

宇宙開発事業団技術報告

ラグランジュ点近傍の軌道力学

1997年3月

宇宙開発事業団

宇宙開発事業団技術報告

NASDA Technical Memorandum

ラグランジュ点近傍の軌道力学

Orbital Mechanics Near Lagrange's Points

歌島 昌由

Utashima, Masayoshi

技術研究本部システム技術研究小型衛星研究室

Small Satellite Laboratory,

Systems Engineering Department,

Office of Research and Development

1997年3月

March 1997

宇宙開発事業団

National Space Development Agency of Japan

| | |
|---------|--|
| 和 文 抄 録 | <p>1978年に最初のハロー軌道への探査機 ISEE-3 が打ち上げられた後、暫く後続ミッションが無かったが、1995年末に ESA/NASA が太陽観測衛星 SOHO をハロー軌道に打ち上げた。ハロー軌道は、太陽観測、より遠くの天体観測、地球に接近の可能性のある小天体観測、月の裏側との通信、等のミッションに適したポイントであり、今後、重要性が次第に増して来ると考えられる。</p> <p>本資料は、ラグランジュ点を利用したこれらのミッションの検討に必要な軌道力学の基本的な事柄を記述している。第1章の「はじめに」に続いて、第2章では、ラグランジュ点を利用した各種ミッションの軌道力学に関する文献調査の結果を整理する。第3章では、最も基礎的な事柄である円制限三体問題の導出を行い、第4章で5つのラグランジュ点の導出を行う。第5章では直線解近傍の運動を解析的及び数値的に扱い、リサージュ軌道、ハロー軌道にも触れる。第6章では正三角形解近傍の運動を解析的及び数値的に扱う。</p> |
| 和文キーワード | ラグランジュ点、円制限三体問題、直線解、正三角形解、線型運動方程式、安定性、ハロー軌道 |

| | |
|------------------------|---|
| <p>Abstract</p> | <p>The first libration-point satellite ISEE-3 (International Sun-Earth Explorer-3) was launched in 1978. Though, no libration-point satellites were realized after the launch of the ISEE-3, NASA launched the ESA's Solar and Heliospheric Observatory (SOHO) spacecraft into the halo orbit in the Sun-Earth system in late 1995. The halo orbit in the Sun-Earth system is adequate for missions such as solar observation, astronomical observation, NEO (Near Earth Objects) observation, communications with the far-side of the moon, etc.. Therefore, the importance of the halo orbit will become larger in the near future.</p> <p>This document describes the basic orbital mechanics required for studies on the missions utilizing the Lagrange's points. After the introduction in Chapter 1, investigation of papers on orbital mechanics for the missions utilizing the Lagrange's points is shown in Chapter 2. The equations of motion for the circular restricted three-body problem are derived in Chapter 3, and the positions of the five Lagrange's points are obtained in Chapter 4. Motions near the collinear points are explained in both analytical and numerical ways in Chapter 5. Besides, Lissajous and halo orbits are described in that chapter. Motions near the equilateral-triangle points are explained in both analytical and numerical ways in Chapter 6.</p> |
| <p>Keywords</p> | <p>Lagrange's Points, Circular Restricted Three-Body Problem, Collinear Points, Equilateral-Triangle Points, Linear Equations of Motion, Stability, Halo Orbit</p> |

目 次

図、表リスト

記号表

| | |
|---------------------------|----|
| 1. はじめに | 1 |
| 2. ラグランジュ点近傍の軌道力学の文献調査 | 2 |
| 2.1 過去・現在のプロジェクト及び将来の構想 | 2 |
| 2.2 リサージュ軌道及びハロー軌道の設計 | 3 |
| 2.3 L4, L5 点近傍軌道の設計 | 4 |
| 2.4 ハロー軌道の保持 | 4 |
| 2.5 L4, L5 点近傍軌道の保持 | 5 |
| 2.6 ハロー軌道への投入 | 5 |
| 2.7 L4, L5 点近傍軌道への投入 | 5 |
| 3. 円制限三体問題 | 7 |
| 3.1 運動方程式(慣性系) | 7 |
| 3.2 運動方程式(回転系) | 7 |
| 3.3 ヤコビ定数とゼロ速度線図 | 9 |
| 4. ラグランジュ点の導出 | 11 |
| 4.1 直線解の数値解 | 13 |
| 4.2 直線解の解析解 | 14 |
| 4.3 各天体系でのラグランジュ点(直線解)の位置 | 15 |
| 5. 直線解近傍の運動 | 16 |
| 5.1 線型運動方程式 | 16 |
| 5.2 一般解 | 18 |
| 5.3 周期解(xy 面内) | 20 |
| 5.4 数値解(リサージュ軌道) | 22 |
| 5.5 ハロー軌道 | 24 |
| 6. 正三角形解近傍の運動 | 27 |
| 6.1 線型運動方程式 | 27 |
| 6.2 XY 面内運動の解析解 | 30 |
| 6.3 数値解 | 34 |
| 7. おわりに | 37 |
| 8. 参考文献 | 37 |

図、表リスト

| | | |
|--------|---|----|
| 図 3.1 | 円制限三体問題の説明 | 7 |
| 図 3.2 | 地球-月系のゼロ速度線図 | 10 |
| 図 3.3 | 月近傍のゼロ速度線図 | 10 |
| 図 3.4 | $C_0=3.288$ の等高線 | 10 |
| 図 3.5 | $C_1=3.1897$ の等高線 | 10 |
| 図 3.6 | $C_2=3.1733$ の等高線 | 10 |
| 図 3.7 | $C_3=3.0123$ の等高線 | 10 |
| 図 3.8 | $C_4=2.998$ の等高線 | 11 |
| 図 4.1 | l_1, l_2 の定義 | 11 |
| 図 4.2 | 直線解の場合の探査機位置 x の定義 | 12 |
| 図 4.3 | 直線解の存在範囲 | 13 |
| 図 5.1 | 直線解近傍の座標系 | 16 |
| 図 5.2 | 直線解近傍の周期運動 | 20 |
| 図 5.3 | L1 点近傍の周期運動(太陽-地球系) 線型解の初期速度を使用($x_0=1500\text{km}$) | 22 |
| 図 5.4 | L1 点近傍の周期運動(太陽-地球系) 修正した初期速度を使用($x_0=1500\text{km}$) | 22 |
| 図 5.5 | L1 点近傍の周期運動(太陽-地球系) 線型解の初期速度を使用($x_0=150\text{km}$) | 23 |
| 図 5.6 | L1 点近傍の周期運動(太陽-地球系) 修正した初期速度を使用($x_0=150\text{km}$) | 23 |
| 図 5.7 | L1 点近傍の準周期運動(太陽-地球系) z 方向運動も付加 | 24 |
| 図 5.8 | L1 点近傍の準周期運動(太陽-地球系) z 方向運動も付加 | 24 |
| 図 5.9 | ハロー軌道設計(初期見積もりの未知パラメータの場合) | 25 |
| 図 5.10 | ハロー軌道設計($\varepsilon=10^{-5}$ 、約 2 周回分表示) | 25 |
| 図 5.11 | ハロー軌道設計($\varepsilon=10^{-8}$ 、約 3 周回分表示) | 25 |
| 図 5.12 | ハロー軌道設計($\varepsilon=10^{-14}$ 、約 3.5 周回分表示) | 26 |
| 図 5.13 | ハロー軌道設計(図 5.12 の yz 面図) | 26 |
| 図 6.1 | 正三角形解近傍の座標系 | 27 |
| 図 6.2 | 相乗項が消える座標系 | 29 |
| 図 6.3 | 座標変換 | 30 |
| 図 6.4 | 正三角形解近傍の周期運動 | 32 |
| 図 6.5 | L4 点近傍の λ_1 モード周期運動($X_0=0.005$) | 35 |
| 図 6.6 | L4 点近傍の λ_1 モード周期運動($X_0=0.005$ 、初速誤差 $+1\text{m/s}$) | 35 |
| 図 6.7 | L4 点近傍の λ_1 モード周期運動($X_0=0.005$ 、初速誤差 -1m/s) | 35 |
| 図 6.8 | L4 点近傍の λ_1 モード周期運動($X_0=0.05$) | 35 |
| 図 6.9 | L4 点近傍の λ_1 モード周期運動($X_0=0.05$ 、初速=線型解 $\times 0.99$) | 35 |
| 図 6.10 | L5 点近傍の λ_1 モード周期運動($X_0=0.05$ 、線型解の初速を使用) | 36 |
| 図 6.11 | L4 点近傍から出発した λ_2 モード周期運動($X_0=0.005$) | 36 |
| 図 6.12 | L4 点近傍の λ_2 モード周期運動($X_0=0.0005$) | 36 |

| | |
|--------------------------------|----|
| 表 4.1 幾つかの天体系のラグランジュ点直線解 | 15 |
| 表 5.1 各天体系の ν 値 | 22 |

記号表

| | |
|----------|--|
| A_y | : 第二天体の公転面内で、第一第二天体を結ぶ方向に垂直な方向のハロー軌道の半径 |
| A_z | : 第二天体の公転面に垂直な方向のハロー軌道の半径 |
| C | : ヤコビ定数 |
| C_{y1} | : ラグランジュ点近傍の線型楕円運動の長軸短軸比 |
| G | : 万有引力定数($= 6.672 \times 10^{-11} \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$) |
| l_1 | : 探査機と第一天体との距離 |
| l_2 | : 探査機と第二天体との距離 |
| m_1 | : 第一天体の質量 |
| m_2 | : 第二天体の質量 |
| n | : 第一第二天体の重心回りの公転角速度 |
| p | : 直線解の点と、それに近い天体との無次元距離 |
| R | : 第一天体と第二天体の距離 |
| r | : 探査機の位置ベクトル |
| r_1 | : 第一天体の位置ベクトル |
| r_2 | : 第二天体の位置ベクトル |
| T | : 第一及び第二天体の公転周期 |
| U | : ポテンシャル |
| W | : 擬似ポテンシャル |

ΔV_{HOR} : ハロー軌道への遷移軌道において、ハロー軌道に達した時に必要な速度増分

ΔV_{L1} : L1点への遷移軌道において、L1点到着時に必要な速度増分

Ψ : 擬似ポテンシャルの相乗項を消すための座標軸の回転角

ζ : 第一第二天体の重心を通る回転座標系の第三成分

η : 第一第二天体の重心を通る回転座標系の第二成分

λ_p : 直線解近傍の線型運動の角振動数

λ_1 : 正三角形解近傍の線型運動の短周期モードの角振動数

λ_2 : 正三角形解近傍の線型運動の長周期モードの角振動数

μ : 第二天体の無次元質量

ξ : 第一第二天体の重心を通る回転座標系の第一成分

1. はじめに

1978年に最初のハロー軌道への探査機 ISEE-3(International Sun-Earth Explorer-3)が打ち上げられた後、暫く後続ミッションが無かったが、1995年末に ESA/NASA が太陽観測衛星 SOHO(Solar and Heliospheric Observatory)をハロー軌道に打ち上げた。ハロー軌道は、太陽観測、より遠くの天体観測、地球に接近の可能性のある小天体観測、月の裏側との通信、等のミッションに適したポイントであり、今後、重要性が次第に増して来ると考えられる。因みに、太陽-地球系のL2点に、次世代の光・赤外線天文衛星を投入する事が日本¹⁾及び米国で検討されている。米国の計画は、Next Generation Space Telescope (NGST)というもので、最大で口径8mの望遠鏡が検討されている。これらの天文衛星から見た太陽-地球系のL2点の利点を以下に掲げる。

- (1)太陽-地球系のL2点は地球から約150万km離れているために、衛星への熱入力が減少し、放射冷却のみでもかなりの低温を実現できる。
- (2)天文観測にとって邪魔になる太陽と地球の方向が一方向に限られるため、広い範囲が観測可能となると共に、長時間の積分時間を確保できる。

また、ラグランジュ点近傍は重力傾度が小さい事を利用する計画も検討されている。それは、複数衛星を相対位置誤差1cm程度で保持し、更に衛星内部で光路長を微調整する事で10nm程度の光路差精度を実現して、光干渉計として使用するものである²⁾。

本資料は、ラグランジュ点を利用したこれらのミッションの検討に必要な軌道力学の基本的な事柄を記述している。第2章では、ラグランジュ点を利用した各種ミッションの軌道力学に関する文献調査の結果を整理した。第3章では、最も基礎的な事柄である円制限三体問題の導出を行ない、第4章で5つのラグランジュ点の導出を行なった。第5章では直線解近傍の運動を解析的及び数値的に扱い、リサージュ軌道、ハロー軌道にも触れた。第6章では正三角形解近傍の運動を解析的及び数値的に扱った。

2. ラグランジュ点近傍の軌道力学の文献調査

本章では、ラグランジュ点を利用するミッションの検討に必要な軌道力学についての文献調査の結果を整理する。

2.1 過去・現在のプロジェクト及び将来の構想

2.1.1 過去・現在のプロジェクト

(1) ISEE-3 (International Sun - Earth Explorer - 3)

目的³⁾

1972年に計画実施を決定し、1978年8月12日に打ち上げられた。地球の磁気圏内で磁気圏を観測するISEE-1、ISEE-2に対して、太陽-地球系L1点に留まって地球磁気圏への入力であるsolar windやsolar flare等を観測する事を主目的とした。衛星はスピン安定型である。

打上げウインドウと遷移軌道³⁾

地球から見て月が太陽と約±90度の方向に有る数日間が打上げウインドウであった。遷移軌道の初期のフェーズにおいて姿勢決定に月を必要とした事がある理由である。約100日かかるslow transferを採用し、midcourse #2(打上げ25日後に実施)とHalo Orbit Insertion制御を合わせて約37m/sを使用した。

ミッション軌道と軌道保持⁴⁾

Sバンド・ダウンリンクへの太陽雑音を避けるために衛星を太陽方向から3.5度以上離す必要があり、またスピンの軸が黄道面垂直に保持される衛星に固定されたアンテナのビーム幅の制約から、地球から見て黄道面から6度以内に位置保持される必要があった。これらの制約を満足する軌道として、サイズの小さいリサージュ軌道とサイズの大きいハロー軌道が候補であった。以下の理由から、 $A_y=67$ 万キロのハロー軌道を選定した。 A_y は黄道面内で太陽・地球ラインに垂直な方向のハロー軌道半径であり、ハロー軌道の最大サイズを与える。

①リサージュ軌道は比較的大きな面外制御が必要である。

②ミッション軌道への投入制御量がサイズの大きいハロー軌道の方が少ない。

ISEE-3は、平均2m/sの保持制御を平均82日間隔で15回行なって約4年間ハロー軌道に保持された^{5,6)}。

(2) SOHO (Solar and Heliospheric Observatory)

目的

太陽-地球系のL1点にて、太陽表面、コロナ、太陽風を連続的に観測するのが目的である。打上げ時質量は1875kg、ペイロード質量は640kgである。 nominal 2年寿命であるが、燃料は6年分搭載している。太陽指向精度は10秒角であり、15分間の姿勢安定性は1秒角である。

打上げウインドウと遷移軌道⁷⁾

ISEE-3と同様、slow transferを選択している。SOHOでは、ISEE-3で問題となった姿勢決定のための月の位置の制約は無く、打上げウインドウはほぼ毎日存在するが、毎月約1週間はウインドウが閉じる。その時、SOHOは月の近くを通過するため、月の重力が影響して、遷移軌道投入誤差の正確な除去ができないのが理由である。

ミッション軌道と軌道保持

ISEE-3とほぼ同じ $A_y=69$ 万キロのハロー軌道を選定している。SOHOはミッション機器が小さい保持制御を要求しており、保持制御量を極力小さくすることを考えている。正確な太陽系モデルの下で準周期解(厳密な意味でのハロー軌道(周期軌道)は存在しない)を数値的に正確に求め、それからのずれを抑える制御を行なう方針であ

る。解析では、SOHO の 4 年間の保持を 17 回の制御で行ない、使用 ΔV は計 1m/s 程度である。ISEE-3 の 1/10 以下である。

(3)RELICT-2(正式名称は不明)⁸⁾

目的

太陽-地球系の L2 点にて、宇宙背景放射と地球磁気圏尾部の二つの観測をミッションとするロシアの計画。計画が続行されているか、キャンセルされたか、既に飛行しているかは不明である。打上げ時質量は 1120kg、搭載燃料は 60kg である。スピン安定型の衛星である。

打上げウインドウと遷移軌道

ミッション軌道の制約からサイズの小さいハロー軌道が要求され、ハロー軌道投入制御量を抑えるために Lunar swingby を利用する。そのため、打上げウインドウは月に 2, 3 日である。Lunar swingby を利用する事で、ハロー軌道投入制御量はゼロとなる。Lunar swingby 時の誤差 50km に対して、必要な補正 ΔV は 3m/s 以下である。

ミッション軌道と軌道保持

磁気圏尾部の観測において、尾部に入つての観測と尾部から出たの観測を考えており、ISEE-3 の様に大きなハロー軌道では困る。 $A_y < 25$ 万キロ \sim 30 万キロのハロー軌道の要求となっている。ハロー軌道投入制御量は、 A_y が小さいほど大きくなり、 $A_y = 0$ の時、約 280m/s 必要である。 $A_y = 80$ 万 km でほぼゼロとなる。そのため、Lunar swingby を計画している。

2.1.2 将来の構想

2.1.1 節のミッション例では、太陽観測、太陽地球間の空間観測、背景放射観測があつた。その他のミッションとしては、太陽-地球系 L2 点ハロー軌道に数個のクラスタ衛星を投入して数キロ離して正確に(1cm オーダー)衛星間隔を保持し、光干渉計システムを構成して遠くの惑星系を見つけようという計画が ESA²⁾にある。NASA は 2000 年初頭に New Millennium 計画(超小型衛星計画)の三番手として同様のミッションを考えている⁹⁾。

