

固気相連成問題におけるインターフェースモデルの構築と高速流解析への応用

黒滝 卓司, 住 隆博
JAXA, 鳥取大学

Construction of Interface model in Solid-fluid Interaction Problem and Application to High Speed Flow Analysis

by
Takuji Kurotaki (JAXA) and Takahiro Sumi (Tottori University)

ABSTRACT

A new interface model in solid-fluid interaction problem is presented. A level set function is used for the definition of shapes and flow properties are corrected within three layers of stencils around interface. This approach is very simple and robust and can capture the detail of flow structures including discontinuities such as shock waves and slip lines etc.. Some basic important 2-D Euler flow problem are solved to verify effects of this approach with WCNS (Weighted Compact Nonlinear Scheme) including a new type of compact scheme to improve robustness including the transonic flow around a 2-D airfoil, the supersonic duct flow around a prism and a circular cylinder and the moving-shock/obstacle interaction problem (Scharadin's problem). The extension of this method to the moving problem with body deformation is straightforward.

1. はじめに

流体中に粒子群を含むいわゆる固気相連成問題解析は、混相流問題の重要なカテゴリーであり、特に低速流における最近の発展は著しい⁽¹⁾。この領域では、目的に応じて、いくつかの解析アプローチが存在するが、その中でも、1個1個の粒子周りの流れを精密に解き、全体の流れを明らかにする DEM-DNS 法をはじめとする直接計算法を用いた方法論が最近注目を集めている⁽¹⁾。しかし、高速流の分野では、任意形状の粒子をオイリアンの的に捕らえ、かつ衝撃波等の不連続現象との相互作用を精密に解く必要があるためか、未だ発展途上の感がある。

一方、従来より通常行われている、例えば動かない翼等の任意物体周りの流れ解析は、固体と気体の連成問題の最もシンプルなケースとみなすことができる。現在までに、多くの IBM(Immersed boundary method)に関する手法が提案され、矩形格子を用いて任意形状周りの解析が可能になりつつある。しかし、強い衝撃波を含む高速流に対する適用は未だチャレンジングな課題であり、研究例も多くは無く⁽²⁾、依然発展の余地を残している。

本研究では、高速流を対象とした固気相連成問題に将来的に適用可能で、かつ簡便なインターフェースモデルを提案する。今回は、第一報として、シンプルな物体周りの高速流れ解析に適用し、性能の評価を試みる。本方法は、後述するように、特定の解析法を選ばない汎用的な手法であるが、本研究では、我々が提案中のロバスト性を向上させた重み付コンパクトスキーム (WCNS 法) をベースにした5次精度の高精度解法^{(3), (4)}と組み合わせさせた結果を報告する。

2. 基礎方程式

気体は理想気体を仮定し、以下のオイラー方程式系を基礎方程式とする。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(q) = 0 \quad (1)$$

$$q = (\rho, \rho u_1, \dots, \rho u_N, E)^T \quad (2)$$

$$f_j = (\rho u_j, \rho u_1 u_j + p \delta_{j,1}, \dots, \rho u_N u_j + p \delta_{j,N}, (E + p) u_j)^T \quad (3)$$

$$E = \rho e + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} / 2 \quad (4)$$

ここで、 N は次元数、 \mathbf{u} は速度ベクトル、 u_j は j 次元目の速度成分、 p は圧力、 E は全エネルギー、 e は単位質量当たりの内部エネルギーである。

計算格子は矩形形状とし、物体形状は後述するように、レベルセット関数 ϕ を使用して定義する。ただし、本報告では、物体形状は変形しないと仮定するため、 ϕ に関する移流方程式は考慮しない。

3. 解析手法

3.1 数値解析スキームの概要

本研究では、基礎方程式 (1) 式を5次精度重み付コンパクトスキーム (Weighted Compact Nonlinear Scheme: WCNS 法) で解くことを考える^{(5), (6)}。ここでは、簡単のため、次の1次元双曲型保存方程式を考える。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(q) = 0 \quad (5)$$

