemporal chaos generated by coupled wakes. *Phys. Rev. E* **588** (1998) 5233-5236.