文献 10, 11, 12)等では、地球-月系の L2 点ハロー軌道を月裏面と地球との通信に利用する構想を提示している。

文献 11, 13)では、国際宇宙基地(ISS)の次の基地として、火星等への探査のための中継基地を太陽-地球系の L1 点等に設置する事を提案している。

2.2 リサージュ軌道及びハロー軌道の設計

L1, L2 点近傍軌道の内、それらの点からの距離が小さいものは、線型方程式で近似できる。その運動は、第二天体の軌道面内における運動と面外の運動に分離でき、どちらも第二天体の軌道周期の約 1/2 の周期運動となる。ところが二つの運動の周期が僅かに異なるため、リサージュ軌道となる。リサージュ軌道において第一第二天体を結ぶ線からある程度離す軌道を実現するには、定期的な面外制御が必要になる。

L1, L2 点からの距離を大きくすると非線型効果が周期にも生じて面内と面外の周期を一致させる事ができる。これがハロー軌道である。円制限三体問題のモデルでは、完全なハロー軌道を設計できるが、第二天体が楕円軌道であり、第三天体以降の存在や太陽輻射圧などの摂動が有ると、完全なハロー軌道(周期軌道)は存在しない。SOHO では、ミナル軌道でさえ、僅かな制御を組み込んで設計している。

円制限三体問題のモデルにおいては解析的なハロー軌道の設計も行われている。ISEE-3 の打上げ時には、3

次までの項でノミナル軌道在设计している。11次までの項を扱った軌道と3次の軌道と比較すると、数千キロの違いがある。離心率の影響や第三天体の影響もあるので、円制限三体問題であり高次の計算をしても意味が無い。現実モデルの下でのノミナル軌道構築は、parallel shooting method^{6,14)}や sequential shooting method^{5,6)}等の数値的方法が使われている。

ISEE-3やSOHOのハロー軌道よりも更にサイズの大きいものには、制限三体問題の下で安定なものが存在する^{15,16,17)}。このハロー軌道の中心はL1又はL2点と第二天体とのほぼ真ん中にあるが、サイズが大きいために第二天体にもかなり接近する。第二天体の非球対称重力の影響を受けるものと思われる。現実モデルのもとでこの軌道を解析した論文は未だ見た事が無い。

2.3 L4, L5 点近傍軌道の設計

これらの点への具体的なミッション計画はまだ無いが、地球-一月系のL4, L5点は近くに邪魔な天体が存在せず、地球からそれほど遠くないために、天体観測ミッションとしての利用が想定されている。これらの点は、円制限三体問題の平面問題では質量比 $\mu (=m_2/(m_1+m_2)) < 0.0385\dots$ (m_1 : 第一天体の質量、 m_2 : 第二天体の質量)の範囲では、linearly stableであるが、3次元問題ではArnold diffusionもあり僅かに不安定である¹⁴⁾。現実のモデルでも不安定性は小さい。現実の地球-一月系のL4, L5点に対して10年以上もの期間、これらの点から4万キロ以上離れない軌道が設計されている¹⁴⁾。軌道設計期間を数日間隔に分割し、各区間に初期軌道を与え、区間の終点で次の区間とマッチングする条件と、各区間の初期軌道の修正量が最小という条件を組み合わせる数値的に解いている(parallel shooting method with minimum norm)。保持燃料は、僅かである。これらの点も、不安定であるため、惑星間ダストが集積している恐れはなく、天体観測には都合が良い。

2.4 ハロー軌道の保持

ハロー軌道の保持方法として、以下の3つを文献から見つけた。

- ① 重み付き最小二乗法によるもの¹⁸⁾
- ② Linear-Quadratic Control を使うもの⁵⁾
- ③ 局所不安定多様体を利用するもの¹⁹⁾

2.4.1 重み付き最小二乗法によるもの

軌道保持中のある時点 t_0 で軌道決定が行なわれたとする。 t_0 以後の2つの時点 t_1, t_2 を事前に決めておき、 t_0 の軌道決定を受けて t (文献18)では、 $t=t_0$)で制御し、 t_1 と t_2 でのノミナル軌道からのずれと制御量の重み付き二乗和を最小にする方式である。得られる ΔV が、事前に設定する ΔV_{\min} より小さい時は制御を延期する。なお、制御間隔には最小値の制限がある。 t_1 と t_2 でのノミナル軌道からのずれは、遷移行列を使って算出する。 t_1 と t_2 の設定、最小にする量の重みの設定など、事前に決めておく量が多く、スマートな方法とは言い難い感がある。実際の太陽系モデル、制御誤差、軌道決定誤差などを考慮したシミュレーションを6.3年分行ない、平均制御間隔86日の25回の制御でノミナルからの位置のずれ200~300km以下の保持ができています。合計の ΔV は約3m/sであった。ノミナル軌道と遷移行列を計算しておけば、後は行列計算のみで制御計画ができる。

2.4.2 Linear-Quadratic Control を使うもの

状態量の変化を遷移行列を使った線形方程式で近似し、各点における状態量のノミナル値からのずれと制御

量の二乗和を最小にする方式。文献 5)では 20 日間隔の離散型 LQC 制御を使用して SOHO の軌道でシミュレーションを行ない、6 年間の軌道保持を 1.44m/s で実現している。シミュレーション期間中のノミナル軌道からのずれは、20~30km である。2.4.1 節の手法を一般化したものと考えられる。

2.4.3 局所不安定多様体を利用するもの

ハロー軌道の 1 周後の遷移行列を monodromy 行列と言い、その固有値を計算すると以下の様になる。

$$\lambda_1 > 1, \lambda_2 = 1/\lambda_1, \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \lambda_5 \text{ と } \lambda_6 \text{ は大きさ } 1 \text{ の共役関係}$$

λ_1 に対応した固有ベクトル $\mathbf{e}_1(0)$ 方向が最も軌道が拡大する方向である。速度ベクトルのノミナル値との差の $\mathbf{e}_1(t)$ ($\mathbf{e}_1(0)$ を遷移行列で時刻 t に伝播したもの) 方向成分が不安定に関係しているため保持制御で取り除く。 $\mathbf{e}_1(t)$ ベクトルは黄道面内にあり、 y 方向よりは x 方向(第一第二天体を結ぶ方向)の制御が効率的である。太陽-地球系では制御が 2 週間遅れると燃料は 2 倍必要となり、地球-月系では 1.4 日遅れると 2 倍となる。

SOHO 軌道に対して、実太陽系モデルで 4 年間の保持制御のシミュレーションを行なうと、17 回の制御が必要となり、計 1m/s 以下の増速度で十分であった。

特殊な例として、火星-フォボス系の L1 点に保持するシミュレーションを行なった文献がある²⁰⁾。1 日当たり 1.5m/s の保持制御量が必要であるが、フォボスの質量等のモデル誤差が大きい場合を想定して、真の L1 点の位置もオンボードで推定しながら保持するアルゴリズムを提出している。

2.5 L4, L5 点近傍軌道の保持¹⁴⁾

L4, L5 点の近傍軌道は mild な不安定なので地球-月系の場合でも年に数回制御すれば良い。制御計画作成法として、2.3 節に述べた parallel shooting method with minimum norm が使える。2.3 節の軌道設計の場合は初期位置も未知数であったが、保持制御の場合は、初期位置は given であり初期速度は未知数のまま解く。得られる初期速度と実際の速度の差が増速ベクトルとなる。

2.6 ハロー軌道への投入

L1, L2 点への遷移軌道には、slow transfer と fast transfer の 2 つがある。太陽-地球系 L1 点の場合、fast transfer は約 35 日で移行し約 340m/s の ΔV_{L1} (ΔV at L1)が必要であるが、slow transfer では約 110 日かかるが約 280m/s の ΔV_{L1} で済む⁴⁾。L1, L2 点でなく、その回りのハロー軌道に直接投入する事で大幅に ΔV_{Hoi} (Halo Orbit Insertion)を減らす事ができる。 ΔV_{Hoi} はハロー軌道の最大サイズ A_y にほぼ線型に依存している。 $A_y=0$ の時に $\Delta V_{\text{Hoi}}=280$ m/s、 $A_y=80$ 万 km の時に $\Delta V_{\text{Hoi}}=0$ m/s となる⁸⁾。小さい A_y が必要なミッションの場合は、 ΔV_{Hoi} が大きくなる。その場合は、月フライバイを利用する事で ΔV_{Hoi} をほぼゼロにできる。但し、フライバイ前の微調整に数十 m/s 必要であるが大幅な ΔV_{Hoi} 低減に変わりはない⁸⁾。打上げウィンドウは狭くなる。

2.7 L4, L5 点近傍軌道への投入¹⁴⁾

地球-月系の L4, L5 点への遷移軌道(地球静止トランスファ軌道(GTO)からの遷移を前提とする)として、direct transfer と Lunar swingby 利用の 2 つが考えられる。direct transfer は Hohmann 軌道と bi-elliptical 変換が考えられる。Hohmann 軌道では約 1500m/s で 7 日間で遷移でき、bi-elliptical 変換では一旦地球から 100 万 km 以上の点まで移行する必要があるが、1350m/s で行ける。L4 点で ΔV を付加して逆行積分すると、1 回の Lunar

swingby 後に5万 km×40万 km の楕円軌道になる事が判明し、GTO からこの軌道へ投入すれば良い。35日、1150m/s で遷移できる。2.Lunar swingby、5 マヌーバでは 60 日、900m/s で遷移可能である。

3. 円制限三体問題²¹⁾

地球と太陽の様な天体の両方からの重力がほぼ同じオーダーの場所で探査機を運動させる場合に便利な近似モデルが制限三体問題である。探査機の質量は、二つの天体の質量に比べて無視できる程小さく、探査機の存在が、二つの天体の運動に与える影響は無視できる。よって、制限三体問題では、二つの天体の運動は事前に与えられており、その重力場の中を test particle としての探査機が運動すると考える。二つの天体の運動を、両者の重心回りの円運動と近似した問題が、円制限三体問題である。

3.1 運動方程式(慣性系)

二つの天体の質量を m_1 、 m_2 とし、探査機の質量を m とする。探査機の慣性系における運動方程式は、次式で表わされる。原点は、第一天体と第二天体の重心である。

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.1)$$

$$U = -G \left(\frac{m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{m_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right)$$

ここで、

U : ポテンシャル

G : 万有引力定数 ($= 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$)

\mathbf{r}_1 : 第一天体の位置ベクトル

\mathbf{r}_2 : 第二天体の位置ベクトル

$m_1 > m_2 \gg m$

である。図 3.1 を参照。

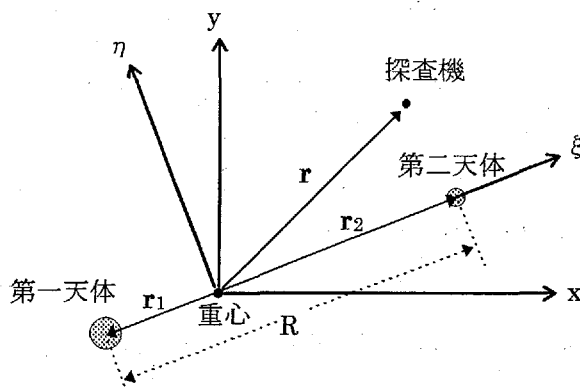


図 3.1 円制限三体問題の説明

3.2 運動方程式(回転系)

ここでは、第一天体と第二天体の重心を原点とし、角速度 n で回転する系 ($\xi \eta \zeta$ 系) で運動を考える。 n は両天体の重心回りの公転角速度であり、次式で与えられる。

$$n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}} \quad (3.2)$$

慣性系での $\ddot{\mathbf{r}}$ を回転系で表現すると²²⁾、

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{D^2 \mathbf{r}}{D t^2} + 2\mathbf{n} \times \frac{D \mathbf{r}}{D t} + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \quad (3.3)$$

$\frac{D}{D t}$ は、回転系での微分

となる。(3.3)式の各項を成分表示すると、

$$\frac{D^2 \mathbf{r}}{D t^2} = \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$2\mathbf{n} \times \frac{D \mathbf{r}}{D t} = 2n \begin{pmatrix} -\dot{\eta} \\ \dot{\xi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = -n^2 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

であり、(3.1)式を回転系で書くと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - n^2\xi &= -\frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} - n^2\eta &= -\frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \ddot{\zeta} &= -\frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (3.7)$$

上式の左辺の第3項は位置による項であり、右辺に回してポテンシャルUと合わせて考える。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} &= n^2\xi - \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2}n^2\xi^2 - U \right) \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} &= n^2\eta - \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{2}n^2\eta^2 - U \right) \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} (-U) \end{aligned}$$

以下の擬似ポテンシャルW

$$W \equiv \frac{1}{2}n^2(\xi^2 + \eta^2) - U \quad (3.8)$$

を定義すると、(3.7)式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} &= \frac{\partial W}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} &= \frac{\partial W}{\partial \eta} \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\partial W}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

次に、(3.9)式を無次元化する。無次元化のための基準量は、以下の通り。

長さ: R、 質量: $m_1 + m_2$ 、 時間: $T / (2\pi) = 1/n$

Tは、第一及び第二天体の公転周期

無次元化された量を□' で表現すると、

$$\begin{aligned} \xi &= R\xi' & \eta &= R\eta' & \zeta &= R\zeta' \\ \dot{\xi} &= \frac{d\xi}{dt} = nR \frac{d\xi'}{dt'} & \dot{\eta} &= nR \frac{d\eta'}{dt'} & \dot{\zeta} &= nR \frac{d\zeta'}{dt'} \\ \ddot{\xi} &= n^2R \frac{d^2\xi'}{dt'^2} & \ddot{\eta} &= n^2R \frac{d^2\eta'}{dt'^2} & \ddot{\zeta} &= n^2R \frac{d^2\zeta'}{dt'^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。Wを同様に、無次元化すると、

$$W = \frac{n^2R^2}{2}(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{G(m_1 + m_2)}{R} \left(\frac{m_1'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_1|} + \frac{m_2'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_2|} \right)$$

となる。ここで、

$$\frac{G(m_1 + m_2)}{R} = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} R^2 = n^2R^2$$

であるので、

$$W = n^2 R^2 \left[\frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2} + \left(\frac{m_1'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1'|} + \frac{m_2'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2'|} \right) \right] = n^2 R^2 W' \quad (3.11)$$

となる。(3.10), (3.11)式を使って、例えば(3.9)式の第一式を変形すると、

$$n^2 R \frac{d^2 \xi'}{dt'^2} - 2n^2 R \frac{d\eta'}{dt'} = n^2 R \frac{\partial W'}{\partial \xi'}$$

となり、(3.9)式は、以下のように無次元化される。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi'}{dt'^2} - 2 \frac{d\eta'}{dt'} &= \frac{\partial W'}{\partial \xi'} \\ \frac{d^2 \eta'}{dt'^2} + 2 \frac{d\xi'}{dt'} &= \frac{\partial W'}{\partial \eta'} \\ \frac{d^2 \zeta'}{dt'^2} &= \frac{\partial W'}{\partial \zeta'} \end{aligned} \quad (3.12)$$

本資料のこれ以降では、□' の代わりに、□を無次元量として用いる。

よって、無次元化された円制限三体問題の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial W}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial W}{\partial \eta} \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\partial W}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$W = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{m_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{m_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}$$

となる。

3.3 ヤコビ定数とゼロ速度線図

(3.13)式の第1～第3式に各々 $\dot{\xi} \sim \dot{\zeta}$ を乗じて加えると、

$$\dot{\xi}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta}\ddot{\eta} + \dot{\eta}\ddot{\xi} + 2\dot{\xi}\ddot{\eta} + \dot{\zeta}\ddot{\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \dot{\zeta}$$

であり、

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) = \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{dW}{dt} \quad (3.14)$$

となる。積分定数を $-C$ として積分すると、

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = 2W - C \quad (3.15)$$

C : ヤコビ定数(Jacobian Constant)

となり、trajectory に沿って、 $2W - (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) (=C)$ は一定値を取る。1つの trajectory が与えられ、 C が決まると、(3.15)式より、

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = 2W - C \geq 0 \text{ より} \\ 2W \geq C \end{aligned} \quad (3.16)$$

となり、(3.16)式を満足する領域のみが運動可能領域となる。 $2W = C$ の面を、ゼロ速度曲面といい、それと $\xi - \eta$ 平面との交線を、ゼロ速度線図と言う。図 3.2 に、地球-月系のゼロ速度線図を示す。図 3.3 に月近傍の拡大図を示す。これらの図には、以下の6つの C 値の等高線を描いている。

- $C_0 = 3.288$
- $C_1 = 3.1897$
- $C_2 = 3.1733$
- $C_3 = 3.0123$
- $C_4 = 2.998$
- $C_5 = 2.9879$

$C_1=3.1897$,
 $C_2=3.1733$,
 $C_3=3.0123$ は L1、
L2、L3 点での値で
あり、 $C_5 = 2.9879$
は L4、L5 点での値
である。 C_0 、 C_4 は適
当に設定した。

図 3.2 は見辛いの
で、 C の各値毎の
等高線を図 3.4 から
図 3.8 に掲載した。
矢印で W の増大方
向を示した。(3.16)
式より、図 3.4 から
図 3.8 の各図の C
値を持った宇宙機
の存在可能領域は、
等高線の矢印側の
みに制限される。

