No.22 一様乱流の速度分布の慣性正規性

巽　友正（国際高等研），吉村　卓弘（日立製作所）

Inertial normality of the velocity distributions in homogeneous turbulence

T. Tatsumi* and T. Yoshimura**

* International Institute for Advanced Studies
** Hitachi Corporation

ABSTRACT

In the previous report [1], the *cross-independence* of the velocities at two points in homogeneous turbulence was employed as the closure hypothesis for the equations of the velocity distributions, and it was shown that there exists an *inertial normal* one-point velocity distribution. In the next report [2], the same hypothesis was applied to the equation for the two-point velocity distributions, but no solution was given due to the formal complexity of the equation.

In this report, a closed equation is derived for the two-point velocity distributions using the same hypothesis in another meaningful way, and it is shown that again there exist *inertial normal* distributions for the velocity-sum and the lateral velocity-difference distributions. The longitudinal velocity-difference distribution is found to be *inertial normal* only outside the dissipative and inertial ranges and tends to the delta distribution in the limit of coincidence of the two points.

Key Words: turbulence, two-point velocity distributions, inertial normal (Gaussian) distribution

1．交差独立性理論

この報告は「交差独立性理論」に関する三回目の報告となる。第一回は1997年３月の研究会で、交差独立性の仮説のもとに、自由減衰する一様乱流の一点速度分布が、エネルギー減衰率 ε に比例する拡散係数をもつ正規分布となること、さらに時間 t の逆一乗に比例するエネルギー減衰則を持つことを示した[1]。第二回は1998年３月の研究会で、この仮説を三点速度に適用して、二点速度分布に対する閉じた方程式を導いたが、方程式の複雑性のため解を求めるに至らなかった[2]。

今回は、交差独立仮説の三点速度への適用の仕方を変えて、二点速度分布に対するより簡単で、しかも保存諸条件を満たす方程式を導き、この方程式を用いて、解のさまざまな性質を調べることができた。　最も著しい性質は、一点速度分布の際に見られた、粘性率 ν を含まない*慣性正規性*(inertial normality)が二点速度分布においても見られることで、非正規性は、散逸領域と慣性領域においてのみ現れる。　今回は、これらの結果について報告する。

2．交差独立仮説

一様乱流において、時刻 t 、二点 x_1、x_2 での乱流の速度を $u(x_1, t)$、$u(x_2, t)$ で表わせば、一点・二点速度分布は次のように定義される。

$$f(1) = f(u_1, t) = \langle \delta(u(x_1, t) - u_1) \rangle \qquad (I3)$$

$$f^{(2)}(1,2) = f^{(2)}(u_1, u_2; r, t)$$
$$= \langle \delta(u(x_1, t) - u_1)\, \delta(u(x_2, t) - u_2) \rangle \qquad (I4)$$

ここに、 $u_i\,(i=1,2)$ は速度 $u(x_i, t)$ に対応する確率変数、δ は三次元デルタ関数、〈 〉は初

期分布に対する平均値、そして、$r = x_2 - x_1$は二点間の距離を表わす。 なお、式番号の前のIは文献1)の式番号を示す。

距離$r = |r|$が極めて大きいか、極めて小さいかの極限においては、$f^{(2)}$とfとの間に次のような関係が成り立つ。

分離条件：$\lim_{|r| \to \infty} f^{(2)}(1,2) = f(1)f(2)$ (I 8)

一致条件：$\lim_{|r| \to 0} f^{(2)}(1,2) = f(1)\delta(u_2 - u_1)$ (I 9)

これらの条件以外、一般に二点分布と一点分布との関係は存在しない。 ただ、多点分布を低次の分布と関係づけるのに広く用いられるのは*独立性*の仮定で、二点分布に対しては、

$$f^{(2)}(1,2) = f(1)f(2) \qquad \text{(I 11)}$$

で表わされる。 この関係は、(I 8)から明らかなように、rが極めて大きい場合に成り立つ。

ここで見方を変えて、速度u_1とu_2との和と差、

$$u_+ = \tfrac{1}{2}(u_1 + u_2),\quad u_- = \tfrac{1}{2}\Delta u = \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) \qquad \text{(I 12)}$$

