

# 宇宙開発事業団技術報告

非球対称重力項を考慮したフォボス近傍探査軌道の研究

1996年3月

宇宙開発事業団

# 宇宙開発事業団技術報告

NASDA Technical Memorandum

非球対称重力項を考慮したフォボス近傍探査軌道の研究

Study on Trajectories Proximity to Phobos with Non-Symmetric Phobos Gravity Terms

歌島 昌由

Utashima, Masayoshi

技術研究本部システム技術研究部軌道上システム研究室

On-orbit Systems Laboratory, Systems Engineering Department,  
Office of Research and Development

宇宙開発事業団

National Space Development Agency of Japan

## === 和文抄録 ===

筆者は文献1)にて、火星の第一衛星であるフォボスの全球を高精度に観測する軌道を提案している。その内容は、大きくは以下の二つに分けられる。

(1)高度 50km 程度から全球観測を行なうフォボス・ランデブ軌道フェーズ

(2)フォボスのごく近傍にて、ホバリング等の状態でフォボスを局所的に詳細観測するフェーズ

文献1)では、(1)、(2)ともフォボス重力を質点近似(球対称重力近似)していた。

本論文では、(2)に関して、フォボスの非球対称重力項も考慮して検討する。フォボス近傍における以下の trajectory を検討の対象とする。

①フォボス表面でのホバリング

②表面付近でホバリングした状態で水平方向に移動する trajectory (ホバリング移動)

③フォボスの極の上空を低高度で通過して L1、L2 点を結ぶ軌道(この軌道の目的はフォボスの極をほぼ真上から観測する事と、将来のフォボス周辺の移動ルートの検討である。)

幾つかのフォボス・ポテンシャル係数の中で、Chao らによる  $4 \times 4$  のポテンシャル係数が妥当と判断した。ホバリング  $\Delta V$  への影響は数十%と大きい事、ホバリング移動の全  $\Delta V$  への影響は微小である事が分かった。L1-L2 点連絡軌道に対しては、質点近似の場合の対称な軌道は求める事ができず(存在しない可能性がある)、非対称な軌道を得た。この軌道は初速度の誤差に対する影響が小さく望ましいものである。

### キーワード

フォボス、重力ポテンシャル係数、形状調和係数、球関数展開、ホバリング、ホバリング移動、円制限三体問題

The author has presented trajectories for observing Phobos, the first satellite of Mars, globally and precisely in reference 1). That consists of two phases.

(1) Phobos-Rendezvous phase in which Phobos is observed globally from the orbit around Phobos with the altitude of about 50km.

(2) Proximate Observation phase in which Phobos is observed from the spacecraft such as in the hovering condition.

In reference 1), Phobos gravity was approximated by the spherically symmetric one for both (1) and (2).

In this paper, (2) is studied in consideration of non-spherically symmetric terms of Phobos gravity. Trajectories analyzed in this paper are listed below.

- ① hovering at the surface of Phobos
- ② horizontal movement in the hovering condition (named "Hovering Movement" here)
- ③ trajectory connecting L1 and L2 points through a point above the pole (Purposes of this trajectory are to observe Phobos poles and to make a future transfer route around Phobos.)

Phobos potential coefficients obtained by Chao et al. were selected for the use in this paper from several sets of coefficients. Effects of the potential coefficients to the hovering  $\Delta V$  were large and dozens of %. Effects of them to the total  $\Delta V$  for the hovering movement were small. For the design of trajectories connecting L1 and L2 points, any symmetric trajectory which had been obtained in the point-mass approximation could not be obtained. Symmetric trajectories in the non-symmetric model might not exist. A non-symmetric trajectory was obtained and its sensitivity to the initial velocity vector was small compared to the symmetric one.

#### KeyWords

Phobos, Gravity Potential Coefficients, Topographic Harmonic Coefficients, Spherical Harmonic Expansion, Hovering, Hovering Movement, Circular Restricted Three-Body Problem

# 目 次

図、表リスト	v
記号表	vii
1. はじめに	1
2. 使用するフォボス重力ポテンシャル係数の検討	1
2.1 形状調和係数から重力ポテンシャル係数への変換	1
2.2 フォボス近傍の重力加速度プロファイルの調査	4
3. ポテンシャル係数を考慮したホバリング $\Delta V$	6
3.1 ポテンシャル係数を考慮したホバリング $\Delta V$ の計算法	6
3.2 $\xi$ $\eta$ 軸上でのホバリング $\Delta V$	7
3.3 フォボス全球のホバリング $\Delta V$ の分布	7
4. ポテンシャル係数考慮のホバリング移動	9
4.1 使用する近似	9
4.2 解析方法	9
4.3 解析結果	10
5. ポテンシャル係数を考慮したL1-L2点連絡軌道の設計	12
5.1 ノミナル軌道の作成	12
5.2 質点近似のもう一つのノミナル軌道	15
5.3 初速度誤差による影響	16
5.4 第5章のまとめ	17
6. おわりに	17
7. 参考文献	17
付録 外力も考慮した円制限三体問題	18

## 図、表リスト

図 2.1	変数の定義	1
図 2.2	火星直下点での加速度(Duxbury の係数)	5
図 2.3	火星直下点での加速度(萩原らの係数)	5
図 2.4	火星直下点での加速度(Chao らの係数)	5
図 2.5	北極での加速度(Duxbury の係数)	5
図 2.6	北極での加速度(萩原らの係数)	5
図 2.7	北極での加速度(Chao らの係数)	5
図 2.8	西経 90 度での加速度(Duxbury の係数)	6
図 2.9	西経 90 度での加速度(萩原らの係数)	6
図 2.10	西経 90 度での加速度(Chao らの係数)	6
図 3.1	フォボス固定座標系と探査機の機体座標系	6
図 3.2	ホバリング $\Delta V$ (質点近似)	7
図 3.3	ホバリング $\Delta V$ (Chao らの係数考慮)	7
図 3.4	高度ゼロでのホバリング $\Delta V$ (m/s)      質点近似の場合	8
図 3.5	高度ゼロでのホバリング $\Delta V$ (m/s)      Chao らの係数を考慮	8
図 3.6	表面の重力加速度の二体加速度との差	8
図 4.1	推力加速度への非球対称重力の影響 ( $i=90\text{deg}$ , $\Omega=0\text{deg}$ , $V=7.5\text{m/s}$ )	10
図 4.2	推力加速度への非球対称重力の影響 ( $i=90\text{deg}$ , $\Omega=90\text{deg}$ , $V=8.0\text{m/s}$ )	10
図 4.3	推力加速度への非球対称重力の影響 ( $i=0\text{deg}$ , $\Omega=0\text{deg}$ , $V=5.2\text{m/s}$ )	11
図 4.4	移動速度による全 $\Delta V$ の変化 ( $i=90\text{deg}$ , $\Omega=0\text{deg}$ )	11
図 4.5	移動速度による全 $\Delta V$ の変化 ( $i=90\text{deg}$ , $\Omega=90\text{deg}$ )	11
図 4.6	移動速度による全 $\Delta V$ の変化 ( $i=0\text{deg}$ , $\Omega=0\text{deg}$ )	11
図 5.1	フォボス固定座標系	13
図 5.2	質点近似の時の初速度を使った場合	13
図 5.3	質点近似での L1-L2 点連絡軌道	13
図 5.4	角が二つできる場合	13
図 5.5	角一つの場合 (その 1)	14
図 5.6	角一つの場合 (その 2)	14
図 5.7	角一つのノミナル軌道	14
図 5.8	ノミナル軌道の高度と速度	15
図 5.9	角一つの軌道 (質点近似)	15
図 5.10	角一つの軌道の高度と速度 (質点近似)	15
図 5.11	角一つのノミナル軌道 (質点近似)	16
図 5.12	角一つのノミナル軌道の高度と速度 (質点近似)	16
図 5.13	初速度の大きさの誤差が+1%の場合	16
図 5.14	初速度の方位角誤差が+0.5 度の場合	17
図 5.15	初速度の上下角誤差が+0.5 度の場合	17

図 5.16	初速度の上下角誤差が $-0.5$ 度の場合（角二つの質点近似の場合）	17
付図 1	外力も考慮した円制限三体問題	18
表 4.1	台形公式の分割数の調査	10
表 4.2	最適移動速度 $V_{opt}$ と全 $\Delta V_{min}$	12
表 5.1	L1-L2 点連絡軌道への非球対称重力ポテンシャルの影響	15
表 5.2	各ノミナル軌道の比較	16

## 記号表

$A_{nm}$	: フォボスの形状調和係数
$B_{nm}$	: フォボスの形状調和係数
$C_{nm}$	: 重力ポテンシャル係数
$G$	: 万有引力定数( $6.672 \times 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ )
$g$	: フォボス重力加速度
$i$	: ホバリング移動経路 (大円) の傾斜角
$M$	: フォボスの質量
$m$	: 重力ポテンシャル係数の位数
$n$	: 重力ポテンシャル係数の次数、フォボス軌道の平均運動
$P_n(\cos \beta)$	: 二軸球面関数
$P_n^m$	: Legendre 陪関数
$R(\phi, \lambda)$	: フォボス中心から $(\phi, \lambda)$ 方向のフォボス半径
$S_{nm}$	: 重力ポテンシャル係数
$U$	: 重力ポテンシャル
$V$	: フォボスの体積、L1-L2 点連絡軌道の L1 点出発時の速度ベクトルの大きさ
$V_{\text{opt}}$	: ホバリング移動の最適移動速度
$\alpha$	: 推力加速度
$\zeta$	: フォボス固定座標系の第三成分
$\eta$	: フォボス固定座標系の第二成分
$\theta$	: ホバリング移動時の緯度引数、L1-L2 点連絡軌道の L1 点出発時の速度ベクトルの方位角
$\lambda$	: フォボス地図座標系での経度 (地図座標系の第一成分は $-\xi$ 方向、第二成分は $-\eta$ 方向)
$\mu$	: フォボス重力定数 ( $8.47 \times 10^5 \text{m}^3/\text{s}^2$ )
$\mu_M$	: 火星の重力定数( $4.282832 \times 10^{13} \text{m}^3/\text{s}^2$ )
$\xi$	: フォボス固定座標系の第一成分
$\sigma$	: フォボスの平均密度
$\phi$	: フォボス地図座標系での緯度
$\psi$	: L1-L2 点連絡軌道の L1 点出発時の速度ベクトルの上下角
$\Omega$	: ホバリング移動経路 (大円) の昇交点経度



