

ISSN 0389-4010

UDC 532.516

532.517.4

532.526

519.6

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-1316

$k$ - $\varepsilon$  乱流モデルを用いた単翼素および多翼素翼型  
まわり非圧縮流れの有限要素法による解析

重 見      仁 ・ 伊 藤 婦美子

1996 年 12 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# $k$ - $\varepsilon$ 乱流モデルを用いた単翼素および多翼素翼型 まわり非圧縮流れの有限要素法による解析\*

重 見 仁\*<sup>1</sup> 伊 藤 婦美子\*<sup>1</sup>

## Employment of $k$ - $\varepsilon$ Turbulence Model for Finite-Element Analysis of Flows over Single- and Multi-Component Aerofoils\*

Masashi SHIGEMI\*<sup>1</sup> and Fumiko ITO\*<sup>1</sup>

### Abstract

Finite-element analysis code to solve incompressible Navier-Stokes equations was incorporated into the  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model of high Reynolds number type, and was applied to flows around single- and multi-component aerofoils. Although the relevant equations are highly nonlinear and, therefore, their solutions are easy to diverge, the employment of the implicit Euler scheme for time marching integral and the introduction of background turbulence in the uniform flow made it possible to obtain stable solutions. For gentle flows produced around aerofoils at moderate angles of attack or aerofoils with a flap and slat at moderate deflection angles, the computed pressure distributions around the aerofoils and lift coefficients as well are in good agreement with measured results. The effectiveness of the turbulence model for such complicated flows was assured from this fact. For the flows which oscillated periodically or corresponded to aerofoils at high angles of attack, however, there was less agreement between computed and measured results. To solve a large-scale linear equation system, which was necessitated by the adoption of the implicit Euler scheme, a newly developed code for the direct method was used successfully.

### 概 要

非圧縮性 Navier-Stokes の式を有限要素法によって解く計算コードに高レイノルズ数型の  $k$ - $\varepsilon$  乱流モデルを組み合わせて、翼型まわりの流れを数値的に解くことを試みた。解くべき方程式は非線形性が強く、発散しやすい性質を持つが、陰的オイラースキームを用いて時間積分を実行し、さらに一様流中に潜在する乱れの存在を仮定した結果、安定な流れの解を得ることができた。迎角、フラップの偏角があまり大きくない場合の比較的小さな流れに対しては、計算で得られた翼型まわりの圧力分布、揚力は実験結果と良く一致し、この乱流モデルを用いる有効性が確認できた。しかし、流れが時間とともに振動する場合や、迎角の大きい場合には実験値と計算値の一致の度合いは低くなった。陰的オイラースキームの採用に伴って必要となった大規模な一次方程式系の解法として、できる限り少ない計算メモリで高速に解の得られる直接解法コードを新たに開発して用いた。

---

\* 平成 8 年 9 月 10 日 受付 (received 10 September 1996)

\*<sup>1</sup> 新型航空機研究グループ (Advanced Aircraft Research Group)

## 1. 導 入

スーパーコンピュータに代表される電子計算機の進歩と、偏微分方程式の数値解法の研究成果とによって、数値流体力学(CFD)の進歩は目覚しく、それが航空機の機体まわりの流れの解析や設計に占める割合は着実に増加しつつある。翼型まわりの流れの解析に関しても、今日ではCFDは風洞試験に置き替わることは無理としても、それを補う地位を占めるにいたっている。しかし、迎角が大きくなり境界層が剥離しやすい状況になった場合や、フラップやスラットなどの複数の翼素から構成される翼型(多翼素翼型)のような複雑な形状まわりの流れが対象となる場合には、数値解析の結果と実験の結果には開きが大きく、CFDに対する信頼度はかなり落ちる。

今日ナビエ・ストークスの式を数値的に解いて翼型まわりの流れを求めるということは、さほど難しい問題ではなく、差分法を用いた各速度域の流れの数値解析は数多くなされている。また、有限要素法を用いれば単翼素翼型、多翼素翼型の区別なく、翼型まわりの層流解を得ることができる<sup>1)</sup>。今日のCFDにおいて最大の課題となっているのは乱流の取り扱いである。単一の翼型が程々の迎角をもって流れの中におかれている問題では、Baldwin-Lomaxの乱流モデル<sup>2)</sup>に代表される簡単な代数モデルでも、実用上十分に利用価値のある結果が得られている。上に述べた数値解析による翼型まわりの流れの結果と実験結果との一致が悪くなる場合とは、流れの構造が複雑になり、既存の乱流モデルでカバーすることが難しくなった場合である。たとえば、多翼素翼型まわりの流れでは合流境界層流れ、スロットを通る高速の流れ、翼素によって大きく向きを変えられ剥離しかかった流れ等、様々な流れが混在し、全体として複雑な流れを形作っている。翼型の研究を進める上では、このような多翼素翼型まわりの流れについても、風洞試験と平行して数値解析を行い、実験データの不足を補うと同時に両者の比較から新しい問題が見つかるような状況にあることが望ましい。

このような観点から、高レイノルズ数型の $k-\varepsilon$ 乱流モデルを組み込んだ非圧縮性のナビエ・ストークスの式を解いて、単翼素、および多翼素翼型まわりの流れを数値的に求める計算コードを作成した。この乱流モデルを選んだ理由は、計算に要するコストと得られる乱流の質の割合が、上記目的のためには適当と考えたからである。支配方程式である時間項を含むNavier-Stokesの式と $k-\varepsilon$ 乱流モデルの式とを離散化して数値的に解く解法として、多翼素問題を扱うのに便利な有限要素法を採用した。どちらの式も非線形であるが、 $k-\varepsilon$ 乱流モデルの式

は特に非線形の度合いが大きく、発散しやすい。これらの式を解いて安定な解を求めるために、より安定なスキームを採用すると同時に一様流中にわずかな乱れが潜在的に存在することを仮定するなどの工夫をこらした。これらの式を陰的に時間積分して解き進めるのには、大規模な一次方程式系を繰り返し解くことが必要であり、この部分の計算が全計算時間中の大部分を占める。そこで、高速で効率的な一次方程式系の計算コードを開発し、満足できる結果を得ることができた。

得られた計算コードを用いて、単翼素、多翼素の翼型まわりの流れを解析した。その結果、高レイノルズ数型の $k-\varepsilon$ 乱流モデルを採用した本コードによって比較的安価に当該の流れを計算でき、非定常性のあまり大きくない流れに対しては実験結果ともかなり良く一致することが確認できた。

## 2. 解法の概要

### 2-1. 有限要素法によるナビエ・ストークスの式の解法

二次元の非圧縮性流れの運動は、質量の保存を要求する連続の式、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

と運動量の保存を要求するナビエ・ストークスの式、

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{2}{3} \rho \frac{\partial k}{\partial x} \quad (2-1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{2}{3} \rho \frac{\partial k}{\partial y} \quad (2-2)$$

とによって支配される。ただし、 $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ はそれぞれ気体の密度及び $x$ ,  $y$ 方向の平均速度成分、 $k$ は乱流運動エネルギーである。また $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yy}$ は下に定義する応力テンソル $\Pi$ の成分であり、 $p$ は圧力、 $\mu_e$ は物理粘性係数 $\mu$ と乱流粘性係数 $\mu_t$ の和 $\mu_e = \mu + \mu_t$ である。

$$\Pi = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu_e \frac{\partial u}{\partial x} & \mu_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -p + 2\mu_e \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3)$$

これらの式を解くには、

境界条件

$$\text{境界 } \Gamma_g \text{ において } u = u_1, v = v_1 \quad (4)$$

$$\text{境界 } \Gamma_h \text{ において } \tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y = h_x = 0,$$

$$\tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y = h_y = 0 \quad (5)$$

と初期条件

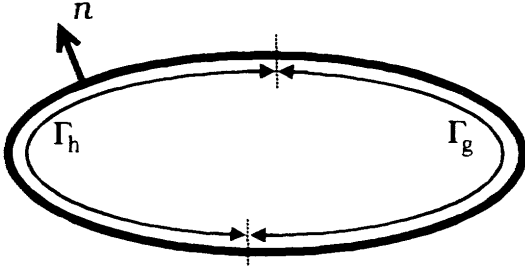


図1：境界と法線

$$u(0, x, y) = u_0 \quad (6)$$

$$v(0, x, y) = v_0 \quad (7)$$

とが与えられる必要がある。なお、全境界  $\Gamma$  は  $\Gamma_g$  と  $\Gamma_h$  に分けられ両者は重ならない。また、上式中の  $n_x$  と  $n_y$  は境界  $\Gamma_h$  上で流れの領域に向かって立てられた法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の成分である (図1)。

(1), (2) 式を連立させて数値的に解けば未知関数  $u$ ,  $v$  と  $p$  が独立変数  $t$  と  $x$ ,  $y$  との関数として得られる。しかし非圧縮性の流れの場合, (1) 式の形が (2) 式とかなり異なっており, 圧縮性の流れの場合のように両式を共通に扱うことが出来ない。この理由は主として, 流れが時間的に変化して (2) 式が時間微分の項を含むにもかかわらず, (1) 式には時間に関する項が無いことにある。従って, (1), (2) 式を組み合わせるためにいろいろな工夫がなされており, それぞれMAC法<sup>3)</sup>, SIMPLE法<sup>4)</sup>などに発展して広く使われている。Zienkiewiczによって最初に文書で示されたとされる<sup>5)</sup>ペナルティ関数法もその一つで (1) の連続の式の代りに

$$p = -\lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (8)$$

が近似的になりたつとして, この式を用いることで上に述べた困難を回避している。ここで  $\lambda$  は充分大きな正の定数である。圧力  $p$  が  $u$ ,  $v$  を用いて陽に表現されるため, (8) 式を (2) 式に代入して得られた偏微分方程式は  $u$ ,  $v$  のみについての式となる (後述するように, 次式において  $k$  は既知量と見做される)。

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu_e \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_e \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} - \frac{2}{3} \rho \frac{\partial k}{\partial x} \quad (9-1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu_e \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu_e \frac{\partial v}{\partial y} \right\} - \frac{2}{3} \rho \frac{\partial k}{\partial y} \quad (9-2)$$

このようにペナルティ関数法を用いると  $u$ ,  $v$  と  $p$  が分離されるため, 一度に解くべき未知数は  $u$ ,  $v$  だけになり, 計算の負荷が大幅に軽減される。 $u$ ,  $v$  は (9) 式を時間について積分し, 時々刻々の値を逐次的に求めるが,

$p$  については必要な時刻でのみ (8) 式から値を求めればよい。(9), (8) 式を重み付き残差法に基づく有限要素法によって以下の手順で解く。

まず全領域は矩形の双一次のアイソパラメトリック要素によって分割されているものとし, 各要素内任意の点における (時間) 平均速度成分  $u$ ,  $v$  と乱流運動エネルギー  $k$  は頂点での値  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $k_k$  と基底関数  $N_k$  を用いて,

$$u = N_k u_k, v = N_k v_k, k = N_k k_k \quad (10)$$

と表されるものとする ( $k=1 \sim 4$ )。ただし重複する添字は積の総和を表しており, たとえば

$$N_k u_k = \sum_{k=1}^4 N_k u_k$$

である。今後この表示法を使うことにする。速度成分を (10) 式のように展開した結果, (9) 式は次のようになる。変数の上の点 (ドット) は時間による微係数である事を示している。

$$\begin{aligned} & \rho \left( \dot{u}_k N_k + N_j u_j \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} - \frac{2}{3} \rho k_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{aligned} \quad (11-1)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \dot{v}_k N_k + N_j u_j \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right\} \\ &- \frac{2}{3} \rho k_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{aligned} \quad (11-2)$$

(11) 式に重み関数  $w_i$  を掛けたうえで, 考えている全領域にわたり積分する。

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} w_i \left( \dot{u}_k N_k + N_j u_j \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} w_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} - \frac{2}{3} \rho k_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (12-1)$$

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} w_i \left( \dot{v}_k N_k + N_j u_j \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} w_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \rho k_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right] d\Omega \end{aligned} \quad (12-2)$$

重み関数  $w_i$  としては  $N_i$  をそのまま用いるのが通常のガラーキン法であるが、レイノルズ数が大きくなった時に現れる解の数値的な不安定 (wiggle の発生) を解消するために、上流側の重みを下流側よりも大きくとる SUPG の手法を採用して、

$$w_i = N_i + q_i \quad (13)$$

とした。  $q_i$  の決定法は SUPG の開発者である Brooks and Hughes<sup>6)</sup> になった。(13)式を代入して(12)式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) \left( \dot{u}_k N_k + N_j u_j u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} q_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right] d\Omega \\ &- \frac{2}{3} \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) k_k \frac{\partial N_k}{\partial x} d\Omega \quad (14-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) \left( \dot{v}_k N_k + N_j u_j v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right\} \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} q_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right\} \right] d\Omega \\ &- \frac{2}{3} \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) k_k \frac{\partial N_k}{\partial y} d\Omega \quad (14-2) \end{aligned}$$