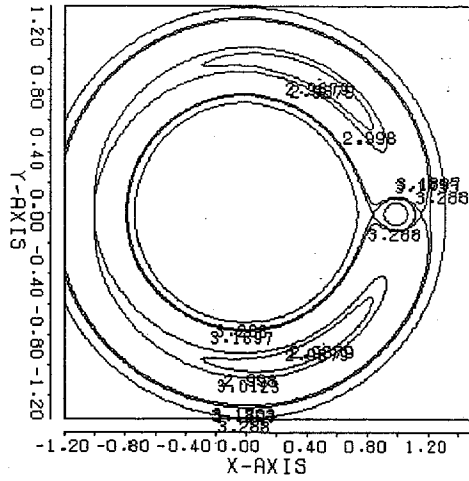


図 3.2 地球-月系のゼロ速度線図

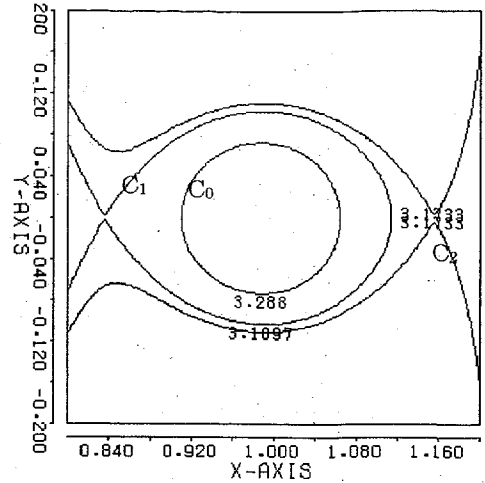


図 3.3 月近傍のゼロ速度線図

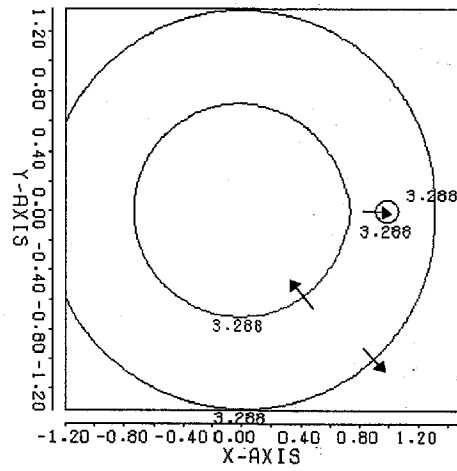


図 3.4 $C_0=3.288$ の等高線

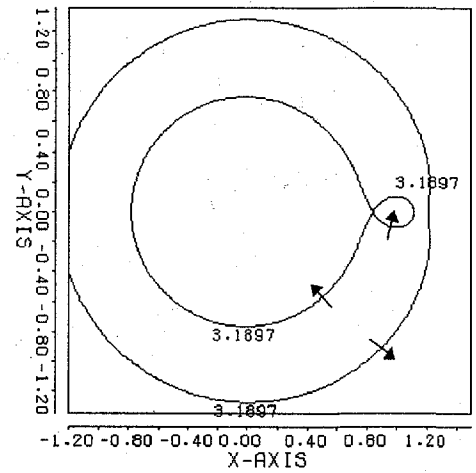


図 3.5 $C_1=3.1897$ の等高線

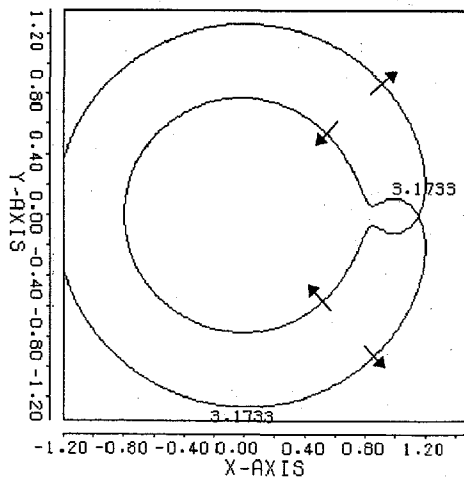


図 3.6 $C_2=3.1733$ の等高線

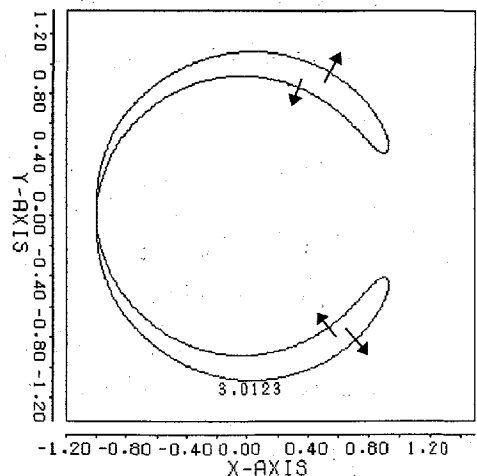


図 3.7 $C_3=3.0123$ の等高線

4. ラグランジュ点の導出

円制限三体問題において、探査機の位置が回転系において変化しない点をラグランジュ点といい、5つ存在する事が知られている。これらの点では、2つの質点からの重力と遠心力とが釣り合っている。ラグランジュ点においては、(3.13)式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

が成立する。以下では、 $m_2 = \mu$ とおく。

Wは、

$$W = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1-\mu}{\sqrt{(\xi+\mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(\xi-1+\mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \quad (4.2)$$

と書けるので、(4.1)式は以下ようになる。 l_1, l_2 は、探査機と天体1及び天体2との距離である。(図4.1を参照)

$$\begin{aligned} \xi - \frac{(1-\mu)(\xi+\mu)}{l_1^3} - \frac{\mu(\xi-1+\mu)}{l_2^3} &= 0 \\ \eta - \frac{(1-\mu)\eta}{l_1^3} - \frac{\mu\eta}{l_2^3} &= 0 \\ \frac{(1-\mu)\zeta}{l_1^3} + \frac{\mu\zeta}{l_2^3} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3)式の第3式より、

$$\zeta \left(\frac{1-\mu}{l_1^3} + \frac{\mu}{l_2^3} \right) = 0$$

$$\therefore \zeta = 0$$

つまり、ラグランジュ点は、 $\xi - \eta$ 平面上に存在する。

以降は、参考文献23)の方針に沿って、ラグランジュ点の満足する方程式を導出すると共に、ラグランジュ点は5つのみである事も示す。

(4.3)式の第2式を、 $(1-\mu)$ と μ の項に分けて変形すると、

$$\eta \left(1 - \frac{1-\mu}{l_1^3} - \frac{\mu}{l_2^3} \right) = \eta \left((1-\mu) - \frac{1-\mu}{l_1^3} + \mu - \frac{\mu}{l_2^3} \right) = \eta \left((1-\mu) \left(1 - \frac{1}{l_1^3} \right) + \mu \left(1 - \frac{1}{l_2^3} \right) \right) = 0 \quad (4.4)$$

となる。(4.3)式の第1式を、 $(\xi+\mu)$ と μ の項に分けて変形すると、

$$(\xi+\mu) \left(1 - \frac{1-\mu}{l_1^3} - \frac{\mu}{l_2^3} \right) - \mu \left(1 - \frac{1}{l_2^3} \right) = 0 \quad (4.5)$$

となり、余弦定理より、

$$l_2^2 = l_1^2 + 1 - 2(\xi+\mu)$$

が成り立つので、次式が得られる。

$$\xi + \mu = \frac{1 + l_1^2 - l_2^2}{2}$$

これを(4.5)式に代入して、 $(1-\mu)$ と μ の項に分かれる様に変形すると、

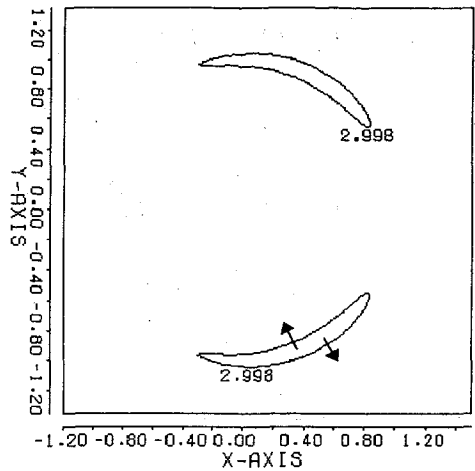


図 3.8 $C_4=2.998$ の等高線

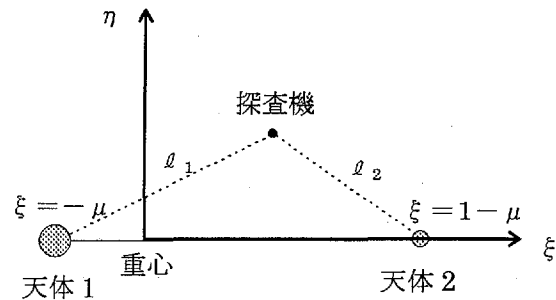


図 4.1 l_1, l_2 の定義

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\ell_1^2 + 1 - \ell_2^2) \left(1 - \frac{1-\mu}{\ell_1^3} - \frac{\mu}{\ell_2^3} \right) - \mu \left(1 - \frac{1}{\ell_2^3} \right) = 0 \\
& \frac{1}{2}(\ell_1^2 + 1 - \ell_2^2) \left((1-\mu) - \frac{1-\mu}{\ell_1^3} + \mu - \frac{\mu}{\ell_2^3} \right) - \mu \left(1 - \frac{1}{\ell_2^3} \right) = 0 \\
& \frac{1}{2}(1-\mu)(\ell_1^2 + 1 - \ell_2^2) \left(1 - \frac{1}{\ell_1^3} \right) + \mu \left(1 - \frac{1}{\ell_2^3} \right) \left(\frac{\ell_1^2 + 1 - \ell_2^2}{2} - 1 \right) = 0 \\
& (1-\mu)(\ell_1^2 + 1 - \ell_2^2) \left(1 - \frac{1}{\ell_1^3} \right) + \mu(\ell_1^2 - 1 - \ell_2^2) \left(1 - \frac{1}{\ell_2^3} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる。

始めに、直線解でない場合を考える。η ≠ 0 なので、(4.4)式より、

$$(1-\mu) \left(1 - \frac{1}{\ell_1^3} \right) + \mu \left(1 - \frac{1}{\ell_2^3} \right) = 0$$

となる。これを变形した次式

$$\mu \left(1 - \frac{1}{\ell_2^3} \right) = -(1-\mu) \left(1 - \frac{1}{\ell_1^3} \right) \tag{4.7}$$

を、(4.6)式に代入すると、

$$(1-\mu) \left(1 - \frac{1}{\ell_1^3} \right) = 0$$

となり、(4.7)式と合わせて、

$$\ell_1 = 1, \ell_2 = 1$$

が得られる。これは、正三角形解である。

直線解の場合は、η = 0であり、(4.6)式のみとなる。

図 4.2 のように x を定義すると、

$$\ell_1 = |x| \quad \ell_2 = |1-x|$$

であり、(4.6)式は次式となる。

$$(1-\mu)x \left(1 - \frac{1}{|x|^3} \right) + \mu(x-1) \left(1 - \frac{1}{|1-x|^3} \right) = 0$$

これを整理すると、次式が得られる。

$$(1-\mu)(x-1)|x-1|(|x|^3-1) + \mu x|x|(|x-1|^3-1) = 0 \tag{4.8}$$

上式の左辺を f(x) とおくと、

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-\mu)f_1(x) + \mu f_2(x) \\
f_1(x) &= (x-1)|x-1|(|x|^3-1) \\
f_2(x) &= x|x|(|x-1|^3-1)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\mu : 0 \sim 1$$

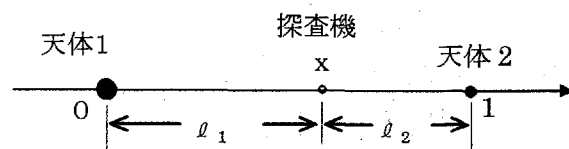


図 4.2 直線解の場合の探査機位置 x の定義

であり、任意の μ に対する $f(x)$ のグラフは、 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ のグラフの間に来る。これらのグラフを図 4.3 に示す。この図から、直線解は以下の範囲に 3 個だけ存在する事が分かる。

- L3 点の存在範囲: $-1 < x < 0$
- L1 点の存在範囲: $0 < x < 1$
- L2 点の存在範囲: $1 < x < 2$

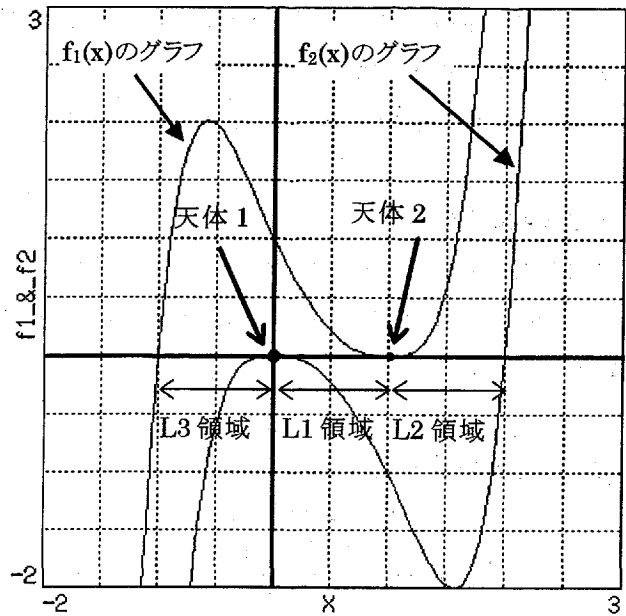


図 4.3 直線解の存在範囲

4.1 直線解の数値解²⁴⁾

直線解の存在範囲が明確になったので、各々の解に対する代数方程式を求める。

(1) L1 点の方程式

L1 点の存在範囲は、 $0 < x < 1$ なので、(4.8)式より、

$$x^5 - (2 + \mu)x^4 + (1 + 2\mu)x^3 - (1 - \mu)x^2 + 2(1 - \mu)x - (1 - \mu) = 0 \quad (4.10)$$

が得られる。通常、 $\mu \ll 1$ であり、 x は 1 に近い値となる。(4.10)式をそのまま解くと、有効数字の桁数が減少するため、

$$p \equiv 1 - x \geq 0 \quad (4.11)$$

とおいて、 p に対する 5 次方程式に変換して解く。

(4.10)式に(4.11)式を代入すると、

$$(1 - \mu)p^2(p^3 - 3p^2 + 3p) + \mu(p^2 - 2p + 1)(p^3 - 1) = 0 \quad (4.12)$$

となり、これを整理すると、次式が得られる。

$$p^5 - (3 - \mu)p^4 + (3 - 2\mu)p^3 - \mu p^2 + 2\mu p - \mu = 0 \quad (4.13)$$

(2) L2 点の方程式

$\mu \ll 1$ の場合、L2 点の x も 1 に近い値となるので、

$$p \equiv x - 1 \geq 0 \quad (4.14)$$

とおいて、(4.8)式に代入すると、

$$(1 - \mu)p^2(p^3 + 3p^2 + 3p) + \mu(p^2 + 2p + 1)(p^3 - 1) = 0 \quad (4.15)$$

となり、これを整理して、次式を得る。

$$p^5 + (3 - \mu)p^4 + (3 - 2\mu)p^3 - \mu p^2 - 2\mu p - \mu = 0 \quad (4.16)$$

(3) L3 点の方程式

L3 点の存在範囲は $-1 < x < 0$ であり、 $\mu \ll 1$ の場合、 $x = -1$ に近いので、

$$p \equiv x + 1 > 0 \quad (4.17)$$

とおいて、(4.8)式に代入すると、

$$(1-\mu)(p-2)^2(p^3-3p^2+3p)+\mu(p-1)^2(p^3-6p^2+12p-7)=0 \quad (4.18)$$

となり、整理して次式を得る。

$$p^5-(7+\mu)p^4+(19+6\mu)p^3-(24+13\mu)p^2+(12+14\mu)p-7\mu=0 \quad (4.19)$$

4.2 直線解の解析解²⁴⁾

L1, L2, L3 各点の値を正確に求めるには、前節の5次方程式をニュートン法で解けば良いが、実際の太陽系の様に $\mu \ll 1$ の場合には、微小パラメータ(μ 等)の低次の冪級数で十分な事も多い。本節では、冪級数による表現を示す。

(1) L1 点の冪級数表現

(4.12)式を、以下のように変形する。

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{p^3(-p^2+3p-3)}{(p-1)^2(p^3-1)} = 3p^3 \left(1+p+\frac{4}{3}p^2+\frac{8}{3}p^3+3p^4+\frac{11}{3}p^5+\frac{16}{3}p^6+6p^7+\dots \right) \quad (4.20)$$

これから、第一近似の解は、

$$p \cong \left(\frac{\mu}{3(1-\mu)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.21)$$

となる。よって、 v を次式で定義し、

$$v \cong \left(\frac{\mu}{3(1-\mu)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.22)$$

求めたい p を、以下の形で表現する。

$$p = v(1+k_1v+k_2v^2+\dots) \quad (4.23)$$

(4.20)式を次のように変形する。

$$v = p \left(1+p+\frac{4}{3}p^2+\dots \right)^{\frac{1}{3}} = p \left(1+\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}p^2+\frac{53}{81}p^3+\frac{101}{243}p^4+\frac{97}{243}p^5+\frac{3953}{6561}p^6+\dots \right) \quad (4.24)$$

この式の右辺の p に(4.23)式を代入し、 v の各次数の係数を両辺で比較する事により、 k_1, k_2, \dots が決まる。その結果、 p が次式の様に v の冪級数で表現される。

$$p = v \left(1 - \frac{1}{3}v - \frac{1}{9}v^2 - \frac{23}{81}v^3 + \frac{151}{243}v^4 - \frac{1}{9}v^5 \right) + O(v^7) \quad (4.25)$$

(2) L2 点の冪級数表現

(4.15)式を以下のように変形する。

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{3p^3 \left(1+p+\frac{1}{3}p^2 \right)}{(1-p^3)(1+p)^2} = 3p^3 \left(1-p+\frac{4}{3}p^2-\frac{2}{3}p^3+p^4-p^5+2p^6-\dots \right) \quad (4.26)$$

(4.22)式の v の定義を使って上式を変形すると、

$$v = p \left(1-p+\frac{4}{3}p^2+\dots \right)^{\frac{1}{3}} = p \left(1-\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}p^2+\frac{1}{81}p^3+\frac{47}{243}p^4-\frac{43}{243}p^5+\frac{2549}{6561}p^6-\dots \right) \quad (4.27)$$