## 1. はじめに

筆者は文献1)にて、火星の第一衛星であるフォボスの全球を高精度に観測する軌道を提案した。その内容は、大きくは以下の二つに分けられる。

- (1)高度 50km 程度から全球観測を行なうフォボス・ランデブ軌道フェーズ
- (2)フォボスのごく近傍にて、ホバリング等の状態でフォボスを局所的に詳細観測するフェーズ

文献1)では、(1)、(2)ともフォボス重力を質点近似(球対称重力近似)していた。

本論文では、(2)に関して、フォボスの非球対称重力項も考慮して検討する。フォボス近傍における以下の trajectory を検討の対象とする。

- ①フォボス表面でのホバリング
- ②表面付近でホバリングした状態で水平方向に移動する trajectory (ホバリング移動)
- ③フォボスの極の上空を低高度で通過して L1、L2 点を結ぶ軌道(この軌道の目的はフォボスの極をほぼ真上から観測する事と、将来のフォボス周辺の移動ルートの検討である。)

この他にも、L1、L2 点での軌道保持や L1、L2 点とフォボス表面の間の移行軌道など検討すべき問題があるが、それらは今後の課題とする。なお、L1、L2 点とは、火星-フォボス系の5つのラグランジュ点の内、フォボスに近い2点である(図 5.1 参照)。

## 2. 使用するフォボス重力ポテンシャル係数の検討

文献1)においても第17章にて Duxbury<sup>2)</sup>によるポテンシャル係数を使って、非球対称重力の影響を簡単に調査している。ところが、その後の調査により、Duxbury の係数は誤差が大きい事が分かったため、どの係数を使用すべきかを再検討した。

筆者が現在手元に持っている重力ポテンシャル係数は、Duxbury によるもの、萩原らによるもの<sup>3)</sup>、Chao ら<sup>4)</sup>によるものの3組である。Duxbury による係数の誤差が大きい事を説明するために、フォボス重力ポテンシャル係数がどのような方法で求められているかを始めに述べる。

### 2.1 形状調和係数から重力ポテンシャル係数への変換

フォボス重力ポテンシャル係数は、バイキング・ミッション等で得られたデータから推定されている<sup>2, 4)</sup>。いろんな方向から撮影したデータを元にフォボスの形状を決め、内部密度一定の仮定で求められている。本節では、形状データから重力ポテンシャル係数への変換法を説明すると共に、文献2)で使用されている近似式の導出を行ない、近似の程度を明らかにする。

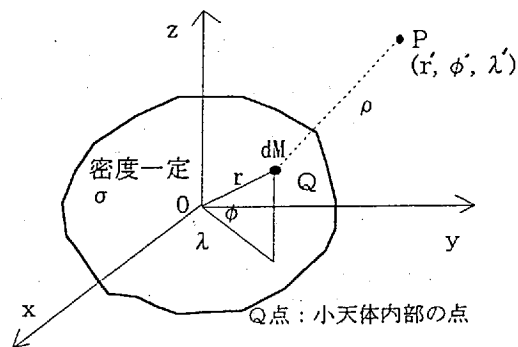


図 2.1 変数の定義

#### (1)重力ポテンシャルUの求め方

図2.1の点Pにおける重力ポテンシャルUは

$$U = \int \frac{GdM}{\rho} \quad (2.1)$$

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \beta$$

$\beta$ : OPとOQのなす角

G: 万有引力定数( $6.672 \times 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ )

であり、 $1/\rho$ を

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r'\cos\beta}} \\ &= \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\beta) \left(\frac{r}{r'}\right)^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

と変形すると、

$$dM = \sigma r^2 \cos\phi \, dr d\phi d\lambda \quad (2.3)$$

であるから、 $U$ は次式となる。

$$U = \frac{G\sigma}{r'} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\beta) \left(\frac{r}{r'}\right)^n r^2 \cos\phi \, dr d\phi d\lambda \quad (2.4)$$

$R(\phi, \lambda)$ は $(\phi, \lambda)$ 方向の天体表面までの半径

$P_n(\cos\beta)$ は二軸球面関数と呼ばれ、以下の加法定理が成り立つ。

$$\begin{aligned} P_n(\cos\beta) &= P_n(\sin\phi)P_n(\sin\phi') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin\phi)P_n^m(\sin\phi') \cos m(\lambda - \lambda') \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{2(n-m)!}{\varepsilon_m(n+m)!} P_n^m(\sin\phi)P_n^m(\sin\phi') \cos m(\lambda - \lambda') \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで、

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 2 : m = 0 \\ 1 : m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

である。この加法定理を使うと、 $U$ は、

$$\begin{aligned} U &= \frac{G\sigma}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2(n-m)! P_n^m(\sin\phi')}{\varepsilon_m(n+m)! r'^m} \int_0^{2\pi} \cos m(\lambda - \lambda') d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n^m(\sin\phi) \cos\phi \, d\phi \int_0^R r^{n+2} dr \\ &= \frac{G\sigma}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2(n-m)! P_n^m(\sin\phi')}{(n+3)\varepsilon_m(n+m)! r'^n} \int_0^{2\pi} \cos m(\lambda - \lambda') d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\phi, \lambda)^{n+3} P_n^m(\sin\phi) \cos\phi \, d\phi \end{aligned} \quad (2.6)$$

と表される。

## (2) $R(\phi, \lambda)$ からポテンシャル係数を求める方法

天体の体積を $V$ と置くと、 $\sigma V = M$  ( $M$ は天体の質量)だから、

$$U = \frac{GM}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2(n-m)! P_n^m(\sin\phi')}{V(n+3)\varepsilon_m(n+m)! r'^n} \int_0^{2\pi} \cos m(\lambda - \lambda') d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\phi, \lambda)^{n+3} P_n^m(\sin\phi) \cos\phi \, d\phi \quad (2.7)$$

となる。一方、 $U$ をポテンシャル係数 $C_{nm}$ 、 $S_{nm}$ で表現すると、

$$U = \frac{GM}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_0}{r'}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda' + S_{nm} \sin m\lambda') P_n^m(\sin\phi') \quad (2.8)$$

$r_0$ : 天体の基準半径

であり、

$$C_{nm} \cos m\lambda' + S_{nm} \sin m\lambda' = \frac{2(n-m)!}{(n+3)\varepsilon_m(n+m)! V r_0^n} \int_0^{2\pi} \cos m(\lambda - \lambda') d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^{n+3} P_n^m(\sin\phi) \cos\phi \, d\phi \quad (2.9)$$

が得られる。 $C_{nm}$ 、 $S_{nm}$ は $\lambda'$ とは独立であるから、 $\lambda' = 0$ とする事で $C_{nm}$ が、 $\lambda' = \frac{\pi}{2m}$ とする事で $S_{nm}$ が、以下のように求められる。

$$\begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} = \frac{2(n-m)!}{(n+3)\varepsilon_m(n+m)!Vr_0^n} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{pmatrix} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^{n+3} P_n^m(\sin\phi) \cos\phi d\phi \quad (2.10)$$

天体の半径Rが任意の方向に対して与えられれば、(2.10)式を数値積分する事で、正確にポテンシャル係数が求められる。

### (3)ポテンシャル係数への近似変換法

R( $\phi, \lambda$ )が、基準半径 $r_0$ に近いとして、以下のように近似する。

$$\begin{aligned} R(\phi, \lambda) &\cong r_0 + \Delta R(\phi, \lambda) \\ R^{n+3} &\cong r_0^{n+3} + (n+3)r_0^{n+2}(R-r_0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

R( $\phi, \lambda$ )を、以下のように形状調和係数 $A_{nm}, B_{nm}$ で表現する。

$$R(\phi, \lambda) = r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\sin\phi)$$

R( $\phi, \lambda$ )が定数であれば、 $C_{nm}, S_{nm}$ はゼロである事( $C_{00}=1$ は例外)に注意して、(2.11)式を(2.10)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} &\cong K_{nm} (n+3) r_0^{n+2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{pmatrix} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\phi, \lambda) P_n^m(\sin\phi) \cos\phi d\phi \\ \text{where } K_{nm} &= \frac{2(n-m)!}{(n+3)\varepsilon_m(n+m)!Vr_0^n} \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。

#### (a) $m \neq 0$ の場合

三角関数とLegendre陪関数の直交性を利用する。Legendre陪関数の直交性を以下に示す。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_l^m(\sin\phi) P_n^m(\sin\phi) \cos\phi d\phi = \begin{cases} 0 & (l \neq n) \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & (l = n) \end{cases} \quad (2.13)$$

すると、(2.12)式は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} &\cong (n+3) r_0^{n+3} K_{nm} \pi \begin{pmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{pmatrix} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \\ &= \frac{4\pi r_0^3}{V(2n+1)} \begin{pmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。ここで、 $V \cong \frac{4}{3}\pi r_0^3$ と近似すると、

$$\begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} \cong \frac{3}{2n+1} \begin{pmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

となる。

(b)m=0の場合

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} C_{n0} \\ S_{n0} \end{pmatrix} &\cong K_{n0}(n+3)r_0^{n+2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\phi, \lambda) P_n^0(\sin\phi) \cos\phi d\phi \\
 &= 2\pi K_{n0}(n+3)r_0^{n+3} \begin{pmatrix} A_{n0} \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n^0(\sin\phi) P_n^0(\sin\phi) \cos\phi d\phi \\
 &= \frac{4\pi r_0^3}{V(2n+1)} \begin{pmatrix} A_{n0} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2n+1} \begin{pmatrix} A_{n0} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

となる。

故に、形状調和係数から重力ポテンシャル係数への近似変換は、次式で表される。

$$\begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix} \cong \frac{3}{2n+1} \begin{pmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

但し、 $C_{00}=1$

Duxburyは、(2.17)式を用いて重力ポテンシャル係数を算出しており、導出の過程から明らかのように、天体の形状が球対称から大きく離れると、近似変換式は誤差が大きくなる。

## 2.2 フォボス近傍の重力加速度プロファイルの調査

Duxbury、萩原ら、Chaoらによる係数を使い、使用する次数を変えながら重力加速度の高度プロファイルを調査し、以後の解析で使用する係数と次数を検討する。

### (1)各係数の特徴

はじめに、3つの係数の求め方や近似の程度などの特徴を述べる。

#### (a)3係数の共通の特徴

どの係数も、Duxburyが文献2)で発表したフォボス形状モデルを使い、密度一定の仮定をおいている。このモデルはフォボス中心からの半径を球関数展開で6次までの係数(以下、形状調和係数と呼ぶ)として表現したもの。マリナー9号とバイキングのデータを利用している。フォボス最大のクレーターであるスティックニーは、この形状モデルでは再現できていないという問題はある。(6次程度では無理である)