を分布の新たな変数と考え、速度変数u_+、u_-の分布を(I 14)のように定義すれば、$f^{(2)}$とfとの独立関係(I 11)とは違った*交差独立性*、

$$f^{(2)}(1,2) = f^{(2)}(u_1, u_2; r, t) = 2^{-3} g^{(2)}(u_+, u_-; r, t) \qquad \text{(I 17)}$$

$$g^{(2)}(u_+, u_-; r, t) = g_+(u_+, r, t)\, g_-(u_-, r, t) \qquad \text{(I 18)}$$

を考えることができる。 この関係は、通常の独立性(I 11)とは違って、分離条件(I 8)と一致条件(I 9)をともに満たすことができる。

この交差独立性は、Kolmogorov [3)]の局所等方性乱流理論における基本仮説と同等である。この基本仮説では、乱流の小規模成分は統計的に一様等方的であり、大規模成分とは独立な平衡状態にあると仮定し、小規模成分を表わす変数として速度差Δuをとっている。 この仮説は、(I 12)と(I 18)を考慮すれば、まさに交差独立仮説に他ならない。

この仮説についてはSreenivasan他[4)]による実験的検証がなされており、等方性乱流においては、小規模成分に関する統計量は、慣性領域では大規模成分に依存しないとの結論が得られている。 この結論は、ここでの対象が一様等方性乱流であり、仮説の適用が慣性領域以下の距離rに限られていることから見て、その有効性を保証するものと言えよう。

3．慣性正規性

交差独立仮説を用いて導いた一点速度分布方程式(I 29)とその解の表わす正規分布(I 40)は、いずれもパラメターとしてはエネルギー散逸率ε(I 32)のみを含み、粘性率νを含まない。これは、ここで得られた分布が、Kolmogorovの意味での慣性相似則に従う*慣性正規分布*であることを示している。 このことは、この分布のもつReynolds数が$R = \infty$であり、Kolmogorov長さが$\eta = 0$であることを意味しており、それは、この一様等方性乱流が有限の特性長さをもたないことに起因している。

この乱流のエネルギー減衰則$E \propto t^{-1}$、エネルギー散逸の減衰則$\varepsilon \propto t^{-2}$(I 44)は、いずれもこの意味に理解されなければならない。 現在の多くの実験結果から帰納されるエネルギー減衰則は$E \propto t^{-1.2}$であるが、この程度の誤差は、実験の乱流Reynolds数の有限性から止むを得ないものと思われる。

4．二点速度分布方程式

二点速度分布を求めるには、二点分布方程式(II 3)(IIは文献2)の式番号)の粘性項と圧力項に含まれる高次分布に交差独立仮説を適用して、閉じた方程式を導かなければならない。

粘性項に関しては、前回は、距離が0となる二点に対して仮説を適用して閉じた表現(II 9)を導いたが、今回もこの結果を用いる。

圧力項に関しては、前回は三点一致の条件(II 10)による表現(II 15)を導いたが、この仮定は一意的ではなく、得られた結果も取り扱いが難しいために、今回は粘性項と同じ方式での仮説の適用を行なう。

以上の方針のもとに解析(省略)を行なえば、次のような二点速度分布方程式が得られる。

$$\begin{aligned}[\partial/\partial t + (u_2 - u_1)\cdot\partial/\partial r &+ \alpha^2\{|\partial/\partial u_1|^2 + |\partial/\partial u_2|^2\} \\ &- \{(\partial/\partial u_1 \cdot \partial/\partial x_1)\beta(u_1, t) \\ &+ (\partial/\partial u_2 \cdot \partial/\partial x_2)\beta(u_2, t)\}]\times \\ &\times f^{(2)}(u_1, u_2; r, t) = 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\beta(u_i, t) = (4\pi)^{-1}\iint |r'|^{-1}(u_i \cdot \partial/\partial r')^2 \times g_-(u_-', r', t)\,dr'\,du_-', \quad i = 1, 2 \qquad (2)$$