(14-1)、(14-2)両式の右辺第一項の積分に発散定理を用いると、それぞれ

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} N_i h_x d\Gamma - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial N_i}{\partial y} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right] d\Omega \quad (15-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} N_i h_y d\Gamma - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial N_i}{\partial y} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right\} \right] d\Omega \quad (15-2) \end{aligned}$$

となる。

流れの領域  $\Omega$  全体にわたる積分は、個々の要素内での

面積分を足し合わせる形で実行される。その際 (14-1)、(14-2)両式の右辺第二項の積分は、(1)速度成分は双一次アイソパラメトリック関数で補間されている、(2)圧力は一つの要素内で一定値をとることとする、(3)  $q_i$  も要素内で一定値である、(4)要素は矩形である、ために 0 になる。従って最終的に(14)式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) \left( \dot{u}_k N_k + N_j u_j u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial N_i}{\partial y} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right] d\Omega \\ &+ \frac{2}{3} \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) k_k \frac{\partial N_k}{\partial x} = \int_{\Gamma} N_i h_x d\Gamma \quad (16-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) \left( \dot{v}_k N_k + N_j u_j v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left\{ \mu_e \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial N_i}{\partial y} \left\{ \lambda \left( u_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + 2\mu_e v_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right\} \right] d\Omega \\ &+ \frac{2}{3} \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) k_k \frac{\partial N_k}{\partial y} = \int_{\Gamma} N_i h_y d\Gamma \quad (16-2) \end{aligned}$$

要素内で面積分を行なう際に  $2 \times 2$  のガウス積分を用いたが、 $\lambda$  あるいは  $q$  を含む項は一点ガウス積分によって値を求めた。

積分を行なった後、(16)式は行列とベクトルを用いて、次のように書き下せる。

$$M\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \lambda \mathbf{P}\mathbf{u} + \mu_e \mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (17)$$

ただし  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}(\mathbf{u})$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{V}$  はそれぞれ質量項、対流項、圧力項、粘性項を表わす行列、 $\mathbf{u}$  は各節点における速度成分  $u_i$ 、 $v_i$  ( $i$  は節点番号) をすべて縦にならべて得られたベクトルである。

$$\mathbf{u} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots)^T$$

四つの行列のうち対流項ベクトルだけは速度ベクトルの関数となっているので、それを強調する記述をしてある。

(5)式の境界条件にもかかわらず(17)式の右辺がゼロベクトルにならないのは、乱流エネルギーの項があるからである。

(17)式を時間積分するために、 $\theta$  法<sup>7)</sup>を用いる。これは左辺の微係数を  $(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) / \Delta t$  と差分近似し、対応する右辺を時刻  $n+1$  における値と時刻  $n$  における値の混合で表す方法であり、混合の割合を与えるのがパラメータ  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) である。

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = & -(1 - \theta)(\mathbf{C}(\mathbf{u}_n) + \lambda \mathbf{P} + \mu_e \mathbf{V}) \mathbf{u}_n \\ & - \theta(\mathbf{C}(\mathbf{u}_{n+1}) + \lambda \mathbf{P} + \mu_e \mathbf{V}) \mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{b} \quad (18) \end{aligned}$$

時刻  $n+1$  の量を左辺,  $n$  の量を右辺に分離して次式を得る。

$$\begin{aligned} & \{M + \Delta t \theta (C(u_{n+1}) + \lambda P + \mu_e V)\} u_{n+1} \\ &= \{M - \Delta t (\theta - 1) (C(u_n) + \lambda P + \mu_e V)\} u_n + b \Delta t \end{aligned} \quad (19)$$

流れが時間的に変化する問題では  $\theta$  の値を 0.5 にとるのが最も誤差が少ないが (この時  $\theta$  法は Crank-Nicholson 法に一致する), 現在取り扱っている問題は流れが時間的に変化するものとして時間積分を行なうものの, 最終的には  $n$  を十分大きくした時流れが定常値に収束すると期待される問題であり, この場合  $u_{n+1}$  と  $u_n$  は同じ値になり  $\theta$  の値に依存しなくなる。そこで数値積分を安定化して計算時間を短くするため,  $\theta = 1$  とした。(19) 式は非線形方程式なので, Newton-Raphson 法により解を求めた。

## 2-2. 乱流モデル

実用的な乱流モデルとして, 高レイノルズ型の  $k$ - $\varepsilon$  モデル<sup>8)</sup>を用いた。このモデルによれば, 乱流特性量である乱流運動エネルギー  $k$  と散逸率  $\varepsilon$  の支配方程式は

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \mu_t P - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (20-1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_1 \frac{\mu_t \varepsilon}{k} P - C_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (20-2)$$

と表すことができる。ただし,

$$P = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$$

である。そして乱流粘性  $\mu_t$  は  $k$  と  $\varepsilon$  とで次のように与えられる。

$$\mu_t = C_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \quad (21)$$

$C_\mu$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$  は定数でそれぞれ 0.09, 1.44, 1.92, 1.0, 1.3 が推奨値とされている。

(20) 式に対しても初期条件と境界条件が必要であり, 各々次のように与えられる。

境界条件

$$\text{境界 } \Gamma_g \text{ において } k = k_1, \varepsilon = \varepsilon_1 \quad (22)$$

境界  $\Gamma_h$  において

$$\frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y = m_k = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} n_y = m_\varepsilon = 0 \quad (23)$$

初期条件

$$k(0, x, y) = k_0 \quad (24)$$

$$\varepsilon(0, x, y) = \varepsilon_0 \quad (25)$$

このモデルを高レイノルズ数型と呼ぶのは, (20) 式が物理粘性の影響が慣性力の影響に比べて非常に強い (レイノルズ数の低い) 固体壁面近くでは成り立たず, 壁面からある程度離れた場所ではしか応用することができないからである。このためこの乱流モデルを用いる際には, 壁の付近に壁に沿った仮想的な境界 (これを計算境界と呼ぶ事にする) を設け, この境界の外側 (流れ場の側) では前章で導いた流れの支配方程式と (20) 式から流れを決定し, この境界の内側 (壁側) では壁法則によって流れを決める。流れと乱流粘性を支配する連立方程式を解くためには, 計算境界上で境界条件を与えなければならない。その方法は次章で述べる。

(20) 式は (9) 式と全く同様に離散化される。(10) 式で用いた基底関数  $N_k$  を用いて要素内の  $\varepsilon$  は

$$\varepsilon = N_k \varepsilon_k \quad (26)$$

と表されるとする。 $k$  についても同様の展開をすることは (10) 式で既に述べた。これらを (20) 式へ代入した後, 重み関数  $w_i$  を掛けて全領域にわたり積分する。ここでも  $w_i = N_i + q_i$  と定義する。

再び拡散項に対して発散定理を応用して

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) \left( \dot{k}_k N_k + N_j u_j k_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j k_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\rho k} \right) \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) k_j d\Omega \\ &- \frac{1}{\sigma_k} \int_{\Omega} q_i \left( \frac{\partial \mu_t}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) k_j d\Omega \\ &- \int_{\Omega} (N_i + q_i) \mu_t P^h d\Omega + \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) N_j \varepsilon_j d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} N_i \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \left( \frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (27-1)$$

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} (N_i + q_i) \left( \dot{\varepsilon}_k N_k + N_j u_j \varepsilon_k \frac{\partial N_k}{\partial x} + N_j v_j \varepsilon_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \varepsilon_j d\Omega \\ &- \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \int_{\Omega} q_i \left( \frac{\partial \mu_t}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial \mu_t}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \varepsilon_j d\Omega \\ &- \rho C_1 C_\mu \int_{\Omega} (N_i + q_i) P^h N_j k_j d\Omega \\ &+ \rho C_2 \int_{\Omega} (N_i + q_i) N_j \varepsilon_j \left( \frac{N_k \varepsilon_k}{N_i k_i} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} N_i \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (27-2)$$

ただし,

$$P^h = 2 \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right)^2 + \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j + \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j \right)^2 \quad (28)$$

である。

$\mathbf{z}$  は各節点における  $k$  と  $\varepsilon$  の値  $k_i, \varepsilon_i$  ( $i$  は節点番号) をすべて縦にならべて得られたベクトル

$$\mathbf{z} = (k_1, \varepsilon_1, k_2, \varepsilon_2, \dots)^T$$

であるとする、(27-1), (27-2)両式はまとめて次のようにマトリックス表示できる。

$$M\dot{\mathbf{z}} + C\mathbf{z} + D(\mathbf{z})\mathbf{z} + E\mathbf{z} + F(\mathbf{z})\mathbf{z} = 0 \quad (29)$$

$M, C$  は(17)式と同じ質量項, 対流項を表わす行列であり,  $D$  は拡散項,  $E$  と  $F$  はそれぞれ残りの2項を表わす行列である。(29)式右辺は境界条件(23)式により0になる。(27)式中ではあまり表記が複雑になることを避けるため,  $\mu_i$  という表現を残したが, 実際にはこれは(21)式で置き換えられる。従って(29)式は  $\mathbf{z}$  に関する非常に複雑な非線型方程式である。

$\dot{\mathbf{z}} \approx (\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n) / \Delta t$  と差分近似し,  $\theta$  法を用いて(29)式を変形して, 次式を得る。

$$\begin{aligned} & \{M + \Delta t \theta (C + D(\mathbf{z}_{n+1}) + E(\mathbf{z}_{n+1}) + F(\mathbf{z}_{n+1}))\} \mathbf{z}_{n+1} \\ & = \{M - \Delta t (\theta - 1)(C + D(\mathbf{z}_n) + E(\mathbf{z}_n) + F(\mathbf{z}_n))\} \mathbf{z}_n \end{aligned} \quad (30)$$

(19)式の時と同様,  $\theta = 1$  と設定した。この式を解くには前と同様 Newton-Raphson 法を用いた。

本来(19)式と(30)式は連立させて解くべきものであるが, そのようにすると同時に解かれる未知数の数が多くなり計算領域と計算時間が膨大になる。そこで(19)式と(30)式を分離して, (19)式を解く際は  $\mathbf{z}$  は既知とし, 逆に(30)式を解く際には  $\mathbf{u}$  を既知として, 両式を交互に解き進めた。求める解は時刻を無限に進めた時, 定常解に収束するものと考えられ, 定常解には両式を分離した影響は現れない。

### 2-3. 境界値の与えかた

高レイノルズ数型の  $k-\varepsilon$  モデルを使う際には, (20)式が境界層の粘性底層の流れに対しては適用できないから, 計算領域の境界(計算境界)を図2に示すように実際の固体壁から離して設定しなければならない。従って壁から幾分離れた点での速度及び  $k, \varepsilon$  の値を推定して, それらを境界条件として計算に組み込む必要がある。

乱流境界層の理論によれば, 乱流境界層はその構造上

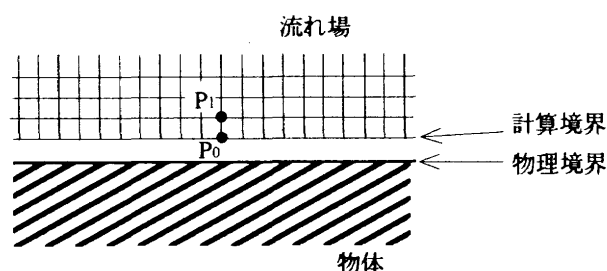


図2: 計算領域と計算境界

の違いから内層と外層に分けられ, 内層はまた粘性底層領域と対数法則領域とに分けられる。そして内層での速度プロファイルは, 摩擦速度  $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$  と動粘性係数  $\nu$  で無次元化した壁からの距離  $y^+ = y u_\tau / \nu$  の関数として以下の様に与えられる。

$$\text{粘性底層領域 } (y^+ < 5) \quad u/u_\tau = y^+ \quad (31)$$

$$\text{対数法則領域 } (30 < y^+ < 450)$$

$$u/u_\tau = (1/\kappa) \log y^+ + B \quad (\kappa, B \text{ は定数}) \quad (32)$$

$5 < y^+ < 30$  は粘性底層領域から対数法則領域への緩衝域である。粘性底層は文字通り粘性の影響の非常に強い領域で, 高レイノルズ数型の  $k-\varepsilon$  モデルが適用できない領域とはまさにこの領域のことである。一方外層では流れに, 壁の影響以外に境界層外の流れの影響が強く及ぶ領域で, 物体の形状等によってこの領域の速度プロファイルは変化するため, 内層における(30)(31)式のような普遍的な法則(壁法則とも呼ばれる)は存在しない。従って流れの領域に仮想的な計算境界を考えて, この境界で理論から求めた境界値を与えようとする場合, 実現可能な計算境界はそれが境界層の内層中, 対数法則領域にある場合だけということになる。うまく計算境界が対数法則領域にある場合には, (32)式から速度  $u$  が求まる。しかし最終的には計算境界が対数法則領域に納まるにせよ, 計算途中では短期的にこの領域に納まらないことがある得る。その様な場合にも計算が発散する等の不都合が起こらず, ある程度妥当な速度成分値を算出できることが望ましい。(31), (32)式は壁からの距離によってを表わす関数が切り変わる上, 両者の間の緩衝領域を表わす関数が与えられていないため使いにくい。(31), (32)式および緩衝域を含めて統一的に一つの関数で内層内の速度プロファイルを与える式が Reichardt の式<sup>9)</sup>として与えられているので, これを用いて計算境界での速度成分を計算する事にした。

$$\begin{aligned} u/u_\tau = & (1/\kappa) \log(1 + \kappa y^+) + 7.8 \{1 - e^{-y^+/11} \\ & - (y^+/11) e^{-0.33 y^+}\} \end{aligned} \quad (33)$$