#### (b)Duxburyの係数の特徴

形状調和係数から重力ポテンシャル係数への変換に際して、いろんな方向のフォボス半径の平均半径からのずれが小さいという近似に基づく(2.17)式を使用している。フォボスの形状では、この近似は妥当でない。6次の係数まで求めている。座標原点は重心から僅かにずれており、1次項はゼロではない。重心の座標は、(-80m, 330m, 205m)である。なお、x軸は火星方向であり、東経90度の方向がy軸である。

#### (c)萩原らの係数の特徴

近似式でなく、正確な(2.10)式で形状調和係数から重力ポテンシャル係数へ変換している。6次の係数まで求めている。座標原点は、やはり重心からずれており、重心の座標は、(-32m, 280m, 103m)である。

(d)Chaoらの係数の特徴

萩原らと同じ方法で重力ポテンシャル係数に変換しているが、4次までにとどめている。萩原らのコメントによると、5、6次項は信頼性が低いため4次までにしたとの事。その後、座標の原点を重心にシフトして1次項を消している。

(2)加速高度のプロファイル

図2.2~2.4に火星直下点における重力加速度の高度プロファイルを変えて示す。図2.2がDuxburyの係数の場合、図2.3が萩原等の係数の場合、図2.4がChaoらの係数の場合である。加速度は、二体加速度で割って無次元化している。図2.2

と2.3を比較すると、4次以上の場合に違いが大きい事が分かる。Duxburyが使用した近似式の誤差によるものと考えられる。図2.3、2.4は良く一致している。この場合、4次で十分である。

図2.5~2.7に、北極上空の場合を示す。やはりDuxburyの係数では4次以上で誤差が大きい。北極表面は球関数展開の収束領域の外にある<sup>1)</sup>ため、高次になる程発散傾向が見られるが、この場合も4次が妥当である。

図2.8~2.10に、西経90度(leading edge)での加速度プロファイルを示す。今まで萩原らの係数とChaoらの係数とは良く一致していたが、西経90度では多少違っている。両者の処理で異なるのは、原点を重心にシフトするかしないかと、4次までの計算か6次までの計算かのみである。形状係数から重力ポテンシャル係数への変換法から考えて、信頼性の低い5、6次の計算が、4次以下の計算に悪影響を与えるはず

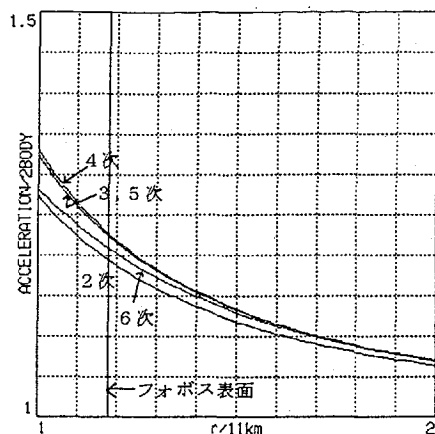


図 2.2 火星直下点での加速度(Duxburyの係数)

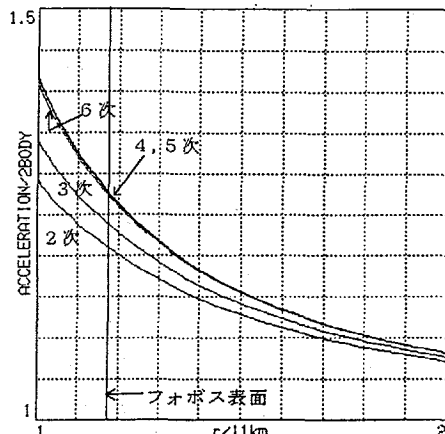


図 2.3 火星直下点での加速度(萩原らの係数)

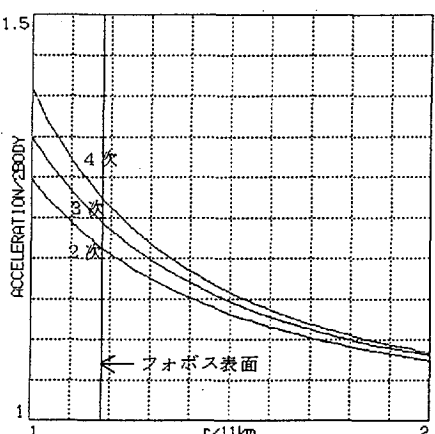


図 2.4 火星直下点での加速度(Chaoらの係数)

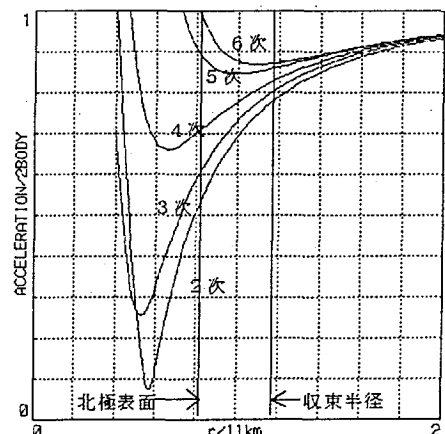


図 2.5 北極での加速度(Duxburyの係数)

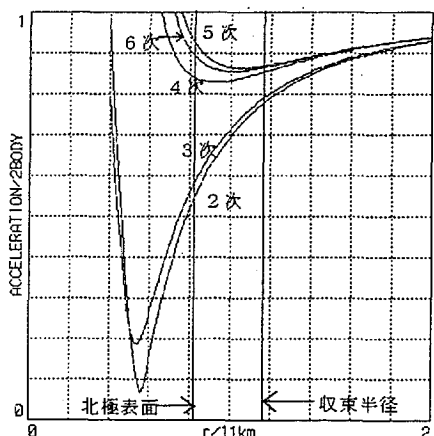


図 2.6 北極での加速度(萩原らの係数)

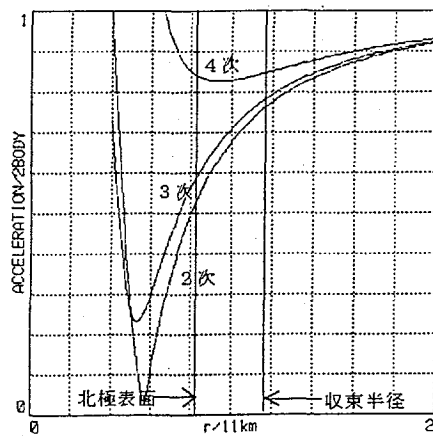


図 2.7 北極での加速度(Chaoらの係数)

はない。よって、原点シフトの影響と考えられる。

萩原らの係数とChaoらの係数のどちらが良いかは判断に苦しむが、原点を重心に合わせている事(そのため使い易い)を考慮して、以後はChaoらの係数の4次までを使用する事とする。

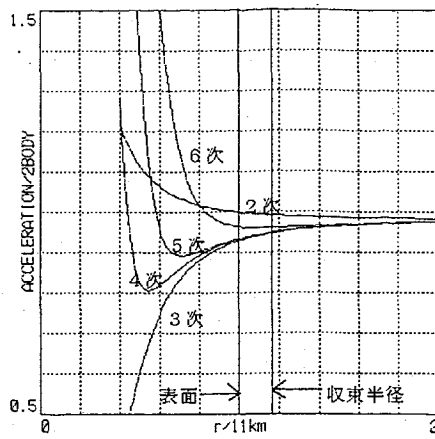


図 2.8 西経90度での加速度(Duxburyの係数)

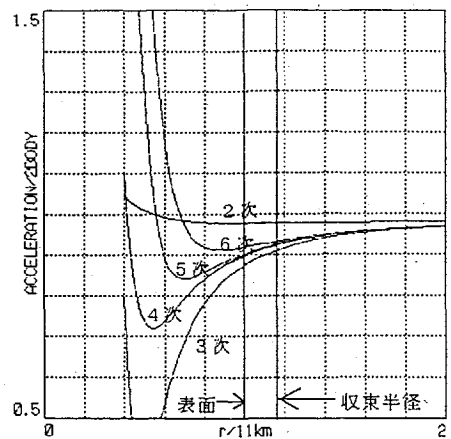


図 2.9 西経90度での加速度(萩原らの係数)

### 3. ポテンシャル係数を考慮したホバリング ΔV

文献1)では、フォボスによる質点近似の重力加速度を使ってホバリングの検討を行なった。本研究ではChaoらの係数の(4×4)を全て用いてホバリング ΔVを評価する。その際、探査機のロール軸(機首方向)をフォボスの北極方向、ヨー軸をフォボス中心方向に保持した状態で、機体各軸方向の3個のスラスタを使うとする。

#### 3.1 ポテンシャル係数を考慮したホバリング ΔVの計算法

はじめに、フォボスのポテンシャル係数による重力加速度をホバリング ΔVの計算に如何に組み込むかを述べる。宇宙機の運動はフォボスのごく近傍に限られるので、宇宙機軌道のフォボス軌道からの差の1次項のみ考慮する線型化運動方程式を用いる。以下に、フォボス固定座標系  $\xi$  と  $\eta$  と(図3.1参照)で表現した宇宙機の線型化方程式を示す。

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - 3n^2\xi \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} \\ \ddot{\zeta} + n^2\zeta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ここで、

$$n = \sqrt{\frac{\mu_M}{a^3}} = 2.27876 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

であり、 $\mu_M$ は火星の重力定数、 $a$ はフォボス軌道の長半径(9378km)である。加速度 $\mathbf{b}$ は、フォボス重力加速度と推力加速度の和である。

任意の位置( $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$ )でのホバリングに必要な $\mathbf{b}$ を求めると、 $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$ の時間微分がゼロなので

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3n^2\xi \\ 0 \\ n^2\zeta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

となり、フォボスからの重力加速度を引く事で、次式の推力加速度ベクトル $\alpha$ が得られる。

$$\alpha = \mathbf{b} - (\mathbf{g}_{2B} + \mathbf{g}_{NS}) \quad (3.3)$$

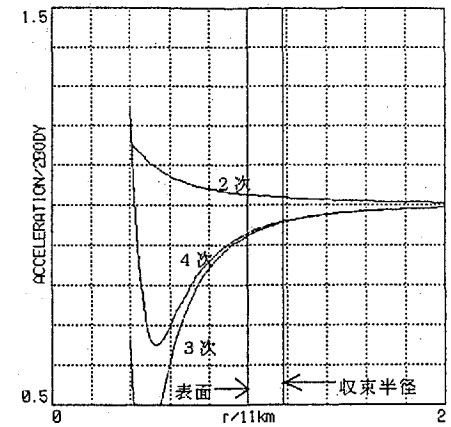


図 2.10 西経90度での加速度(Chaoらの係数)