ここでは、すべての q に対して $df(q)/dq \geq 0$ と仮定する。(5) 式は、準離散化することにより、以下の形で評価される。

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_i = -f' \quad (6)$$

ここで、 q はスカラー変数、 i は座標インデックスを表す。続いて、各セル間のフラックスを3種類のサブステンシルにおける3次精度ラグランジェ補間の凸結合により、非線形の5次精度補間を考える。

$$\bar{f}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 \omega_k \bar{f}_{k,i+1/2} \quad (7)$$

ここで、それぞれの低次精度補間は、

$$\bar{f}_{k,i+1/2} = f_i + \frac{\Delta x}{2} \phi_{k,i}^{(1)} + \frac{(\Delta x)^2}{8} \phi_{k,i}^{(2)} \quad (8)$$

で与えられ、式中の1階微分と2階微分は、

$$\begin{bmatrix} \phi_{0,i}^{(1)} \\ \phi_{1,i}^{(1)} \\ \phi_{2,i}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i \\ -f_{i-1} + f_{i+1} \\ -3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2} \end{bmatrix} + O((\Delta x)^2) \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{0,i}^{(2)} \\ \phi_{1,i}^{(2)} \\ \phi_{2,i}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i \\ f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \\ f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2} \end{bmatrix} + O(\Delta x) \quad (10)$$

である。非線形重みは、以下で与えられる⁽⁵⁾。

$$\omega_k^{JS} = \frac{\alpha_k^{JS}}{\sum_{l=0}^2 \alpha_l^{JS}}, \quad \alpha_k^{JS} = \frac{\bar{\omega}_k}{(\beta_k + \epsilon)^p} \quad (11)$$

ここで、 Δx は格子間隔、係数 $(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = (1/16, 10/16, 5/16)$ は最適重み、 p は整数（ここでは、1とした）、 ϵ は微小係数を表す。また、smoothness indicator β_k は次式で与えられる。

$$\beta_k = \sum_{l=1}^2 (\Delta x)^{2l-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^l \bar{f}_k}{dx^l} \right)^2 dx = \left((\Delta x) \phi_{k,i}^{(1)} \right)^2 + \frac{13}{12} \left((\Delta x)^2 \phi_{k,i}^{(2)} \right)^2 \quad (12)$$

このように構成された(7)式を用いて、(6)式の f' は、著者らにより新しく提案された、中点の補間値とノード点を用いた以下の6次精度三重対角中心コンパクト差分スキームを用いて求められる⁽³⁾。

$$\begin{aligned} & \alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \sum_k \left[a_{2k-1} \left(\bar{f}_{i+k-\frac{1}{2}} - \bar{f}_{i-k+\frac{1}{2}} \right) + a_{2k} (f_{i+k} - f_{i-k}) \right] \\ &+ O(\Delta x)^6 \quad (13) \\ & (a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{9-20\alpha}{6}, \frac{-9+62\alpha}{30}, \frac{1+12\alpha}{30} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

(13)式のコンパクトスキームにおいて、 α の実用的な値の範囲は(-1/2, 9/62)であり、従来のスキームに比べWCNS法の堅牢性が格段に向上する。

本解法のオイラー方程式への適用に際しては、原始変数を特性変数へ変換して非線形補間を行い、その後補間値を再度原始変数へ逆変換して、近似リーマン解法による数値流束を計算している。特性変数補間については例えば、文献⁽⁷⁾を参照されたい。また、時間積分スキームには3次精度 TVD ルンゲクッタ法⁽⁵⁾を用いた。

3. 2 インターフェース面近傍の取り扱い

本解析法では、レベルセット関数を用いて定義されたインターフェース面近傍において、物体に最も近い格子点群からなる1層と物体内部の2層の計3層分の物理量に対して修正を施し、物体内部も仮想的な流体として扱うことを考える。

最も基本的な2次元問題のケースとして、Fig. 1に示すような、インターフェース面 ($\phi=0$) が2次元格子点インデックス j と $j-1$ の間に存在する場合を考えると、 (i, j) 、 $(i, j-1)$ 、 $(i, j-2)$ の各格子点における物理量は以下のように修正される。

(a) (i, j) 点:

速度ベクトル $\vec{u}=(u_{i,j}, v_{i,j})$ を $\vec{u}'=(u'_{i,j}, v'_{i,j})$ に修正する。ただし、 \vec{u}' はインターフェース面における接線ベクトルでかつ $|\vec{u}|=|\vec{u}'|$ 。