図3は(31), (32), (33)式の表すプロファイルをプロットしたものであり, (33)式が(31)(32)両式を含んだ形に

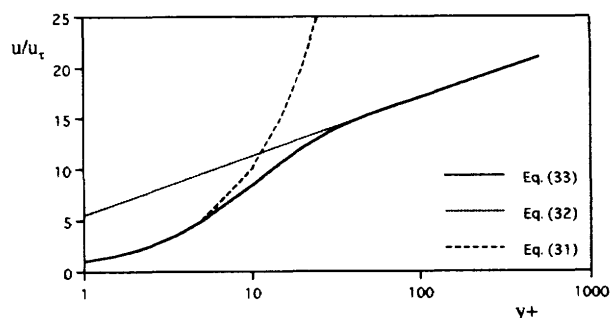


図3: 乱流境界層の壁法則

なっていることを示している。

$u/u_\tau$  と同じく乱流特性量である  $k$ ,  $\varepsilon$  に関する計算境界上での境界値については以下の方法で決めた。低レイノルズ数型の  $k$ - $\varepsilon$  乱流モデルを研究する Patel 達<sup>10)</sup>によれば、今までになされた実験の結果から壁付近の  $k$  と  $\varepsilon$  はある程度の変動の範囲内で共通した振る舞いを示している(図4)。そこで彼らの示す  $k^+ = k/u_\tau^2$  と  $\varepsilon^+ = \nu\varepsilon/u_\tau^4$  とを  $y^+$  の関数として表現したグラフから、 $k$  と  $\varepsilon$  の壁付近でのプロファイルは次のように表わされると仮定した。

$y^+ \leq 4$  のとき

$$k^+ = 0.05y^{+2} \quad (34)$$

$$\varepsilon^+ = 0.1 + 0.0025y^{+2} \quad (35)$$

$4 \leq y^+ < 12$  のとき

$$k^+ = 0.8 + 0.4625(y^+ - 4) \quad (36)$$

$$\varepsilon^+ = 0.14 + 0.00854(y^+ - 4) \quad (37)$$

$12 \leq y^+ < 60$  のとき

$$k^+ = 4.5 - 0.025(y^+ - 12) \quad (38)$$

$$\varepsilon^+ = 1/(0.4y^+) \quad (39)$$

$60 \leq y^+$  のとき

$$k^+ = 3.3333 \quad (40)$$

$$\varepsilon^+ = 1/(0.4y^+) \quad (41)$$

関数(34)–(41)を図4に重ね書きして示した。

図2に示す計算境界上の点  $P_0$  での速度の値を決めるために、その隣の点  $P_1$  における流速が(33)式を満たす

という条件式を解いてその位置での摩擦速度  $u_\tau$  を求め、得られた  $u_\tau$  を(33)式に代入して壁から  $P_0$  までの速度プロファイルを決めた。この方法は Benin and Zinser<sup>11)</sup> によって案出されたものである。(33)式は  $u_\tau$  に関して非線型であるから ( $y^+ = yu_\tau/\nu$ )、これを解くためには Newton-Raphson 法を用いた。同様に  $k^+$  と  $\varepsilon^+$  のプロファイルは(34)–(41)式から決定した。

点  $P_0$  は対数法則領域内の点であるから、壁からの距離  $y^+$  が30から200程度の位置になければならない。実際には、あらかじめ点  $P_0$  が境界層内のこの範囲にあるように計算境界を設定するのは困難であるから、壁際まで格子を作っておき、計算の途中で数値を確かめながらどの格子線を計算領域の境界にするかを決めた。ナビエ・ストークスの式(2)と違って  $k$ - $\varepsilon$  の式(20)は非線形性が強いめか、変化に敏感で発散しやすい。そこで所望のレイノルズ数が  $10^6$  程度の流れを得るためには、まずレイノルズ数  $10 \sim 100$  程度の層流解を計算し、それを初期値としてレイノルズ数  $10^3 \sim 10^4$  の乱流解を計算し、さらにそれを初期値として最終的にレイノルズ数  $10^6$  程度の流れを求めるという手順が必要になった。この様にレイノルズ数を変化させると境界層の厚さも変化するため、計算境界の位置も変化させる必要がある。このためにも、 $P_0$  の位置を変化させられる上記の格子の作り方が有効であった。

#### 2-4. 一次方程式系の解法

本問題を解く際の未知数は各節点での  $u$ ,  $v$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  であるから、その総数は節点数の4倍になる。しかし本解法では  $u$ ,  $v$  と  $k$ ,  $\varepsilon$  を同時に未知数として解くことはせず、 $u$ ,  $v$  を解く時は  $k$ ,  $\varepsilon$  は既知数とし、逆に  $k$ ,  $\varepsilon$  を解く時は  $u$ ,  $v$  は既知数として、ソルバーの負荷の軽減をはかっている。従ってソルバーとしては節点数の2倍の未知数からなるバンド型の連立一次方程式を解くものが必要になる。大規模な連立一次方程式の解法としては、直接法と反復法とがあり、必要になるメモリ領域の大きさという観点からは一般に反復法の方が有利であるが、ペナルティ関数法を用いた有限要素法では係数行列の性質が良くないため、反復法が使えない(収束解が得られない)。そこで直接法を用いて、必要メモリ領域をなるべく少なくし、しかも高速に解を得るために、係数マトリックスをフロント法の考え方とクラウト法とを組み合わせたルーチンで解く解法コードを開発した。手順を図5を参照しながら示す。簡単のため計算領域は矩形として、図5(1)の様に要素に分割されているとする。図中の①, ②, ③... は要素の番号を示すものとし、1, 2, 3... は節点の番号を示すものとする。なお、本報告では、「要素」という語は、流れ場を分割して得られる(有限)要素の

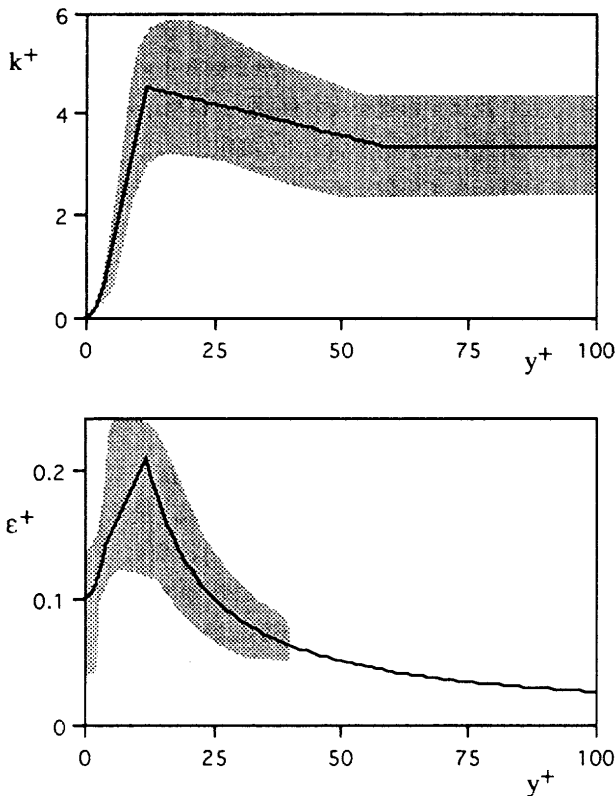


図4 :  $k$  及び  $\varepsilon$  のプロファイル

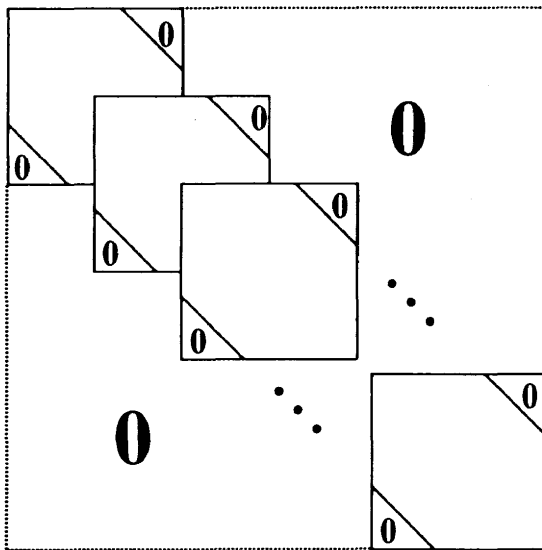


(1)

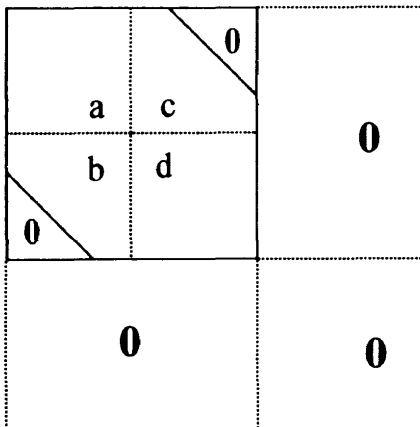
	A	B	C	D
1	6			
2	① 7			
3	② 8			
4	③ 9			
5	④ 10			

I      II

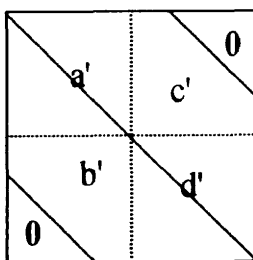
(2)



(3)



(4)



(5)

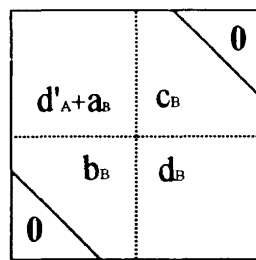


図5：有限要素と行列成分の配置

ことを意味することとし、行列の要素については、「成分」という言葉で置き換えて混同を避けることにする。

本解法の特徴を説明するために、まず比較すべき一般的な解法の手順を述べる。有限要素法の標準的な手続きでは要素①から順次、最後の要素まで要素係数行列を求めてそれを全体係数行列に組み込み、その結果図5(2)に示す構造の行列を得る。太字の0はその部分の係数がすべて0であることを意味している。図中で、全体係数行列の構成単位となっている正方形の小行列は、各々図5(1)のブロックA, B, C, ... に含まれる要素から作られた要素係数行列の和を表わしている(要素①, ②, ③... から作られる要素係数行列そのものではない。それらをブロック毎に加え合わせた結果である)。こうして得られた全体係数行列はバンド構造をしており、0でない成分は対角線付近に集中している。そこで計算機のメモリを節約するために、図5(2)の行列の成分を左にシフトさせて列の数をバンド幅に等しくした配列の形で係数行列を取り扱うのが普通であり、このバンド圧縮変形された行列にクラウト法等を適用して解を求めることが通常行われている。

これに対して、本方法ではまず図5(1)のAブロックの要素についてのみ、要素係数行列を計算して、それらをブロック係数行列に組み込む。図5(3)がその結果である。ブロック係数行列は $a, b, c, d$ の4つの部分に分けられ、 $a$ は図5(1)の格子線I上の節点における未知数 $(u, v)$ あるいは $(k, \epsilon)$ が同じく格子線I上の節点における未知数に及ぼす影響を表す係数、 $b$ は格子線I上の節点における未知数が格子線II上の節点における未知数に及ぼす影響を表す係数、 $c$ は格子線II上の節点における未知数が格子線I上の節点における未知数に及ぼす影響を表す係数、 $d$ は格子線II上の節点における未知数が同じく格子線II上の節点における未知数に及ぼす影響を表す係数である。今後Bブロック、Cブロックの要素から要素係数行列の成分を計算し、逐次全体係数行列に積み込むが、 $a, b, c$ 部分の成分はもはや変化することが無い。それに対し $d$ 部分の成分は、Bブロックの要素から得られた係数を全体行列に積み込む時に既にある値に加える形で更新される。本方法でもクラウト法を応用して解を求めるが、その要点は、全体係数行列が完成してから上三角行列と下三角行列に分解(LU分解)するのではなく、図5(3)の状態でもLUに分解してしまうことである。LU分解後の結果を図5(4)に示す(行列Lの対角線から上の成分はすべて0であり、行列Uの対角線から下の成分はすべて0である。そこでこの図はLとUの各々の0成分を除いた上で両方を組み合わせた形で示してある。この表記では両行列の対角成分が重なってしまうが、Uの対角成分は1に決まっ