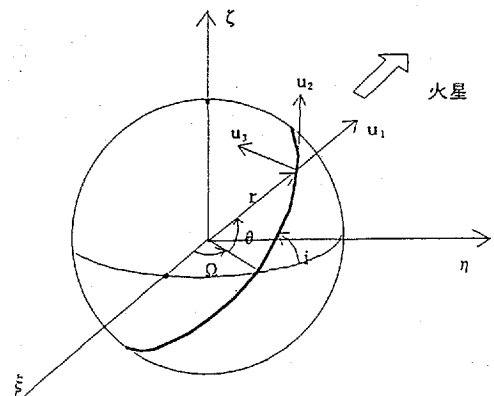


図 3.1 フォボス固定座標系と探査機の機体座標系

$g_{2B}$ : フォボスからの球対称重力加速度

$g_{NS}$ : フォボスからの非球対称重力加速度

次に、推力加速度ベクトル  $\alpha$  を図3.1の機体座標系に変換する。  $i = \pi/2$  に対応する姿勢と仮定する(機首が北極を向く)。ホバリング位置の緯度・経度を  $\phi$ 、 $\lambda$  とすると、変換式は、以下となる。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda-\pi) & \sin(\lambda-\pi) & 0 \\ -\sin(\lambda-\pi) & \cos(\lambda-\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_\xi \\ \alpha_\eta \\ \alpha_\zeta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha_\xi \cos\phi \cos\lambda - \alpha_\eta \cos\phi \sin\lambda + \alpha_\zeta \sin\phi \\ \alpha_\xi \sin\phi \cos\lambda + \alpha_\eta \sin\phi \sin\lambda + \alpha_\zeta \cos\phi \\ -\alpha_\xi \sin\lambda + \alpha_\eta \cos\lambda \end{pmatrix}$$

なお、経度は、火星直下点から東向きに測る。フォボス軌道の1周期(約7.66時間)当たりの必要増速量を、

$$\Delta V = \frac{2\pi}{n} (|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|) \quad (3.5)$$

で算出する。ホバリング高度の基準面として、以下の値を各軸の半径とする三軸不等楕円体を使用する。

$$c_\xi = 13\text{km}, c_\eta = 11\text{km}, c_\zeta = 9\text{km}$$

### 3.2 $\xi$ 、 $\eta$ と軸上でのホバリング $\Delta V$

各軸上での1周期当たりのホバリングに要する  $\Delta V$  を、ホバリング高度に対して図3.2、3.3に示す。図3.2は質点近似の場合

であり、図3.3がChaoらの係数を全て考慮した場合である。図3.3の「 $-\xi$  軸上」は火星に面した方向であり、「 $-\eta$  軸上」は東経90度方向である。フォボス重力の非球対称項の影響で  $-\xi$  軸上表面の  $\Delta V$  が約64%増加し、 $\zeta$  軸上表面では約12%減少している。L1, L2点高度は約4.6kmから約5.3kmに変わっている。

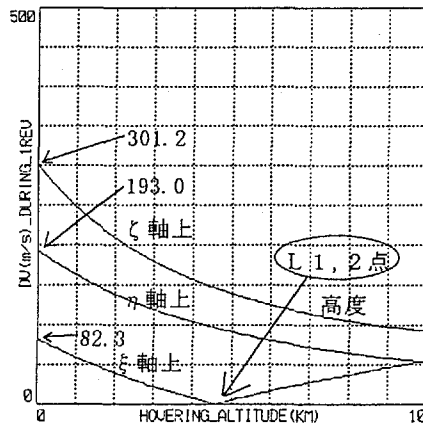


図3.2 ホバリング  $\Delta V$  (質点近似)

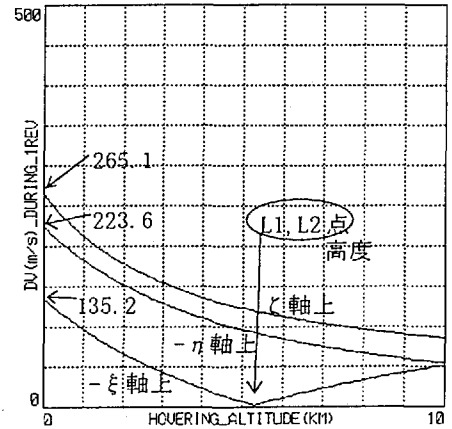


図3.3 ホバリング  $\Delta V$  (Chaoらの係数考慮)

### 3.3 フォボス全球のホバリング $\Delta V$ の分布

文献1)の第16章の図3に質点近似の場合のホバリング  $\Delta V$  の等高線を示しているが、それはスラスタを必要な推力方向に向けてホバリングを実現すると仮定した場合であった。スラスタが機体座標系の各軸方向に3個あり図3.1に示した探査機姿勢( $i = \pi/2$ )の元でホバリングする場合の  $\Delta V$  を図3.4に示す。

図3.5にChaoらのポテンシャル係数を考慮した結果を示す。参考までに、図3.6にフォボス表面各点の重力加速度と二体加速度の差を示す。使用した式は、

$$\frac{|g_{2B} + g_{NS}|}{|g_{2B}|} - 1 \quad (3.6)$$

である。図3.6の斜線の領域は二体加速度よりも重力が大きい領域である。図3.5を見ると、赤道から南側に3ヶ所の $\Delta V$ が大きい領域がある。これは、 $\Delta V$ には図3.6の重力加速度の要因の他に(3.2)式の項があるためであり、 $\xi$ 軸から離れて極に近づく程 $\Delta V$ が大きくなる事による。図3.5中の最小値は119.9m/s、最大値は340.9m/sである。最小値は火星直下の反対側の点における値である。火星直下の点では図3.3より135.2m/sとなる。

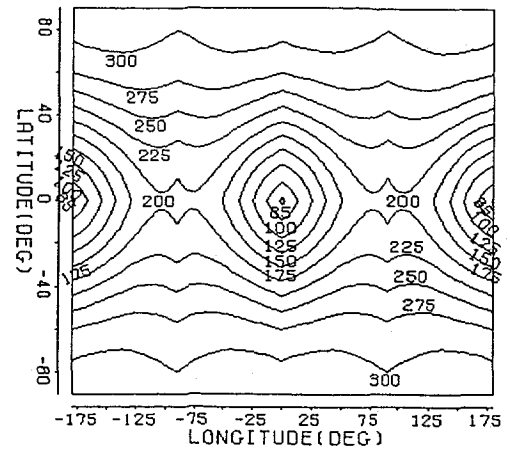


図 3.4 高度ゼロでのホバリング $\Delta V$  (m/s)  
質点近似の場合

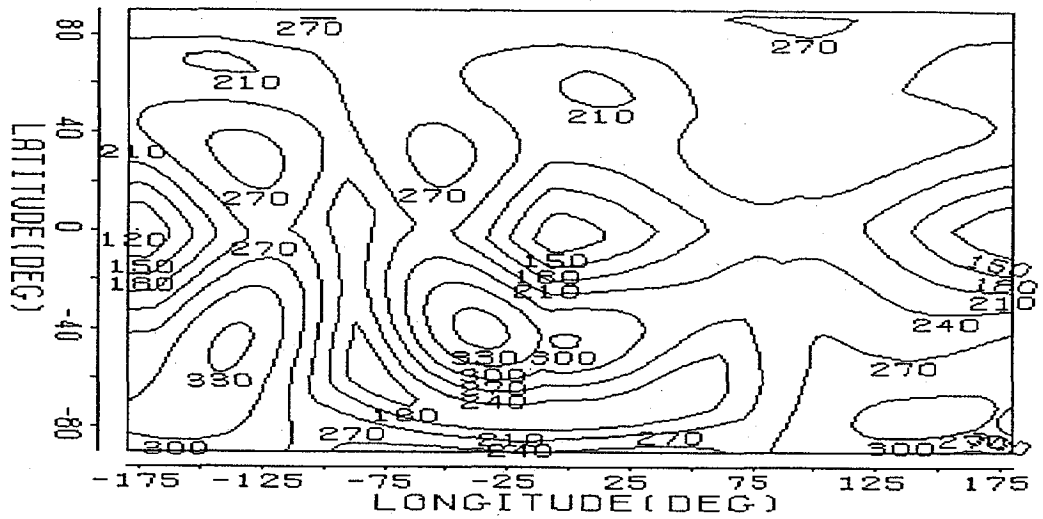


図 3.5 高度ゼロでのホバリング $\Delta V$ (m/s)  
Chao らの係数を考慮

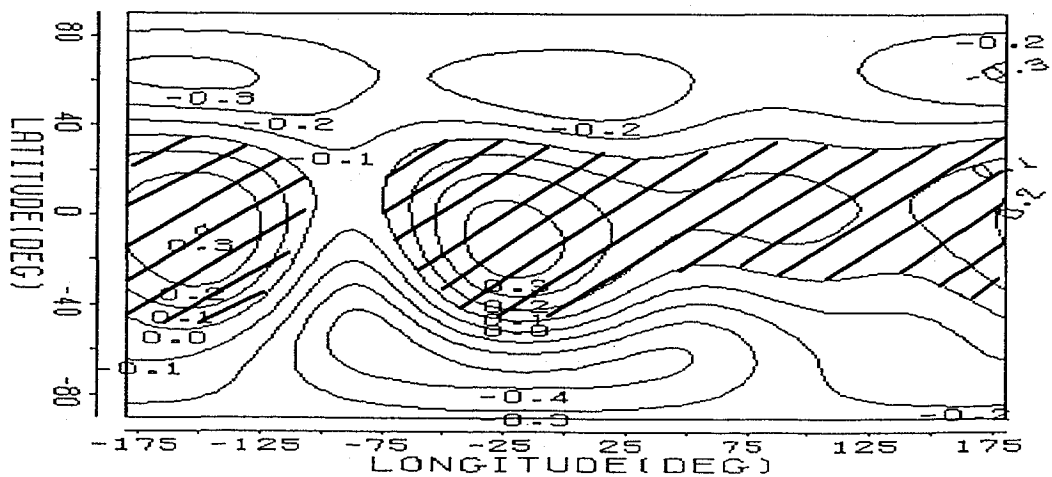


図 3.6 表面の重力加速度の二体加速度との差



#### 4. ポテンシャル係数考慮のホバリング移動

本章では、フォボス重力の非球対称項がホバリング移動<sup>1)</sup>(ホバリング状態でフォボス表面に沿って水平に移動)に及ぼす影響を検討する。

##### 4.1 使用する近似

本章での解析において使用する近似等を以下に示す。

- ①Chaoらのポテンシャル係数(4×4)を使ってフォボス重力を計算する。
- ②フォボス固定座標系における大円に沿った移動とする。
- ③ホバリング移動中の半径は13km(フォボスの長軸半径)で一定とする。
- ④移動速度も一定とする。