二変数分布$f^{(2)}$は取り扱いが面倒なので、これを速度和u_+と速度差u_-の分布に分けて考える。このため(1)式を書き換えれば次のようになる。

$$\begin{aligned}[\partial/\partial t + 2u_-\cdot\partial/\partial r &+ \tfrac{1}{2}\alpha^2(|\partial/\partial u_+|^2 + |\partial/\partial u_-|^2) \\ &- \{(\partial/\partial u_1 \cdot \partial/\partial x_1)\beta(u_+ - u_-, t) \\ &+ (\partial/\partial u_2 \cdot \partial/\partial x_2)\beta(u_+ + u_-, t)\}]\times \\ &\times g^{(2)}(u_+, u_-; r, t) = 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

5．速度和の分布

5.1 速度和の分布方程式

速度和の分布 g_+ に対する方程式は、(3)式を u_- のすべての値に対して積分することによって、

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_+|^2$$
$$-\{\partial/\partial u_1\cdot\partial/\partial x_1+\partial/\partial u_2\cdot\partial/\partial x_2\}\times$$
$$\times\{\beta(u_+,t)+\langle\beta(u_-)\rangle\}]g_+(u_+,r,t)=0$$

となるが、u_i と x_i $(i=1,2)$ による微分は u_+ の関数に対して働くため、圧力項は消えて、方程式は次式に帰着する。

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_+|^2]\,g_+(u_+,r,t)=0 \quad (4)$$

(4)式は交差独立仮説による速度和の分布方程式を与えるが、方程式は粘性項の係数$\tfrac{1}{2}$を除いて一点速度分布方程式（Ⅰ29）と同形であり、距離 r に依らない。

5.2 速度和の正規分布

(4)式は（Ⅰ29）の係数 α^2 を $\tfrac{1}{2}\alpha^2$ で置き換えたものであるから、同じ手順によって一点速度分布（Ⅰ40）から直ちに、速度和の分布 g_+ に対する三次元正規分布、

$$g_+(u_+,t)=(t/2\pi\alpha_0{}^2)^{3/2}\exp(-|u_+|^2t/2\alpha_0{}^2) \quad (5)$$

が得られる。　速度和の分布 g_+ の分散が一点速度分布 f の分散の$\tfrac{1}{2}$であることは、g_+ が互いに独立な一点速度 u_1 と u_2 の和の分布に等しいことを示している。

速度和の分布の実験的測定は数多くなされているが、いずれも正規分布とほとんど一致しており、ただ平坦度は正規分布の 3 よりやや小さい2.66となっている。[4)]

(5)式で与えられる速度和の分布が、一点速度分布（Ⅰ40）と同じ*慣性正規性*をもつことは、分離条件（Ⅰ8）がすべての距離において成り立つことを意味する。　このことは、距離 0 での一致条件（Ⅰ9）と矛盾するように見えるが、これは分布の慣性相似性によって解決する。　慣性相似性の下では、Kolmogorov長さ $\eta=(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}=0$ であるから、散逸領域は無限小となる。　このとき、解は無限小の散逸領域の下端 $r=0$ において一致条件（Ⅰ9）を満たし、上端 $r=0(\eta)>0$ において分離条件（Ⅰ8）を満たすことになるのである。

5.3 準正規近似理論

二点速度分布に対する分離条件（Ⅰ8）が、距離 0 の近傍を除くすべての領域において成立することは、この条件に基礎をおく乱流の準正規近似理論に大きな物理的根拠を与える。　よく言われるように、この近似は低 Reynolds 数においてのみ有効なのではなく、逆に、慣性極限（$\nu\to0$、$\varepsilon>0$）に近い高 Reynolds 数においても成立することは、上に示されたとおりである。

では、なぜ準正規近似理論のあるものは破綻し、あるものは一定の成果を収め得たのか。その原因は、高 Reynolds 数における有限の慣性散逸（$\varepsilon>0$）の存在にある。　近似理論の物理的根拠が何であれ、結果として有限の慣性散逸をどう取り入れたかによって理論の成否が分かれたと考えられる。　しかし、有限の慣性散逸は、元来人為的な仮定ではなく、（Ⅰ27）、（Ⅰ28）におけるように、散逸項に乱流の小規模成分を繰り込むことによって導かれるべきものである。