となる。(4.23)式の形で p を v の冪級数で表現し、(4.27)式の右辺に代入する。 v の各次数の係数を比較する事で k_1, k_2, \dots を決める。その結果、次式が得られる。

$$p = v \left(1 + \frac{1}{3}v - \frac{1}{9}v^2 - \frac{31}{81}v^3 - \frac{119}{243}v^4 - \frac{1}{9}v^5 \right) + O(v^7) \quad (4.28)$$

(3) L3 点の冪級数表現

(4.18)式を変形して、次式を得る。

$$\frac{7}{12} \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{p \left(1 - \frac{1}{2}p \right)^2 \left(1 - p + \frac{1}{3}p^2 \right)}{(1-p)^2 \left(1 - \frac{12}{7}p + \frac{6}{7}p^2 - \frac{1}{7}p^3 \right)} = p \left(1 + \frac{12}{7}p + \frac{1567}{588}p^2 + \frac{15745}{4116}p^3 + \frac{74695}{14406}p^4 + \frac{339859}{50421}p^5 + \dots \right) \quad (4.29)$$

第一近似解は、

$$p \cong \frac{7}{12} \frac{\mu}{1-\mu} \quad (4.30)$$

となる。p を(4.30)式の冪級数に展開する事が考えられるが、次式の v' の冪級数に展開する事で1次項の係数がゼロとなるため、こちらを採用する。

$$v' \cong \frac{7}{12} \mu \quad (4.31)$$

(4.29)式の左辺を v' を用いて表現すると、

$$\begin{aligned} \frac{7}{12} \frac{\mu}{1-\mu} &= \frac{7}{12} \mu (1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 + \dots) = \frac{7}{12} \mu \left(1 + \frac{12}{7} \left(\frac{7}{12} \mu \right) + \left(\frac{12}{7} \right)^2 \left(\frac{7}{12} \mu \right)^2 + \dots \right) \\ &= v' \left(1 + \frac{12}{7} v' + \left(\frac{12}{7} \right)^2 v'^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

であり、(4.29)式の右辺の p を v' の冪級数展開で表現して代入し、v' の各次数を比較する事で、次式が得られる。

$$p = v' \left(1 + \frac{23}{84} v'^2 + \frac{23}{84} v'^3 + \frac{761}{2352} v'^4 + \frac{3163}{7056} v'^5 + \frac{30703}{49392} v'^6 \right) + O(v'^8) \quad (4.33)$$

4.3 各天体系でのラグランジュ点(直線解)の位置

参考までに、幾つかの天体系におけるラグランジュ点直線解 p の値を表 4.1 に示す。4.1 節の5次方程式をニュートン法で解いた。

表 4.1 幾つかの天体系のラグランジュ点直線解

| 天体システム | μ | L1 点の p | L2 点の p | L3 点の p |
|----------|------------------------------|----------------|----------------|-------------------------------|
| 太陽-地球系 | $3.040423375 \times 10^{-6}$ | 0.010010977203 | 0.01007824041 | $0.1773580302 \times 10^{-5}$ |
| 地球-月系 | $1.215054826 \times 10^{-2}$ | 0.1509341421 | 0.1678325700 | 0.007087918011 |
| 火星-フォボス系 | $1.977663339 \times 10^{-8}$ | 0.001873867360 | 0.001876211209 | $0.1153636947 \times 10^{-7}$ |
| 太陽-木星系 | $9.536947347 \times 10^{-4}$ | 0.06667642778 | 0.06977989534 | 0.0005563219757 |

5. 直線解近傍の運動

本章では、ラグランジュ点の直線解のうち、L1点とL2点を対象とする。L3点には現在のところ、意味の有るミションは提案されていない。

5.1. 線型運動方程式

本節では、L1点とL2点の近傍の運動を表わす線型方程式を導出する。無次元化された円制限三体問題の運動方程式((3.13)式)を以下に再掲する。

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial W}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial W}{\partial \eta} \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\partial W}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$W = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1-\mu}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + \frac{\mu}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}$$

L1点、L2点近傍の運動を扱うために、それらの点を中心とする新しい座標系 xyz を導入する。図 5.1 に定義を示す。ξ、η、ζ を x、y、z で表わすと、

$$\begin{aligned} \xi &= 1 \mp p_L - \mu + x \\ \eta &= y \\ \zeta &= z \end{aligned} \quad (5.2)$$

である。複号の上は L1 点の場合 ($p_L = p_{L1}$) であり、下は L2 点の場合 ($p_L = p_{L2}$) である。(5.1) 式の W は、

$$W = \frac{1}{2} \left((1 \mp p_L - \mu + x)^2 + y^2 \right) + \frac{1-\mu}{d_1} + \frac{\mu}{d_2} \quad (5.3)$$

$$d_1 \equiv |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| = \sqrt{(1 \mp p_L + x)^2 + y^2 + z^2}$$

$$d_2 \equiv |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| = \sqrt{(x \mp p_L)^2 + y^2 + z^2}$$

となる。

次に、 $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} &= \frac{\partial W}{\partial x} = (1 \mp p_L - \mu + x) - \frac{1-\mu}{d_1^2} \frac{\partial d_1}{\partial x} - \frac{\mu}{d_2^2} \frac{\partial d_2}{\partial x} \\ \frac{\partial d_1}{\partial x} &= \frac{1 \mp p_L + x}{d_1}, \quad \frac{\partial d_2}{\partial x} = \frac{x \mp p_L}{d_2} \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = (1 \mp p_L - \mu + x) - \frac{1-\mu}{d_1^3} (1 \mp p_L + x) - \frac{\mu}{d_2^3} (x \mp p_L) \quad (5.4)$$

となる。x、y、z の 1 次項まで求めたいから、

$$\begin{aligned} \frac{1 \mp p_L + x}{d_1^3} &\doteq (1 \mp p_L + x)^{-2} \doteq \frac{1}{(1 \mp p_L)^2} - \frac{2x}{(1 \mp p_L)^3} \\ \frac{x \mp p_L}{d_2^3} &\doteq \mp \frac{1}{(p_L \mp x)^2} \doteq \mp \frac{1}{p_L^2} - \frac{2x}{p_L^3} \end{aligned}$$

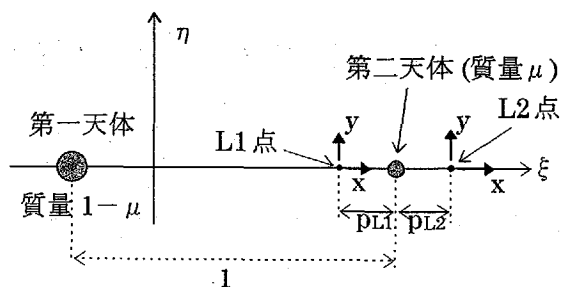


図 5.1 直線解近傍の座標系

と展開し、(5.4)式に代入すると、

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \left(1 \mp p_L - \mu - \frac{1-\mu}{(1 \mp p_L)^2} \pm \frac{\mu}{p_L^2} \right) + \left(1 + 2 \left(\frac{1-\mu}{(1 \mp p_L)^3} + \frac{\mu}{p_L^3} \right) \right) x \quad (5.5)$$

が得られる。この式の右辺の第一項は、

$$1 \mp p_L - \mu - \frac{1-\mu}{(1 \mp p_L)^2} \pm \frac{\mu}{p_L^2} = \frac{\mp 1}{(1 \mp p_L)^2 p_L^2} (p_L^5 \mp (3-\mu)p_L^4 + (3-2\mu)p_L^3 - \mu p_L^2 \pm 2\mu p_L - \mu) \quad (5.6)$$

となる。(5.6)式の右辺の p_L の5次式は、L1点及びL2点を求めるための代数方程式((4.13)式と(4.16)式)の左辺に一致する事から、(5.6)式はゼロとなる。

$$B_L \equiv \frac{1-\mu}{(1 \mp p_L)^3} + \frac{\mu}{p_L^3} \quad (5.7)$$

となる B_L を定義すると、(5.1)の第一式は、

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (2B_L + 1)x = 0 \quad (5.8)$$

となる。

次に、 $\frac{\partial W}{\partial \eta}$ を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \eta} &= \frac{\partial W}{\partial y} = y - \frac{1-\mu}{d_1^2} \frac{\partial d_1}{\partial y} - \frac{\mu}{d_2^2} \frac{\partial d_2}{\partial y} \\ \frac{\partial d_1}{\partial y} &= \frac{y}{d_1}, \quad \frac{\partial d_2}{\partial y} = \frac{y}{d_2} \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = y - \frac{1-\mu}{d_1^3} y - \frac{\mu}{d_2^3} y = y - \frac{1-\mu}{(1 \mp p_L)^3} y - \frac{\mu}{p_L^3} y = (1 - B_L)y \quad (5.9)$$

となり、(5.1)の第二式は、

$$\ddot{y} + 2\dot{x} + (B_L - 1)y = 0 \quad (5.10)$$

となる。

最後に、 $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$ を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \zeta} &= \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1-\mu}{d_1^2} \frac{\partial d_1}{\partial z} - \frac{\mu}{d_2^2} \frac{\partial d_2}{\partial z} \\ \frac{\partial d_1}{\partial z} &= \frac{z}{d_1}, \quad \frac{\partial d_2}{\partial z} = \frac{z}{d_2} \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} = -\frac{1-\mu}{d_1^3} z - \frac{\mu}{d_2^3} z = -\frac{1-\mu}{(1 \mp p_L)^3} z - \frac{\mu}{p_L^3} z = -B_L z \quad (5.11)$$

となり、(5.1)の第三式は、

$$\ddot{z} + B_L z = 0 \quad (5.12)$$

となる。

以下に、(5.1)式を線型化した方程式をまとめて示す。

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} - (2B_L + 1)x &= 0 \\
\ddot{y} + 2\dot{x} + (B_L - 1)y &= 0 \\
\ddot{z} + B_L z &= 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.2 一般解

この章では、(5.13)式を解いて、L1、L2 点近傍の運動を求める。(5.13)式より、xy 面内の運動と z 方向の運動は独立している事が分かる。z 方向の運動は角振動数が $\sqrt{B_L}$ の単振動である。よって、xy 面内の運動のみ扱う。

$x = \alpha e^{i\lambda t}$, $y = \beta e^{i\lambda t}$ とおいて、(5.13)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \alpha e^{i\lambda t} + 2i\lambda \beta e^{i\lambda t} + (2B_L + 1)\alpha e^{i\lambda t} &= 0 \\
-\lambda^2 \beta e^{i\lambda t} + 2i\lambda \alpha e^{i\lambda t} + (B_L - 1)\beta e^{i\lambda t} &= 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

となる。これを整理して、以下の α と β に関する連立方程式を得る。

$$\begin{aligned}
(\lambda^2 + 2B_L + 1)\alpha + 2i\lambda\beta &= 0 \\
-2i\lambda\alpha + (\lambda^2 - B_L + 1)\beta &= 0
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ の根を持つ条件より、以下の特性方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2B_L + 1 & 2i\lambda \\ -2i\lambda & \lambda^2 - B_L + 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.16}$$

これを整理すると、

$$\lambda^4 + (B_L - 2)\lambda^2 - (2B_L + 1)(B_L - 1) = 0 \tag{5.17}$$

となる。これを解くと、

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= \frac{1}{2} \left[2 - B_L \pm \sqrt{(B_L - 2)^2 + 4(2B_L + 1)(B_L - 1)} \right] \\
&= 1 - \frac{B_L}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{B_L(9B_L - 8)}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

となる。

ここで、 $B_L > 1$ である事を示す。 B_L の定義は、(5.7)式である。

(1) L1 点近傍の場合

この場合は、以下に示すように、 B_L の定義から容易に示す事ができる。

$$B_L = \frac{1 - \mu}{(1 - p_L)^3} + \frac{\mu}{p_L^3} > (1 - \mu) + \mu = 1$$

(2) L2 点近傍の場合

$$\begin{aligned}
B_L &= \frac{1 - \mu}{(1 + p_L)^3} + \frac{\mu}{p_L^3} = 1 + \frac{1 - \mu}{(1 + p_L)^3} + \frac{\mu}{p_L^3} - (1 - \mu) - \mu = 1 + (1 - \mu) \left(\frac{1}{(1 + p_L)^3} - 1 \right) + \mu \left(\frac{1}{p_L^3} - 1 \right) \\
&= 1 - \frac{1 - \mu}{(1 + p_L)^3} (3 + 3p_L + p_L^2) p_L + \frac{\mu}{p_L^3} (1 - p_L^3)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

となる。L2 点では

$$(1 - \mu) p_L^3 (p_L^2 + 3p_L + 3) + \mu (p_L + 1)^2 (p_L^3 - 1) = 0$$

が成り立っており((4.15)式を参照)、これは次のように変形できる。

$$\frac{1-\mu}{(1+p_L)^3}(3+3p_L+p_L^2) = \frac{\mu(1-p_L^3)}{p_L^3(1+p_L)} \quad (5.20)$$

(5.20)式を(5.19)式に代入すると、

$$B_L = 1 - \frac{\mu(1-p_L^3)}{p_L^2(1+p_L)} + \frac{\mu}{p_L^3}(1-p_L^3) = 1 + \frac{\mu}{p_L^3}(1-p_L^3) \left(1 - \frac{p_L}{1+p_L}\right) = 1 + \frac{\mu(1-p_L^3)}{p_L^3(1+p_L)} > 1$$

となる。

以上で、 $B_L > 1$ である事を証明できた。

次に、(5.18)式の λ^2 は、複号の上の場合に正、下の場合に負となる事を示す。

(A) $f_1(B_L) \equiv 2 - B_L + \sqrt{B_L(9B_L - 8)} > 0$ ($B_L > 1$ の条件で)を示す。

$$f_1(1) = 1 + 1 = 2 \quad (5.21)$$

$$f_1'(B_L) = -1 + \frac{9B_L - 4}{\sqrt{B_L(9B_L - 8)}} = \frac{9B_L - 4 - \sqrt{B_L(9B_L - 8)}}{\sqrt{B_L(9B_L - 8)}} \quad (5.22)$$

上式の分子は以下のように変形でき、

$$9B_L - 4 - \sqrt{B_L(9B_L - 8)} = 9B_L - 8 - \sqrt{B_L(9B_L - 8)} + 4 = \sqrt{9B_L - 8}(\sqrt{9B_L - 8} - \sqrt{B_L}) + 4$$

この式の括弧内は以下に示すように $B_L > 1$ の条件で正であるから、

$$\sqrt{9B_L - 8} - \sqrt{B_L} = \frac{9B_L - 8 - B_L}{\sqrt{9B_L - 8} + \sqrt{B_L}} = \frac{8(B_L - 1)}{\sqrt{9B_L - 8} + \sqrt{B_L}} > 0$$

以上の事から、(5.22)式は

$$f_1'(B_L) = \frac{\sqrt{9B_L - 8}(\sqrt{9B_L - 8} - \sqrt{B_L}) + 4}{\sqrt{B_L(9B_L - 8)}} > 0 \quad (5.23)$$

となる。(5.21)式、(5.23)式より、 $B_L > 1$ の条件で、 $f_1(B_L) \equiv 2 - B_L + \sqrt{B_L(9B_L - 8)} > 0$ が示された。

(B) $f_2(B_L) \equiv 2 - B_L - \sqrt{B_L(9B_L - 8)} < 0$ ($B_L > 1$ の条件で)を示す。

$$f_2(1) = 1 - 1 = 0 \quad (5.24)$$

$$f_2'(B_L) = -1 - \frac{9B_L - 4}{\sqrt{B_L(9B_L - 8)}} = \frac{-\sqrt{B_L(9B_L - 8)} - (9B_L - 4)}{\sqrt{B_L(9B_L - 8)}} < 0 \quad (5.25)$$

(5.24)式、(5.25)式より、 $B_L > 1$ の条件で、 $f_2(B_L) \equiv 2 - B_L - \sqrt{B_L(9B_L - 8)} < 0$ が示された。

よって、特性方程式(5.16)式は、正の λ^2 (実根)と負の λ^2 (虚根)を持つ事が分かる。ここでは、二つの実根を λ_p 、二つの虚根を $\pm i \lambda_N$ で表わす。但し、 $\lambda_p > 0$ 、 $\lambda_N > 0$ とし、 i は虚数単位である。これらの特性方程式の根を用いて、(5.13)式の解 x は以下のように表わされる。

$$x = \tilde{\alpha}_1 e^{i\lambda_p t} + \tilde{\alpha}_2 e^{-i\lambda_p t} + \alpha_3 e^{-\lambda_N t} + \alpha_4 e^{\lambda_N t} \quad (5.26)$$

$\tilde{\alpha}_1$ 、 $\tilde{\alpha}_2$ 、 α_3 、 α_4 は、積分定数である。(5.26)式を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} x &= \tilde{\alpha}_1 (\cos \lambda_p t + i \sin \lambda_p t) + \tilde{\alpha}_2 (\cos \lambda_p t - i \sin \lambda_p t) + \alpha_3 e^{-\lambda_N t} + \alpha_4 e^{\lambda_N t} \\ &= (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2) \cos \lambda_p t + i(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) \sin \lambda_p t + \alpha_3 e^{-\lambda_N t} + \alpha_4 e^{\lambda_N t} \\ &= \alpha_1 \cos(\lambda_p t + \alpha_2) + \alpha_3 e^{-\lambda_N t} + \alpha_4 e^{\lambda_N t} \end{aligned} \quad (5.27)$$

次に、(5.13)式の解 y を得るために、 y と x の比 β/α を求める。

(1) $\lambda = \lambda_p > 0$ のモードの場合

(5.15)式の第一式より、次式が得られる。

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda_p^2 + 2B_L + 1}{-2i\lambda_p} = i \frac{\lambda_p^2 + 2B_L + 1}{2\lambda_p} \equiv iC_{y1} \quad (5.28)$$

(2) $\lambda = -\lambda_p$ のモードの場合

(5.15)式の第一式より、次式が得られる。

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda_p^2 + 2B_L + 1}{2i\lambda_p} = -i \frac{\lambda_p^2 + 2B_L + 1}{2\lambda_p} \equiv -iC_{y1} \quad (5.29)$$