##### 4.2 解析方法

ホバリング移動中の位置ベクトル $r$ は、図3.1中の $\Omega$ 、 $\theta$ 、 $i$ を使って以下のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega \cos \theta - \sin \Omega \cos i \sin \theta \\ \sin \Omega \cos \theta + \cos \Omega \cos i \sin \theta \\ \sin i \sin \theta \end{pmatrix} r \end{aligned} \quad (4.1)$$

探査機の運動が(4.1)式で表現される時、これを実現させるに必要な探査機に作用する加速度 $\mathbf{b}$ は、線型近似の範囲では(3.1)式で与えられる。加速度 $\mathbf{b}$ は、フォボス重力加速度と推力加速度の和である。

始めに、フォボス重力を質点近似した場合の推力加速度の式を簡単に示す。(詳細は、文献1)を参照) (4.1)式の $\theta$ だけが時間の一次関数として $\mathbf{b}$ を変形し、フォボスの二体加速度 $\mathbf{g}_{2B}$ を引くと、フォボス固定座標系での推力加速度 $\alpha_{2B}$ が得られる。

次に、図3.1に示す機体座標系に変換する。次式で変換できるから、

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_\xi \\ \alpha_\eta \\ \alpha_\zeta \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

機体座標系での推力加速度は以下のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 + K_{1c} \cos 2\theta + K_{1s} \sin 2\theta \\ K_{1s} \cos 2\theta - K_{1c} \sin 2\theta \\ K_{3c} \cos \theta + K_{3s} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} K_1 &= -r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} - 2nr\dot{\theta} \cos i + \frac{1}{2}n^2r(\sin^2 i + 3\sin^2 \Omega \sin^2 i - 3) \\ K_{1c} &= \frac{1}{2}n^2r(-3\cos^2 \Omega + 3\sin^2 \Omega \cos^2 i - \sin^2 i) \\ K_{1s} &= 3n^2r \sin \Omega \cos \Omega \cos i \\ K_{3c} &= -3n^2r \sin \Omega \cos \Omega \sin i \\ K_{3s} &= 2nr\dot{\theta} \sin i + n^2r \sin i \cos i(3\sin^2 \Omega + 1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

である。なお、 $\mu = 8.47 \times 10^5 \text{ m}^3 / \text{s}^2$  はフォボスの重力定数である。

(4.3)式にフォボスの非球対称重力を考慮するには、フォボス固定座標系で求めた非球対称重力加速度項を(4.2)式で機体座標系に変換し、(4.3)式から引けば良い。

次に、フォボス1周当たりの全 $\Delta V$ を評価する。フォボス重力が質点近似の場合は解析的に積分が可能であった<sup>1)</sup>が、非球対称重力加速度項も考慮する場合は、台形公式で数値積分する。機体座標系の各方向の推力加速度成分の絶対値の和を求め、これを1周数値積分したものに、移動速度の2倍(スタートとストップの増速量)を加えたものをフォボス1周当たりの全 $\Delta V$ として評価する。

### 4.3 解析結果

#### (1)数値積分の分割数の検討

台形公式による数値積分の場合の積分区間の分割数を定めるための検討を行なった。表4.1に、分割数を変えた場合のフォボス1周当たりの全 $\Delta V$ 値を、質点近似とChaoらの係数考慮の二つの場合について掲げた。分割数100で3桁以上の有効数字が得られるので、分割数100を採用する。移動速度の7.5m/sは全 $\Delta V$ がほぼ最小となる値である。

表4.1 台形公式の分割数の調査

分割数	全 $\Delta V$ 値(m/s)	
	Chaoらの係数考慮	質点近似
100	55.7853551	57.4069529
300	55.7923528	57.4193591
1000	55.7924488	57.4210145
3000	55.7932211	57.4211385

$i(\text{deg}) = 90, \Omega(\text{deg}) = 0, \text{移動速度}(\text{m/s}) = 7.5$

質点近似の場合の解析積分の結果=57.4211588m/s

#### (2)非球対称重力項がホバリング移動中の推力加速度へ及ぼす影響

図4.1に、1周のホバリング移動の間の必要な推力加速度を、質点近似とChaoらの係数考慮の2ケースについて示す。計算条件は、表4.1と同じである。火星直下点及びその反対側の点、北極、南極で必要な推力加速度は2ケースでかなり異なっている。図4.2、4.3に、 $i, \Omega$

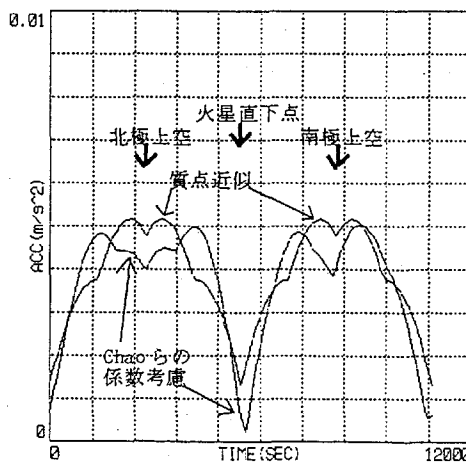


図4.1 推力加速度への非球対称重力の影響  
( $i=90\text{deg}, \Omega=0\text{deg}, V=7.5\text{m/s}$ )

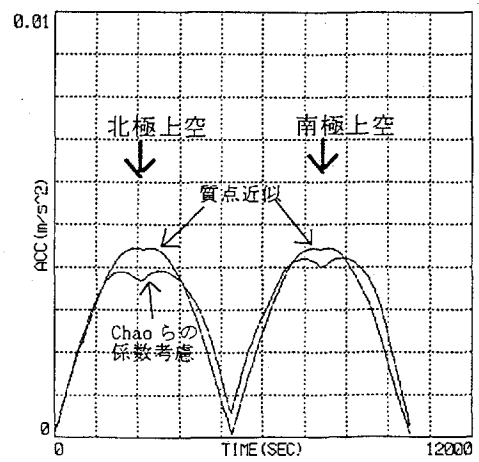


図4.2 推力加速度への非球対称重力の影響  
( $i=90\text{deg}, \Omega=90\text{deg}, V=8.0\text{m/s}$ )

を変えた場合を示す。なお、図4.2, 4.3の移動速度も1周の全 $\Delta V$ がほぼ最小となる値である。

(3)移動速度による1周当たりの全 $\Delta V$ の変化

本節では、1周当たりの全 $\Delta V$ が移動速度の変化によってどのように変わるかを、質点近似と非球対称重力項考慮の2つの場合で検討する。

図4.4に $i=90\text{deg}$ ,  $\Omega=0\text{deg}$ の場合を、図4.5に $i=90\text{deg}$ ,  $\Omega=90\text{deg}$ の場合を、図4.6に $i=0\text{deg}$ ,  $\Omega=0\text{deg}$ の場合を示す。これらの図から、全 $\Delta V$ への非球対称重力項の影響は小さい事が分かる。

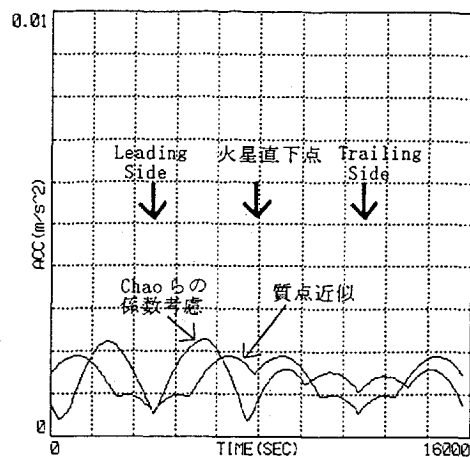


図 4.3 推力加速度への非球対称重力の影響  
( $i=0\text{deg}$ ,  $\Omega=0\text{deg}$ ,  $V=5.2\text{m/s}$ )

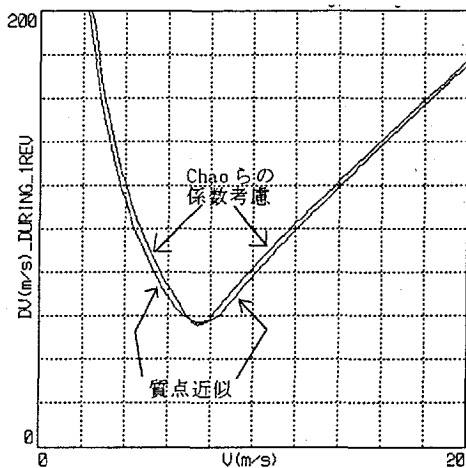


図 4.4 移動速度による全 $\Delta V$ の変化  
( $i=90\text{deg}$ ,  $\Omega=0\text{deg}$ )

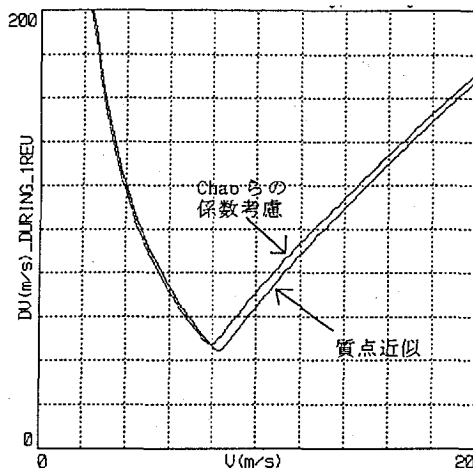


図 4.5 移動速度による全 $\Delta V$ の変化  
( $i=90\text{deg}$ ,  $\Omega=90\text{deg}$ )

表4.2に、全 $\Delta V$ を最小にする移動速度 $V_{opt}$ とその時の全 $\Delta V$ 値を、図4.4, 4.5, 4.6の3つのケースについて示す。

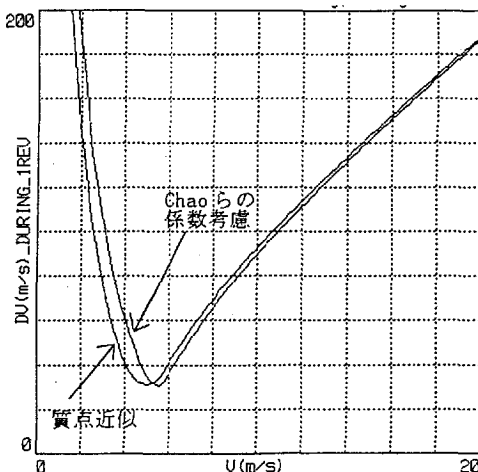


図 4.6 移動速度による全 $\Delta V$ の変化  
( $i=0\text{deg}$ ,  $\Omega=0\text{deg}$ )