(b) $(i, j-1)$ 点:

$(i, j-1)$ 点からインターフェース面に垂直方向に引いた直線と $(i-1, j)$ 、 (i, j) 、 $(i+1, j)$ の各格子点との距離 s_1, s_2, s_3 を定義し、この垂線が j 面において (i, j) 点のどちら側を横切るかによって、 s_1, s_2 あるいは s_2, s_3 を用いて物理量を j 面から外挿する。例えば、Fig. 1 の場合、

$$a'_{i,j-1} = (s_1 a_{i,j} + s_2 a_{i-1,j}) / (s_1 + s_2) \quad a = \rho, p, u, v \quad (15)$$

(c) $(i, j-2)$ 点:

シンプルに $j-1$ 面から物理量を外挿する。すなわち、

$$a'_{i,j-2} = a'_{i,j-1} \quad a = \rho, p, u, v \quad (16)$$

その他、例外ケースとして、翼の後端部分のように、インターフェースの間隔が小さいため、物体に最も近い格子点群からなる1層のみが存在し、2層目の格子点群が定義

できない場合には、単純に周囲の流体部分の物理量を平均して与える。例えば、Fig. 2 のような場合、

$$a'_{i,j} = (a_{i+1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}) / 3 \quad a = \rho, p, u, v \quad (17)$$

実際には、物体内の2層目の修正((16)式)を省略したり、1層目の修正を(15)式のような重みづけ計算ではなく、直接 (i, j) 点からの外挿で与えても十分有意な結果が得られるが、上記の修正則を用いた方が若干の結果の向上が見られた。

以上の修正は、ルンゲクッタ法の各ステップ後に行う。インターフェースの法線ベクトルが簡単に定義できるレベルセット関数の特性を用いればこの修正は容易であり、解析コードの構成という観点からみると、矩形格子を想定した基本コードに、初期条件としてのレベルセット関数による物体の形状定義と、物理量の修正に関する手続きを挿入するだけで済むという簡便性を有している。

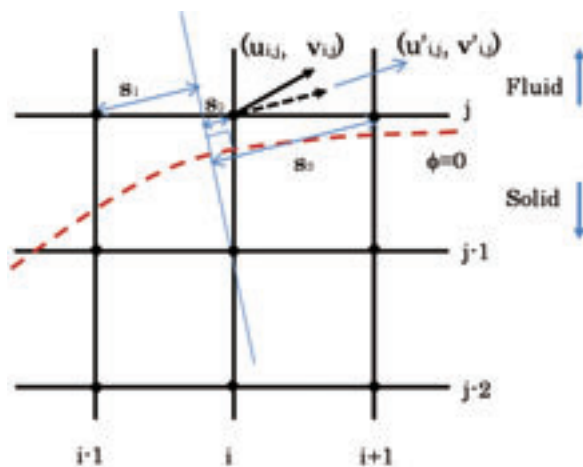


Fig. 1 Schematic image around interface (Normal condition).

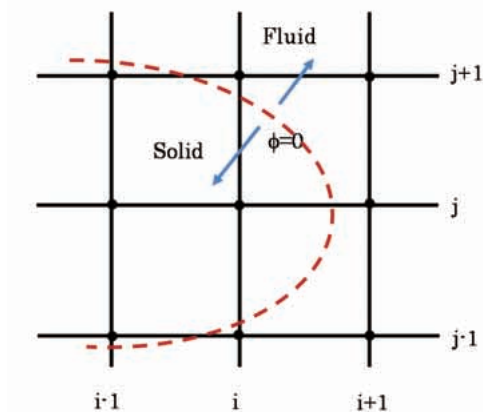


Fig. 2 Schematic image around interface (Special condition).