(3) $\lambda = i\lambda_N$ のモードの場合

(5.15)式の第二式より、次式が得られる。

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\lambda_N}{\lambda_N^2 + B_L - 1} \equiv C_{y2} \quad (5.30)$$

(4) $\lambda = -i\lambda_N$ のモードの場合

(5.15)式の第二式より、次式が得られる。

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-2\lambda_N}{\lambda_N^2 + B_L - 1} \equiv -C_{y2} \quad (5.31)$$

y の解を以下のように表わす。

$$y = \tilde{\beta}_1 e^{i\lambda_p t} + \tilde{\beta}_2 e^{-i\lambda_p t} + \beta_3 e^{-\lambda_N t} + \beta_4 e^{\lambda_N t} \quad (5.32)$$

ここで、各項の係数を(5.28)式～(5.31)式で表現すると、

$$y = \tilde{\alpha}_1 i C_{y1} e^{i\lambda_p t} + \tilde{\alpha}_2 (-i C_{y1}) e^{-i\lambda_p t} + \alpha_3 C_{y2} e^{-\lambda_N t} + \alpha_4 (-C_{y2}) e^{\lambda_N t} \quad (5.33)$$

$$y = C_{y1} \left\{ \tilde{\alpha}_1 e^{i\left(\lambda_p t + \frac{\pi}{2}\right)} + \tilde{\alpha}_2 e^{-i\left(\lambda_p t + \frac{\pi}{2}\right)} \right\} + \alpha_3 C_{y2} e^{-\lambda_N t} - \alpha_4 C_{y2} e^{\lambda_N t} \\ = C_{y1} \alpha_1 \cos\left(\lambda_p t + \alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_3 C_{y2} e^{-\lambda_N t} - \alpha_4 C_{y2} e^{\lambda_N t} \quad (5.34)$$

$$= -C_{y1} \alpha_1 \sin(\lambda_p t + \alpha_2) + \alpha_3 C_{y2} e^{-\lambda_N t} - \alpha_4 C_{y2} e^{\lambda_N t}$$

となる。よって、(5.13)式の解 x, y は、次式で表わされる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos(\lambda_p t + \alpha_2) \\ -C_{y1} \sin(\lambda_p t + \alpha_2) \end{pmatrix} + \alpha_3 e^{-\lambda_N t} \begin{pmatrix} 1 \\ C_{y2} \end{pmatrix} + \alpha_4 e^{\lambda_N t} \begin{pmatrix} 1 \\ -C_{y2} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

初期値を巧く選べば、(5.35)式の第一項のみから成る運動(周期解)をさせる事ができるが、僅かな誤差で指数関数の発散項が生じるため、直線解近傍の運動は不安定である。この周期解は、図 5.2 に示すように、右回りの運動をする。

5.3 周期解(xy 面内)

本節では、(5.35)式の指数関数の係数(積分定数)がゼロになって周期解が得られる初期条件を見つけ、その解について検討する。

速度ベクトルは、(5.35)式を微分して次式となる。

楕円の長軸:短軸 = $C_{y1}:1$

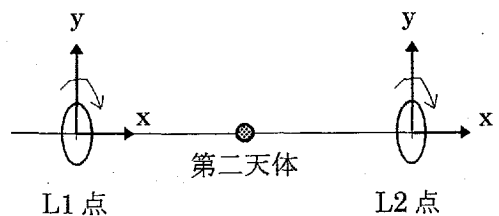


図 5.2 直線解近傍の周期運動

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \alpha_1 \lambda_p \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_p t + \alpha_2) \\ -C_{y1} \cos(\lambda_p t + \alpha_2) \end{pmatrix} - \alpha_3 \lambda_N e^{-\lambda_N t} \begin{pmatrix} 1 \\ C_{y2} \end{pmatrix} + \alpha_4 \lambda_N e^{\lambda_N t} \begin{pmatrix} 1 \\ -C_{y2} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

位置・速度の初期値を添え字 0 で表わすと、(5.35)、(5.36)式より、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ -C_{y1} \sin \alpha_2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ C_{y2} \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -C_{y2} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \lambda_p \begin{pmatrix} -\sin \alpha_2 \\ -C_{y1} \cos \alpha_2 \end{pmatrix} - \alpha_3 \lambda_N \begin{pmatrix} 1 \\ C_{y2} \end{pmatrix} + \alpha_4 \lambda_N \begin{pmatrix} 1 \\ -C_{y2} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

が得られる。ここでは、 (x_0, y_0) を任意に与えて、 α_3, α_4 がゼロになる様に、 (\dot{x}_0, \dot{y}_0) を設定する。

(5.37)式において、 $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cos \alpha_2 &= x_0 \\ \alpha_1 \sin \alpha_2 &= -\frac{y_0}{C_{y1}} \end{aligned} \quad (5.39)$$

となり、これを(5.38)式に代入して、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \lambda_p \begin{pmatrix} -\alpha_1 \sin \alpha_2 \\ -C_{y1} \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{pmatrix} = \lambda_p \begin{pmatrix} \frac{y_0}{C_{y1}} \\ -C_{y1} x_0 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

を得る。

次に、周期解を規定するパラメータである λ_p と C_{y1} を、 $\nu \equiv \left(\frac{\mu}{3(1-\mu)} \right)^{\frac{1}{3}}$ ((4.22)式を参照)の1次までで表現する。

始めに、これらの表現式を以下に再掲する。

$$C_{y1} = \frac{\lambda_p^2 + 2B_L + 1}{2\lambda_p} \quad (5.41)$$

$$\lambda_p = \sqrt{1 - \frac{1}{2}B_L + \frac{1}{2}\sqrt{B_L(9B_L - 8)}} \quad (5.42)$$

$$B_L \equiv \frac{1-\mu}{(1 \mp p_L)^3} + \frac{\mu}{p_L^3} \quad (5.43)$$

p_L を ν の多項式で近似すると(4.2節を参照)、

$$p_{L1} = \nu - \frac{1}{3}\nu^2 \dots \text{(L1 点の場合)}$$

$$p_{L2} = \nu + \frac{1}{3}\nu^2 \dots \text{(L2 点の場合)}$$

であり、合わせて、

$$p_L = \nu \mp \frac{1}{3}\nu^2 \dots \quad (5.44)$$

となる。これを、(5.43)式に代入して、 B_L を ν の1次式で表わす。

$$B_L \doteq \frac{1-\mu}{\left(1 \mp \left(\nu \mp \frac{1}{3}\nu^2\right)\right)^3} + \frac{\mu}{\left(\nu \mp \frac{1}{3}\nu^2\right)^3} \doteq (1-\mu)(1 \pm 3\nu) + 3(1-\mu)(1 \pm \nu) \doteq 4 \pm 6\nu \quad (5.45)$$

なお、 μ は ν^3 のオーダーなので、消えている。 z 方向の運動の角振動数 $\sqrt{B_L}$ は、

$$\sqrt{B_L} \doteq 2 \left(1 \pm \frac{3}{4}\nu\right) \quad (5.46)$$

である。同様の計算で、 λ_p, C_{y1} が以下のように求められる。

$$\lambda_p \doteq \sqrt{2\sqrt{7}-1} \left(1 \pm \frac{5-\frac{2}{\sqrt{7}}}{6} \nu \right) \doteq 2.072(1 \pm 0.707\nu) \quad (5.47)$$

$$C_{y1} \doteq \frac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{2\sqrt{7}-1}} \left(1 \pm \frac{-1+\frac{13}{\sqrt{7}}}{6} \nu \right) \doteq 3.208(1 \pm 0.652\nu) \quad (5.48)$$

表 5.1 に、各天体系に対する ν 値を示す。

(5.46)式と(5.47)式を比較すると、xy 面内の角振動数は z 方向のそれより、約 3.6%大きい事が分かる。よって、直線解近傍の 3 次元運動は、二つの周期を持つリサージュ図形となる。角振動数は約 2 なので、近傍運動の周期は、第二天体の公転周期の約 1/2 である。

表 5.1 各天体系の ν 値

| 天体系 | ν |
|----------|--------|
| 太陽-地球系 | 0.01 |
| 地球-月系 | 0.16 |
| 太陽-木星系 | 0.068 |
| 火星-フォボス系 | 0.0019 |

5.4 数値計算(リサージュ軌道)

ここでは、前節までに求めた線型運動方程式の周期解を、線型近似していない円制限三体問題の数値積分で確認すると共に、非線型性の影響を見る。太陽-地球系の L1 点近傍の周期軌道を例に採る。

[ケース 1] $x_0 = 1E-5$ (L1 点から約 1500km), $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$ の場合

線型近似の(5.40)式で求めた初期速度は、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ -6.7377182522E-5 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

となる。無次元時間で 4 (232 日間に対応) まで計算した結果を図 5.3 に示す。

約 3/4 周回の所から軌道が大きくずれている。L1 点からの距離が大きい事による非線型項の影響である。

初期位置に戻るように初期速度の y 成分を以下の値に修正した結果を図 5.4 に示す。

$$\dot{y}_0 = -6.7317E-5 \quad (5.50)$$

ほぼ周期運動になっており、非線型の影響が初期速度の 4 桁目に現れている事が分かる。

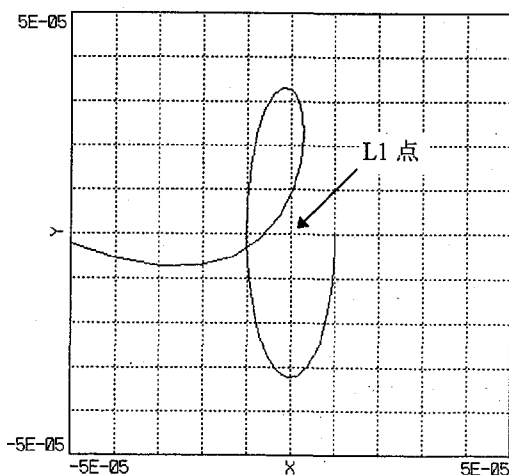


図 5.3 L1 点近傍の周期運動(太陽-地球系)
線型解の初期速度を使用($x_0=1500\text{km}$)

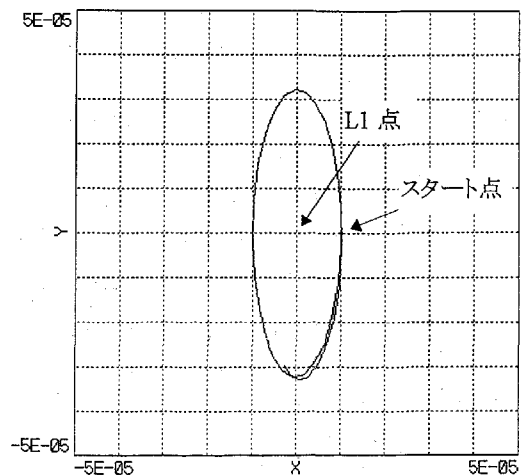


図 5.4 L1 点近傍の周期運動(太陽-地球系)
修正した初期速度を使用($x_0=1500\text{km}$)

[ケース 2] $x_0 = 1E-6$ (L1 点から約 150km), $y_0 = 0, z_0 = 0, \dot{z}_0 = 0$ の場合

x_0 の値をケース 1 よりも 1 桁小さくして、非線型の影響が小さくなる事を確認する。

線型近似で求めた初期速度は、(5.40)式から分かるように、(5.49)式を 1 桁小さくした以下の値となる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ -6.737718252E-6 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

無次元時間で 4 (232 日間に対応) まで計算した結果を図 5.5 に示す。図 5.3 と図 5.5 を比較すると、 x_0 が 1 桁小さくなった事で、非線型項の影響がかなり小さくなった事が分かる。

より正確に初期位置に戻るよう初期速度の y 成分を以下の値に修正した結果を図 5.6 に示す。

$$\dot{y}_0 = -6.73712E-6 \quad (5.52)$$

今度は、非線型の影響が初期速度の 5 桁目に現れている。

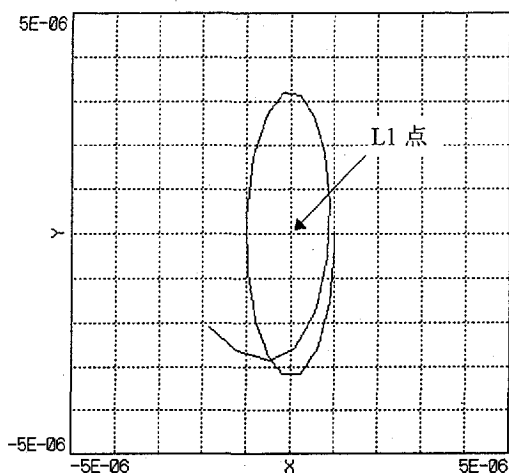


図 5.5 L1 点近傍の周期運動(太陽-地球系)
線型解の初期速度を使用($x_0=150$ km)

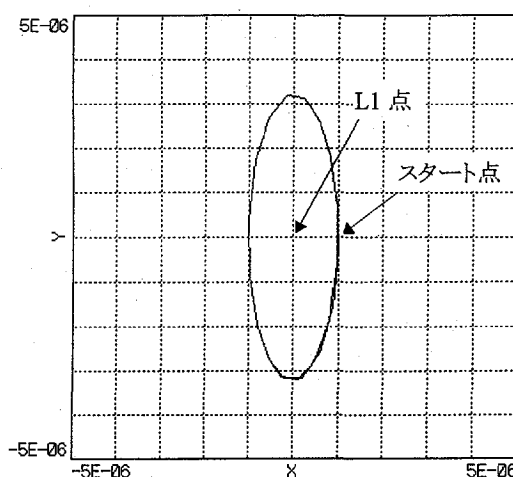


図 5.6 L1 点近傍の周期運動(太陽-地球系)
修正した初期速度を使用($x_0=150$ km)

[ケース 3] $x_0 = 1E-6$ (L1 点から約 150km), $y_0 = 0, z_0 = 2E-6, \dot{z}_0 = 0$ の場合

ケース 2 の場合に、 z 方向の運動も付加する。(5.52)式の $\dot{y}_0 = -6.73712E-6$ では、 x, y 面内の運動が周期運動からずれる。 x, y 面内運動と z 方向運動とのカップリングによる非線形項が存在するからである。結局、以下の初期速度で、 x, y 面内の周期運動を実現できた。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ -6.7363E-6 \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

図 5.7 に無次元時間 4 の期間の x, y 面内運動を、図 5.8 に y, z 面内運動を示す。 y, z 面内運動は、 z 方向運動の周期が x, y 面内運動の周期と僅かに異なるために 1 周で閉じないリサージュ図形になっている。

ISEE-3 や SOHO では、次節に述べるハロー軌道が採用されているが、近年、リサージュ軌道も見直されている。1997 年 8 月に打上げ予定の ACE (Advanced Composition Explorer) では、リサージュ軌道が採用されている²⁵⁾。宇宙機の設計を simple にするために、太陽-地球ラインからの宇宙機位置のずれを小さく抑える要求があるためである。ハロー軌道の y 方向サイズには下限が存在するため、この要求を満足できない。

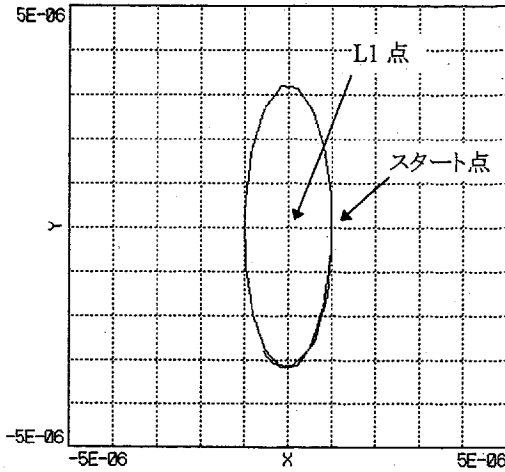


図 5.7 L1 点近傍の準周期運動(太陽-地球系)
z 方向運動も付加

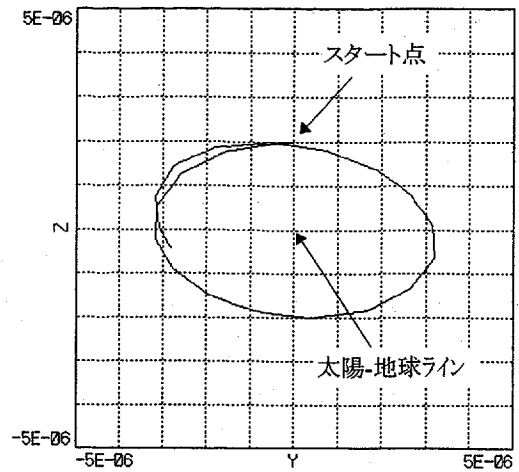


図 5.8 L1 点近傍の準周期運動(太陽-地球系)
z 方向運動も付加

5.5 ハロー軌道

(5.13)式の線型運動方程式の解では、 xy 面内と z 方向の運動の周期が僅かに異なるため、リサージュ軌道となってしまうが、 $L1$ 点又は $L2$ 点から大きく離れた軌道では非線型項の影響が周期にも及び、 xy 面内と z 方向の運動の周期を一致させる事ができる。この結果得られる軌道をハロー軌道と言い、円制限三体問題の下では完全な周期軌道となる(現実的环境下では完全な周期軌道とはならない)。制限三体問題の下で解析的にハロー軌道を扱ったのは、文献 12)が最初である。周期へも影響を与える項は3次項以上であり、文献 12)は数式処理ソフトを利用して3次項まで扱っている。

ここでは、解析的手法の詳細については触れず、結果の一つとして、太陽-地球系の $L1$ 点回りのハロー軌道に対する y 方向の振幅 A_y と z 方向の振幅 A_z の関係式²⁶⁾を掲げるのみとする。

$$A_y = \sqrt{1.13709551A_z^2 + 4.280773673 \times 10^{11}} \quad (5.54)$$

A_y, A_z とも km 単位。

この式から、ハロー軌道の A_y には下限値(654,276km)が存在する事が分かる。

次に、円制限三体問題のモデルにて数値的にハロー軌道を求めてみる。線型近似解からスタートして容易にハロー軌道を求められれば、高次の解析解を使う必要が無く、手軽にハロー軌道を扱えるからである。