表4.2 最適移動速度 $V_{opt}$ と全 $\Delta V_{min}$

	$V_{opt}(m/s)$			全 $\Delta V_{min}(m/s)$		
	質点近似	Chaoらの 係数	質点近似か らの変化(%)	質点近似	Chaoらの 係数	質点近似か らの変化(%)
i=90deg 図4.4 $\Omega=0deg$	7.58	7.45	-1.7%	57.37	55.76	-2.8%
i=90deg 図4.5 $\Omega=90deg$	8.29	7.92	-4.5%	44.54	46.96	+5.4%
i=0deg 図4.6 $\Omega=0deg$	4.99	5.51	+10.4%	31.24	30.70	-1.7%

表4.2から、非球対称重力項の影響は、最大で10%程度である事が分かる。

#### (4)第4章のまとめ

フォボス表面近くでのホバリング移動に、Chaoらの係数を使う事でフォボス重力の非球対称項も考慮した検討を行なった。1周内の必要な推力加速度のパターンは非球対称項でかなり影響を受けるが、1周トータルに必要な増速量及び燃料最小となる移動速度には大きな影響を与えない事を確認した。よって、文献1)に述べた以下の事がそのまま成り立つ。

- (1) $\Omega=0,180deg$ の時、全 $\Delta V$ が最大となり、 $\Omega=90,270deg$ の時、最小となる。
- (2)フォボスの赤道付近の観測では、 $i=0$ でも $i=180deg$ でも(回る向きが逆であっても)同じ全 $\Delta V$ である。
- (3)両極を通るパス( $i=90deg$ )では、 $\Omega=90,270deg$ が全 $\Delta V$ 最小である。
- (4)最適な移動速度は、 $i=0$ から $180deg$ への変化に対して、約5m/sから約11m/sまで単調に変化する。 $\Omega$ による変化は小さい。
- (5) $i=180deg$ では最適な移動速度が $i=0deg$ の場合の約2倍である。観測時間を十分に確保する意味では、順方向に移動するのが良い

### 5. ポテンシャル係数を考慮したL1-L2点連絡軌道の設計

文献1)にて、火星とフォボスの球対称重力のみ考慮して「L1-L2点連絡軌道」の概念設計を行なった。フォボス軌道は円と近似し、制限3体問題を適用した。フォボスからの最小高度が約900m、出発時と停止時の合計 $\Delta V$ が約19.5m/s、移行時間が約5.7時間の軌道を得た。

本章では、フォボス重力の非球対称項も考慮して設計を見直す。Chaoらの係数(4×4)を使用する。

#### 5.1 ノミナル軌道の作成

図5.1にフォボス固定座標系 $\xi$ と $\eta$ を示す。また本章では、以下の量を単位とする無次元化を行なう。

- 長さ:火星とフォボスの平均距離の9378km      質量:火星とフォボスの質量の和  
 時間:フォボスの軌道周期/ $2\pi$  (フォボスの軌道周期の7.66時間が無次元時間の $2\pi$ に相当)  
 速度:フォボスの軌道速度(2137m/s)      加速度:フォボスの位置で火星から受ける重力加速度

軌道シミュレーションは、円制限三体問題の運動方程式に外力(ここではフォボス重力の非球対称項による加速度)も追加したもので行なった。詳細は、付録を参照。

フォボスのポテンシャル係数を考慮すると、長軸半径を13kmとして、L1点の高度は5.29km、L2点の高度は5.18kmである。(質点近似の時は、4.6km)

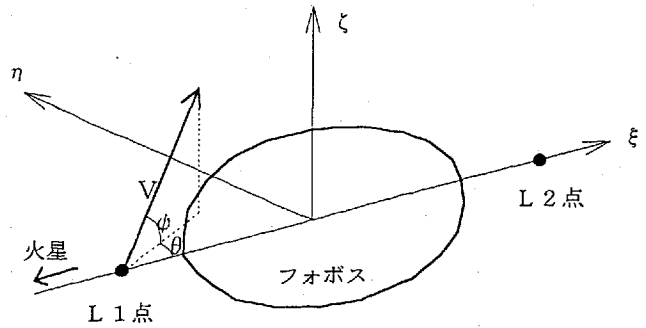
最初の試行として、L1, L2点の位置のみ変え、他の初期条件は文献1)と同じとして計算する。初期条件は以下の様になる。結果を図5.2に示す。

- 図5.2の初期条件
- (1)フォボス中心からの距離:0.00195031
  - (2)経度(+ $\xi$ 軸方向から $\eta$ 方向に測った):180度
  - (3)緯度:0度
  - (4)速度の大きさ $V$ :0.00455(以下、この値を $V_{PM}$ で表わす)
  - (5) $\theta$ :30.4度
  - (6) $\phi$ :68度
- (記号の定義は、図5.1を参照)

判断は困難である。文献1)での解析で、 $\theta$ の影響は比較的小さい事が分かっているので、 $V$ を±10%程度、 $\phi$ を数度程度変えて計算を行ない、図5.3に近い軌跡を得る様に努めた。その結果、図5.4の様に北極上空に角(つ)が二つ出た軌跡を得

たが、L2点を通過させる事は困難であった。図5.4の初期値を以下に掲げる。

- 図5.4の初期条件
- (1)フォボス中心からの距離:0.00195031
  - (2)経度:180度
  - (3)緯度:0度
  - (4)速度の大きさ $V$ :1.10\* $V_{PM}$
  - (5) $\theta$ :30.4度
  - (6) $\phi$ :61度



L1, L2点とフォボス中心との距離(Chaoらの係数の時)  
L1点:約18.29km L2点:約18.18km

フォボスの各軸の半径  
 $\xi$ 方向:13km  
 $\eta$ 方向:11km  
 $\zeta$ 方向:9km

図5.1 フォボス固定座標系

比較のために、文献1)で得た質点近似の場合の nominal 軌道を図5.3に示す。この段階では、図5.2と図5.3の開きが大きく、 $V$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ をどのように変えるべきかの

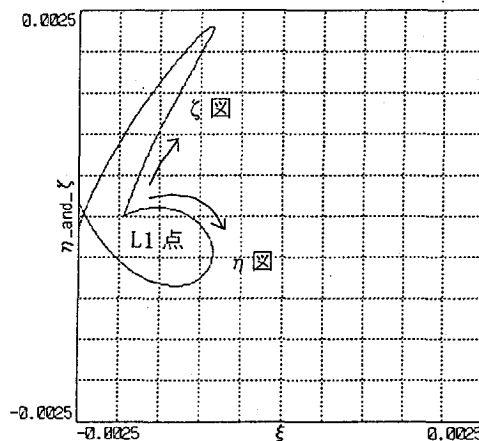


図5.2 質点近似の時の初速度を使った場合

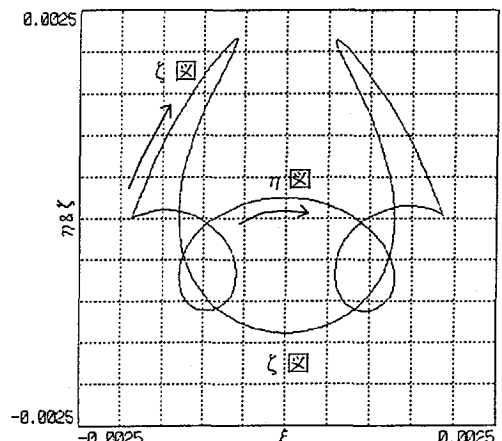


図5.3 質点近似でのL1-L2点連絡軌道

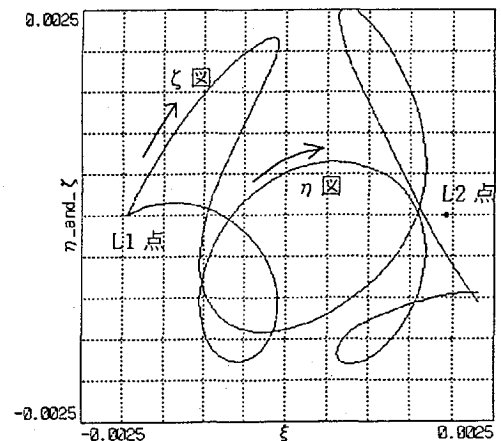


図5.4 角が二つできる場合

図5.4の後半の角の回り方が図5.3と逆になっている。所で、図5.4を見ると、後半の角に入る直前でもL2点の近傍を通過している事が分かる。角が一つでL2点に達する可能性もあろうと考えて探すと図5.5が見つかった。初期条件を以下に示す。

- 図5.5の初期条件
- (1) フォボス中心からの距離: 0.00195031
  - (2) 経度: 180度
  - (3) 緯度: 0度
  - (4) 速度の大きさ  $V: 1.02 * V_{PM}$
  - (5)  $\theta: 30.4$ 度
  - (6)  $\phi: 61$ 度

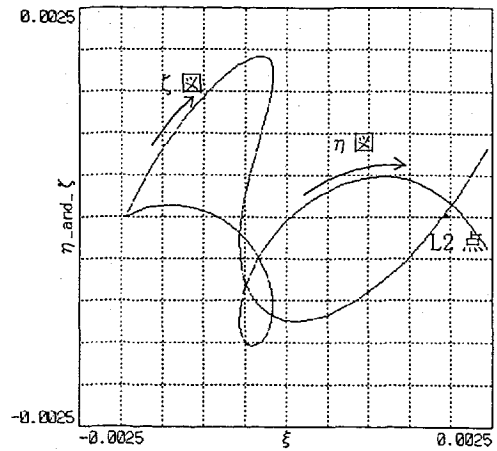


図 5.5 角一つの場合(その1)

図5.5では、L2点付近で  $\eta = 0$  となる点の  $\xi$  値はL2点の値に非常に近いが、 $\eta$  が0からずれている。V、 $\phi$  を変えてもL2点を通過させる事はできなかった。

残った  $\theta$  の影響を調査してみると、 $\theta$  を大きくすると、 $\xi - \eta$  平面通過時の  $\eta$  を殆ど変えずに(少し減少する)  $\xi$  を正の向きに変える事が分かった。よって、 $\xi - \eta$  平面通過時の  $\xi$  値がL2点の値より小さくて  $\eta$  値が僅かに正となる図5.6をV、 $\phi$  を変えて見つけ、次に  $\theta$  を大きくして図5.7を得た。図5.7が現在のモデルでのノミナル軌道である。図5.6、図5.7の初期条件を以下に示す。