4. 検証解析

ここでは、本方法の性能を評価するため、いくつかの基本的な問題を検証する。なお、いずれのケースにおいても、(14)式中のコンパクトスキームに関するパラメータ α は0とした。

4. 1 2次元遷音速翼

まず、最も基本的な検証問題として、一様流マッハ数 0.8、迎角 1.25° における NACA0012 翼型周りの流れを検

討する。この流れは従来より検証例として取り上げられており(例えば文献(8))、上面の約 60%コード長付近に比較的強い衝撃波、下面側約 35%コード長付近に弱い衝撃波が生じることがわかっている。

本研究では、インターフェースモデルの性質の把握という性質上、どれ位少ない格子で上下面の衝撃波を正しい位置で捕らえられるかに着目し、1コード長内にそれぞれ50点($\Delta x=0.02$)及び100点($\Delta x=0.01$)の2種類で計算を行った。ただし、最大翼厚における格子点は約20点($\Delta y=0.00625$)に統一した。なお、流束の評価には Roe scheme を用い、時間刻みは CFL=0.6 である。

Fig. 3 及び Fig. 4 にそれぞれの計算格子に対するマッハ数分布を示す。1コード長内に50点程度を分布させた粗い格子ケースにおいても十分な衝撃波解像性能を有することがわかる。

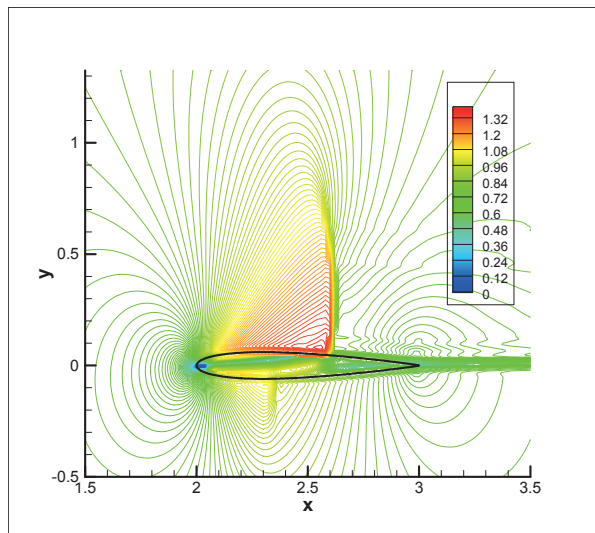


Fig. 3 Mach Contours (NACA0012, $M=0.8$, $\alpha = 1.25\text{deg}$, $\Delta x=0.02$, $\Delta y=0.00625$).

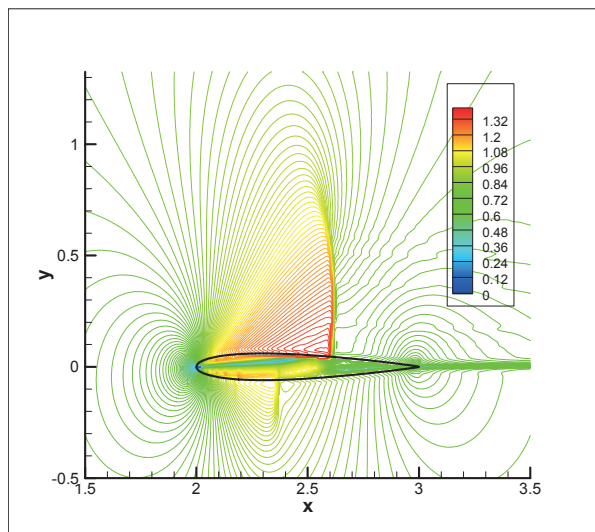


Fig. 4 Mach Contours (NACA0012, $M=0.8$, $\alpha = 1.25\text{deg}$, $\Delta x=0.01$, $\Delta y=0.00625$).

4. 2 超音速流中の物体を過ぎる流れ

次に、マッハ数 3.5 の超音速流に固定されたプリズム形状及び円柱形状を過ぎる流れを考える。上下面を壁面と仮定した $L_x=120\text{ mm}$, $L_y=30\text{ mm}$ のダクト内に物体を置き、初期条件は、 $(\rho, u, p) = (1, 3.5, 1/1.4)$ とする。プリズム先端部の半頂角は 20° 、長さ 11 mm、また、円柱直径は 5 mm とし、格子数は、両者とも 1001×251 点である。流束の評価には LLF⁽⁹⁾ を使用し、CFL=0.5 とした。