[ハロー軌道の設計法]

ハロー軌道は xz 面に対して面対称なので、 $t=0$ において、 xz 面の $x>0$ の領域を通過するとすれば、先ず以下の初期条件が決まる。

$$\dot{z}_0 = 0, y_0 = 0, \dot{x}_0 = 0 \quad (5.55)$$

z_0 又は A_z は、ミッション要求から決まる。残りの x_0, y_0 を繰り返し計算で求める必要がある。その際の条件は、半周後に xz 面を垂直に通過する事である。よって、半周後に xz 面に達するまでの時間 T, x_0, y_0 を未知パラメータとし、 T だけ経過した時に以下の条件を満足する様に、ニュートン法(微分修正法)にて繰り返し計算する。修正量の計算に用いる遷移行列は、前進差分による数値微分法にて求める。

$$y(T)=0, \dot{x}(T)=0, z(T)=0 \quad (5.56)$$

x_0 の見積もりとして、(5.54)式から得られる A_y を3で割ったものを使用する((5.48)式を参照)。 y_0 の見積もりには、(5.40)式の線型解を使用する。T の見積もりとして $\pi/2$ を使う。

以下に、例として、太陽-地球系のL1点近傍ハロー軌道の $A_z=109000\text{km}$ の場合を求めてみる。始めに、未知パラメータ T、 x_0 、 y_0 の初期見積もり値(以下に記載)を伝播した結果を図 5.9 に示す。

$$\begin{aligned} T &= 1.5708 \\ x_0 &= 0.0014767 \quad (221,507\text{km}) \\ y_0 &= -0.009949588 \end{aligned}$$

T 後において、 $y = 0$ を通過しており、この後の微分修正法から得られる修正量を使う事で、収束する期待が持てる。所が、ニュートン法から得られる修正量をそのまま使って次の繰り返し計算時のパラメータとして使うと、発散してしまった。ニュートン法から得られる修正量の半分を使用する事で収束した。問題の非線型性に対して、初期見積もり値の、解からのずれが大きいのが原因であろう。しかし、1/2 を乗じて使う事で問題無く収束している。収束判定には、次式を用いた。

$$\begin{aligned} |y(T)| &\leq \varepsilon A_y \\ |\dot{x}(T)| &\leq \varepsilon |\dot{y}_0| \\ |\dot{z}(T)| &\leq \varepsilon |\dot{y}_0| \end{aligned} \quad (5.57)$$

ε : 相対収束判定値

図 5.10 に、 $\varepsilon = 10^{-5}$ の場合の解を 2 周回伝播した結果を示す。1.5 周はハロー軌道として使えるものとなっている。図 5.11 に、 $\varepsilon = 10^{-8}$ の場合の解を 3 周回伝播した結果を示す。2.5 周はハロー軌道に留まっている。図 5.12 に、 $\varepsilon = 10^{-14}$ の場合の解を 3.5 周回伝播した結果を示す。3 周はハロー軌道といえる。図 5.12 の場合の yz 面図を図 5.13 に示す。地球から眺めて反時計回りに回転しており、Class II ハロー軌道と呼ばれている。逆に回転するものは、Class I ハロー軌道と呼ばれる。

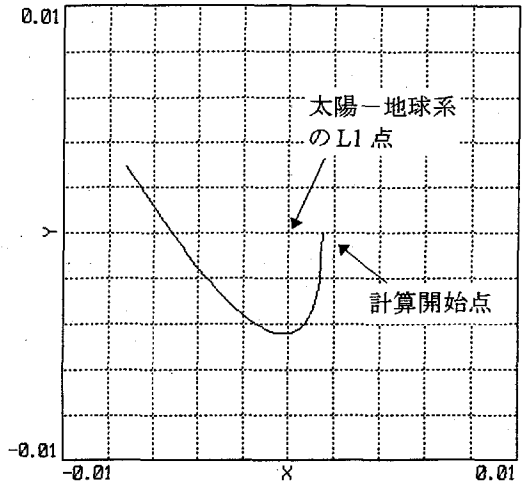


図 5.9 ハロー軌道設計
(初期見積もりの未知パラメータの場合)

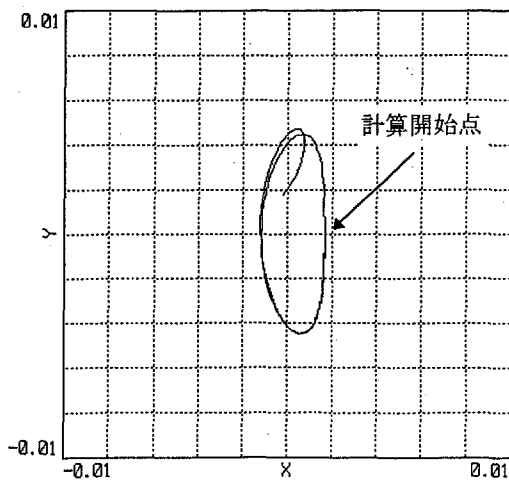


図 5.10 ハロー軌道設計
($\varepsilon = 10^{-5}$ 、約2周回分表示)

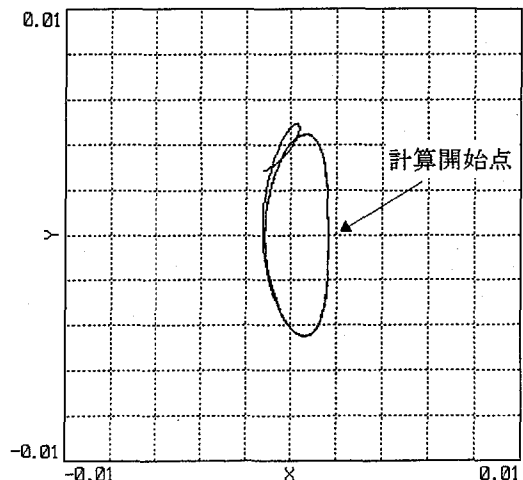


図 5.11 ハロー軌道設計
($\varepsilon = 10^{-8}$ 、約3周回分表示)

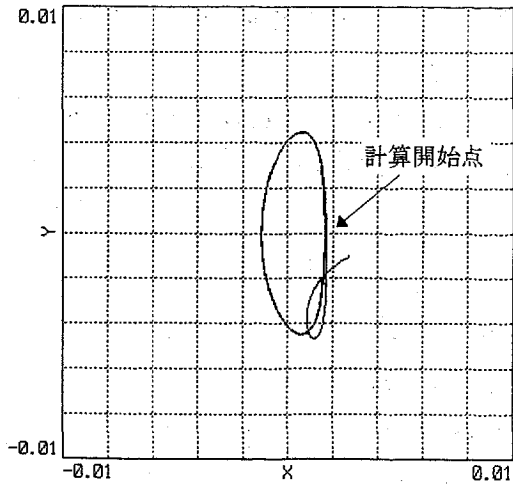


図 5.12 ハロー軌道設計
($\epsilon = 10^{-14}$ 、約 3.5 周回分表示)

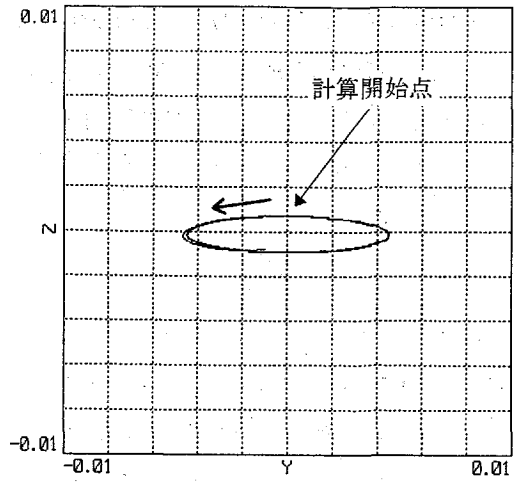


図 5.13 ハロー軌道設計
(図 5.12 の yz 面図)

6. 正三角形解近傍の運動

本章では、ラグランジュ点の正三角形解(L4, L5点)の近傍の運動について記述する。これらの点を利用するミッションは未だ実現されていないが、特に地球-月系のL4, L5点は近くに邪魔な天体が存在せず、地球からそれほど遠くないため、天体観測ミッションとしての利用が考えられている。最近はあまり聞かなくなったが、以前はスペース・コロニーの設置場所としてL4, L5点が登場する事が多かった。

6.1 線型運動方程式

本節では、L4点とL5点の近傍の運動を表わす線型方程式を導出する。出発点となる無次元化された円制限三体問題の運動方程式((3.13)式)を以下に再掲する。

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial W}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial W}{\partial \eta} \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\partial W}{\partial \zeta}\end{aligned}\tag{6.1}$$

$$W = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1-\mu}{|r-r_1|} + \frac{\mu}{|r-r_2|}$$

6.1.1節では、L4, L5点を中心とし、第一・第二天体を結ぶ方向を基準方向とする座標系を使った線型運動方程式を導出する。この方程式は、第一・第二天体の公転面内の成分間にカップリングが生じて式が複雑になる。そこで、6.1.2節で、Wにおいて第一・第二天体の公転面内のカップリング項が消える座標系による線型運動方程式を導出する²⁷⁾。

6.1.1 第一・第二天体を結ぶ方向を基準方向とする座標系の場合

L4点、L5点近傍の運動を扱うために、それらの点を中心とする座標系 $x y z$ を導入する。図 6.1 に定義を示す。 ξ 、 η 、 ζ を x 、 y 、 z で表わすと、

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2} - \mu + x \\ \eta &= y \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{上はL4点、下はL5点}) \\ \zeta &= z\end{aligned}\tag{6.2}$$

である。(6.1)式のWの微分 $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ 等を x, y, z の1次までで近似するために、Wを2次までの近似で表現する。

d_1, d_2 を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}d_1 &\equiv |r-r_1| = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2} \\ d_2 &\equiv |r-r_2| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2}\end{aligned}\tag{6.3}$$

$1/d_1, 1/d_2$ は以下のように2次近似できるので、

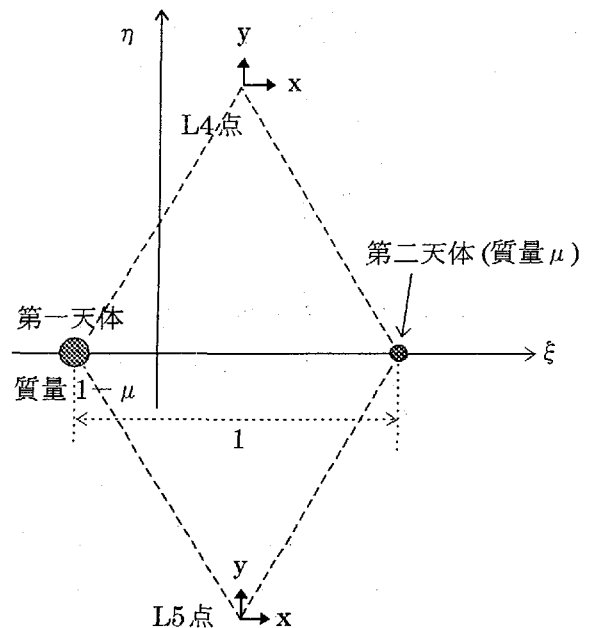


図 6.1 正三角形解近傍の座標系

(6.3)

$$\frac{1}{d_1} = \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + x \pm \sqrt{3}y + x^2 + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\doteq 1 - \frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{8}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}xy \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{d_2} = \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 - x \pm \sqrt{3}y + x^2 + y^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\doteq 1 + \frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{8}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}xy \quad (6.5)$$

Wは、以下のように2次近似できる。

$$W \doteq \frac{1}{2} \left\{ \left(x + \frac{1}{2} - \mu \right)^2 + \left(y \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right\} + (1 - \mu) \left(1 - \frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{8}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}xy \right)$$

$$+ \mu \left(1 + \frac{1}{2}x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{8}y^2 - \frac{1}{2}z^2 \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}xy \right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{3}{8} \left\{ x^2 \pm 2\sqrt{3}(1-2\mu)xy + 3y^2 \right\} - \frac{1}{2}z^2 \quad (6.6)$$

(6.6)式を使って、 $\frac{\partial W}{\partial \xi}$ 等を求めると、

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial W}{\partial x} \doteq \frac{3}{4}x \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)y$$

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{\partial W}{\partial y} \doteq \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)x + \frac{9}{4}y \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{\partial W}{\partial z} \doteq -z$$

となり、(6.1)式は次のように表わされる。

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - \frac{3}{4}x \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)x - \frac{9}{4}y = 0 \quad (6.8)$$

$$\ddot{z} + z = 0$$

6.1.2 Wのカップリングが消える座標系の場合

前節の座標系では、Wは(6.6)式で近似されるが、 xy という相乗項の存在が式を複雑にしている。そこで本節では、図 6.2 に示すように、 x, y 軸を z 軸回りに角 ψ だけ回転した $X Y Z$ 座標系を考え、相乗項が消える ψ を使用する。 xyz 座標と XYZ 座標の関係は、次式で与えられる。

$$x = X \cos \psi - Y \sin \psi$$

$$y = X \sin \psi + Y \cos \psi \quad (6.9)$$

$$z = Z$$

これを(6.6)式に代入すると、

$$W \text{ の変化項} = \frac{3}{8} \left\{ x^2 \pm 2\sqrt{3}(1-2\mu)xy + 3y^2 \right\} - \frac{1}{2}z^2$$

$$= \frac{3}{8} \left[\begin{aligned} & X^2 \left\{ \cos^2 \psi \pm \sqrt{3}(1-2\mu)\sin 2\psi + 3\sin^2 \psi \right\} \\ & + Y^2 \left\{ \sin^2 \psi \mp \sqrt{3}(1-2\mu)\sin 2\psi + 3\cos^2 \psi \right\} \\ & + XY \left\{ -\sin 2\psi \pm 2\sqrt{3}(1-2\mu)\cos 2\psi + 3\sin 2\psi \right\} \end{aligned} \right] \quad (6.10)$$

$$- \frac{1}{2}Z^2$$

となり、

$$XY \text{ の係数} = \frac{3}{4} \left\{ \sin 2\psi \pm \sqrt{3}(1-2\mu)\cos 2\psi \right\} = 0$$

の条件より、

$$\tan 2\psi = \mp \sqrt{3}(1-2\mu) \quad (6.11)$$

が得られる。L4点では $2\psi \approx 120^\circ$ 、L5点では $2\psi \approx -120^\circ$ となる。よって、

$$\psi \approx \pm 60^\circ \quad (6.12)$$

となる。X²の係数は、

$$\begin{aligned} X^2 \text{ の係数} &= \frac{3}{8} \left\{ \cos^2 \psi \pm \sqrt{3}(1-2\mu)\sin 2\psi + 3\sin^2 \psi \right\} \\ &= \frac{3}{8} \left[2 - \cos 2\psi \left\{ 1 \mp \sqrt{3}(1-2\mu)\tan 2\psi \right\} \right] \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{1}{\cos^2 2\psi} = 1 + \tan^2 2\psi = 1 + 3(1-2\mu)^2$$

$$\cos 2\psi = \frac{-1}{\sqrt{1+3(1-2\mu)^2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-3\mu+3\mu^2}} \quad (6.13)$$

なので、

$$X^2 \text{ の係数} = \frac{3}{4} \left(1 + \sqrt{1-3\mu+3\mu^2} \right) \quad (6.14)$$

となる。同様に、Y²の係数が以下のように求められる。

$$Y^2 \text{ の係数} = \frac{3}{4} \left(1 - \sqrt{1-3\mu+3\mu^2} \right) \quad (6.15)$$

よって、新しい座標系におけるWの変化項は、複号が消えて、以下の様になる。

$$W \text{ の変化項} = \frac{3}{4} \left(1 + \sqrt{1-3\mu+3\mu^2} \right) X^2 + \frac{3}{4} \left(1 - \sqrt{1-3\mu+3\mu^2} \right) Y^2 - \frac{1}{2} Z^2 \quad (6.16)$$

新しいXYZ座標系においても、運動方程式は、(6.1)式と同じ形の以下の式で表わされる。

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2\dot{Y} &= \frac{\partial W}{\partial X} \\ \ddot{Y} + 2\dot{X} &= \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \ddot{Z} &= \frac{\partial W}{\partial Z} \end{aligned} \quad (6.17)$$

新しいXYZ座標系においても、運動方程式が(6.1)式と同じ形で表わされる理由は、以下の2点による(図6.3参照)。

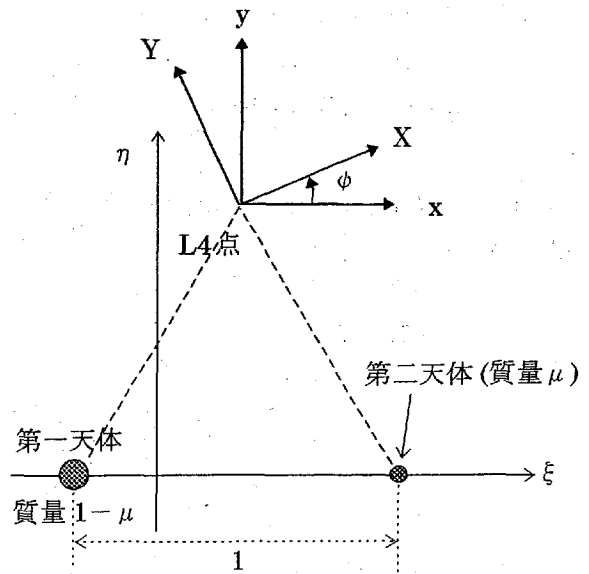


図 6.2 相乗項が消える座標系

- ①慣性系から回転系への変換において、 ξ η 軸は ξ_R η_R 軸の様に任意の方向で良い(第3章を参照)。
- ② ξ_R η_R 軸を、XY 軸(相乗項が消える)と平行にできる。