ているので書かない。すなわち、図に表記された行列の対角成分は $L$ の対角成分である。)この段階で $a'$ の下三角部分と $b'$ を用いて連立一次方程式の右辺をなすベクトルに前進消去を施しておく。それが済めば $a'$ の下三角部分と $b'$ はもはや不要であるから捨ててしまう。 $a'$ の上三角部分と $c'$ はこの様な部分的LU分解がすべて済んだ時点で開始される後退代入に必要であるから、メモリの別な部分に書き込み保存しておかねばならない。 $d'$ はまだ処置が完了してなくて今後値が変わるから、元の $a$ のあった位置に移動させた後、Bブロックの要素から得られる係数を重ね合わせる(図5(5))。図5(5)の下添字A, Bは図5(1)のAブロック, Bブロックを表している。通常の方法では前進消去は下三角行列 $L$ の全成分を用いて行なうが、本方法では $L$ のうち $d'$ に含まれる成分は用いない。 $d'$ の成分が前進消去に寄与するのは、 $d'_A + a_B$ の形で新しい $a$ に編入されてからである。以下、図5(3)の段階に戻り、これをLU分解して図5(4)となり、右辺に前進消去を施し、後退代入に必要な部分のみを保存するというプロセスを繰り返す。こうしてブロック係数行列を逐次更新しながら計算を進めて、最後のブロック係数行列が図5(3)の形に作られ、それをLU分解して図5(4)の形になった時には、 $d'$ の下三角部分の成分も前進代入に荷担させる。

すべての要素について処置が終わったら、保存しておいた部分(全体係数行列をLU分解して得られた上三角行列にあたる)と連立一次方程式の右辺をなすベクトルに前進消去を施して得られた結果から、後退代入を行ない、求める連立一次方程式の解を得る。 $d$ の部分は完成しないうちにLU分解を施し $d'$ を得て、新しい $a$ を加えてから更にLU分解を施して完成させるが、得られた結果は $d$ を完成させてからLU分解を施した結果と変わらない。

本解法の長所を以下に列挙する。

- (1) 全体係数行列が完成しない段階で逐次LU分解を行ない、 $L$ 行列を捨ててゆくので、 $U$ 行列だけを記憶すればよく、バンド変形を施した全体係数行列を記憶する場合に比べてメモリが半分で済む(図5(4)に示した行列に対応する作業領域が必要となるが、大きな問題ではこれは $L$ 行列に比べて無視できるほど小さい)。
- (2) 直接法を用いて連立一次方程式を解く際、計算時間の大部分はLU分解に費やされ、その比率は行列が大きくなるほど急速に増す。特にバンド圧縮変形した配列は、行列成分と配列成分との関連付けが複雑になるためであろう、変形しない行列のLU分解に比べて時間がかかる。本解法ではバンド圧縮変形させず小さく切った正方行列(小行列)の形でLU分解するので高速な取り扱いが可能である。

- (3) ベクトルプロセッサに対応して数行ずつ同時に計算するのに向いている。

- (4) 実際の流れ場を要素分割すると、図5(1)のように単純ではなく、全体要素行列(図5(2))のバンド幅は行毎に変化する。その場合、上に通常用いられている方法として述べたような全体要素行列を作ると、バンド圧縮変形させてあっても値が0の要素が増えて、計算領域と計算時間を無駄に費やすことになる。本解法はブロック毎に係数行列を扱うので、図5(1)に示した行列に対応した計算領域がブロックによって(そのブロックに含まれる要素の数によって)変化するだけで、全体の計算領域に及ぼす影響は非常に少ない。

## 2-5. 圧力の求め方

上に述べた手順で、各節点における速度成分の大きさがわかると、それを(8)式に代入して圧力 $p$ の値がわかる。圧力は要素毎に一つの値が決まり、要素間では不連続となる。データを取り扱う都合上、節点毎の圧力値が得られることが望ましく、そのためのいろいろな方法が考えられるが、本解析ではHughesの方法<sup>12)</sup>を用いて要素毎の値から節点毎の値を推定した。

乱流モデルとして高レイノルズ数型のk-εモデルを用いると、壁と計算境界に挟まれる領域の流れは壁法則を用いて解くため、一般的には連続の式(1)、あるいはその近似式である(8)式を満たしていない。そのため、(8)式を利用して圧力を求めることはできず、壁法則と同様、境界層に普遍的に成り立つことが知られている性質を利用して圧力を求めることになる。

境界層流れのよく知られている性質として、境界層を横切る方向に圧力は一定である、というものがある。しかしこの様に言えるのは、流線の曲率の小さいなどかな流れだけであり、翼型前縁に沿う流れのように大きな曲率の流線を持つ流れでは、遠心力に釣り合う圧力勾配が境界層を横切る方向に生じる。従って、計算境界上の一点における圧力値から、外挿によって壁までの各点の圧力値を求める際に、計算境界上の圧力勾配を用いた。

本計算では流れは計算境界に沿っていると仮定しているから、計算境界上の流線の曲率はすなわち計算境界の曲率である。曲率を持った流線上の各点で、局所的な流れがその点での曲率半径を半径とする円弧に添う定常流れの運動方程式に従うと仮定して、

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u_\phi^2}{r} - \mu \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \quad (42)$$

( $r$ は半径方向、 $\phi$ は周方向を表わす)から計算境界上の点における圧力勾配を求めて用いた。

## 2-6. 要素分割法

単翼素翼型についてはC型の格子を作り、要素に分割した。二翼素翼型、三翼素翼型問題に対しては、各翼素周りにC型の構造格子を切り、それらの間隙を埋めるように要素を配置した。有限要素法は本来非構造格子によって得られた要素分割を使える点が大きな長所となっている。そのため要素形状として、四角形に限らず例えば三角形のものも使うことができる。しかし大規模な計算をする場合、計算の効率化を考慮するとあまり系統性の無い要素分割は不適当である。2-4節で述べた全体係数行列のバンド幅が非常に大きくなるブロックができてしまい、計算領域、計算時間ともに増加するからである。また翼面付近の境界層内で速度プロファイルが仮定した対数法則を満たしているかどうかを確認するためには、構造格子の方が都合がよい。そこで計算領域を幾つかの部分領域に区切り、各部分領域を構造格子で満たし、やむをえない場合のみ非構造格子を導入することとした。翼型を構成する翼素まわりには必ずC型の構造格子を配置した。各部分領域は構造格子で分割されているとはいえ、部分領域を跨ぐ格子線上の格子点数は一定でないから、全体で見れば非構造格子による要素分割を行なったことになる。先に述べたように矩形の双一次アイソパラメトリック要素を用いた。単翼素翼型まわりのC型格子によって要素分割をした場合に、格子線I, II..., 領域A, B... をどの様にとるべきかを図6(1)(2)に示す。図6(2)の矢印は要素番号をつける順を表している。物体近傍では格子線は細かくとらねばならないが、物体

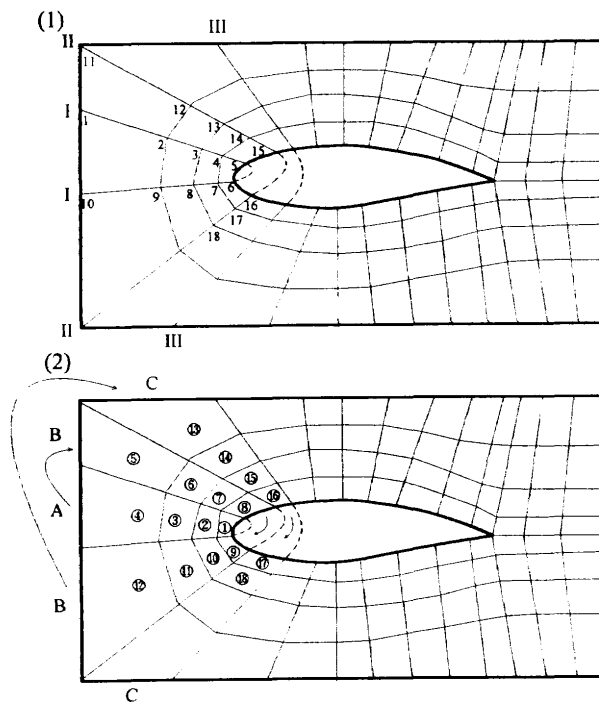


図6：翼型まわりの流れ場の分割

(1) 節点番号と格子線番号, (2) 要素番号とブロック

から遠ざかるとあまり細かい必要はなくなる。そこで物体から遠ざかった格子線は途中で中断させ、節点数を減少させて計算時間の節約を図った(図8(2)参照)。節点番号を縦の格子線に沿ってふってあるので、中断させる格子線は横方向のものに限った。横方向の格子線を中断させると全体の節点数は減少し、連立一次方程式の未知数の数は減少するが、バンド幅はかえって増加するからである。

多翼素翼型の場合は要素分割が複雑になる分だけ節点番号、要素番号のつけかたが複雑になるが、その考え方は単翼素翼型の場合と同じで、バンド幅をなるべく小さくしかも均等になるようにするというものである。

### 3. 解析例

実験データとの比較ができる3つの翼型周りの流れを計算した。(1) MS-0313 翼型(単翼素翼型), (2) フラップつきGA(W)-1翼型(二翼素翼型), (3) フラップ, スラットつきNACA 23012翼型(三翼素翼型), である。境界条件の与え方を規定する境界の区別  $\Gamma_h$  と  $\Gamma_g$  を図7に示す。計算領域は長方形で、上流(入口)境界は前縁の8翼弦長だけ上流に、下流(出口)境界は後縁の10翼弦長後方にある。また上方と下方の境界はいずれも翼型から7翼弦長離れてある。

いずれの場合も最も低い迎角のケースについて、まず低いレイノルズ数( $10^1 \sim 10^2$ 程度)の層流解を求め、得られた速度分布を乱流計算の初期値として用いた。 $k$ と $\varepsilon$ の初期値はそれぞれ  $k_0 = 2 \times 10^{-7}$ ,  $\varepsilon_0 = 1 \times 10^{-6}$  を用いた。迎角を変化させて更に新しい計算をする際には、前の迎角のケースで得られた収束解を初期値とした。計算で得られた圧力を積分して翼型に働く揚力、抗力、法線力を無次元化するには、それらの力を一様流の動圧  $\rho U_\infty^2/2$  と基準長さ  $L$  の積で割って値を得るが、この基準長さとしてはフラップ, スラット等の翼素を畳んだ元々の翼型の翼弦長を用いた。

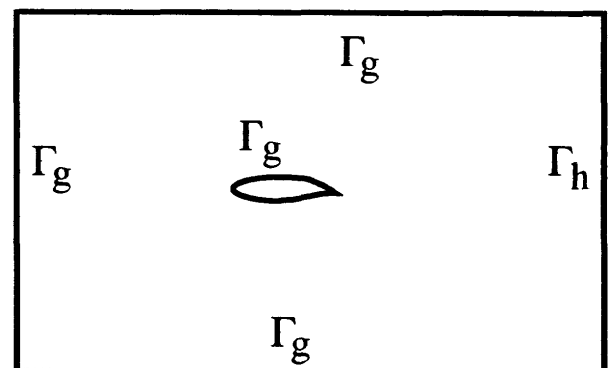


図7：境界条件による境界の分類

### 3-1. MS-0313 翼型周りの流れ

レイノルズ数  $2 \times 10^6$ 、迎角  $0^\circ$ 、 $4^\circ$ 、 $8^\circ$  の流れを計算した。周方向に230点の格子点を配置し、そのうち翼面上に140点を置いた。ラジアル方向には42点の格子点を分布させた。前に述べたように翼型下流では周方向の格子線を間引いた。流れ場の要素分割を図8(1)に、後縁付近の拡大図を図8(2)に示す。最終的に全要素数は8095個、節点の数は8294個になった。計算で得られた翼型まわりの圧力分布とMcGhee and Beasley<sup>13)</sup>の実験データとの比較を図9に示す。計算で求められた圧力分布は、迎角  $0^\circ$ 、 $4^\circ$  の場合には実験値と非常に良い一致を示したが、迎角がそれより大きくなると圧力ピークが低くなる傾向が見られた。図9にはパネル法<sup>14)</sup>によるポテンシャル流解析の結果も同時に示してある。流れ場における等圧線の代表として迎角  $0^\circ$  の時のものを図10に示す。