Fig. 5 及び Fig. 6 にそれぞれの密度分布を示す。理論式から算出されるプリズム先端から放射される衝撃波角は 35.58° ⁽²⁾ であるのに対し、Fig. 5 から求められる衝撃波角は約 35.6° 、また、円柱前方に生じる円柱直径 D で規格化された離脱衝撃波距離 Λ_x の理論値は $\Lambda_x/D=0.293$ ⁽²⁾ であるのに対し、Fig. 6 から求められる値は、 $\Lambda_x/D=0.3$ であった。これらの検討から、本研究における手法は、超音速流中における物体近傍の衝撃波構造を含む流れ場を、かなり正確に捕らえていることが確認された。

4. 3 Moving-shock/obstacle interaction

最後に、移動する衝撃波と物体との連成問題を検証する。ここでは、移動マッハ数 $M_s=1.30$ で動く衝撃波がプリズム形状を通過するいわゆる Schardin の問題を取り上げた⁽²⁾。Fig. 7 に文献(2)より引用した設定図を示す。プリズム先端の半頂角は 30° 、高さ $b=20\text{ mm}$ 、先端部の x 座標を 54 mm とし、計算領域は $L_x=200\text{ mm}$, $L_y=150\text{ mm}$ とした。また、衝撃波より右側の低圧領域の圧力は 0.05 MPa、温度は 300 K である。入力衝撃波の初期位置はプリズム先端とし、そこからの経過時間を t とする。計算格子数は 2001×1501 点、流束の評価には Roe scheme を用い、時間刻みは CFL=0.5 である。

Fig. 8 に経過時間 $t=138\mu\text{sec}$ における、shadowgraph イメージを示す。入力衝撃波が物体を通過した後では、一般に反射衝撃波や渦、その他にスリッライン、マッハシステム、それらが交差する3重点等の非常に複雑な流れ場が形成されるが、いずれも鮮明に捕らえられており、位置や形状も文献(2)に示された実験結果(文献(2), Fig. 14)と非常に良く一致している。また、 $t=28$ から $178\mu\text{sec}$ までの密度分布の時系列変化を Fig. 9 に示す。いずれの経過時間においても、流れ場の詳細を良く捕らえており、本研究におけるインターフェースの取り扱いがこの問題のような非定常問題の詳細な流れ場の解析にも適用できることが実証された。

5. まとめ

高速流を対象とした固気相連成問題に将来的に適用可能で、かつ簡便なインターフェースモデルを提案した。物体形状にはレベルセット関数を用い、本研究では、特に、著者らにより新しく提案された従来より堅牢性の向上した WCNS スキーム(重み付コンパクトスキーム)を組み合わせることにより、高速流中の衝撃波等の不連続を含む詳細な流れ場をオイリアン的に捕らえることが可能であることを、2次元遷音速翼、超音速流中の物体周りの流れ、移動する衝撃波と物体との連成問題等の検証解析により確認した。

本方法は、当然ながら WCNS スキーム以外の解析スキームによる物体周りの数値解析にも適用可能であるとともに、物体の移動、変形を伴う問題にも容易に拡張可能である。現在、これらの諸課題に対する検証を実施中である。

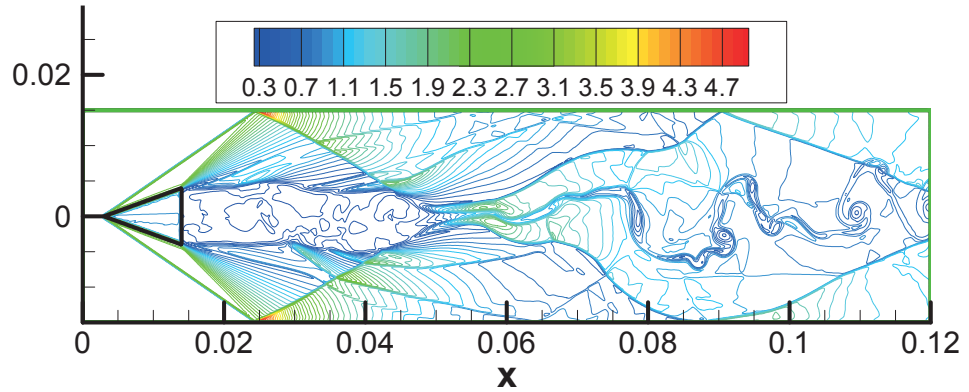


Fig.5 Density Contours (prism, M=3.5)