(6.17)式に(6.16)式を代入すると、相乗項が消えた以下の線型運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2\dot{Y} - E_1 X &= 0 \\ \ddot{Y} + 2\dot{X} - E_2 Y &= 0 \\ \ddot{Z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

$$E_1 \equiv \frac{3}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 3\mu + 3\mu^2} \right)$$

$$E_2 \equiv \frac{3}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 3\mu + 3\mu^2} \right)$$

(6.18)

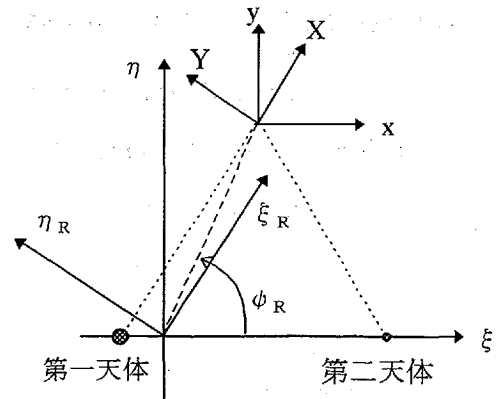


図 6.3 座標変換

ここで、X 軸が、第一・第二天体の重心ではなく、重心と第一天体の間を通っている事を示す。L4 点と重心を結ぶ直線と ξ 軸とのなす角を ϕ_R とする(図 6.3 参照)。すると、

$$\tan \psi_R = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \mu} = \frac{\sqrt{3}}{1 - 2\mu}$$

であるから、

$$\tan 2\psi_R = \frac{2 \tan \psi_R}{1 - \tan^2 \psi_R} = \frac{-\sqrt{3}(1 - 2\mu)}{1 + 2\mu - 2\mu^2} \doteq -\sqrt{3}(1 - 4\mu) \quad (6.19)$$

となり、(6.11)式の $\tan 2\psi = \mp\sqrt{3}(1 - 2\mu)$ と比較すると、X 軸が、重心と第一天体の間を通っている事が分かる。

6.2 XY 面内運動の解析解

この節では、(6.18)式を解いて、L4、L5 点近傍の運動を解析的に求める。(6.18)式より、直線解近傍の線型運動と同様に、XY 面内の運動と Z 方向の運動は独立している。Z 方向の運動は角振動数が 1 の単振動である。よって、以下では XY 面内の運動のみを扱う。

$x = \alpha e^{i\lambda t}$, $y = \beta e^{i\lambda t}$ とおいて、(6.18)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \lambda^2 \alpha e^{i\lambda t} + 2i\lambda \beta e^{i\lambda t} + E_1 \alpha e^{i\lambda t} &= 0 \\ -\lambda^2 \beta e^{i\lambda t} + 2i\lambda \alpha e^{i\lambda t} - E_2 \beta e^{i\lambda t} &= 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

となる。これを整理して、以下の α と β に関する連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + E_1)\alpha + 2i\lambda\beta &= 0 \\ -2i\lambda\alpha + (\lambda^2 + E_2)\beta &= 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ の根を持つ条件より、以下の特性方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + E_1 & 2i\lambda \\ -2i\lambda & \lambda^2 + E_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.22)$$

これを整理すると、

$$\lambda^4 + (E_1 + E_2 - 4)\lambda^2 + E_1 E_2 = 0 \quad (6.23)$$

となり、(6.18)式より、

$$\begin{aligned}
 E_1 + E_2 &= 3 \\
 E_1 E_2 &= \frac{27}{4} \mu(1-\mu)
 \end{aligned}
 \tag{6.24}$$

なので、

$$\lambda^4 - \lambda^2 + \frac{27}{4} \mu(1-\mu) = 0
 \tag{6.25}$$

が得られる。これを解くと、

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 &= \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} \right] \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} \right] \cdots \cdots \lambda_1^2 \\ \frac{1}{2} \frac{27\mu(1-\mu)}{1 + \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}} \cdots \cdots \lambda_2^2 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

となる。 λ_2 の方は、 μ が小さい時の精度を確保するために、分子を有理化した。特性方程式の根を、 $\lambda_1 (> 0)$ 、 $-\lambda_1$ 、 $\lambda_2 (> 0)$ 、 $-\lambda_2$ とする。

運動が安定であるためには、 λ は実数である必要がある。よって、

$$1 - 27\mu(1-\mu) > 0$$

を満足する必要がある、

$$\mu < \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) \doteq 0.03852\dots
 \tag{6.27}$$

という安定条件が得られる。地球-月系でも $\mu \doteq 0.01215$ であり、太陽系では $\mu = 0.11$ の冥王星-Charon系を除き、全てこの安定条件を満足している。

特性方程式の根を使うと、(6.18)式の解 X は、以下の様に表わされる。

$$\begin{aligned}
 X &= \tilde{\alpha}_1 e^{i\lambda_1 t} + \tilde{\alpha}_2 e^{-i\lambda_1 t} + \tilde{\alpha}_3 e^{i\lambda_2 t} + \tilde{\alpha}_4 e^{-i\lambda_2 t} \\
 &= \tilde{\alpha}_1 (\cos \lambda_1 t + i \sin \lambda_1 t) + \tilde{\alpha}_2 (\cos \lambda_1 t - i \sin \lambda_1 t) + \tilde{\alpha}_3 (\cos \lambda_2 t + i \sin \lambda_2 t) + \tilde{\alpha}_4 (\cos \lambda_2 t - i \sin \lambda_2 t) \\
 &= (\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2) \cos \lambda_1 t + i(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) \sin \lambda_1 t + (\tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_4) \cos \lambda_2 t + i(\tilde{\alpha}_3 - \tilde{\alpha}_4) \sin \lambda_2 t \\
 &= \alpha_1 \cos(\lambda_1 t + \alpha_2) + \alpha_3 \cos(\lambda_2 t + \alpha_4)
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

次に、(6.18)式の解 Y を得るために、 Y と X の比 β/α を求める。

(1) $\lambda = \lambda_1 (> 0)$ のモードの場合

(6.21)式の第二式より、次式が得られる。

$$\frac{\beta}{\alpha} = i \frac{2\lambda_1}{\lambda_1^2 + E_2} \equiv i C_{y1} \quad (C_{y1} > 0)
 \tag{6.29}$$

(2) $\lambda = -\lambda_1$ のモードの場合

(6.21)式の第二式より、次式が得られる。

$$\frac{\beta}{\alpha} = -i \frac{2\lambda_1}{\lambda_1^2 + E_2} = -i C_{y1}
 \tag{6.30}$$

(3) $\lambda = \lambda_2 (> 0)$ のモードの場合

(6.21)式の第二式より、次式が得られる。

$$\frac{\beta}{\alpha} = i \frac{2\lambda_2}{\lambda_2^2 + E_2} \equiv iC_{y2} \quad (C_{y2} > 0) \quad (6.31)$$

(4) $\lambda = -\lambda_2$ のモードの場合

(6.21)式の第二式より、次式が得られる。

$$\frac{\beta}{\alpha} = -i \frac{2\lambda_2}{\lambda_2^2 + E_2} = -iC_{y2} \quad (6.32)$$

Y の解を以下のように表わす。

$$Y = \tilde{\beta}_1 e^{i\lambda_1 t} + \tilde{\beta}_2 e^{-i\lambda_1 t} + \tilde{\beta}_3 e^{i\lambda_2 t} + \tilde{\beta}_4 e^{-i\lambda_2 t} \quad (6.33)$$

ここで、各項の係数を(6.29)式～(6.32)式で表現すると、

$$\begin{aligned} Y &= \tilde{\alpha}_1 i C_{y1} e^{i\lambda_1 t} - \tilde{\alpha}_2 i C_{y1} e^{-i\lambda_1 t} + \tilde{\alpha}_3 i C_{y2} e^{i\lambda_2 t} - \tilde{\alpha}_4 i C_{y2} e^{-i\lambda_2 t} \\ &= C_{y1} \left\{ \tilde{\alpha}_1 e^{i(\lambda_1 t + \frac{\pi}{2})} + \tilde{\alpha}_2 e^{-i(\lambda_1 t + \frac{\pi}{2})} \right\} + C_{y2} \left\{ \tilde{\alpha}_3 e^{i(\lambda_2 t + \frac{\pi}{2})} + \tilde{\alpha}_4 e^{-i(\lambda_2 t + \frac{\pi}{2})} \right\} \\ &= C_{y1} \alpha_1 \cos\left(\lambda_1 t + \alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) + C_{y2} \alpha_3 \cos\left(\lambda_2 t + \alpha_4 + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -C_{y1} \alpha_1 \sin(\lambda_1 t + \alpha_2) - C_{y2} \alpha_3 \sin(\lambda_2 t + \alpha_4) \end{aligned} \quad (6.34)$$

となる。よって、(6.18)式の解 X, Y は、次式で表わされる。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos(\lambda_1 t + \alpha_2) \\ -C_{y1} \sin(\lambda_1 t + \alpha_2) \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos(\lambda_2 t + \alpha_4) \\ -C_{y2} \sin(\lambda_2 t + \alpha_4) \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

この運動は、2つの周期を持つ周期運動であり、図 6.4 に示すように、右回りの運動をする。

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, C_{y1}, C_{y2}$ の近似式を求めておく。

$$\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} \doteq 1 - \frac{27}{2}\mu - \frac{621}{8}\mu^2 - \frac{16767}{16}\mu^3 + \dots$$

なので、(6.26)式より、

$$\lambda_1^2 \doteq 1 - \frac{27}{4}\mu - \frac{621}{16}\mu^2 + \dots \quad (6.36)$$

$$\lambda_2^2 \doteq \frac{27}{4}\mu + \frac{621}{16}\mu^2 + \dots$$

$$\lambda_1 \doteq 1 - \frac{27}{8}\mu - \frac{3213}{128}\mu^2 + \dots \quad (6.37)$$

$$\lambda_2 \doteq \frac{1}{2}\sqrt{27\mu} \left(1 + \frac{23}{8}\mu + \dots\right)$$

となる。

$$E_2 = \frac{3}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 3\mu + 3\mu^2}\right) \doteq \frac{9}{4}\mu - \frac{9}{16}\mu^2 - \dots$$

なので、 C_{y1}, C_{y2} は以下の様に近似できる。

$$C_{y1} = \frac{2\lambda_1}{\lambda_1^2 + E_2} \doteq 2 + \frac{9}{4}\mu + \dots \quad (6.38)$$

$$C_{y2} = \frac{2\lambda_2}{\lambda_2^2 + E_2} \doteq \frac{1}{\sqrt{3\mu}} \left(1 - \frac{11}{8}\mu + \dots\right) \quad (6.39)$$

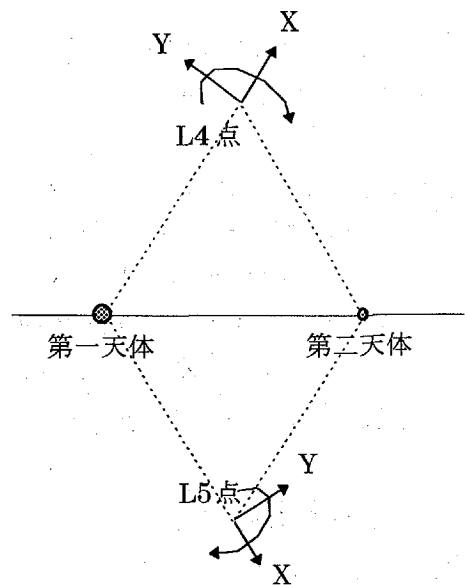


図 6.4 正三角形解近傍の周期運動

太陽-地球系及び地球-月系を例にして、2つの周期モードの周期及び縦横比を求めてみる。

太陽-地球系の場合

$\mu \doteq 3 \times 10^{-6}$ なので、

(1) λ_1 モード

$$\text{周期: } \frac{2\pi}{\lambda_1} \doteq 2\pi \left(1 + \frac{27}{8}\mu\right) \doteq 2\pi \quad \Rightarrow \text{約 1 年}$$

$$\text{長軸短軸比: } C_{y1} \doteq 2$$

(2) λ_2 モード

$$\text{周期: } \frac{2\pi}{\lambda_2} \doteq 2\pi \times \frac{2}{\sqrt{27\mu}} \doteq 2\pi \times 222 \quad \Rightarrow \text{約 222 年}$$

$$\text{長軸短軸比: } C_{y2} \doteq \frac{1}{\sqrt{3\mu}} \doteq 333$$

地球-月系の場合

$\mu \doteq 0.01215$ なので、

(1) λ_1 モード

$$\text{周期: } \frac{2\pi}{\lambda_1} \doteq 2\pi \left(1 + \frac{27}{8}\mu\right) \doteq 2\pi \times 1.041 \quad \Rightarrow \text{約 28.4 日}$$

$$\text{長軸短軸比: } C_{y1} \doteq 2$$

(2) λ_2 モード

$$\text{周期: } \frac{2\pi}{\lambda_2} \doteq 2\pi \times \frac{2}{\sqrt{27\mu}} \doteq 2\pi \times 3.49 \quad \Rightarrow \text{約 95.3 日}$$

$$\text{長軸短軸比: } C_{y2} \doteq \frac{1}{\sqrt{3\mu}} \doteq 5.2$$

次に、(6.35)式の4つの積分定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を、位置と速度の初期値で表現する。ここに(6.35)式を再掲し、速度の式も掲げる。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos(\lambda_1 t + \alpha_2) \\ -C_{y1} \sin(\lambda_1 t + \alpha_2) \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \cos(\lambda_2 t + \alpha_4) \\ -C_{y2} \sin(\lambda_2 t + \alpha_4) \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \alpha_1 \lambda_1 \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_1 t + \alpha_2) \\ -C_{y1} \cos(\lambda_1 t + \alpha_2) \end{pmatrix} + \alpha_3 \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_2 t + \alpha_4) \\ -C_{y2} \cos(\lambda_2 t + \alpha_4) \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

三角関数を展開して以下の定数を定義すると、

$$p_{1c} \equiv \alpha_1 \cos \alpha_2 \quad p_{1s} \equiv \alpha_1 \sin \alpha_2 \quad p_{2c} \equiv \alpha_3 \cos \alpha_4 \quad p_{2s} \equiv \alpha_3 \sin \alpha_4 \quad (6.41)$$

(6.35)、(6.40)式は

$$\begin{aligned} X &= p_{1c} \cos \lambda_1 t - p_{1s} \sin \lambda_1 t + p_{2c} \cos \lambda_2 t - p_{2s} \sin \lambda_2 t \\ Y &= -C_{y1} (p_{1c} \sin \lambda_1 t + p_{1s} \cos \lambda_1 t) - C_{y2} (p_{2c} \sin \lambda_2 t + p_{2s} \cos \lambda_2 t) \\ \dot{X} &= -\lambda_1 (p_{1c} \sin \lambda_1 t + p_{1s} \cos \lambda_1 t) - \lambda_2 (p_{2c} \sin \lambda_2 t + p_{2s} \cos \lambda_2 t) \\ \dot{Y} &= -C_{y1} \lambda_1 (p_{1c} \cos \lambda_1 t - p_{1s} \sin \lambda_1 t) - C_{y2} \lambda_2 (p_{2c} \cos \lambda_2 t - p_{2s} \sin \lambda_2 t) \end{aligned} \quad (6.42)$$

となる。t = 0 における初期値を、 $X_0, Y_0, \dot{X}_0, \dot{Y}_0$ とすると、(6.41)式の定数を決定する連立方程式が以下の様に表わされる。

$$\begin{aligned}
p_{1c} + p_{2c} &= X_0 \\
-C_{y1}p_{1s} - C_{y2}p_{2s} &= Y_0 \\
-\lambda_1 p_{1s} - \lambda_2 p_{2s} &= \dot{X}_0 \\
-C_{y1}\lambda_1 p_{1c} - C_{y2}\lambda_2 p_{2c} &= \dot{Y}_0
\end{aligned} \tag{6.43}$$

(6.43)式の第1、第4式より、 p_{1c} と p_{2c} が以下の様に求められ、

$$\begin{aligned}
p_{1c} &= \frac{-C_{y2}\lambda_2 X_0 - \dot{Y}_0}{C_{y1}\lambda_1 - C_{y2}\lambda_2} \\
p_{2c} &= \frac{C_{y1}\lambda_1 X_0 + \dot{Y}_0}{C_{y1}\lambda_1 - C_{y2}\lambda_2}
\end{aligned} \tag{6.44}$$

第2、第3式より、 p_{1s} と p_{2s} が以下の様に求められる。

$$\begin{aligned}
p_{1s} &= \frac{-\lambda_2 Y_0 + C_{y2}\dot{X}_0}{C_{y1}\lambda_2 - C_{y2}\lambda_1} \\
p_{2s} &= \frac{\lambda_1 Y_0 - C_{y1}\dot{X}_0}{C_{y1}\lambda_2 - C_{y2}\lambda_1}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

これらの定数を(6.42)式に代入すれば、任意の時刻における位置・速度が得られる。

以下に、 $\dot{X}_0 = 0$, $Y_0 = 0$ の場合のみ、結果を掲げる。 p_{1s} と p_{2s} は共にゼロとなり、

$$\begin{aligned}
X &= \frac{-C_{y2}\lambda_2 X_0 - \dot{Y}_0}{C_{y1}\lambda_1 - C_{y2}\lambda_2} \cos \lambda_1 t + \frac{C_{y1}\lambda_1 X_0 + \dot{Y}_0}{C_{y1}\lambda_1 - C_{y2}\lambda_2} \cos \lambda_2 t \\
Y &= \frac{C_{y1}(C_{y2}\lambda_2 X_0 + \dot{Y}_0)}{C_{y1}\lambda_1 - C_{y2}\lambda_2} \sin \lambda_1 t - \frac{C_{y2}(C_{y1}\lambda_1 X_0 + \dot{Y}_0)}{C_{y1}\lambda_1 - C_{y2}\lambda_2} \sin \lambda_2 t
\end{aligned} \tag{6.46}$$