翼面上の各位置(1から6)での乱流境界層の速度プロファイルを図11に示す。図には計算で求められた  $(y^+, u^+)$  と Reichardt の式(33)とを比較している。計算値  $(y^+, u^+)$  のプロットのうち、一番内側の点  $(y^+)$  が一番小さい点は境界値として与えた値であり(図2の  $P_0$  にあたる)、二番目の点(図2の  $P_1$  にあたる)はその点が Reichardt の曲線上に乗っているという条件を課して一番内側の点の  $(y^+, u^+)$  を計算したものである。従ってこの二点が Reichardt の曲線上に乗っているの

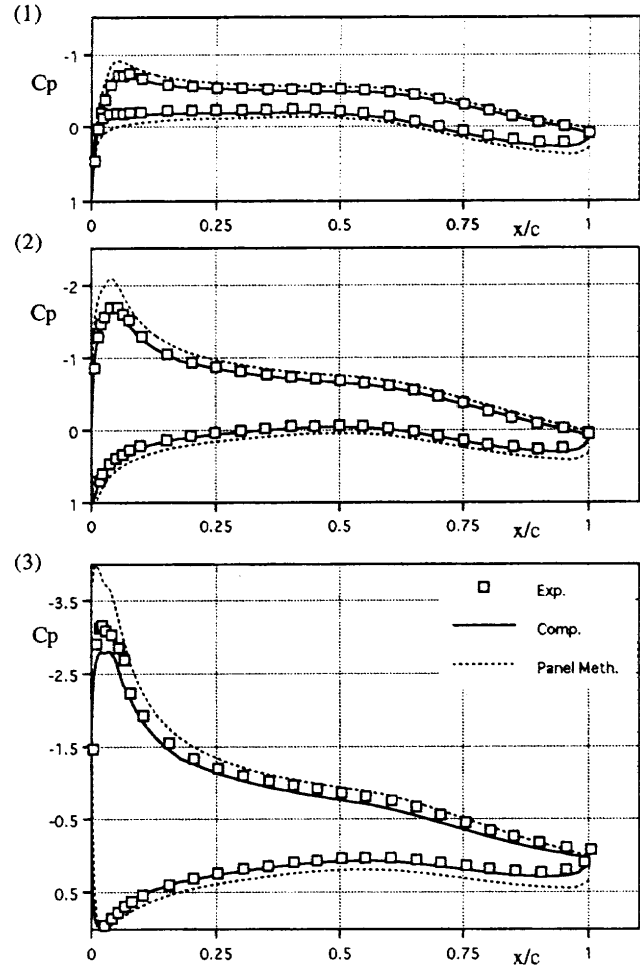


図9 : MS-0313 翼型まわりの圧力分布

(1)  $\alpha = 0^\circ$ , (2)  $\alpha = 4^\circ$ , (3)  $\alpha = 8^\circ$

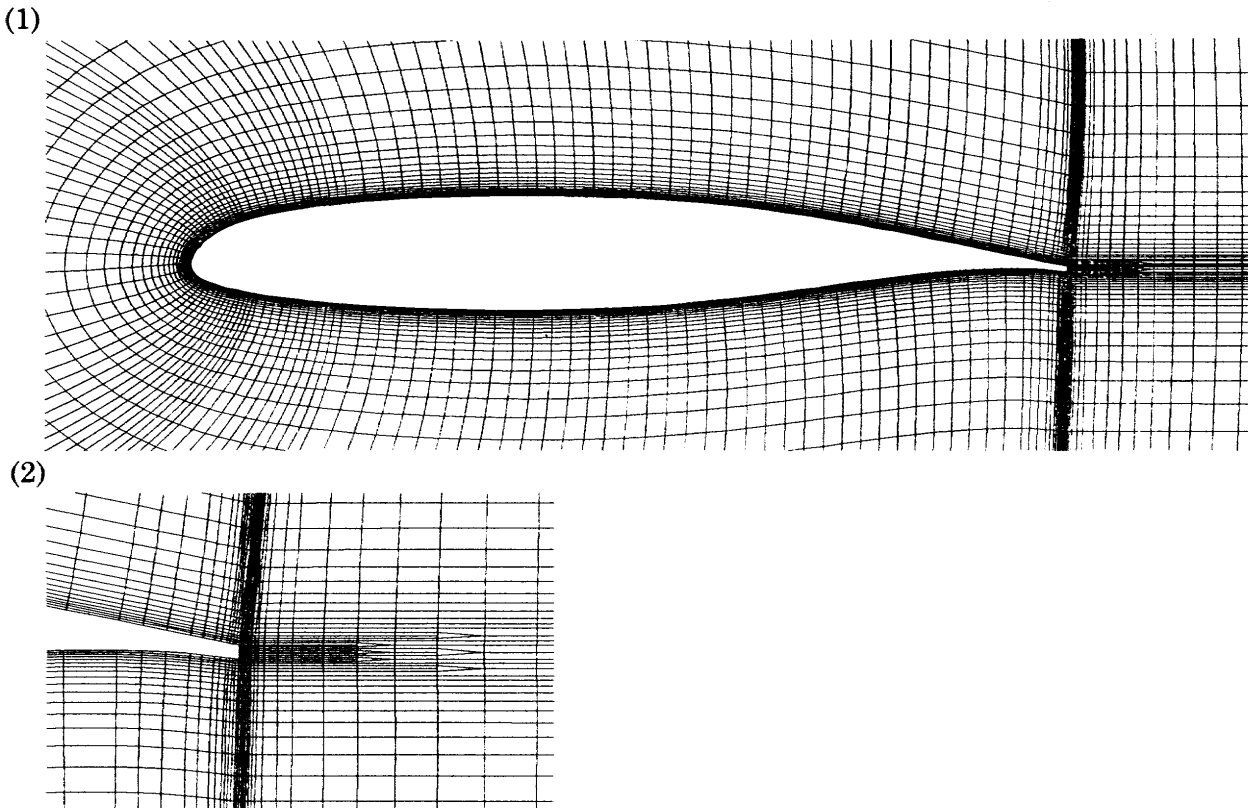
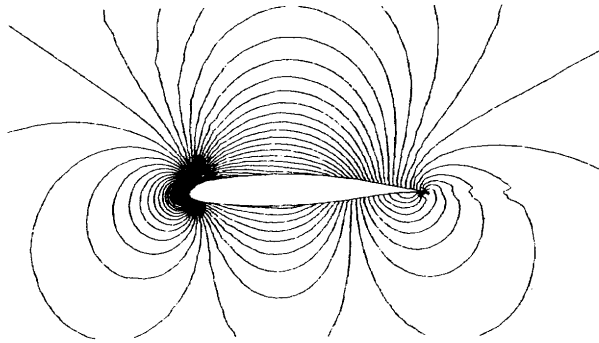
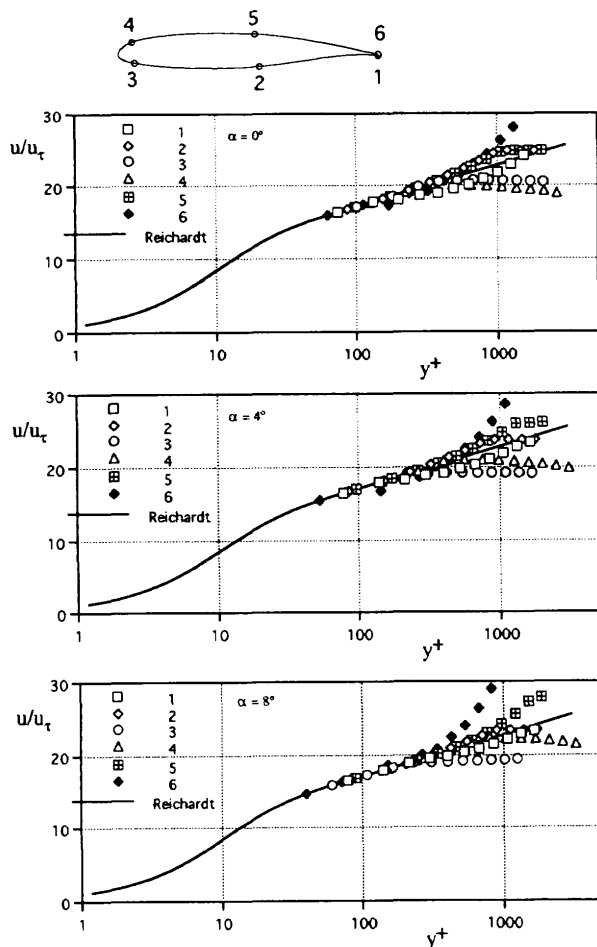


図8 : MS-0313 翼型まわりの要素分割 (1) 翼型近傍 (2) 後縁付近

図10 : MS-0313 翼型まわりの等圧線 ( $\alpha = 0^\circ$ )

は当然である。計算で求められた乱流境界層が壁法則を満たしているかどうかを見るには、それより外側の点の位置とReichardtの曲線との一致を見なければならないが、図11を見ると三番目の点以降も数点がほぼ壁法則を満たしており、高レイノルズ数型の $k-\epsilon$ モデルの使い方が誤っていないことを示している。一般に実験結果から、加速域では $y^+$ の大きい領域まで壁法則が成立ち、逆に減速域では壁法則の成立つ領域が小さい、という傾向が知られている。しかし図11において、加速域の点3と減

図11 : MS-0313 翼型まわりの乱流境界層速度  
プロファイル

速域の点5の速度プロファイルと比較するとそのような傾向は見えない。このことから計算で得られた境界層は実際の流れ中の境界層の特徴を全体としては捕らえているが、それとの厳密な対比はできないということがいえる。

迎角に対する揚力係数と抗力係数の変化を図12に示す。揚力については計算結果と実験結果との一致は非常に良く、 $\alpha = 0^\circ, 4^\circ, 8^\circ$ の各点が実験データの並びに乗る。計算によって求めた抗力は実験値よりも迎角による変化が大きく、 $\alpha = 4^\circ$ だけが実験値とほぼ一致している。計算で得た抗力は大部分が圧力による寄与であり、粘性力による寄与は無視できる程度であった。実験では翼前縁から7.5%翼弦長の点にラフネスを与えて遷移点を固定している場合と、ラフネス無しの場合との両方のデータをとっている。本計算は境界層全体が乱流と仮定しており、どちらかといえばラフネス付きの場合に近いと考えられるが、 $\alpha = 0^\circ$ の時の抗力値はむしろラフネス無しの値に近い。

このMS-0313 翼型の後縁は翼弦長の約0.56%の厚みがある(図8(2)参照)。厚みのある後縁の陰になる領域では流れは剝離して、非常に流れの遅い死水領域が形成さ

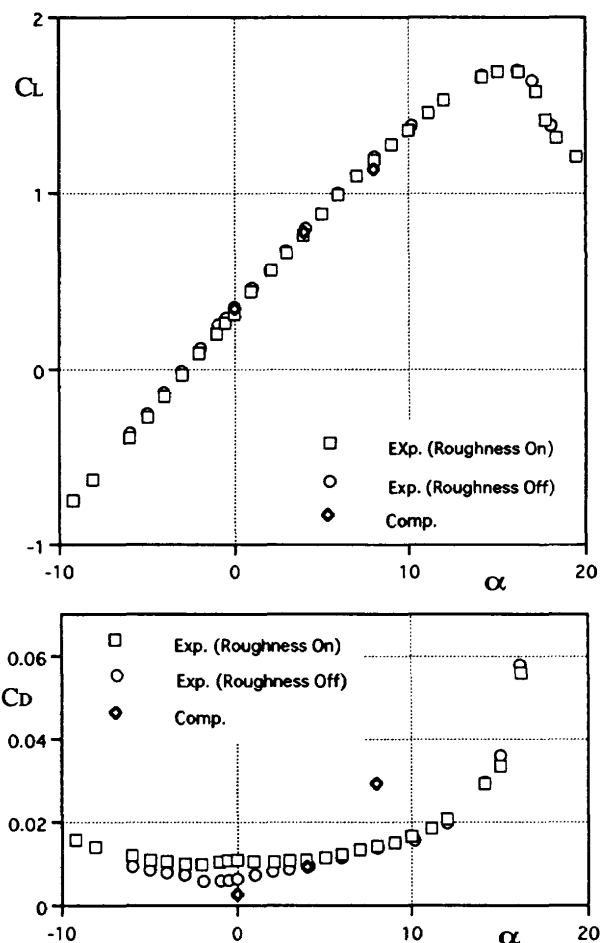


図12 : MS-0313 翼型の揚力特性と抗力特性

れる。この領域にも壁法則を満たす乱流境界層が発達するか否かは極めて疑問である。さらに死水領域のスケールが非常に小さいため、他の翼型表面境界と同様に後縁線に沿ってある距離だけ離して計算境界を与えると、この小さな死水領域が計算をしない領域に呑み込まれてしまう。そこで計算境界を翼型表面から離して設けることは、後縁上面点と後縁下面点を結ぶ境界（後縁の厚みを表す）上では行なわなかった。すなわち、後縁厚みを表す境界が計算境界となり、境界値は $u=v=0$ ,  $k=k_\infty$ ,  $\varepsilon=\varepsilon_\infty$ とした。 $k_\infty$ と $\varepsilon_\infty$ の意味については4-2節で述べる。