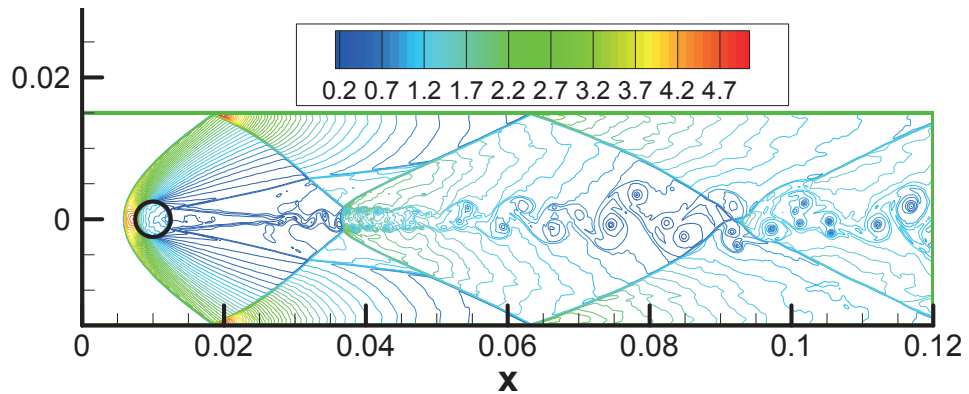


Fig.6 Density Contours (Circular cylinder, M=3.5)

参考文献

- (1) 酒井幹夫編著, “紛体の数値シミュレーション,”丸善出版, (2012).
- (2) A. Chaudhuri, A. Hadjadj and A. Chinnayya, “On the use of immersed boundary methods for shock/obstacle interactions”, Journal of Computational Physics, 230, (2011), pp.1731-1748.
- (3) 住, 黒滝, “重み付きコンパクトスキームの堅牢性および解像度向上への試み,” 第27回数値流体力学シンポジウム, (2013), C03-2.
- (4) 黒滝, 住, “Anti-diffusion interface sharpening technique を応用した重み付コンパクトスキームにおける理想気体不連続接触面の解像度向上について,” 第27回数値流体力学シンポジウム, (2013), C03-3.
- (5) G. S. Jiang, C. W. Shu, “Efficient implementation of weighted ENO scheme”, Journal of Computational Physics, 126, (1996), pp.202-228.
- (6) X. Deng and H. Zhang, “Developing high-order weighted compact nonlinear schemes”, Journal of Computational Physics, 165, (2000), pp. 22-44.
- (7) T. Nonomura and K. Fujii, “Robust explicit formulation of weighted compact scheme”, Computers & Fluids, 85, (2013), pp. 8-18.
- (8) 飯塚, 藤井, “単調性を維持した2次精度 Residual Distribution 法について,” 第14回数値流体力学シンポジウム, (2000), E03-3.
- (9) E. F. Toro, “Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction (3rd edition)”, Springer, (2009).

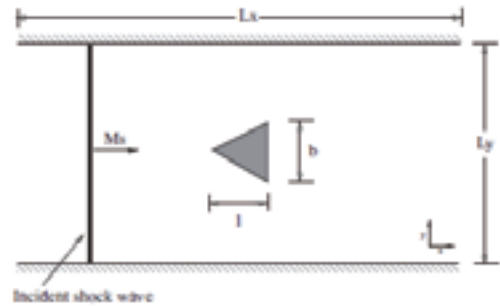


Fig. 7 Schematic diagram of Schardin's problem⁽²⁾.

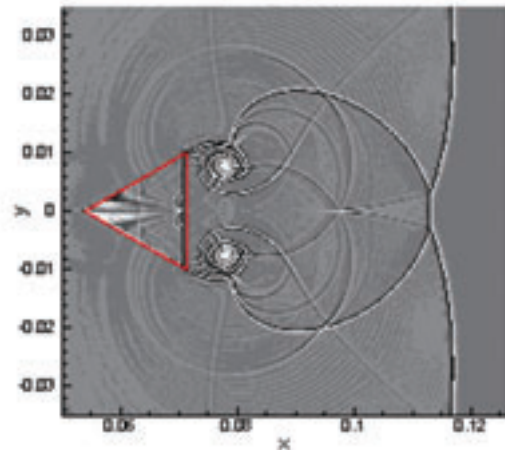


Fig. 8 Numerical shadowgraph image at t=138μsec.