- 図5.6の初期条件
- (1) フォボス中心からの距離: 0.00195031
  - (2) 経度: 180度
  - (3) 緯度: 0度
  - (4) 速度の大きさ  $V: 1.07 * V_{PM}$
  - (5)  $\theta: 30.4$ 度
  - (6)  $\phi: 61$ 度

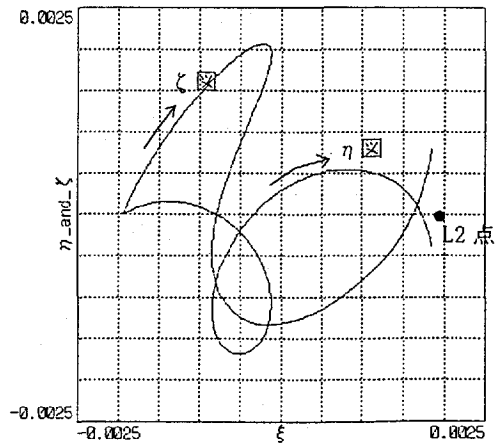


図 5.6 角一つの場合(その2)

- 図5.7の初期条件
- (1) フォボス中心からの距離: 0.00195031
  - (2) 経度: 180度
  - (3) 緯度: 0度
  - (4) 速度の大きさ  $V: 1.07 * V_{PM}$
  - (5)  $\theta: 40.0$ 度
  - (6)  $\phi: 61$ 度

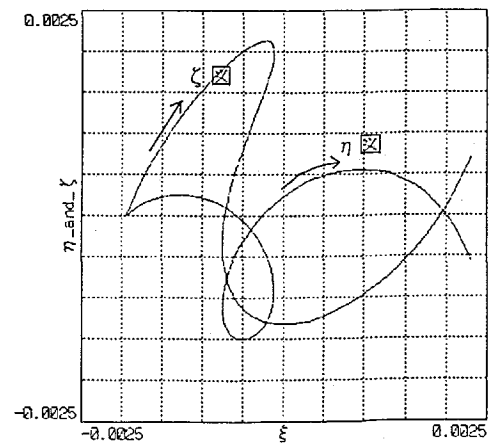


図 5.7 角一つのノミナル軌道

図5.8に、ノミナル軌道(図5.7)の高度、速度を示す。高度は、フォボス形状を各軸半径が13km, 11km, 9kmの三軸不等楕円体と近似して算出した。南半球に突入した直後に最小高度1.5kmとなっており、フォボスに衝突し

ていない事が確認できる。L1点からL2点への移行時間は、約3.41時間である。フォボス重力を質点近似した時との比較を表5.1に示す。

表5.1 L1-L2点連絡軌道への非球対称重力ポテンシャルの影響

	質点近似(図5.3)	Chaoらの係数(図5.7)
最小高度	0.9km	1.5km
移行時間	5.69時間	3.41時間
総 $\Delta V$	19.5m/s	20.9m/s
総燃料*)	9.9kg	10.58kg

\*) 比推力200秒の推進系を搭載した1tonの探査機の場合

表5.1より、最小高度が大きくなり、フォボスとの衝突を避ける点では都合が良い。移行時間も約40%短縮されている。マイナス要因は、必要燃料の増大だが、僅か7%であり問題ない。

### 5.2 質点近似のもう一つのノミナル軌道

フォボス重力の非球対称項も考慮して前節で図5.7のノミナル軌道を得た。これで目的は達成された訳であるが、質点近似においても角が一つの軌道が存在するのではないかと考え、シミュレーションを実施した。円制限三体問題の元での軌道設計の例として参考になると考えたからである。

図5.9を最初に見つけた。この初期条件を以下に掲げる。

#### 図5.9の初期条件

- (1) フォボス中心からの距離: 0.0018738666
- (2) 経度: 180度
- (3) 緯度: 0度
- (4) 速度の大きさ  $V: 0.99 * V_{PM}$
- (5)  $\theta: 60.4$ 度
- (6)  $\psi: 64.1$ 度

図5.10の高度が示す様に、この軌道はフォボスと衝突してしまう。初速度の大きさを大きくすると高度を上げる事ができるので、再び試行錯誤的に探索して図5.11の軌道を見つけた。図5.12に高度等を示す。この軌道は、高度900mにまで接近する図5.3の軌道に比べてかなり高度が高く、安全な軌道である。図5.11の軌道と図5.3の軌道の諸量の比較を表5.2に示す。

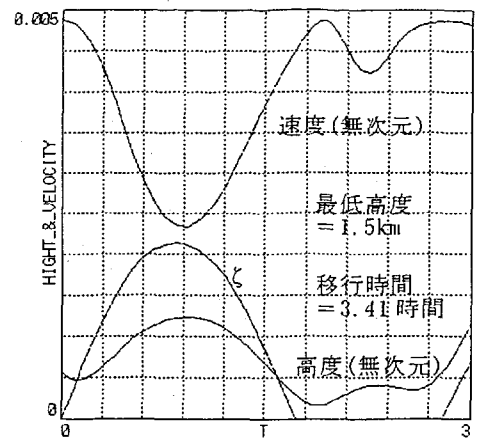


図5.8 ノミナル軌道の高度と速度

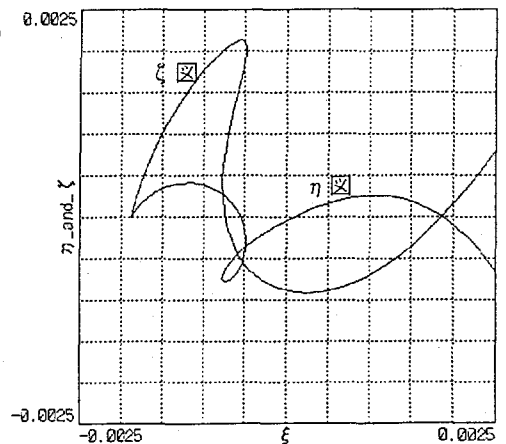


図5.9 角一つの軌道(質点近似)

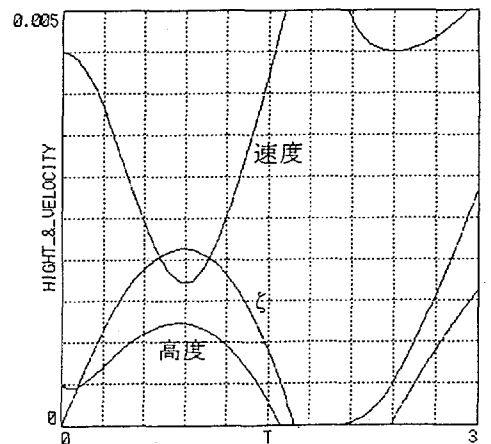


図5.10 角一つの軌道の高度と速度(質点近似)

図5.11の初期条件

- (1)フォボス中心からの距離:0.0018738666
- (2)経度:180度
- (3)緯度:0度
- (4)速度の大きさV:1.20\*V<sub>PM</sub>
- (5)θ:37.度
- (6)φ:59.度

表5.2 各ノミナル軌道の比較

	質点近似 (対称形:角二つ)	質点近似 (角一つ)	Chaoらの係数 (角一つ)
最小高度	0.9km	3.5km	1.5km
移行時間	5.69時間	4.29時間	3.41時間
総ΔV	19.5m/s	23.3m/s	20.9m/s
総燃料*)	9.9kg	11.8kg	10.58kg
初期のθ	30.4deg	37.0deg	40.0deg
初期のφ	68.0deg	59.0deg	61.0deg

\*)比推力200秒の推進系を搭載した1tonの探査機の場合

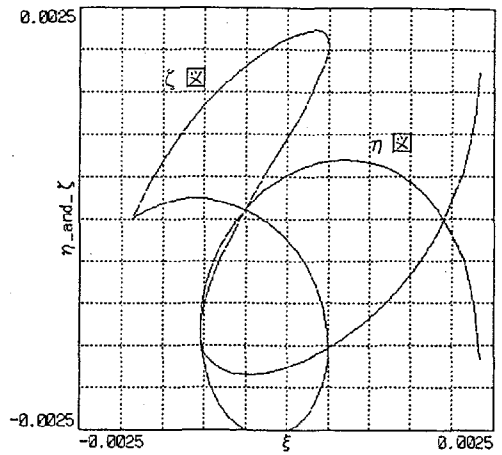


図 5.11 角一つのノミナル軌道(質点近似)

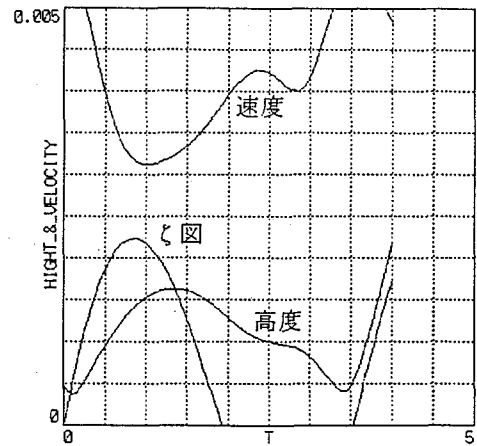


図 5.12 角一つのノミナル軌道の高度と速度(質点近似)

以上の事から、角一つの非対称な軌道はフォボス重力の非球対称項とは無関係である事が分かった。角一つのノミナル軌道同士を比較すると、移行時間も短くなり、必要燃料も少なくなる等、非球対称項の影響は、最小高度が小さくなっている他は全て良い方向に出ている。また、初期のθ、φも両者の間で大きな差はない。

### 5.3 初速度誤差による影響

L1点から出発する時の制御誤差の影響を見るために、L1点でのVの大きさを±1%、θとφを±0.5度変えた時の軌道を計算した。質点近似の場合<sup>1)</sup>と違って軌道のずれは小さく、各パラメータをどちらにずらしても影響の大きさはほぼ同じなので+方向にずらした場合のみ示す。どの場合もフォボスとの衝突はない。

(1)Vの誤差が+1%の場合

ξ η ζ 図:図5.13

(2)θの誤差が+0.5度の場合

ξ η ζ 図:図5.14

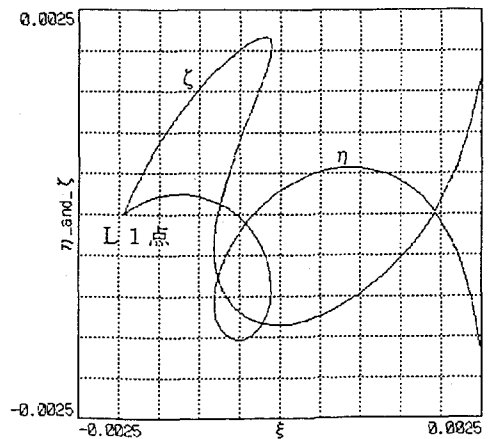


図 5.13 初速度の大きさの誤差が+1%の場合



(3)  $\phi$  の誤差が+0.5度の場合

$\xi$   $\eta$   $\zeta$  図: 図5.15

質点近似の場合に最も影響が大きかったのは  $\phi$  を-0.5度ずらした場合であった。それを図5.16に掲げる。<sup>1)</sup>

質点近似の場合よりも、初期誤差の影響はかなり小さい事が分かったが、原因はフォボス重力の非球対称性ではなく、二つ目の角が無くなった事が誤差感度の低下に繋がったと考えられる(図5.16との比較からの推測)。