### 3-2. フラップ、スラット付きの NACA 23012 翼型まわりの流れ

次の例はNACA 23012翼型からスラットとフラップを切り出して作られた翼型で、フラップ角は $20^\circ$ である。レイノルズ数 $3.5 \times 10^6$ 、迎角 $0^\circ$ ,  $8^\circ$ の流れを計算した。主翼素面上の格子点は140, フラップ面上の格子点は80, スラット面上の格子点は43である。全要素数は19525,

全節点数は19930である。翼型近傍の要素分割を図13(1)に、スラットと主翼素間の間隙部の拡大を図13(2)に、主翼素とフラップ間の間隙部分の拡大を図13(3)に示す。

計算で求められた迎角 $0^\circ$ ,  $8^\circ$ の翼型まわりの圧力分布を図14(1)と(2)に示す。比較のため図中にHarris and Lowry<sup>15)</sup>による実験結果とパネル法によるポテンシャル流解析結果を示してある。迎角が $0^\circ$ の時、実験結果との一致はスラットまわりを除いて非常に良い。MS-313翼型の場合と同様、迎角が大きくなると、スラット上の圧力ピークが十分に伸びず、実験結果からのずれが大きくなる。主翼素及びフラップ上でも同様の傾向が見られるが、実験値との一致は悪くない。しかし圧力ピークが高い場合、むしろパネル法の方が実験値に近い推定をしている。それ以外の領域、たとえば翼型下面の圧力分布はNavier-Stokes 流れ計算の方が実験値と良く一致している。

計算で得られた圧力分布を主翼素の軸に沿って積分して得られる法線力係数 $C_n$ を実験データと比較した結果が図15である。実験データの整理法と統一させるため、

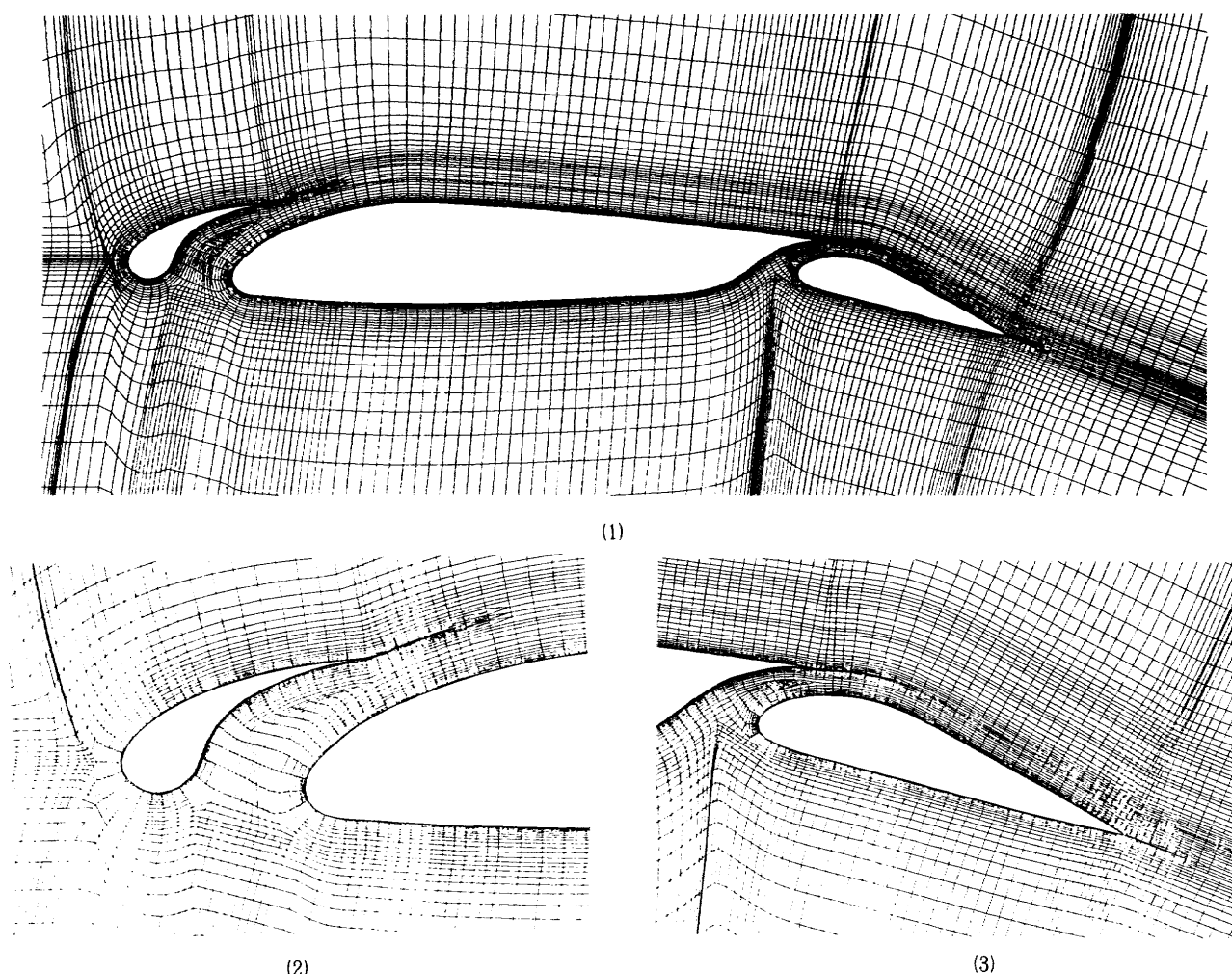


図13: フラップ、スラット付きNACA 23012 翼型まわりの要素分割

(1) 翼型近傍, (2) スラット付近, (3) フラップ付近

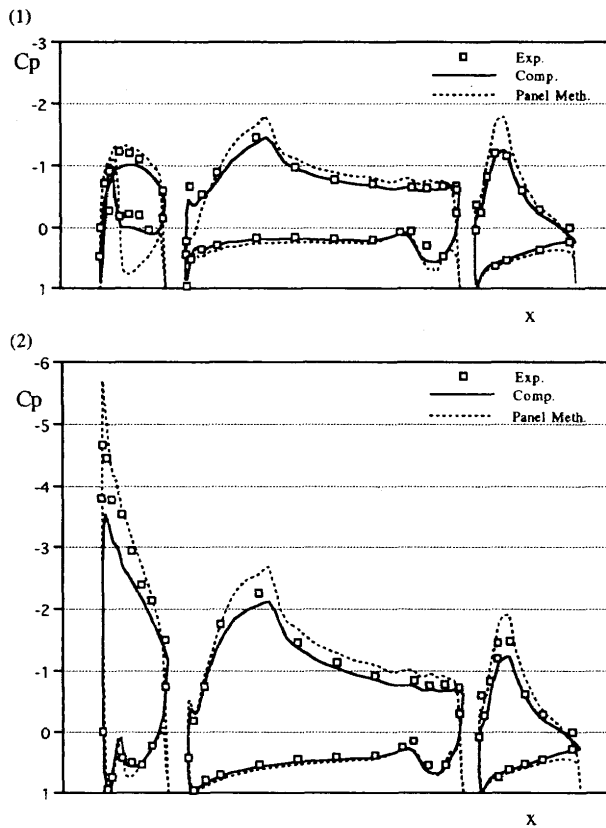


図14：フラップ，スラット付きNACA 23012翼型まわり  
圧力分布

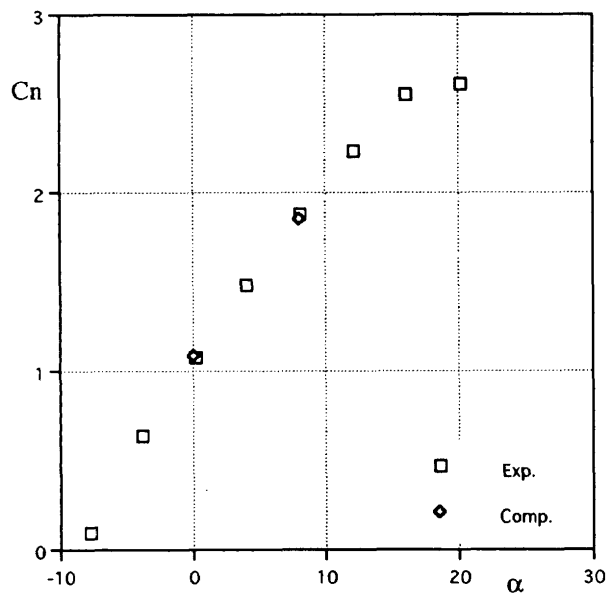


図15：フラップ，スラット付きNACA 23012翼型の法線  
力特性

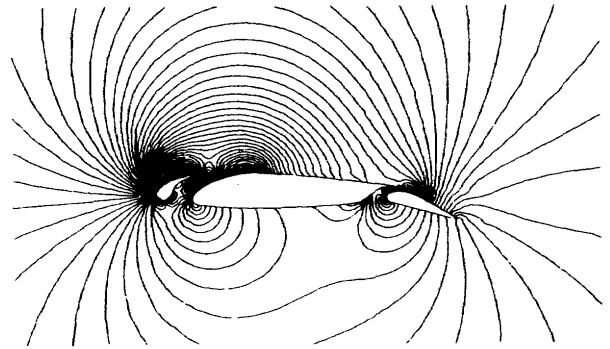


図16：フラップ，スラット付きNACA 23012翼型まわり  
の等圧線 ( $\alpha = 8^\circ$ )

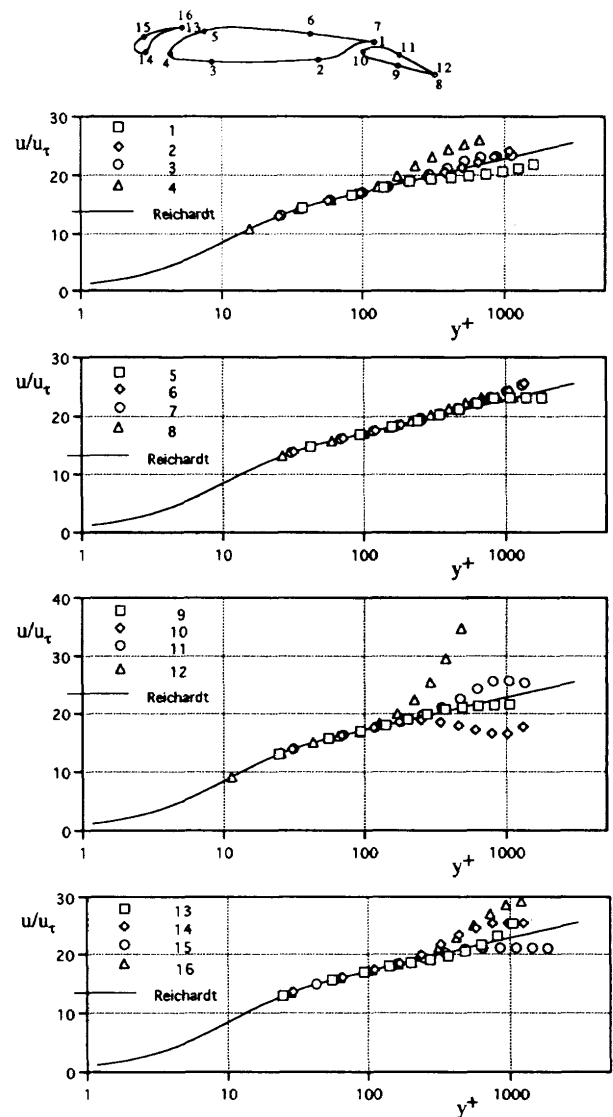


図17：フラップ，スラット付きNACA 23012翼型まわり  
の乱流境界層速度プロファイル ( $\alpha = 0^\circ$ )

この  $C_n$  には、粘性力の寄与は含めてない。実験データとの一致は非常に良い。

流れ場に広がる等圧線は図16のようになった。この図からわかるように後流部分に移動する渦は存在せず、流れが定常値に収束している。

翼型まわりの各点での乱流境界層プロファイルを  $y^+$  対  $u^+$  の形で図17に示す。スラットまわりの圧力分布だけが他の部分に比べて実験値との一致が悪かったので、この部分の境界層特性を詳しく調べたが、特段計算の精度を悪くさせる要因は見つからなかった。