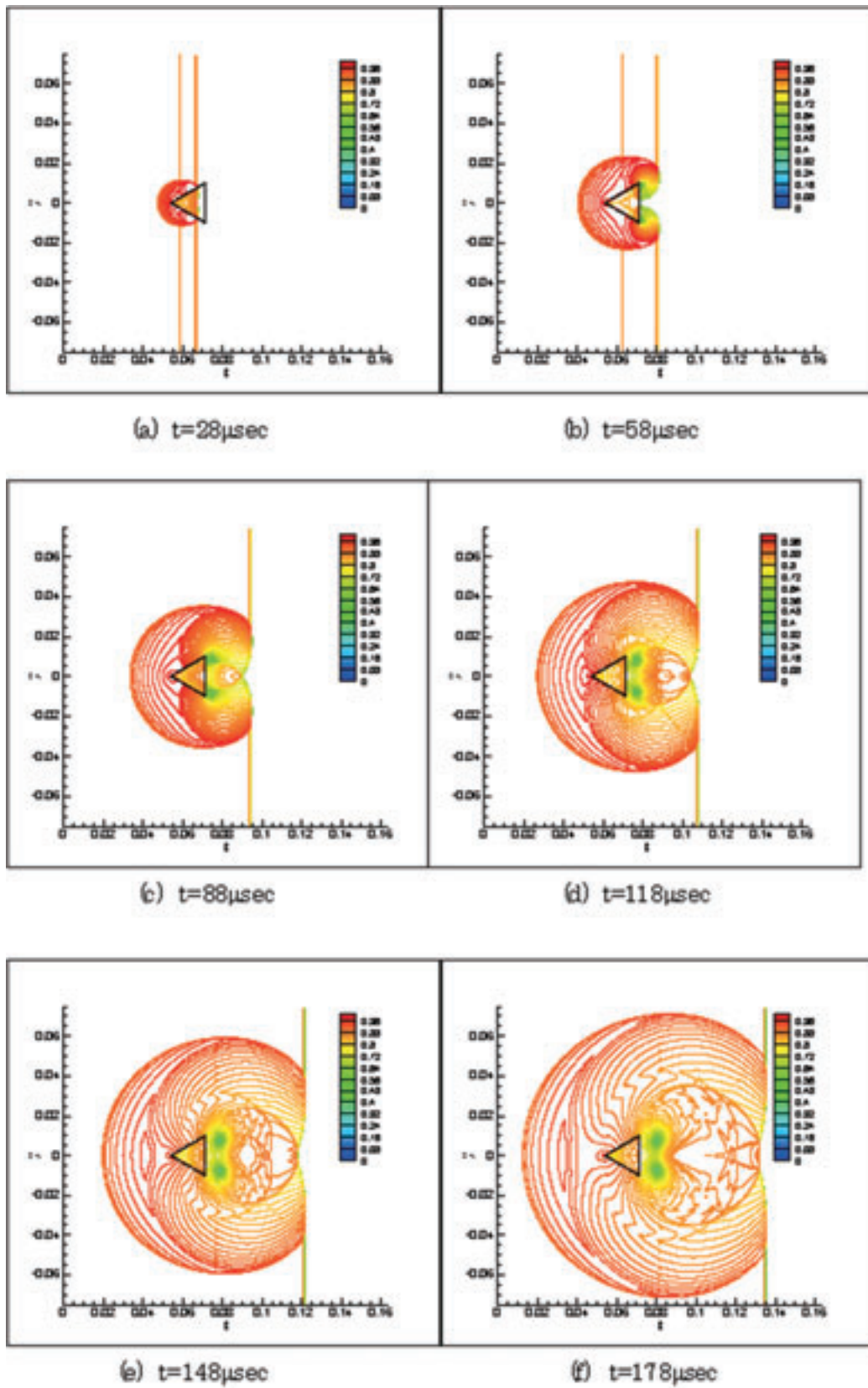


Fig.9 Snapshots of density distribution for Schardin's problem.