が得られる。周期が短く、長軸短軸比も小さい λ_1 モードのみとなる初期速度は、(6.46)式より、

$$\dot{Y}_0 = -C_{y1}\lambda_1 X_0 \tag{6.47}$$

となる。

6.3 数値解

ここでは、前節までに求めた線型運動方程式の周期解を、線型近似していない円制限三体問題の数値積分で確認すると共に、非線型性の影響を見る。太陽-地球系のL4、L5点近傍の周期軌道を例に採る。Z(ζ)方向の運動は省略する。

6.3.1 λ_1 モードのみ生じる初期条件の場合

位置・速度の初期条件は、(6.46), (6.47)式より、

$$\begin{aligned}
Y_0 = 0, \quad Z_0 = 0, \quad \dot{X}_0 = 0, \quad \dot{Z}_0 = 0 \\
\dot{Y}_0 = -C_{y1}\lambda_1 X_0
\end{aligned} \tag{6.48}$$

である。太陽-地球系では、 $\mu = 3.040423 \times 10^{-6}$ なので、

$$\lambda_1 = 0.9999897383, \quad E_2 = 6.84094655 \times 10^{-6}, \quad C_{y1} = 2.000006841$$

$$\dot{Y}_0 = -1.999986317 X_0$$

となる。幾つかの X_0 に対して、以下に計算する。

[ケース 1] $x_0 = 0.005$ (L4 点から約 75 万 km) の場合

L4 点の近傍に対して、10 年間の計算結果を図 6.5 に示す。
 $\dot{Y}_0 = -0.009999931585$ (-298m/s) である。図 6.5 の座標系は $\xi \eta$ 系の原点を第二天体に移動した $\xi' \eta'$ 系である。線型解が示すように、長軸短軸比が約 2 の楕円運動を 10 回繰り返している。中心の移動も小さい。 \dot{Y}_0 の誤差が ± 1 m/s がある場合の影響を、図 6.6(+1m/s) と図 6.7(-1m/s) に示す。

L4 点からのずれがこの程度までは非線型項の影響は小さい。

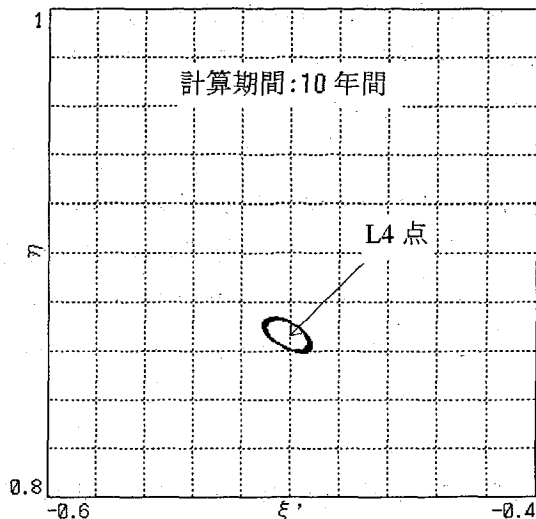


図 6.5 L4 点近傍の λ_1 モード周期運動 ($X_0=0.005$)

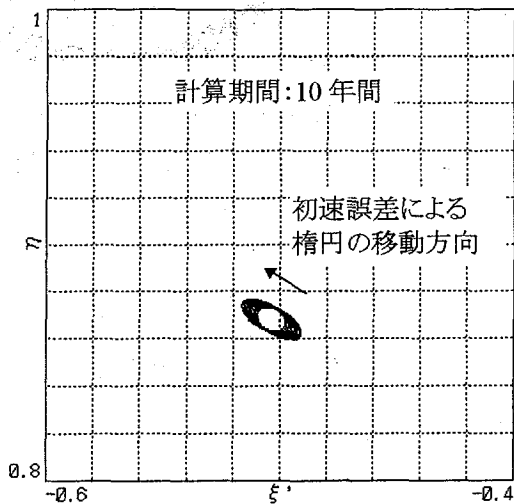


図 6.6 L4 点近傍の λ_1 モード周期運動 ($X_0=0.005$ 、初速誤差 +1m/s)

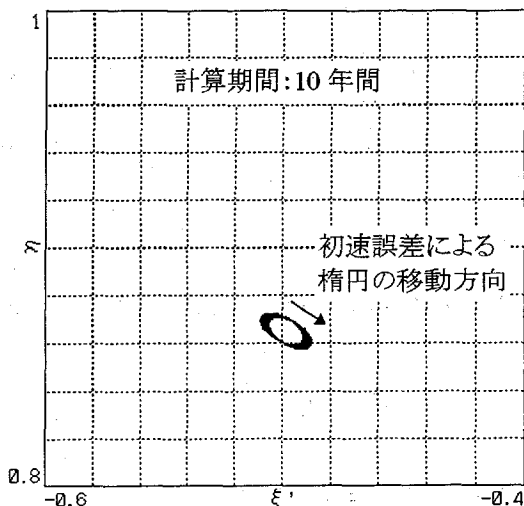


図 6.7 L4 点近傍の λ_1 モード周期運動 ($X_0=0.005$ 、初速誤差 -1m/s)

[ケース 2] $x_0 = 0.05$ (L4 点から約 750 万 km) の場合

L4 点の近傍に対して、5 年間の計算結果を図 6.8 に示す。
 $\dot{Y}_0 = -0.099999931585$ (-2978m/s) である。非線形項の影響で、

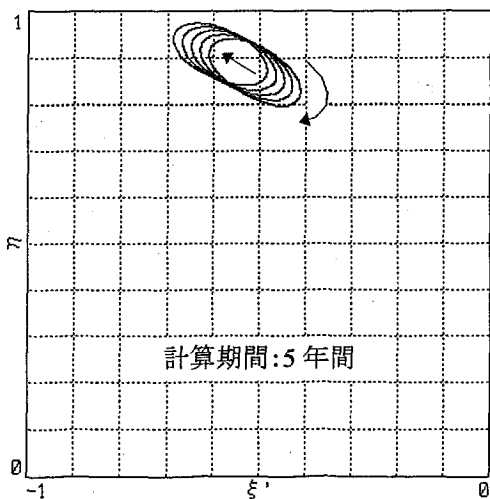


図 6.8 L4 点近傍の λ_1 モード周期運動 ($X_0=0.05$)

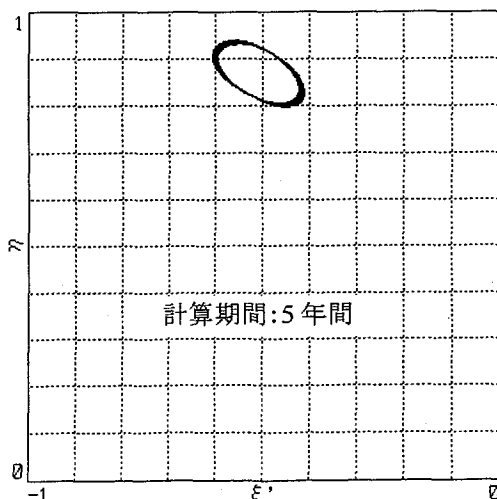


図 6.9 L4 点近傍の λ_1 モード周期運動 ($X_0=0.05$ 、初速=線型解 $\times 0.99$)

楕円運動の中心が移動している。速度の大きさを1%小さくして、 $\dot{Y}_0 = -0.09899932269$ とした場合を図 6.9 に示す。楕円運動のずれがほぼ消えている。

[ケース 3] $x_0 = 0.05$ (L5 点から約 750 万 km) の場合

L5 点の近傍に対して、線型解の初期速度を使い、 λ_2 モードの周期 222 年間の計算結果を図 6.10 に示す。非線形項の影響 (λ_2 モードの成分も混入)で、楕円運動の中心が大きく振動している。

6.3.2 λ_2 モードのみ生じる初期条件の場合

位置・速度の初期条件は、(6.46)式より、

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0, Z_0 = 0, \dot{X}_0 = 0, \dot{Z}_0 = 0 \\ \dot{Y}_0 &= -C_{y2}\lambda_2 X_0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

である。太陽-地球系では ($\mu = 3.040423 \times 10^{-6}$)、

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 0.004530255407, E_2 = 6.84094655 \times 10^{-6} \\ C_{y2} &= 3311086697, \dot{Y}_0 = -1.500006841 X_0 \end{aligned} \quad (6.50)$$

となる。幾つかの X_0 に対して、以下に計算する。

[ケース 4] $x_0 = 0.005$ (L4 点から約 75 万 km) の場合

$\dot{Y}_0 = -0.007500034205$ (-223m/s)である。L4 点の近傍からスタートして、222 年間の計算結果を図 6.11 に示す。

[ケース 5] $x_0 = 0.0005$ (L4 点から約 7.5 万 km) の場合

$\dot{Y}_0 = -0.000750003420$ (-22.3m/s)である。L4 点の近傍からスタートして、222 年間の計算結果を図 6.12 に示す。

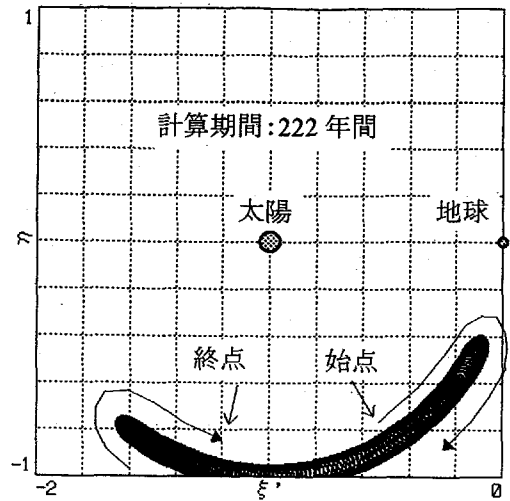


図 6.10 L5 点近傍の λ_1 モード周期運動 ($X_0=0.05$ 、線型解の初速を使用)

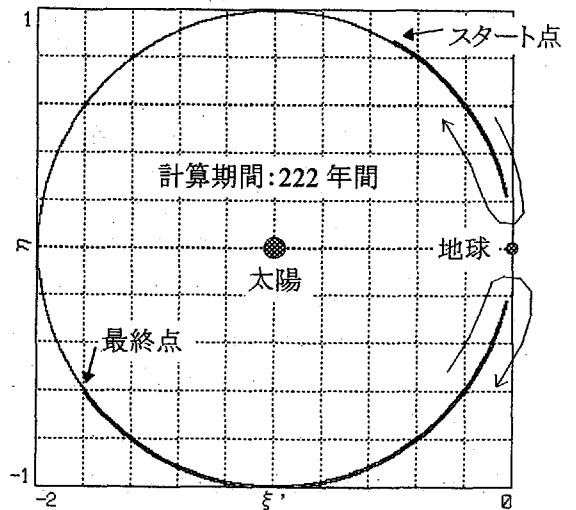


図 6.11 L4 点近傍から出発した λ_2 モード周期運動 ($X_0=0.005$)

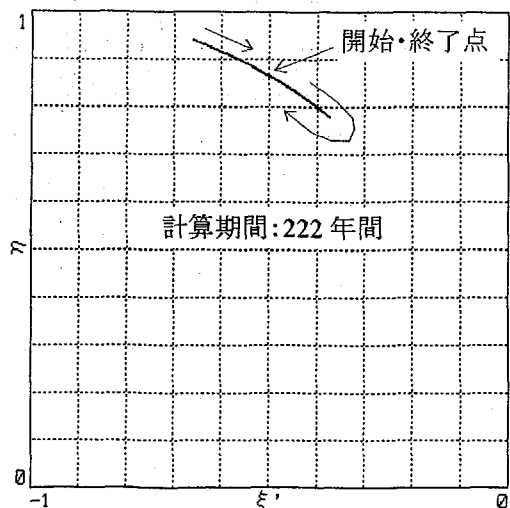


図 6.12 L4 点近傍の λ_2 モード周期運動 ($X_0=0.0005$)

7. おわりに

本資料では、ラグランジュ点を利用したミッションを考える際に必要となる基本的な軌道力学について述べた。これにより、ラグランジュ点近傍の宇宙機の運動の概要を理解できるであろう。

この他に、更に以下の検討が必要である。

(1)ラグランジュ点のミッション軌道への遷移軌道の検討

(2)ラグランジュ点ミッション軌道の軌道保持の検討

(1)は火星や金星などの惑星への遷移軌道とは異なり、Patched Conic Methodが使えない軌道であり、別に検討する必要がある。(2)も普通の惑星探査ミッションでは存在しない検討項目である。特に(2)は、高次の摂動を考慮しないと意味のある検討にはならない可能性がある。

8. 参考文献

- 1)中川貴雄:光・赤外線天文衛星 次期計画の提案、第5回科学衛星・宇宙観測シンポジウム、1996年7月、pp.182-185.
- 2)H.Lambert, P.Vangasse, R.Laurance:MOFFIT MOon based / Free Flyer Interferometer Trade off study : Trade off's for a kilometric space based interferometer, 46th International Astronautical Congress, IAF-95-Q.2.04, 1995.
- 3)R.W.Farquhar, D.P.Muhonen, C.R.Newman, H.S.Heuberger : TRAJECTORIES AND ORBITAL MANEUVERS FOR THE FIRST LIBRATION-POINT SATELLITE, Journal of Guidance and Control, Vol.3, No.6, 1980, pp.549-554.
- 4)R.W.Farquhar, D.P.Muhonen, D.L.Richardson : MISSION DESIGN FOR A HALO ORBITER OF THE EARTH, AIAA PAPER 76-810, 1976.
- 5)J.Rodriguez-Canabal : OPERATIONAL HALO ORBIT MAINTENANCE TECHNIQUE FOR SOHO, ESA P-255, 1986.
- 6)J.Rodriguez-Canabal, M.Hechler : ORBITAL ASPECTS OF THE SOHO MISSION DESIGN, AAS 89-171, 1989.
- 7)D.W.Dunham, S.J.Jen, C.E.Roberts, A.W.Seacord, P.J.Sharer, D.C.Folta, D.P. Muhonen : Transfer Trajectory Design for the SOHO Libration-Point Mission, IAF-92-0066, 1992.
- 8)N.Eismont, D.Dunham, S.C.Jen, R.Farquhar : LUNAR SWINGBY AS A TOOL FOR HALO-ORBIT OPTIMIZATION IN RELICT-2 PROJECT, ESA SP-326, 1991/12.
- 9)L.David : Incredible Shrinking Spacecraft, AEROSPACE AMERICA, January 1996, pp.20-24.
- 10)R.W.Farquhar : THE UTILIZATION OF HALO ORBITS IN ADVANCED LUNAR OPERATIONS, NASA TN D-6365, 1971.
- 11)R.W.Farquhar : FUTURE MISSIONS FOR LIBRATION-POINT SATELLITES, Astronautics & Aeronautics, 1969/05.
- 12)R.W.Farquhar, A.A.Kamel : QUASI-PERIODIC ORBITS ABOUT THE TRANSLUNAR LIBRATION POINT, Celestial Mechanics 7, 1973, pp.458-473.
- 13)Paul W. Keaton : A Moon Base/Mars Base Transportation Depot, Lunar Bases and Space Activities of the 21st Century, 1985.
- 14)V.Companys, G.Gomez, A.Jorba, J.Masdemont, J.Rodriguez, C.Simo : ORBITS NEAR THE TRIANGULAR

- LIBRATION POINTS IN THE EARTH-MOON SYSTEM, IAF-93-A.1.2, 1993/10.
- 15)K.C.Howell : Three-Dimensional Periodic Halo Orbits, *Celestial Mechanics* 32, 1984.
- 16)J.V.Breakwell, J.V.Brown : The HALO Family of 3-Dimensional Periodic Orbits in the Earth-Moon Restricted 3-Body Problem, *Celestial Mechanics* 20, 1979.
- 17)M.Popescu : Stability of Motion on Three-Dimensional Halo Orbits, *Journal of Guidance, Control, & Dynamics*, 1995/10.
- 18)K.C.Howell, H.J.Pernicka : STATIONKEEPING METHOD FOR LIBRATION POINT TRAJECTORIES, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.16, No.1, 1993.
- 19)C.Simo, G.Gomez, J.Llibre, R.Martinez, J.Rodriguez : ON THE OPTIMAL STATION KEEPING-CONTROL OF HALO ORBITS, *ACTA ASTRONAUTICA*, VOL.15, NO.6/7, 1987.
- 20)T.Prieto-Llanos, M.A.Gomez-Tierno : Stationkeeping at Libration Points of Natural Elongated Bodies, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.17, No.4, 1994/07.
- 21)掘 源一郎:天体力学講義、東京大学出版会、1988年。
- 22)守屋富次郎、鷺津久一郎:力学概論、培風館、1968年。
- 23)広田正夫:「制限3体問題の定常解(ラグランジュ点)を導く」(私的メモ)、1981年。
- 24)V. Szebehely:THEORY OF ORBITS (The Restricted Problem of Three Bodies), Academic Press, New York, 1967.
- 25)P.Sharer, T.Harrington : TRAJECTOR Y OPTIMIZATION FOR THE ACE HALO ORBIT MISSION, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, AIAA-96-3601-CP, July 1996.
- 26)R.W.Farquhar, D.P.Muhonen, D.L.Richardson : Mission Design for a Halo Orbiter of the Earth, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 14, No. 3, 1977, pp.170-177.
- 27)R.W.Farquhar : The Control and Use of Libration-Point Satellites, NASA TR R-346, 1970.

宇宙開発事業団技術報告 NASDA-TMR-960033

発行日 1997年3月31日

編集・発行 宇宙開発事業団

〒105-60

東京都港区浜松町2丁目4番1号

世界貿易センタービル29階

TEL 03-3438-6000 (代表)

©1997 NASDA

無断複写、転載を禁ずる

<本資料に関するお問い合わせ先>

宇宙開発事業団調査国際部技術情報課

TEL 03-3438-6246