### 3-3. フラップ付きの GA(W)-1 翼型まわりの流れ

この翼型はGA(W)-1 翼型から翼弦長の30%の長さを持つフラップを切り出し、フラップ角 $40^\circ$ で展開したものである。翼型まわりの流れ場の要素分割を図18(1)に示す。図18(2)は主翼素とフラップとのつくる隙間付近の拡大である。この翼型を過ぎるレイノルズ数  $2.2 \times 10^6$ 、迎角  $2.7^\circ$ 、 $7.7^\circ$  の流れを計算によって求めた。GA(W)-1 翼型もMS-0313 翼型と同様後縁が尖っておらず翼弦長の0.73%の厚みを持っている。本計算結果との比較のデー

タを供給しているSeetharam and Wentz<sup>16)</sup>の実験で用いられた翼型は、この厚みつき後縁を持つ翼型からフラップを切り出して作ってあるため、主翼素、フラップともにその後縁は厚みを持っており（図19参照）、その厚みはどちらも翼弦長の0.365%である。しかし本計算では、図19に示すように両翼素の後縁を尖らせる修正を行なっている。主翼素面上の格子点数は150、フラップ面上の格子点数は80である。全要素数は13624、全節点数は13944である。翼面の圧力分布を図20に示す。前縁の圧力ピークが実験値に比べてかなり低く、それに続く翼上面全領域にわたり速度が低く抑えられている。どちらの迎角のケース共に、上に示したMS-0313翼型、NACA 23012翼型の場合に比べて実験値との一致が非常に悪い。翼型に作用する揚力の迎角による変化を図21に示す。揚力には圧力及び粘性力の両方の寄与が含まれている。翼型まわりの圧力分布の不一致を反映して、揚力も一致が悪い。

迎角 $2.7^\circ$ 、 $7.7^\circ$ の翼型まわりの流れの等圧線を図22(1)、(2)に示す。上に示した二つの翼型とこの翼型とで、計算によって得られた流れの大きな違いは、この翼型まわ

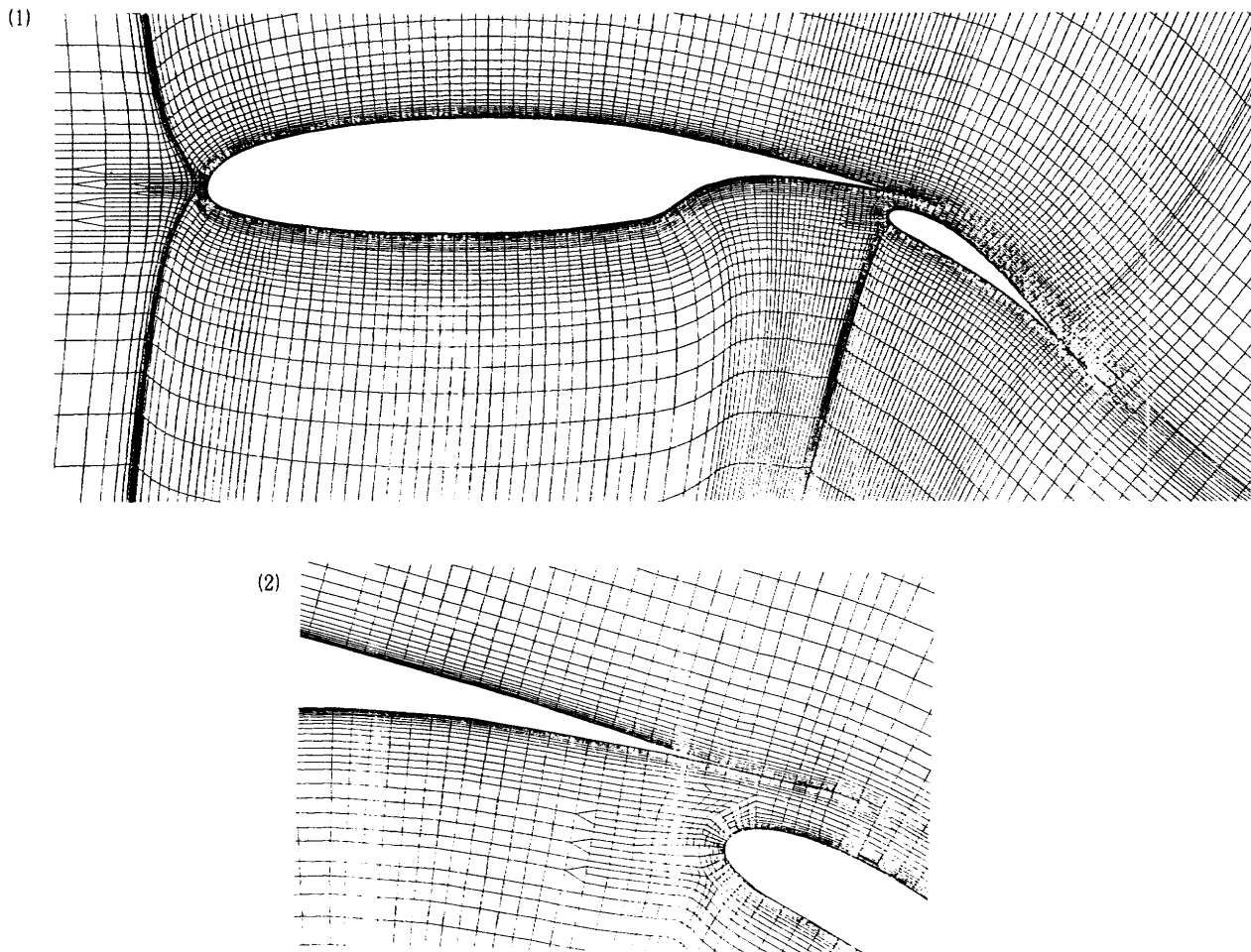


図18：フラップ付きGA(W)-1 翼型まわりの要素分割

(1) 翼型近傍, (2) フラップ前縁付近



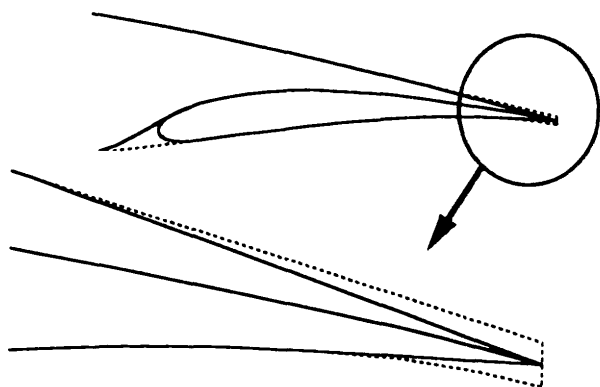


図19 : GA(W)-1 翼型の後縁

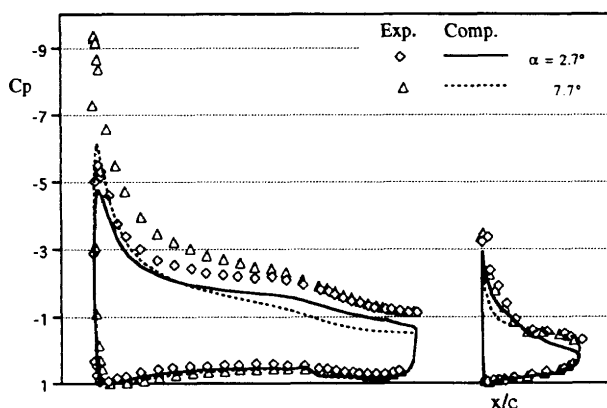


図20 : フラップ付きGA(W)-1 翼型まわりの圧力分布

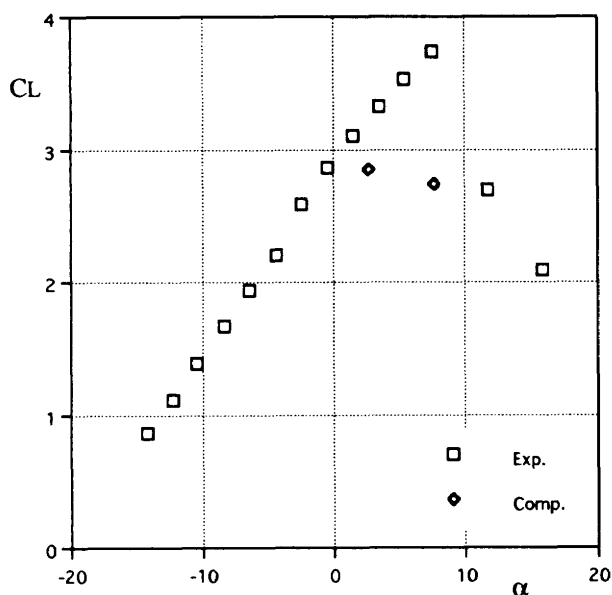


図21 : フラップ付きGA(W)-1 翼型の揚力特性

りの流れの計算値が時間的に収束せず、周期的な変動を繰り返している事である。図22は翼型の後縁から周期的に放出される渦の存在を示している。従って図20はある瞬間の翼型まわりの圧力の様子を示していることになる。しかし、後方渦の移動に伴う圧力分布の時間的変化は移動渦の存在するフラップ下流域では顕著であるが、翼面

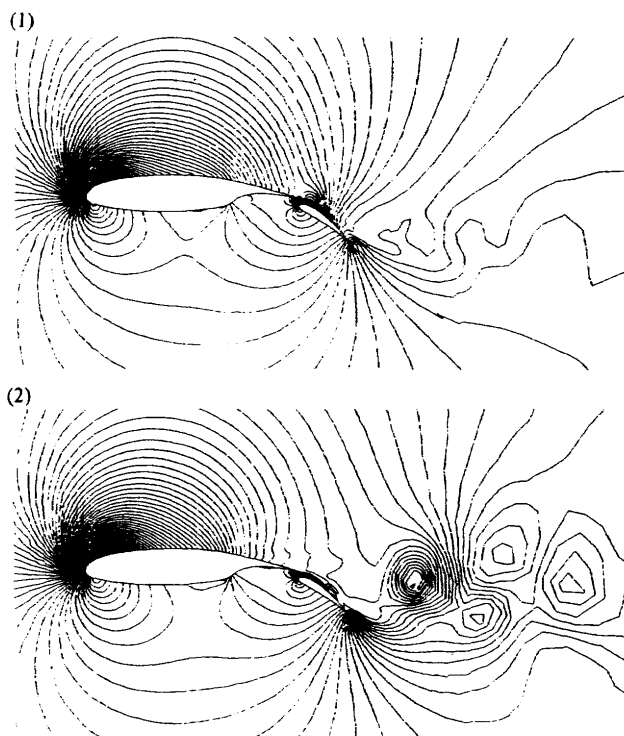


図22 : フラップ付きGA(W)-1 翼型まわりの等圧線

(1)  $\alpha = 2.7^\circ$ , (2)  $\alpha = 7.7^\circ$ 

上では殆ど無いため、図20に示した圧力分布をもって、本計算で得られたフラップ付きGA(W)-1 翼型まわりの圧力分布と見做すことができる。

実験と計算の不一致の主な原因は計算で得られた流れが非定常になったことにありと考えられる。この点については4-3節で議論する。

#### 4. 議 論

##### 4-1 乱流モデルについて

$k-\varepsilon$  乱流モデルは当初ロンドン大学の Imperial College の研究者達によって開発が進められた。このモデルが基本的に妥当であることが認められた後、多くの研究者によって改良の努力がなされてきた。そのようなモデル改良の試みの結果産まれた成果のうちで、もっとも広く知られているものが低レイノルズ数型の  $k-\varepsilon$  モデルであろう。最近発表される  $k-\varepsilon$  モデルを用いた計算では、低レイノルズ数型モデルの方が主流になっている印象を受ける。

高レイノルズ数型モデルの欠点は、それが粘性力に比して慣性力の大きな流れの領域（高レイノルズ数の領域）でしか適用できない点にある。従って、壁の極近傍のように粘性の影響が非常に強く流れに作用する領域では、このモデルを使うことができない。高レイノルズ数型  $k-\varepsilon$  モデルを補完するために使われるのが、壁法則である。これは実験的にほぼ普遍的であると確かめられてい

る乱流境界層内の速度プロファイルを用いて、壁近傍の速度を計算する方法である。高レイノルズ数型の  $k$ - $\varepsilon$  乱流モデルを使う際には、壁に沿って計算境界を設定し、その内側（物体側）では壁法則によって流れを求め、計算境界上で境界値をやり取りする必要がある。