6．速度差の分布

6.1 速度差の分布方程式

速度差の分布 g_- に対する方程式は、(3)式を u_+ のすべての値について積分することによって、

$$[\partial/\partial t+2u_-\cdot\partial/\partial r+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_-|^2$$
$$-\{\partial/\partial u_1\cdot\partial/\partial x_1+\partial/\partial u_2\cdot\partial/\partial x_2\}\times$$
$$\times\{\langle\beta(u_+)\rangle+\beta(u_-,\ t)\}]\,g_-(u_-,r,t)=0$$

となるが、u_i と x_i $(i=1,2)$ による微分は u_- の関数に働くため、方程式は次式に帰着する。

$$[\partial/\partial t+2u_-\cdot\partial/\partial r+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_-|^2$$
$$-2(\partial/\partial u_-\cdot\partial/\partial r)\beta(u_-,t)]\times$$
$$\times g_-(u_-,r,t)=0 \quad (6)$$

ここに、速度差 u_- の関数は速度和 u_+ の関数に比べてより激しく変化することを考慮して、$\langle\beta(u_+)\rangle$ を $\beta(u_-,t)$ に比べて無視している。

6.2 遠隔解

(6)式は一般に距離 r に依存するが、遠隔領域では r 微分が無視できるため、

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2|\partial/\partial u_-|^2]g_-(u_-,r,t)=0 \quad (7)$$

に帰着する。

(7)式は速度和の(4)式と同一であるから、その解もまた(5)と同形の三次元正規分布、

$$g_-(u_-,t)=(t/2\pi\alpha_0{}^2)^{3/2}\exp(-|u_-|^2t/2\alpha_0{}^2) \quad (8)$$

によって与えられる。

速度差の分布 g_- の遠隔解(8)が速度和の分布 g_+ と同形の正規分布となることは、二点速度が互いに独立であるとき、速度差も速度和と同様に独立偶然量の和となることからの当然の帰結である。

6.3 近接解

近接領域においては分布の非等方性が現れる

ため、(6)式の解を座標成分ごとの一次元分布に分解する必要がある。ただ等方性乱流では、距離rに関する軸対称性を仮定することができる。直角座標系 $\mathbf{x}=(x,y,z)$、距離ベクトル $\mathbf{r}=(r,0,0)$、速度差 $\mathbf{u}_-=(u_\parallel,v_\perp,w_\perp)$ とおけば、一次元速度差分布は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} g_\parallel(u_\parallel,r,t) &= \iint g_-(\mathbf{u}_-,\mathbf{r},t)\,dv_\perp dw_\perp \\ g_\perp(v_\perp,r,t) &= \iint g_-(\mathbf{u}_-,\mathbf{r},t)\,du_\parallel dw_\perp \\ g_\perp(w_\perp,r,t) &= \iint g_-(\mathbf{u}_-,\mathbf{r},t)\,du_\parallel dv_\perp \end{aligned} \tag{9}$$

$g_\parallel$ は軸に平行な縦速度差の分布を、二つの $g_\perp$ は垂直な横速度差の分布を表わす。

6.4 横速度差の分布

横速度差の分布 $g_\perp$ に対する方程式は、(6)式を $u_\parallel$、$w_\perp$ のすべての値に対して積分すれば、次のように得られる。

$$[\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2\partial^2/\partial v_\perp^2]g_\perp(v_\perp,r,t)=0 \tag{10}$$

(10)式は遠隔領域に対する(7)式の一次元形に他ならないから、横速度差の分布の近接解は、(8)と同形の一次元正規分布として、

$$g_\perp(v_\perp,t)=(t/2\pi\alpha_0^2)^{1/2}\exp(-v_\perp^2t/2\alpha_0^2) \tag{11}$$

で与えられる。横速度差の分布が近接領域においても正規分布であることは、奇異に思われるかもしれないが、これは*慣性正規性*の現れである。慣性下では無限に薄い滑り層が可能であるから、横速度に関しては、二点速度の独立性が一致の極限を除いては許されるのである。