5.4 第5章のまとめ

文献1)の質点近似の場合のL1-L2点連絡軌道(角二つ)から出発して、フォボス重力の非球対称項も考慮したtrajectoryを検討した。この場合、角二つの対称な軌道は存在しない様である。モデル自体も対称でなければ、対称な軌道は実現困難と考えられる。そこで、非対称な角一つの軌道を設計した。誤差感度も角二つの質点近似の場合より小さく、都合が良い。

また、質点近似の場合にも角一つの軌道が存在する事を確認し、それを二つ見つけた。一方はフォボスに衝突するが他方は十分な高度があった。この事から、L1点からL2点へ移行する軌道は最小高度が異なるものが多数存在すると予想できる。これを調査する方法として、初期パラメータのVを離散的なパラメータとし、 $\theta$ と $\phi$ から成る平面上にL2点への最接近距離の等高線を描いてみる事などが考えられる。

6. おわりに

文献1)で検討した幾つかのフォボス近傍探査軌道に対して、フォボスの非球対称重力項の影響を検討した。現状では、Chaoらによる4×4のポテンシャル係数が妥当と判断した。ホバリング  $\Delta V$  への影響は数十%と大きい事、ホバリング移動の全  $\Delta V$  への影響は微小である事が分かった。L1-L2点連絡軌道に対しては、質点近似の場合の対称な軌道は求める事ができず(存在しない可能性がある)、非対称な軌道を得た。この軌道は初速度の誤差に対する影響が小さく望ましいものである事が分かった。

7. 参考文献

- 1) 歌島, "フォボス観測軌道の検討", 宇宙開発事業団報告 NASDA-TMR-950003, 1995年3月
- 2) Thomas C. Duxbury, "The Figure of Phobos", ICARUS 78, 169-180 (1989)
- 3) Y. Hagiwara, Y. Kotake, and F. Yamamizu, "The Shape and Gravitational Potential Field of Phobos", Journal of the Geodetic Society of Japan, Vol.40, No.3, 221-232, 1994
- 4) B.F. Chao and D.P. Rubincam, "THE GRAVITATIONAL FIELD OF PHOBOS", GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS,

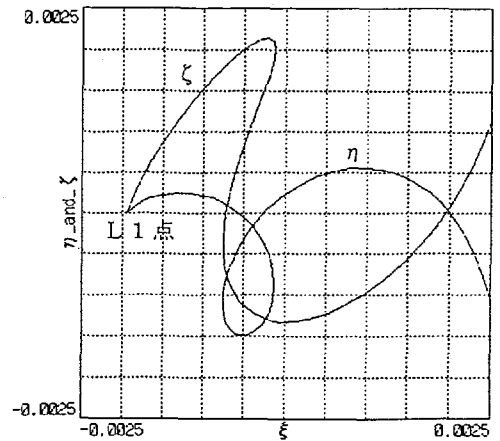


図 5.14 初速度の方位角誤差が+0.5度の場合

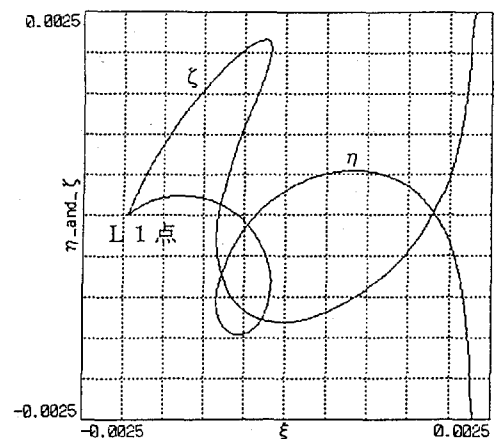


図 5.15 初速度の上下角誤差が+0.5度の場合

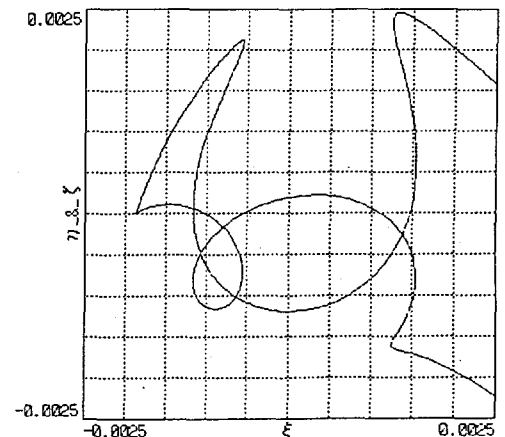


図 5.16 初速度の上下角誤差が-0.5度の場合 (角二つの質点近似の場合)

## 付録 外力も考慮した円制限三体問題

## 1. 慣性系での表現

付図1に大天体(質量 $m_1$ )、小天体(質量 $m_2$ )、微小天体(質量 $m_3$ :無視しうる)の位置ベクトルを示す。大天体と小天体の運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

であり、これを使って大天体を基準とした小天体の運動の方程式を表わすと

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + Gm_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{r_{12}^3} \\ &= \frac{G(m_1 + m_2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{r_{12}^3} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

である。この二体問題の平均運動 $n$ は、

$$n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r_{12}^3}}$$

となる。微小天体の運動方程式は、

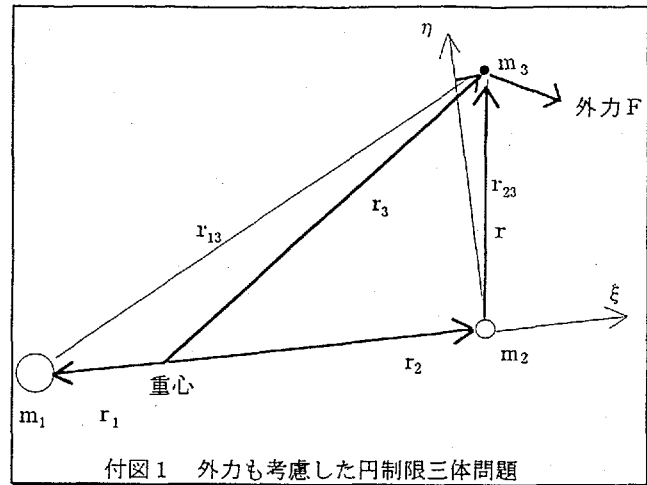
$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{Gm_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{r_{13}^3} + \frac{Gm_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{r_{23}^3} + \mathbf{F} \quad (\mathbf{F}: \text{外力})$$

となる。ここで、

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

と置くと、

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{R} \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{R}$$



付図1 外力も考慮した円制限三体問題

であり、微小天体の運動方程式は次式となる。

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{R} + \mathbf{r}_3 \right)}{r_{13}^3} + \frac{Gm_2 \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{R} - \mathbf{r}_3 \right)}{r_{23}^3} + \mathbf{F}$$

## 2. 重心回りの回転系での表現

次に、重心の回りに平均運動 $n$ の角速度で回転している座標系で運動を考えると、

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{D^2 \mathbf{r}_3}{Dt^2} + 2\mathbf{n} \times \frac{D\mathbf{r}_3}{Dt} + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_3) \quad (D/Dt \text{ は回転系での微分})$$

なので、微小天体の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \mathbf{r}_3}{Dt^2} + 2\mathbf{n} \times \frac{D\mathbf{r}_3}{Dt} + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_3) \\ = -\frac{Gm_1}{r_{13}^3} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{R} + \mathbf{r}_3 \right) + \frac{Gm_2}{r_{23}^3} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{R} - \mathbf{r}_3 \right) + \mathbf{F} \end{aligned}$$

となる。

## 3. 小天体を原点とする回転系での表現

次に、小天体を原点とする回転座標系に変更する。

$$\mathbf{r}_3 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad (\mathbf{r} \text{ は、小天体から微小天体へ向かうベクトル})$$

であり、 $\mathbf{R}$ は $D/Dt$ に対して定数ベクトルであるから、 $\mathbf{r}$ の運動方程式は次式となる。

$$\frac{D^2 \mathbf{r}}{Dt^2} + 2\mathbf{n} \times \frac{D\mathbf{r}}{Dt} + \mathbf{n} \times \left[ \mathbf{n} \times \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{R} + \mathbf{r} \right) \right] = -\frac{Gm_1}{r_{13}^3} (\mathbf{r} + \mathbf{R}) - \frac{Gm_2}{r_{23}^3} \mathbf{r} + \mathbf{F}$$

## 4. 無次元化

ここで、以下の量で無次元化する。

$$\text{長さ: } R \quad \text{時間: } (小天体の大天体回りの周期: T) / (2\pi) \quad \text{質量: } m_1 + m_2$$

無次元化後の運動方程式は次式となる。無次元量を上に波線を付けて表わす。

$$\frac{D^2 \tilde{\mathbf{r}}}{D\tilde{t}^2} + 2\mathbf{i}_\zeta \times \frac{D\tilde{\mathbf{r}}}{D\tilde{t}} + \mathbf{i}_\zeta \times \left[ \mathbf{i}_\zeta \times \left( \tilde{m}_1 \mathbf{i}_\xi + \tilde{\mathbf{r}} \right) \right] = -\frac{\tilde{m}_1}{\tilde{r}_{13}^3} (\mathbf{i}_\xi + \tilde{\mathbf{r}}) - \frac{\tilde{m}_2}{\tilde{r}^3} \tilde{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{\left( \frac{4\pi^2 R}{T^2} \right)}$$

$$\mathbf{i}_\xi, \mathbf{i}_\zeta: \xi \text{ 軸, } \zeta \text{ 軸方向の単位ベクトル, } 4\pi^2 R / T^2 = G(m_1 + m_2) / R^2$$

宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-960003

---

発行日 1996年3月25日

編集・発行 宇宙開発事業団

〒105-60

東京都港区浜松町2丁目4番1号

世界貿易センタービル22階

TEL 03-5470-4111 (代表)

---

©1996 NASDA

無断複写、転載を禁ずる

<本資料に関するお問い合わせ先>

宇宙開発事業団調査国際部技術情報課

TEL 03-5470-4276 ~ 4279