低レイノルズ数型の  $k$ - $\varepsilon$  モデルが考案されたのは、この計算境界の設定と境界値のやり取りの面倒を除くことが大きな動機であった。低レイノルズ数型モデルは、流れの全両域に対して適用できるため、計算境界や、壁法則を用いる煩わしさから逃れることができる。しかし、低レイノルズ数型モデルもまた、壁近傍において壁法則が成り立つことを前提にして作られたモデルであり、陽に現れない形で壁法則を用いている点が高レイノルズ数型モデルと違ってに過ぎない。低レイノルズ数型モデルでは、壁近傍で壁法則と適合させるために、複雑な関数を用いているのが通常であり、そのため収束が遅く発散しやすい。また壁付近の領域は流れの変化が激しい領域であるため、離散的方法によってこの領域の流れを解くためには非常に細かい要素分解が必要となる。そのために要求される計算時間と計算領域は膨大で、本計算のような陰的解法を用いる場合、計算そのものを不可能とするほどである。この点に、高レイノルズ数型の  $k$ - $\varepsilon$  モデルの実用的な意味がある。

本計算で用いたのは  $k$ - $\varepsilon$  乱流モデルの原形ともいうべきいわゆる高レイノルズ数型  $k$ - $\varepsilon$  乱流モデル<sup>8)</sup>である。今までに発表されている同種のモデルを用いた有限要素法による流れの計算例としては、ステップ流における剝離流の推定を行ったものが多く<sup>17,18)</sup>、多翼素翼型における複雑な境界層流れの計算に応用された例を著者は知らない。なお差分法（有限体積法を含む）コードに、0 方程式乱流モデル、1 方程式乱流モデル、2 方程式乱流モデルを組み合わせ多翼素翼型まわりの流れを解析した例として、それぞれ Mavriplis<sup>19)</sup>、Anderson and Bonhaus<sup>20)</sup> 及び Rogers, Wiltberger and Kwak<sup>21)</sup>、Egami, Shima, Nakamura and Amano<sup>22)</sup> の報告がある。

#### 4-2 バックグラウンドの乱れ

$k$  も  $\varepsilon$  もその定義から非負の物理量であるが、人為的に与えた初期状態から定常値に収束するまでの遷移過程では、0 や負になることがある。また(20)式は複雑な非線形方程式であるため、Newton-Raphson 法に基づく繰り返し計算をして解を求めたが、このくり返しの過程内では近似解として負や0の値をとることがある。このようなことが起きた場合には適当な処置を講じないと、解が発散してしまうことが多い。そこで、バックグラウンドの乱れとして、常にある微量である  $k_\infty$  と  $\varepsilon_\infty$  が流れ

場に存在していると仮定し、初期値として  $k_\infty$  と  $\varepsilon_\infty$  を一様に分布させると同時に、計算の途中で  $k$  と  $\varepsilon$  がそれ以下の値になった場合には  $k_\infty$  と  $\varepsilon_\infty$  で置き換える操作を施して、計算の安定化を図った。

$k_\infty$  の値については、低速風洞における乱れの大きさの例を参考にして  $2 \times 10^{-7} U^2$  とした。 $\varepsilon_\infty$  の値については参考にすべき値が見当たらなかったため、対象としているレイノルズ数  $2 \times 10^6$  程度の流れに対して (21) 式によって計算される乱流粘性が物理粘性に比べて十分小さくなるように、値を  $1 \times 10^{-6}$  と定めた。

#### 4-3 解の非定常性の影響

3 章に示した3つの翼型まわりの圧力分布の計算値を、それぞれ対応する実験結果と比較すると、フラップ付きの GA(W)-1 翼型まわりの流れの計算値が実験結果と著しく離れていることに気付く。実験結果では、フラップによって後縁下流の流れが大きく下方向に曲げられる結果、前縁ピークが非常に高くなっているが、計算結果の方では前縁ピークが実験値よりかなり低く（翼前縁の流速が遅く）、翼上面全体にわたっても実験値より遅い流れとなっている。この流れは他の二つの翼型まわりの流れと同様に、定常解が得られる事を想定したスキームを用いているが、実際に得られた流れは他の二つの翼型まわりの流れと異なり、定常的でなく翼型後縁からカルマン渦を放出する非定常流れとなっている。計算の世界でも同一の迎角をもった同一の翼型まわりの流れが定常になるか非定常性はレイノルズ数によって異なる。一般に高いレイノルズ数の流れをいきなり計算しようとする解が発散してしまうので、まず安定で計算しやすい流れを求めたうえで、徐々にレイノルズ数を増して所期の流れを得るという方法を採用した。迎角  $2.7^\circ$  でレイノルズ数  $2.2 \times 10^5$  の流れを求める前段階として計算したレイノルズ数  $5 \times 10^5$  の流れは定常的になった。この流れを初期値としてレイノルズ数  $2.2 \times 10^6$  の流れの計算を開始すると、最初はカルマン渦を発生せず時間ステップを重ねてゆき、その間前縁の圧力ピークが次第に高くなった。しかしやがて定常な流れは不安定になり、カルマン渦が生まれて流れは非定常的になってしまった。それと同時に圧力ピークの高さは次第に低くなり、最終的に落ち着いたのが図20の状態である。時間ステップの大きさを変えて計算してみたが、レイノルズ数  $2.2 \times 10^6$  の定常流れを求めることはできなかった。以上の経験から、本スキームで計算した流れが定常になるか、非定常になるかによって、圧力ピーク高さを代表とする圧力分布特性がかなり変化することが伺われる。

本スキームが定常解の存在を前提としているのは、以下の方法を取り入れているからである。

(1) 速度成分  $u, v$  と乱流特性量  $k, \varepsilon$  とを分離して計算を行なっている。すなわち(19)式と(30)を連立させず、(19)式を解く時には  $k, \varepsilon$  は既知の定数(前回値)とし、逆に(30)式を解く時には  $u, v$  は既知の定数(前回値)として、両式を分離することによって計算にかかる負荷を軽くしている。

(2) そもそも定常問題用に開発された SUPG 法を用いている。

(3)  $\theta$  法による時間積分においてパラメータ  $\theta$  を1にして計算している(陰的オイラースキームを用いて積分している)。

これらの方法はいずれも、解が定常値に収束する場合にはその採用が正当化できるが、定常解が得られない場合には解の精度劣化の原因となり得るものである。従ってこのことがフラップ付きGA(W)-1翼型まわりの流れの数値解が、特に他の翼型まわりの流れの数値解に比べて実験値との一致が悪かった理由となっている可能性は大きい。なお、レイノルズ数  $2.2 \times 10^6$  のGA(W)-1翼型まわりの流れが非定常となったため、 $\theta$  法のパラメータ  $\theta$  の値を0.55に変更したところ、解は発散してしまった。

## 5. 結 論

$k$ - $\varepsilon$  乱流モデルは物体まわりの乱流に対して、一般にコストとの調和のとれた現実的な解を与えるという事が言われている。そこで、非圧縮性 Navier-Stokes の式を有限要素法を用いて解く計算コードに高レイノルズ数型の  $k$ - $\varepsilon$  乱流モデルを組み合わせて、翼型まわりの流れを数値的に解くことを試みた。その結果以下の結論が得られた。

(1). 翼型まわりの流れ、特に多翼素翼型まわりの流れでは、合流境界層流れ、スロットを通る高速の流れ、翼素によって大きく向きを変えられ剥離しかかった流れなど様々な流れが混在して、全体として複雑な流れを形作っている。一方  $k$ - $\varepsilon$  乱流モデルは、支配方程式が高度に非線型なため、このような複雑な流れに適用すると、時間ステップを追ってゆく段階で解が発散してしまうことがしばしば起こる。そこで時間積分の方法として陰的オイラースキームを用い、さらに一様流中にバックグラウンドの乱れの存在を仮定するなどの工夫をした結果、安定した解を求めることができた。

(2). 計算で得られた翼型まわりの圧力分布、揚力、抗力係数は実験結果と良い一致を示した。これは、仮定した乱流モデルによって得られた境界層が、実際の境界層を全体としてほぼ良く捕らえることができたためと考えられる。計算で得られた乱流境界層の特性を調べてみると、細部においては必ずしも実際の乱流境界層のもつ特性を示してはいない。

(3). 流れが周期的に変化する場合については、実験結果と計算結果との不一致が大きくなった。これは、定常解の存在を前提とした計算スキームを用いた当然の結果ともいえるが、計算規模を抑えて計算時間の短縮を図った本計算スキームの適用範囲を示しているともいえる。また、翼型の迎角が大きくなるにつれて、そのまわりの流れは実験で得られた流れから隔たることが経験された。

(4). 有限要素法では大規模の一次方程式系を繰り返し解くことが必要となる。そこで、できる限り少ない計算メモリで高速に解の得られる直接解法コードを開発し、それが期待通りに機能することを確認できた。

## 謝 辞

本研究を進めるにあたり、東京理科大学工学部大学院生、松下昌弘君、石田 武君、青山学院大学理工学研究科生、北田雅之君、浅子知昭君、河田真広君、榎本秀喜君の協力を得たことを記して、感謝の意を表したい。

## 文 献

- 1). Shigemi, M.: Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows around Single- and Multi-Element Aerofoils in High Reynolds Number Region, Technical Report of National Aerospace Laboratory, NAL TR-1010T, 1988.
- 2). Baldwin, B. S. and Lomax, H.: Thin layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows, AIAA 78-257.
- 3). Harlow, F. H. and Welch, J. E.: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Physics of Fluid, Vol. 8, No.12, 1965.
- 4). Patanker, S. V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Pub. Corp., 1980.
- 5). Baker, A. J.: Finite Element Computational Fluid Mechanics, Hemisphere Pub. Corp., 1983, p268.
- 6). A. N. Brooks and T. J. R. Hughes : Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 32, 1982.
- 7). 例えば C. Cuvelier, A. Segal, and A. A. van Steenhoven: Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations, D. Reidel Pub. Co. 1986.
- 8). Launder, B.E. and Spalding, D. B.: The Numerical Computation of Turbulent Flows, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 3, 1974.

- 9). Kestin, J. and Richardson, P. D. : Heat Transfer across Turbulent, Incompressible Boundary Layers, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 6, 1963.
- 10). Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G. : Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number flows: A Review, AIAA J., Vol. 23, No. 9, 1985.
- 11). Benim, A. C. and Zinser, W. : Investigation into the Finite Element Analysis of Confined Turbulent Flows Using a  $k$ - $\varepsilon$  Model of Turbulence, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 51, 1985.
- 12). T. J. R. Hughes: The Finite Element Method, Prentice-Hall, Inc. 1987.
- 13). R. J. McGhee and W. D. Beasley: Low-Speed Aerodynamic Characteristics of a 13-Percent-Thick Medium-Speed Airfoil Designed for General Aviation Applications, NASA TP-1498, 1979.
- 14). Stevens, W. A., Goradia, S. H., and Braden, J. A. : Mathematical Model for the Analysis Two-Dimensional Multi-component Airfoils in Viscous Flow, NASA CR-1843, 1973.
- 15). T. A. Harris and J. Lowry: Pressure Distribution over an NACA 23012 Airfoil with a Fixed Slot and a Slotted Flap, NACA Report 732, 1942.
- 16). H. C. Seetharam and W. H. Wentz, Jr. : A Low Speed Two-Dimensional Study of Flow Separation on the GA(W)-1 Airfoil with 30-Percent Chord Fowler Flap, NASA CR-2844, 1977.
- 17). Taylor, C, Thomas, C. E., and Morgan, K.: Modelling Flow over a Backward-Facing Step Using the F.E.M. and the Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 1, 1981.
- 18). Autret, A. , Granddotto, M. and Dekeyser, I. : Finite Element Computation of a Turbulent Flow over a Two-Dimensional Backward-Facing Step, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 7, 1987.
- 19). Marvriplis, D.: Algebraic Turbulence Modeling for Unstructured and Adaptive Meshes, AIAA J., Vol. 29, No.12, 1991.
- 20). Anderson, W. K. and Bonhaus, D. L.: Navier-Stokes Computations and Experimental Comparisons for Multielement Airfoil Configurations, AIAA-93-0645.
- 21). Rogers, S. E., Wiltberger, N. L. and Kwak, D.: Efficient Simulation of Incompressible Viscous Flow Over Single and Multi-Element Airfoils, AIAA-92-0405.
- 22). Egami, K., Shima, E., Nakamura, S. and Amano, K.: Two-Dimensional Navier-Stokes Analysis of High-Lift Multi-Element Airfoils Using the  $q$ - $\omega$  Turbulence Model, AIAA-93-0679.

---

## 航空宇宙技術研究所報告1316号

平成8年12月発行

発行所 科学技術庁航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺東町7-44-1  
電話(0422)47-5911 〒182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山5-6-17

---

© 禁無断複写転載

本書(誌)からの複写、転載を希望される場合は、企画室調査普及係にご連絡ください。

**Printed in Japan**