6.5 縦速度差の分布

縦速度差の分布 $g_\parallel$ に対する方程式は、(6)式を $v_\perp$、$w_\perp$ のすべての値に対して積分すれば、次のように得られる。

$$\begin{aligned} [\partial/\partial t+\tfrac{1}{2}\alpha^2\partial^2/\partial u_\parallel^2 \\ +\{2u_\parallel+(2/3)(\partial/\partial u_\parallel)(u_\parallel^2+2\langle v_\perp^2\rangle)\}\times \\ \times(\partial/\partial r)]g_\parallel(u_\parallel,r,t)=0 \end{aligned} \tag{12}$$

ここに、$\beta(\mathbf{u}_-,t)$ の積分に関して、主変数 $\mathbf{u}_-$ と副変数 $\mathbf{u}_-'$ との間に等方独立性を仮定している。

(12)式の解として、一点速度分布と同じ時間的自己相似性をもつものを考え、$\alpha^2=\alpha_0^2t^{-2}$, $u_\parallel=ut^{-1/2}\alpha_0$, $r=st^{1/2}\alpha_0$ とおいて、

$$g_\parallel(u_\parallel,r,t)=t^{1/2}G(u,s) \tag{13}$$

と仮定すれば、(9)により、$\langle v_\perp^2\rangle=\alpha_0^2t^{-1}$ となるから、(12)式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} [1+u\,\partial/\partial u+\partial^2/\partial u^2]G \\ +[-s+(4/3)\{5u+(2+u^2)\partial/\partial u\}]\partial G/\partial s=0 \end{aligned} \tag{14}$$

縦速度差分布 G は、近接領域では一致条件の制約により急激に変化するから、(14)式において最高階の項が優越して次のようになる。

$$\partial^2G/\partial u^2+(4/3)(2+u^2)\partial^2G/\partial u\partial s=0 \tag{15}$$

(15)式の一般解は、H を任意関数として次のように表わされる。

$$G(u,s)=H(u+u^3/6-(3/8)s) \tag{16}$$

H として δ 関数のような原点に集中した関数を考えれば、(16)式は、

$$s\ll 1 \text{ に対して} \qquad u\propto s \tag{17}$$

$$s\gg 1 \text{ に対して} \qquad u\propto s^{1/3} \tag{18}$$

の関係が成り立つことを示している。

このうち、(17)は縦速度差の正則性を表わし、一致条件(I 9)を満たしている。一方、(18)は慣性相似則を表わしている。このことから、近接解(16)は、正則領域と慣性領域に対応する解であることが分かる。

以上の結果は、本論文における交差独立仮説が局所平衡仮説と同等であることからの当然の帰結であると思われる。ただ、(16)における関数 H の具体形を求めるには、有限の散逸領域を考慮した解析が必要であるが、これは次の論文において取り扱う。近年、縦・横速度差の分布の直接数値計算は急速に進み、Reynolds数も R_λ ～460 の範囲に及んでいるが、それらの結果[5]との比較も次の課題としたい。

7. 慣性正規分布の普遍性

以上の理論的結果は、一様乱流の一点・二点速度分布が、近接領域における縦速度差の分布を除いて、すべて*慣性正規分布*であることを示している。この一様乱流における*慣性正規性*の存在は、交差独立仮説による散逸領域の局在化によってもたらされたもので、より複雑な非一様乱流においても、その普遍的な存在が期待される。このことは、交差独立仮説の複雑乱流への応用に対して、明るい展望を与えるものと考えられる。

引用文献

1) Tatsumi, T. (1997) 航空宇宙技研特別資料SP-36, pp. 29-32.

2) Tatsumi, T. (1999) 航空宇宙技研特別資料SP-40, pp. 71-74.

3) Kolmogorov, A. N. (1941) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.* **30**, 301-305.

4) Sreenivasan, K. R. & Dhruva, B. (1998) *Prog. Theo. Phys. Suppl.* 130, 103-120.

5) Gotoh, T. (2002) Private communication.